

Utilisation de frontières ouvertes pour la simulation numérique d'un pavé d'océan

Quasigéostrophie
Simulation numérique
Frontières ouvertes
Tourbillons
Topographie sous-marine
Quasigeostrophy
Numerical simulation
Open boundaries
Mesoscale eddies
Submarine topography

Jacques VERRON

Institut de Mécanique de Grenoble, BP 68, 38402 Saint-Martin d'Hères Cedex.

Reçu le 4/11/85, révisé le 3/2/86, accepté le 12/3/86.

RÉSUMÉ

Un modèle numérique d'un pavé d'océan ouvert est développé dans le cadre des hypothèses quasi-géostrophiques et pour un milieu stratifié à deux couches. Il présente un caractère original par l'utilisation d'une condition de frontières ouvertes pour les limites fluides de l'écoulement. La condition proposée est une adaptation et une généralisation de la condition de Sommerfeld et de la méthode d'Orlanski (1976). Son efficacité est démontrée à partir de plusieurs types d'écoulements engendrés sur des montagnes sous-marines. La perméabilité de la frontière reste bonne, même lorsque de fortes perturbations non linéaires la traversent. Une telle approche est susceptible de nombreuses applications à la modélisation des phénomènes locaux, aussi bien en simulation de processus que pour des simulations réalistes.

Oceanol. Acta, 1986, 9, 4, 415-423.

ABSTRACT

Use of open boundary conditions for the numerical simulation of an ocean box model

A numerical model of open ocean is developed assuming the quasi-geostrophic hypothesis. The fluid is two-layer stratified. An original feature of the model is the use of open boundary conditions on the fluid boundaries. The proposed condition is an improvement of the method developed by Orlanski (1976) based on the use of the Sommerfeld radiation condition. Its efficiency is demonstrated in several cases of flow generated over submarine topography. The boundary permeability appears to be good even when strong non-linear perturbations are passing through. Such approach lends itself to use in several applications in the field of local simulation in both process and realistic studies.

Oceanol. Acta, 1986, 9, 4, 415-423.

INTRODUCTION

Un modèle d'océan à frontières ouvertes est un modèle dynamique de pavé d'océan dont les limites horizontales sont totalement ou partiellement des frontières fluides. Ces frontières ouvertes ne correspondent à aucune réalité, susceptible de satisfaire une loi physique spécifique, puisqu'elles procèdent d'un choix du modélisateur de délimiter une certaine région géographique.

Les modèles ouverts sont d'une grande importance pour la compréhension de la dynamique océanique, hauturière ou littorale, ainsi que pour la modélisation de processus. Parmi les problèmes concernés, une première série est à relier au problème global de la simulation des circulations générales à grandes échelles (qui

se pose d'ailleurs dans les mêmes termes dans l'atmosphère). L'étendue des domaines envisagés limite nécessairement le raffinement souhaitable pour la discrétisation des domaines étudiés, compte tenu de la capacité actuelle des ordinateurs et des coûts de calcul. Pourtant, les développements théoriques et les mesures réalisées dans l'océan montrent la nécessité de prendre en compte les phénomènes dont l'échelle spatiale est faible. Ainsi la dynamique tourbillonnaire à méso-échelle, dont l'importance est fondamentale sur la détermination des circulations océaniques générales, doit pouvoir être représentée avec une discrétisation de maille inférieure au rayon interne de déformation (typiquement de l'ordre de 40 km aux latitudes moyennes). Une solution consiste alors à effectuer des raffinements locaux de

zones définies dont la connection dynamique avec leur environnement est réalisée au niveau des frontières. Une telle approche peut permettre la description et la prévision des champs de courants dans des régions d'intérêt particulier : zones côtières, zones de recirculation intense, bande équatoriale, instabilités locales, etc. En météorologie, on utilise des méthodes de ce type pour la prévision locale à partir de modèles dont les conditions aux frontières sont pilotées par des données globales. En océanographie, les travaux de Robinson et Haidvogel (1980), Robinson *et al.* (1984) ouvrent la voie à des démarches analogues; de plus, l'avènement des nouvelles techniques d'acquisition de données (satellimétrie, tomographie) est de nature à favoriser de tels développements. Les couplages réellement interactifs dans lesquels la dynamique locale réagit en retour sur la circulation générale, sont également étudiés en météorologie, mais soulèvent de sérieuses difficultés pour la transmission correcte des effets locaux et globaux entre des modèles numériques de discrétisations différentes.

Une deuxième série de problèmes concernés par l'utilisation de modèles à frontières ouvertes recouvrent toutes les études plus ou moins idéalisées que l'on peut engager avec l'objectif de comprendre certains processus dynamiques dans l'océan. Appartiennent à cette catégorie les travaux portant sur l'examen du comportement de champs tourbillonnaires en présence de diverses excitations ou forçages. Lorsque la dynamique est relativement isotrope, le recours à une périodisation de l'écoulement est suffisante. L'étude de Bretherton et Karweit (1975) est typique de cette approche, ainsi que les études de turbulence géophysique (par exemple Rhines, 1975; 1979; Bretherton, Haidvogel, 1976; Hua, Haidvogel, 1985). Mais dans le cas le plus général, la présence d'effets advectifs ou d'une anisotropie significative nécessite des conditions aux limites plus élaborées : la simulation d'écoulements sur des topographies sous-marines en constitue une illustration (Verron, Le Provost, 1985; Verron, 1985). Quel que soit le problème concerné (à l'exception du cas trivial des frontières périodiques), la mise au point

de conditions de frontières ouvertes présente des difficultés majeures, aussi bien d'ordre numérique que mathématique ou physique; et le problème n'a pas reçu à ce jour de réponse satisfaisante dans toute sa généralité. L'objectif du présent mémoire est la présentation de telles conditions de frontières ouvertes pour l'utilisation d'un modèle local quasi-géostrophique bicouche.

Après un bref exposé de la formulation et une description du modèle, nous présentons les conditions de frontières ouvertes basées sur l'hypothèse de radiation d'ondes, et la méthode que nous proposons. Dans une troisième partie, des exemples d'application illustrent l'efficacité de la méthode pour des écoulements océaniques en présence de montagnes sous-marines.

LE MODÈLE

Nous considérons un écoulement océanique dont la stratification verticale est représentée par deux couches superposées de densités constantes ρ_1 et ρ_2 , avec $\rho_1 < \rho_2$ (fig. 1a). En l'absence de toute perturbation, les couches ont respectivement comme épaisseurs D_1 et D_2 pour les couches supérieure et inférieure; l'épaisseur totale étant notée par $D = D_1 + D_2$. L'ensemble du bassin, d'extension LX et LY dans les directions ouest-est et nord-sud, est soumis à la rotation terrestre mesurée par le paramètre de Coriolis f .

Les hypothèses quasigéostrophiques permettent d'obtenir un système d'équations pour la fonction de courant et la vorticité, dérivé des équations de Navier-Stokes, et qui s'écrit sous forme adimensionnelle (Pedlosky, 1979) :

$$D_1/Dt [\Delta\psi_1 + \beta y - F_1(\psi_1 - \psi_2)] = V_1 \quad (II1)$$

$$D_2/Dt [\Delta\psi_2 + \beta y - F_2(\psi_2 - \psi_1) + h/\varepsilon D_2] = -r_2 \xi_2 + V_2 \quad (II2)$$

Les fonctions de courant ψ_1 et ψ_2 sont relatives aux couches supérieure et inférieure, $\xi_1 = \Delta\psi_1$ et $\xi_2 = \Delta\psi_2$ étant les vorticités associées. Les champs de vitesse dans chaque couche s'en déduisent par $u = \delta\psi/\delta y$ et

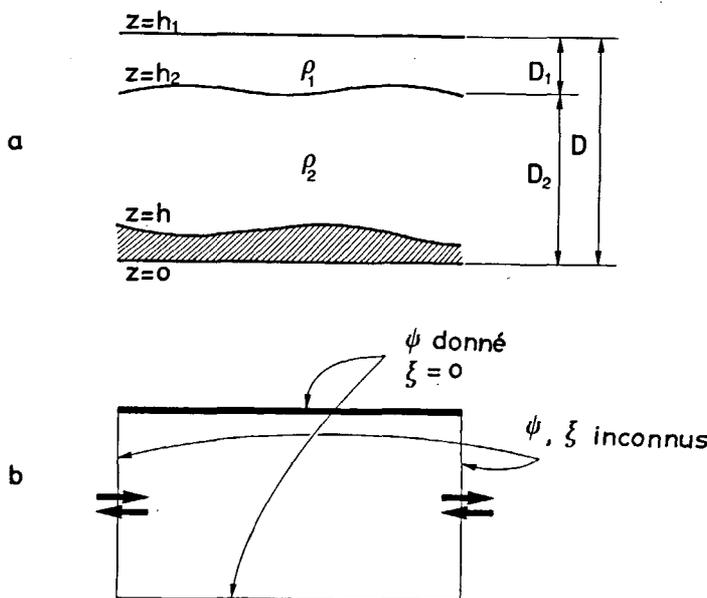


Figure 1

- a) Schéma vertical de l'écoulement;
- b) Schéma en plan de l'écoulement.
- a) Schematic diagram for the vertical structure of the flow;
- b) Plane view.

$v = \delta\psi/\delta x$. La notation D_1/Dt et D_2/Dt correspond à :
 $D/Dt = \partial/\partial t + \partial\psi/\partial x \cdot \partial/\partial y - \partial\psi/\partial y \cdot \partial/\partial x$
 $= \partial/\partial t + J(\psi, \cdot)$.

On introduit la topographie du fond par $h(x, y)$. De plus, on retient deux mécanismes de dissipation :

— une dissipation par frottement de fond modélisée selon le concept classique de la couche d'Ekman par le terme $-r_2 \xi_2$ qui correspond à un frottement proportionnel à la vitesse ;

— une dissipation visqueuse V modélisée, soit en utilisant l'hypothèse commune de viscosité turbulente ($V = A \nabla^4 \psi$), soit en choisissant une dissipation d'ordre supérieur par biharmonique ($V = -B \nabla^6 \psi$).

En revanche, on n'introduit pas de contrainte interfaciale supplémentaire entre les deux couches.

Toutes les variables sont adimensionnalisées par rapport à des échelles L et U caractéristiques du mouvement, y compris le temps qui est rapporté au temps advectif L/U . L'échelle verticale est choisie égale à D . Le paramètre β est une mesure du gradient de vorticité planétaire $\beta = \beta_0 L^2/U$, les développements quasi-géostrophiques permettant une linéarisation du paramètre de Coriolis sous la forme $f = f_0 + \beta y$. Les autres paramètres sont le nombre de Rossby $\varepsilon = U/f_0 L$, et les nombres de Froude $F_1 = f_0^2 L^2/g' D_2$ et $F_2 = f_0^2 L^2/g' D_1$, eux-mêmes basés sur la « gravité réduite » $g' = g \cdot (\rho_2 - \rho_1)/[(\rho_1 + \rho_2)/2]$. La surface libre est supposée respecter l'hypothèse du toit rigide (légitime à méso-échelle dans l'océan), de sorte que la hauteur relative de cette surface libre s'écrit $h_1 = 1$; quant à l'interface entre les deux couches, sa dénivellation est donnée par :

$$h_2 = D_2/D \cdot [1 + \varepsilon F_2 (\psi_2 - \psi_1)].$$

Les équations (II1) et (II2) traduisent le fait que, dans chaque couche, la variation de la vorticité relative est fonction de l'advection horizontale, de la compression ou l'étirement des tubes tourbillons (sous l'effet de la topographie, de la vorticité planétaire ou de la variation de l'interface) et des effets dissipatifs. En l'absence de ces derniers, elles traduisent la conservation de la vorticité potentielle en suivant le mouvement. Le système d'équations (II1) et (II2) est un système couplé pour les variables ψ_1 et ψ_2 . Pour le résoudre il est commode de décomposer selon les modes barotrope (+) et barocline (-) définis par :

$$\psi_+ = D_1/D \cdot \psi_1 + D_2/D \cdot \psi_2 = (F_2 \psi_1 + F_1 \psi_2)/(F_1 + F_2)$$

$$\psi_- = \psi_1 - \psi_2.$$

On peut alors écrire une équation pour le mode barotrope sous la forme :

$$\partial/\partial t (\Delta \psi_+) = T_+, \quad (\text{II3})$$

avec

$$T_+ = -D_1/D \cdot J(\psi_1, \Delta \psi_1 + \beta y) - D_2/D \cdot J(\psi_2, \Delta \psi_2 + \beta y + h/\varepsilon D_2) + A \nabla^4 \psi_+ - r_2 D_2/D \cdot \Delta \psi_2.$$

L'équation pour le mode barocline s'écrit :

$$\partial/\partial t (\Delta \psi_- - S^{-1} \cdot \psi_-) = T_- \quad (\text{II4})$$

avec

$$T_- = -J(\psi_1, \Delta \psi_1 + \beta y) + J(\psi_2, \Delta \psi_2 + \beta y + h/\varepsilon D_2) - S^{-1} \cdot J(\psi_1, \psi_2) + A \nabla^4 \psi_- + r_2 \Delta \psi_2.$$

Nous avons supposé ici une dissipation visqueuse par laplacien, avec une viscosité turbulente $A = A_1 = A_2$ constante dans les deux couches. La formulation par biharmonique donnerait respectivement $B \nabla^6 \psi_+$ et $B \nabla^6 \psi_-$ pour les termes considérés. Le paramètre S tel que $S^{-1} = F_1 + F_2$ est directement lié à la valeur du rayon interne de déformation Ri par :

$$S^{-1} = (L/R_i)^2.$$

Ce rayon moyen Ri est lui-même relié aux rayons internes dans chaque couche par :

$$1/R_i^2 = 1/R_1^2 + 1/R_2^2.$$

Moyennant le changement de variables :

$$\varphi_+ = \partial/\partial t (\psi_+)$$

$$\varphi_- = \partial/\partial t (\psi_-),$$

le système des équations (II3) et (II4) se ramène à :

$$\Delta \varphi_+ = T_+ \quad (\text{II5})$$

$$\Delta \varphi_- - S^{-1} \cdot \varphi_- = T_-, \quad (\text{II6})$$

c'est-à-dire une équation de Poisson et une équation de Helmholtz.

Discrétisation

Le schéma numérique est basé sur la méthode des différences finies. Le domaine numérique est divisé en une grille régulière de mailles Δx et Δy dans les directions x et y respectivement. La variable temps est discrétisée selon un pas Δt .

Les équations (II3) et (II4) sont réécrites sous la forme des différences finies, en utilisant l'approximation classique du second ordre dans l'espace et dans le temps. Le schéma temporel choisi est celui du « saute-mouton » (leapfrog). Les termes non-linéaires sont évalués selon la procédure mise au point par Arakawa (1966), et qui est conservative en énergie et en enstrophie. Ces termes non-linéaires sont évalués de manière explicite. Les termes dissipatifs sont également calculés selon un schéma explicite, mais avec un décentrage avant, de manière à éviter l'instabilité numérique qui leur est associée. Le laplacien est calculé selon la procédure classique à cinq points. Le schéma saute-mouton à trois niveaux temporels peut présenter l'inconvénient d'un dédoublement progressif des solutions paire et impaire. La présence des termes non-linéaires est de nature à favoriser la stabilité de la solution. Cependant, nous avons introduit à intervalles réguliers le schéma temporel décentré avant (Euler forward), pour assurer la convergence des solutions.

En appelant k l'indice discret associé à la variable temps, les équations (II3) et (II4) s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \Delta\psi_+^{k+1} &= \Delta\psi_+^{k-1} - 2\Delta t \cdot D_1/D \cdot J(\psi_1^k, \Delta\psi_1^k + \beta y) \\ &- 2\Delta t \cdot D_2/D \cdot J(\psi_2^k, \Delta\psi_2^k + \beta y + h/\varepsilon D_2) \\ &- 2\Delta t \cdot r_2 \cdot D_2/D \cdot \Delta\psi_2^{k-1} + 2\Delta t \cdot A \cdot \nabla^4 \phi_+^{k-1} \end{aligned} \quad (II7)$$

$$\begin{aligned} \Delta\psi_-^{k+1} &- S^{-1} \cdot \psi_-^{k+1} \\ &= \Delta\psi_-^{k-1} - S^{-1} \cdot \psi_-^{k-1} - 2\Delta t \cdot J(\psi_1^k, \Delta\psi_1^k + \beta y) \\ &+ 2\Delta t \cdot J(\psi_2^k, \Delta\psi_2^k + \beta y + h/\varepsilon D_2) \\ &- 2\Delta t \cdot S^{-1} \cdot J(\psi_1^k, \psi_2^k) \\ &+ 2\Delta t \cdot A \nabla^4 \psi_-^{k-1} + 2\Delta t \cdot r_2 \Delta\psi_2^{k-1} \end{aligned} \quad (II8)$$

en ne tenant compte que de la discrétisation temporelle. Sous ces formes, on résoud effectivement une équation de Poisson et une équation de Helmholtz.

Conditions aux limites

Deux cas sont à considérer, suivant que l'on retienne une frontière solide ou une frontière perméable.

Lorsque la frontière est solide, on utilise simplement le fait que la paroi est une ligne de courant ($\psi = \text{Cte}$). Cette condition s'applique de manière simple pour le mode barotrope ψ_+ ; en milieu stratifié à frontières mixtes, on doit faire intervenir d'autres types de conditions (conservation de la masse, du débit...) pour expliquer le mode barocline ψ_- . Dans les cas particuliers choisis dans la suite comme illustrations des tests de frontières ouvertes, le domaine étudié est de type « canal » avec deux frontières solides au nord et au sud (fig. 1 b); ces exemples simulent l'effet d'un écoulement extérieur ayant une composante barotrope et une composante barocline fixées : ψ_+ et ψ_- sont donc maintenues constantes et sont supposées connues au niveau des parois solides. D'autres conditions sont également requises pour la détermination des seconds membres des équations. Nous avons choisi une condition de glissement aux parois $\Delta\psi = 0$, et la condition $\nabla^4\psi = 0$ lorsque le biharmonique est utilisé pour paramétriser la dissipation sous-maille.

Lorsque la frontière est ouverte, une difficulté existe puisqu'il est nécessaire de connaître la solution ψ_+ et ψ_- sur cette frontière au pas de temps courant pour pouvoir résoudre et déterminer ainsi la solution pour les points intérieurs au domaine. Notons qu'il est également nécessaire de connaître la solution $\xi_+ = \Delta\psi_+$ et $\xi_- = \Delta\psi_-$ sur la frontière, mais au pas de temps immédiatement antérieur. En dehors du cas trivial où les valeurs en question sont fixées par des conditions extérieures et que l'évolution de la dynamique interne ne réagit pas elle-même sur ces conditions extérieures, le problème est extrêmement délicat et constitue l'essence même du problème des conditions de frontières ouvertes que nous examinons au chapitre suivant.

LES CONDITIONS DE FRONTIÈRES OUVERTES

Tout problème impliquant des conditions de frontières ouvertes, en supposant qu'il soit mathématiquement bien posé, doit répondre à des critères de stabilité, de précision et de compatibilité des algorithmes. Ces critères doivent être examinés, non seulement pour les

caractéristiques intrinsèques de l'algorithme développé aux frontières, mais aussi en relation avec le schéma numérique modélisant le fluide intérieur. En pratique, la complexité des équations et des schémas numériques rend irréalisable une étude extensive de stabilité, d'autant que le problème est souvent fortement non-linéaire. Une approche pragmatique est donc la seule voie possible, mais elle reste évidemment suspecte d'un manque de généralité.

Certains aspects mathématiques du problème ont été examinés notamment par Olinger et Sundstrom (1978) et Sundstrom et Elvius (1979). Pour le cas quasi-géostrophique, un problème bien posé suppose la prescription de deux conditions à la frontière pour un écoulement entrant, et d'une condition pour un écoulement sortant. Charney *et al.* (1950) ont ainsi établi la consistance des solutions de l'équation de vortacité barotrope obtenues en spécifiant les valeurs de la fonction de courant en tout point de la frontière et les valeurs de la vortacité pour les points entrants. Cependant, même dans le cas le plus simple de l'équation de vortacité barotrope, il est nécessaire d'extrapoler d'une manière ou d'une autre la vortacité pour les points sortants. Même si ce dernier calcul n'est pas l'objet d'une extrapolation temporelle, la condition associée pour déterminer la variable aux points sortants peut conduire à des instabilités numériques.

De nombreux types de conditions aux frontières ont été utilisés, dont les plus fructueuses peuvent être regroupées en formules d'extrapolation et en conditions de radiation. Davies (1976), Sundstrom et Elvius (1979) présentent plusieurs exemples de conditions d'extrapolation : une des plus sophistiquées d'entre elles, suggérée par Sundstrom et Elvius (1979), s'est révélée particulièrement adaptée au traitement de l'équation de vortacité barotrope réalisée par Haidvogel *et al.* (1980), bien que le schéma numérique associé soit implicite et donc d'une certaine lourdeur pour les algorithmes. Miller et Thorpe (1981) ont examiné la précision d'un grand nombre de formules d'extrapolation en comparaison avec une condition de radiation développée selon la méthode d'Orlanski (1976). Il démontre la meilleure précision de cette dernière, et propose une nouvelle mise en œuvre de la condition de radiation de Sommerfeld. L'étude comparative récente de Chapman (1985) va dans le même sens. D'autres auteurs ont développé et amélioré la méthode d'Orlanski et ses applications : Camerlengo et O'Brien (1980) proposent une simplification du calcul de la vitesse de propagation; Roed et Smedstad (1984) s'intéressent au cas des ondes forcées dans l'hypothèse d'une linéarisation; Raymond et Kuo (1984) améliorent ce calcul en déterminant la projection de la vitesse de propagation relativement à la frontière. Cette dernière idée avait déjà été envisagée par Engquist et Majda (1977), pour réduire les réflexions d'ondes dans le cas linéaire.

L'analyse des méthodes existantes montre que les adaptations des conditions de radiation selon la méthode d'Orlanski, et de ses variantes, donnent les meilleures solutions dans la plupart des applications en océanographie.

Condition de radiation

Cette condition est basée sur l'utilisation de la condition de radiation de Sommerfeld, qui stipule que la variation de toute variable φ à la frontière peut s'exprimer sous la forme :

$$\partial\varphi/\partial t + C\varphi \cdot \partial\varphi/\partial n = 0. \quad (\text{III1})$$

La direction n représente ici la direction perpendiculaire à la frontière au point considéré. La vitesse $C\varphi$ est une vitesse de propagation. Dans son acception originelle, la condition de Sommerfeld s'applique à des ondes progressives qui se propagent à partir d'une source de perturbation; pour une onde pure, la vitesse $C\varphi$ est la vitesse de phase. Dans le cas général d'un écoulement complexe et non-linéaire, l'évaluation d'une vitesse $C\varphi$ peut recouvrir à la fois les aspects « propagation d'onde » et « advection de perturbation ».

Orlanski (1976) propose une forme numérique de la condition de Sommerfeld adaptée au schéma aux différences finies avec dérivées temporelles centrées pour des équations hyperboliques. Pour pallier au dédoublement (splitting) artificiel des solutions qui peut résulter de l'utilisation de ce schéma, la discrétisation de la condition de Sommerfeld ne fait intervenir que des valeurs correspondant au même mode numérique :

$$1/2 \Delta t \cdot (\varphi_F^{k+1} - \varphi_F^{k-1}) + C\varphi/2 \Delta x \cdot (\varphi_F^{k+1} + \varphi_F^{k-1} - 2\varphi_{F-1}^k) = 0. \quad (\text{III2})$$

L'indice k est l'indice de discrétisation temporelle. La notation ΦF , ΦF_{-1} , etc., désigne la valeur prise par la variable à la frontière (F) au point précédent (F-1), etc. (fig. 2). Le « recollement » nécessaire des solutions dédoublées est réalisé pour les points intérieurs aux domaines, d'une part, par la présence de termes mixtes (termes non-linéaires) dans les équations de vorticités traitées, d'autre part, par le recours périodique à un décentrage avant du schéma temporel au cours de l'intégration numérique et déjà signalé au chapitre précédent. Un tel recollement qui serait effectué au niveau des frontières par l'application d'une condition mixte d'une autre nature risque de produire des réflexions parasites aux frontières.

La connaissance de la vitesse $C\varphi$ apparaissant dans l'équation (III2) peut permettre la détermination de la valeur de la variable φ au pas de temps considéré. La base de la condition de radiation consiste à évaluer numériquement cette vitesse $C\varphi$ en utilisant l'équation (III1) pour les points immédiatement à proximité de la frontière et au pas de temps précédent :

$$1/2 \Delta t \cdot (\varphi_{F-1}^k - \varphi_{F-1}^{k-2}) + C\varphi/2 \Delta x \cdot (\varphi_{F-1}^k + \varphi_{F-1}^{k-2} - 2\varphi_{F-2}^{k-1}) = 0. \quad (\text{III3})$$

En terme d'onde, la validité de cette relation supposerait l'hypothèse d'une constance de la pente des caractéristiques. Dans le cas général, on suppose que la vitesse de propagation est constante au niveau des deux pas d'espace précédant la frontière. Ce qui donne comme vitesse adimensionnelle v :

$$v = C\varphi \cdot \Delta t / \Delta x = (\varphi_{F-1}^{k-2} - \varphi_{F-1}^k) / (\varphi_{F-1}^k + \varphi_{F-1}^{k-2} - 2\varphi_{F-2}^{k-1}). \quad (\text{III4})$$

En reportant dans (III2) on obtient une extrapolation pour J :

$$\varphi_F^{k+1} = (1-v)/(1+v) \cdot \varphi_F^{k-1} + 2v/(1+v) \cdot \varphi_{F-1}^k. \quad (\text{III5})$$

On peut remarquer que l'expression de Φ_F^{k+1} est non-linéaire, qu'elle fait intervenir quatre niveaux temporels, mais que toutes les valeurs impliquées dans le calcul appartiennent au même mode numérique. L'évaluation de v par (III4) est soumise à la condition $0 \leq v \leq 1$:

– le cas limite $v = 1$, c'est-à-dire $C\varphi = \Delta x / \Delta t$, correspond à la plus grande vitesse numérique possible. Il donne :

$$\varphi_F^{k+1} = \varphi_{F-1}^k,$$

c'est-à-dire une condition de radiation d'onde pure à la vitesse de phase $\Delta x / \Delta t$;

– l'autre cas limite $v = C\varphi = 0$ provient du fait que le problème de la détermination de v ne se pose que si la perturbation sort du domaine. Sinon, la spécification d'une valeur à la frontière vient des conditions extérieures qui pilotent la dynamique interne ou des conditions initiales.

Cette limite donne donc :

– soit $\varphi_F^{k+1} = \varphi_F^{k-1}$, la variable est fixée par les valeurs au pas de temps précédent. La frontière conserve donc une « mémoire » des conditions initiales et des éventuelles perturbations qui l'ont franchie et qui ont pu faire évoluer les conditions initiales.

– soit $\varphi_F^{k+1} = \varphi_F$, valeur fixée par les conditions extérieures et qui participent à l'excitation de la dynamique interne.

Numériquement, le calcul approché des dérivées ainsi que les erreurs associées aux troncatures, fait que l'on obtient parfois des valeurs de v supérieures à 1 ou inférieures à 0. Il peut s'agir alors de simples aléas numériques sans correspondance avec la physique. Des précautions sont à prendre pour éviter des propagations d'erreurs, dans ces cas qui apparaissent souvent lorsque les gradients sont très faibles. Par ailleurs, une ambiguïté risque de se produire quand $v \leq 0$, sur la nécessité de spécifier ou non une condition de flux entrant, et ceci non seulement lors d'« accidents » numériques, mais dès lors que l'écoulement est quasi-tangentiel à la frontière.

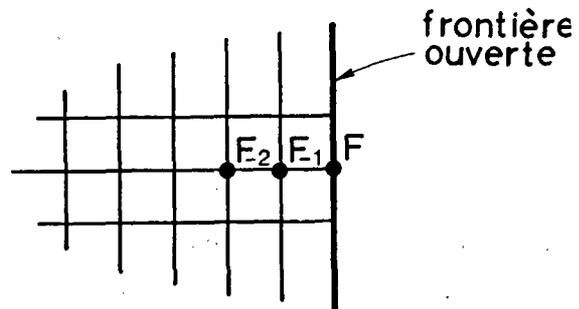


Figure 2
Discrétisation à la frontière ouverte.
Finite-difference stencil at the boundary.

Condition de radiation et système dispersif

En principe, la condition de radiation de Sommerfeld définie par la relation (III1) permet la transmission à travers la frontière des seuls systèmes d'ondes non-dispersifs. La vitesse de propagation C , évaluée comme ω/k_1 (ω fréquence, k_1 nombre d'onde dans la direction perpendiculaire à la frontière) à un instant donné, est la même quels que soient la fréquence et les nombres d'onde. Quand la relation de dispersion est telle que ω/k_1 est une fonction du vecteur d'onde K , la transmission de toutes les harmoniques de la perturbation n'est plus possible en même temps. La vitesse de propagation est alors approximativement évaluée à partir de la composante prédominante de l'onde : les autres composantes étant partiellement transmises ou partiellement réfléchies. Pearson (1974) a montré que la condition agit alors comme une sorte de filtre passe-bande centré autour de l'onde dominante. En principe, une solution plus exacte pourrait consister à déterminer des vitesses de propagation pour chaque composante de Fourier et à reconstruire l'ensemble à la frontière, mais elle est d'une lourdeur exagérée.

Cette gamme d'interprétation en termes d'ondes est contestable en pratique, notamment dans le cas d'écoulement non régi par la dynamique ondulatoire. Pour ce dernier type d'application, la condition de radiation « fonctionne » plutôt comme une méthode d'approximation numérique permettant d'évaluer une vitesse de propagation en s'appuyant sur l'hypothèse que chaque variation discrète de la perturbation (dans l'espace et dans le temps), au voisinage de la frontière, est assimilée à un comportement ondulatoire.

Application au modèle bicouche - Méthode proposée

Comme nous l'avons vu précédemment, l'application de la condition de radiation de Sommerfeld aux écoulements géophysiques a déjà été réalisée en plusieurs occasions. Avec la méthode originale d'Orlanski ou avec des variantes très proches, elle s'est révélée un outil bien adapté aux cas traités, en particulier pour les études barotropes de processus océaniques (Verron, Le Provost, 1985; Verron, 1985). Les frontières sont d'une bonne perméabilité aux structures tourbillonnaires non-linéaires, dont les écoulements sur des montagnes sous-marines peuvent provoquer la génération.

La généralisation au cas d'un écoulement océanique stratifié (bicouche dans un premier temps) semblait pouvoir être réalisée selon le même principe, bien que la présence d'une composante barocline soit susceptible de créer une difficulté. En fait, la simple adaptation de la méthode d'Orlanski s'est révélée impossible en raison d'instabilités numériques.

Pour un modèle multicouche, deux approches différentes sont possibles, suivant que l'on implante la condition de radiation par couches (c'est-à-dire sur les variables $\psi_1, \psi_2, \Delta\psi_1, \Delta\psi_2$ pour le modèle bicouche) ou par modes (variables $\psi_+, \psi_-, \Delta\psi_+, \Delta\psi_-$). La seconde méthode est moins coûteuse puisque le problème global intérieur est traité par mode. Les deux méthodes ont été également abordées de manière à permettre une comparaison des résultats.

Qu'elle soit mise en œuvre par mode ou par couche, la méthode s'est révélée, soit instable, soit inopérante, dès lors qu'une composante barocline significative est présente. L'analyse fine des résultats numériques montre que la source des difficultés vient des incertitudes associées à la limite imposée $v = 0$ dans l'évaluation de la vitesse de propagation lorsque $v \leq 0$. En principe, cette limite traduit l'absence de propagation de perturbation à travers la frontière; la variable à la frontière est alors déterminée soit par les conditions initiales, soit par un forçage extérieur si l'écoulement est entrant. En pratique, la limite $v = 0$ résulte généralement de certaines approximations numériques de précision incertaine; elle peut correspondre aussi à l'existence de perturbations stationnaires (ondes de Rossby par exemple). Mais il ne s'agit pas nécessairement d'une inversion du sens de propagation qui deviendrait subitement entrant.

Nous avons porté notre attention sur ce point en complétant la condition d'Orlanski dans le cas d'une perturbation sortante dont la vitesse locale de propagation est nulle, par une condition d'extrapolation. La précision de plusieurs types d'extrapolation a été étudiée dans les quatre cas (mode, couche, f -plan, β -plan). La condition donnant le meilleur résultat dans tous les cas s'écrit :

$$\phi_F^{k+1} = 2\phi_{F-1}^{k-1} - \phi_{F-2}^{k-1}.$$

La variable à la frontière est donc extrapolée à partir des valeurs aux points intérieurs adjacents et ceci deux pas de temps précédents. Cette condition est à rapprocher de la formulation originale d'Orlanski, qui donne pour $v = 0$ (et pour une perturbation sortante)

[voir équation (III5)].

Lorsque le forçage est prescrit à la frontière, cette condition n'a pas lieu d'être puisque ϕ_F^{k+1} est fixée par ailleurs. La condition proposée est une nouvelle évaluation du terme ϕ_F^{k-1} par une extrapolation spatiale linéaire au pas de temps $k-1$. Elle évite en particulier le maintien erroné d'une condition initiale mal choisie et la déstabilisation consécutive du schéma numérique. En outre, cette condition est compatible avec la présence d'une perturbation stationnaire créée au droit de la frontière (la pure condition de radiation supposant une onde progressive). Comme indiqué plus haut, cette condition supplémentaire correspond au fait que le calcul de la vitesse de propagation, selon la méthode d'Orlanski, est avant tout une approximation numérique, mais qu'il est parfois d'une précision insuffisante pour déterminer à chaque pas d'espace et de temps si la perturbation est entrante ou sortante. Pour obtenir cette dernière information et extrapoler en conséquence les variables à la frontière, il est nécessaire d'ajouter un test sur la valeur de la vitesse normale à cette frontière. La méthode mixte proposée reste homogène du point de vue des erreurs de troncatures, c'est-à-dire du second ordre dans le temps et dans l'espace (Miller, Thorpe, 1981).

Par ailleurs, la comparaison de l'approche par mode ou par couche fait ressortir la supériorité sensible de

l'approche par couche. La raison exacte de cette différence reste obscure. Dans la suite des exemples présentés, les résultats correspondent à un traitement par couche.

APPLICATION

Deux expériences numériques sont présentées à la suite pour démontrer la validité de la condition numérique proposée. Ces expériences sont destinées, d'un point de vue océanographique, à analyser le comportement d'écoulements stratifiés, instationnaires, en présence de montagnes sous-marines. L'initialisation de ces écoulements se traduit par la création de structures complexes de vorticité qui s'échappent en partie, de manière transitoire ou régulière, en dehors du domaine considéré. Le présent travail ne recouvre pas l'exposé des résultats physiques de l'étude, mais seulement des aspects relevant de la propagation à travers la frontière.

La première expérience concerne l'initialisation d'un écoulement uniforme sur une topographie isolée de profil gaussien et de hauteur maximale notée hm . En bref, le processus est celui d'un ajustement du champ de vorticité sur la topographie qui provoque, dans la phase initiale, l'échappement d'un tourbillon cyclonique dans le sillage de l'écoulement. Pour étudier le comportement à long terme de la dynamique locale sur la topographie, il est nécessaire d'évacuer ce tourbillon cyclonique sans perturber l'évolution ultérieure du phénomène dans la zone d'intérêt. Dans l'hypothèse d'un fluide homogène, l'étude extensive du problème a été réalisée avec succès grâce à la méthode d'Orlanski (Verron, Le Provost, 1985). Nous présentons ici une généralisation au cas bicouche. L'effet de la stratification est de produire une baroclinisation de la structure des tourbillons topographiques, piégés sur la montagne sous-marine ou advectés dans le sillage. A la figure 3 nous montrons un exemple de champ de vorticité dans la couche de fond, dans la phase d'initialisation de l'écoulement. Un tourbillon cyclonique intense dérive rapidement à l'aval et traverse la frontière. L'efficacité de la condition numérique proposée apparaît clairement. Elle est confirmée à la figure 4 par le tracé de l'évolution temporelle de la section médiane ($y = 250$ km) du champ de vorticité, et ceci dans les deux couches. Malgré la relative grossièreté du maillage (10 km), on peut noter l'absence de réflexions parasites. Le deuxième exemple concerne l'effet d'un forçage instationnaire sur un écoulement du type précédent. Le forçage choisi est de nature sinusoïdale, et l'on examine cette fois la réponse de l'écoulement en régime statistiquement stationnaire (Verron, 1985). Le processus physique mis en évidence est la possibilité d'obtenir un lâcher continu de tourbillons, cycloniques et anticycloniques, à l'aval de la topographie. Pour une gamme restreinte de paramètres, les tourbillons advectés peuvent être « cohérents », c'est-à-dire associés à des lignes de courant fermées et donc à un transport de masse spécifique. La figure 5, relative à un tel cas, démontre bien l'efficacité de la condition proposée, même pour des inversions localisées du courant comme il s'en pro-

duit au passage d'un tourbillon cohérent à la frontière. Sur un tel exemple, on comprend bien d'ailleurs l'ambiguïté de la notion d'écoulement entrant ou sortant. Les figures 6 et 7 sont destinées à mettre en évidence l'influence de la proximité plus ou moins grande de la frontière, sur les profils de fonction de courant et de vorticité. Elles présentent deux essais réalisés avec respectivement un bassin de $500 \text{ km} \times 500 \text{ km}$ et un bassin de $750 \text{ km} \times 500 \text{ km}$ (la topographie de diamètre 100 km est centrée). Dans l'hypothèse d'une condition de frontière ouverte idéale, il n'existerait aucune diffé-

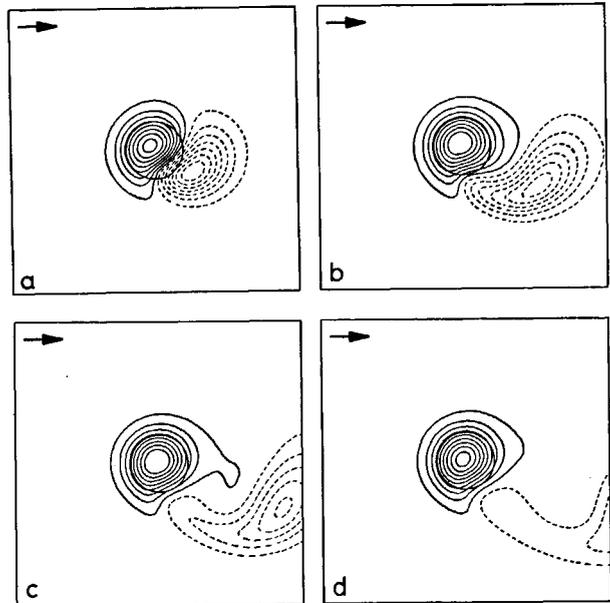


Figure 3

Champ de vorticité d'un écoulement uniforme, initialisé à partir du repos sur une topographie isolée : advection d'un tourbillon cyclonique dans la couche inférieure. $D_1 = 800 \text{ m}$, $D_2 = 3200 \text{ m}$, $hm = 200 \text{ m}$, $L = 100 \text{ km}$, $LX = LY = 500 \text{ km}$, $U_1 = U_2 = 0.1 \text{ m/s}$, $\beta = 0$, $A = 0.025$. Le temps adimensionnel t vaut 0,86 (a), 1,73 (b), 2,59 (c), 3,46 (d). Intervalle entre les contours $\Delta(\xi_2) = 0,56$.

Vorticity field for a uniform flow, initiated from rest over isolated topography: cyclonic-eddy advection in the bottom layer. $D_1 = 800 \text{ m}$, $D_2 = 3200 \text{ m}$, $hm = 200 \text{ m}$, $L = 100 \text{ km}$, $LX = LY = 500 \text{ km}$, $U_1 = U_2 = 0.1 \text{ m/s}$, $\beta = 0$, $A = 0.025$. Adimensional time is 0.86 (a), 1.73 (b), 2.59 (c), 3.46 (d). Contour interval $\Delta(\xi_2) = 0.56$.

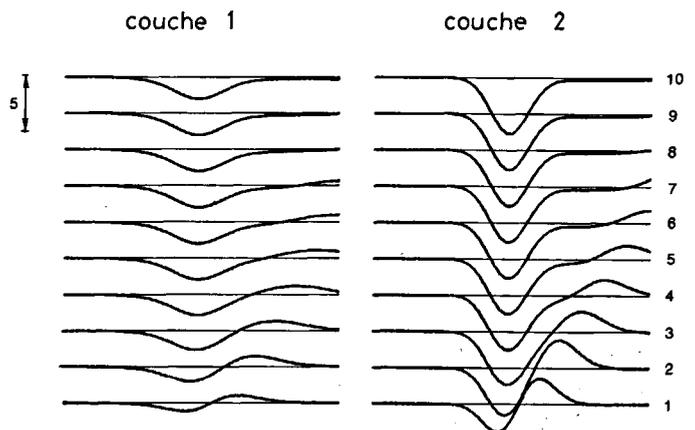


Figure 4

Sections du champ de vorticité dans les couches 1 et 2. Mêmes conditions qu'à la figure 3. L'intervalle de temps entre les sections est de 0,43.

Vorticity field sections in the layers 1 (a) and 2 (b). Same conditions as in Figure 3. Time interval between sections is 0.43.

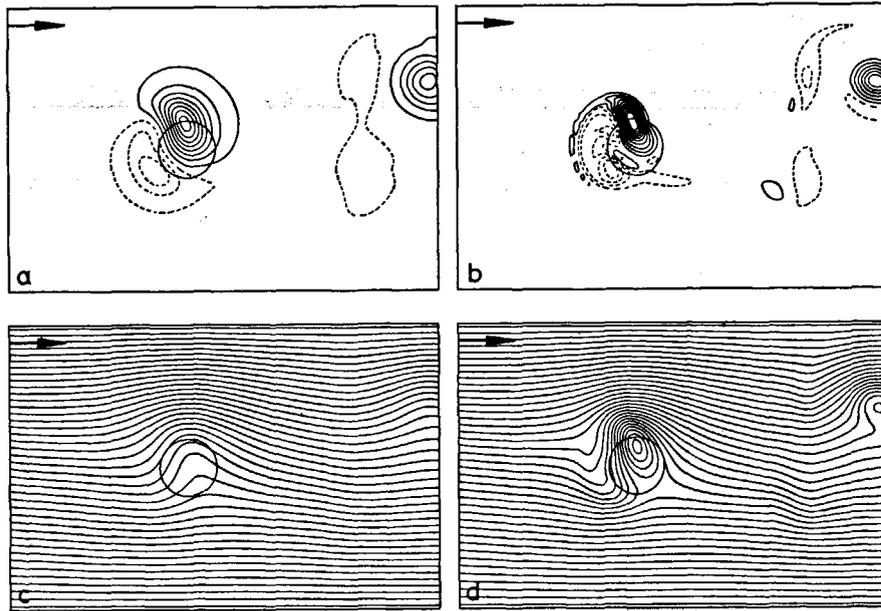


Figure 5

Champs de vorticité et de fonction de courant pour les deux couches d'un écoulement oscillant sur une topographie isolée : advection de structures anticyclonique et cyclonique.
 $D_1 = 800$ m, $D_2 = 3\,200$ m, $hm = 600$ m, $L = 100$ km. $LX = 750$ km, $LY = 500$ km, $U_1 = U_2 = 0,2$ m/s, $\beta = 0$, $A = 0,0025$, $t = 12,96$.
 Vorticité : couche 1 (a) et 2 (b).
 Fonction de courant : couche 1 (c) et 2 (d).
 La fréquence adimensionnelle d'oscillation est $\omega = \pi/2$.
 $\Delta(\psi_1) = \Delta(\psi_2) = 0,125$, $\Delta(\xi_1) = 0,58$, $\Delta(\xi_2) = 2,32$.

Velocity and streamfunction fields in the two layers for an oscillating flow over isolated topography: anticyclonic and cyclonic structures advection.
 $D_1 = 800$ m, $D_2 = 3\,200$ m, $hm = 600$ m, $L = 100$ km, $LX = 750$ km, $LY = 500$ km, $U_1 = U_2 = 0.2$ m/s, $\beta = 0$, $A = 0.0025$, $t = 12.96$.
 Vorticity: layer 1 (a) and 2 (b).
 Streamfunction: layer 1 (c) and 2 (d).
 Adimensional oscillation frequency is $\omega = \pi/2$.
 $\Delta(\psi_1) = \Delta(\psi_2) = 0.125$, $\Delta(\xi_1) = 0.58$, $\Delta(\xi_2) = 2.32$.

rence entre les deux écoulements. En pratique on observe un léger écart, mais qui n'affecte en rien la nature de l'écoulement et son comportement à long terme. Au passage de la frontière, cet écart est plus sensible en valeur relative lorsque les champs sont de faible intensité ou que les échelles de mouvement sont petites par rapport à la maille de calcul.

d'océan. La dynamique de l'écoulement océanique considéré est pleinement non linéaire, et l'effet de la stratification est pris en compte dans l'approximation quasi-géostrophique d'un fluide bicouche. L'amélioration proposée consiste en une adaptation de la condition de radiation de Sommerfeld à ce modèle stratifié d'océan. Elle fait appel à une méthode d'extrapolation qui complète la méthode d'Orlanski dans le cas de perturbations locales quasi-tangentielles, et se substitue à celle-ci lorsque les approximations numériques provoquent des instabilités. La pertinence de la méthode est illustrée par des simulations sur les processus de création de tourbillons océaniques en présence de topographies sous-marines.

CONCLUSION

Nous avons proposé une généralisation et une amélioration de la méthode d'Orlanski pour la mise en œuvre de frontières ouvertes dans un modèle numérique

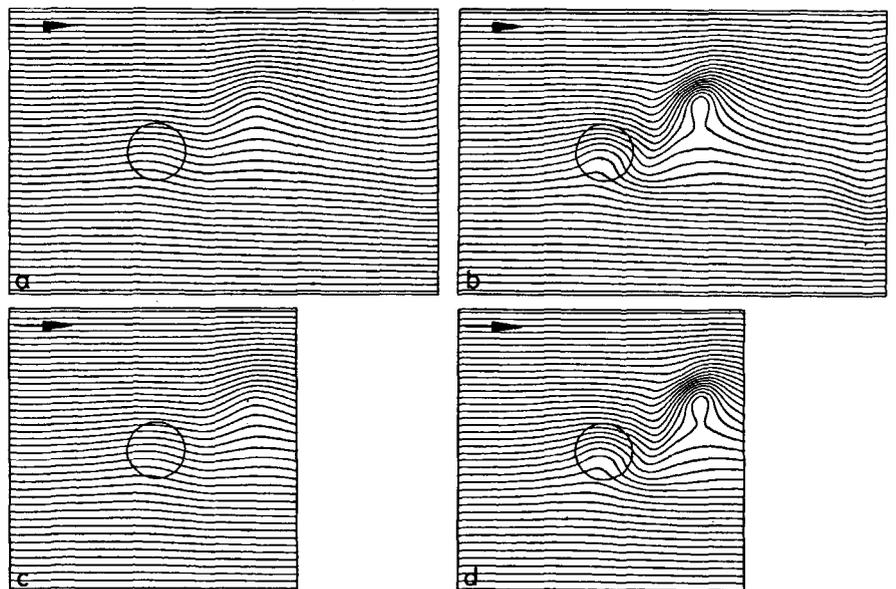


Figure 6

Champs de courant d'un écoulement oscillant bicouche sur une topographie isolée.
 Influence de la proximité des frontières ouvertes.
 Mêmes conditions que la figure 5 sauf $t = 13,95$ et : $LX = 750$ km, $LY = 500$ km, couches 1 (a) et 2 (b). $LX = LY = 500$ km, couches 1 (c) et 2 (d).
 $\Delta(\psi_1) = \Delta(\psi_2) = 0,125$.
 Streamfunction for an oscillating two-layer flow over isolated topography.
 Influence of the open-boundary proximity.
 Same conditions as in Figure 5 except: $LX = 750$ km, $LY = 500$ km, layer 1 (a) and 2 (b). $LX = LY = 500$ km, layer 1 (c) and 2 (d).
 $\Delta(\psi_1) = \Delta(\psi_2) = 0.125$.

Bien que les essais de validation soient restreints au milieu bicouche, notre méthode doit pouvoir s'appliquer sans difficulté majeure aux modèles multicouches. Elle constitue un outil potentiel pour le développement des modèles quasigéostrophiques à haute résolution qui simulent les circulations générales à l'échelle régionale, en permettant une connection avec des zones dynami-

quement distinctes ou l'imposition de forçages locaux aux frontières.

Remerciements

Les moyens de calcul utilisés ont été attribués par le conseil scientifique du Centre de Calcul Vectoriel pour la Recherche, que nous remercions.

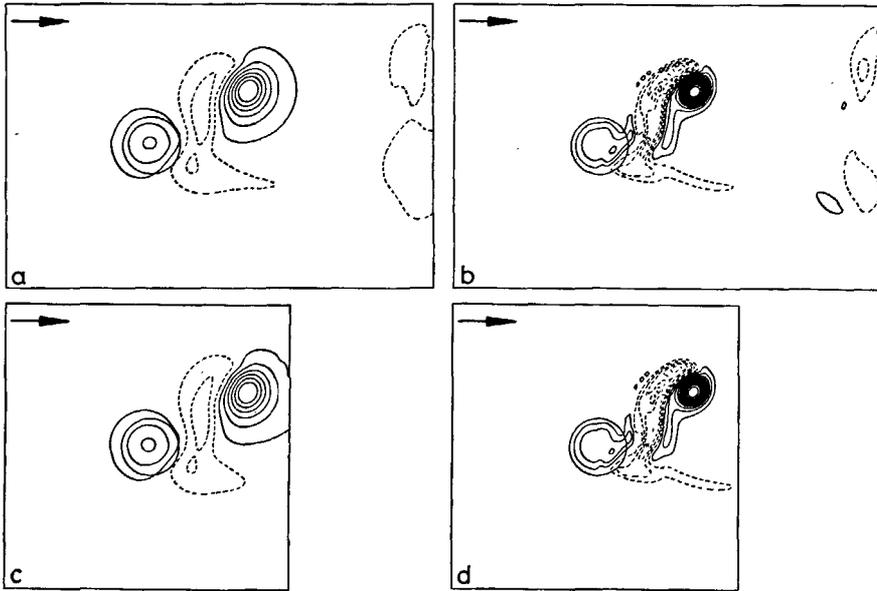


Figure 7

Champs de vorticité dans les mêmes conditions que la figure 6.

LX = 750 km, LY = 500 km, couches 1 (a) et 2 (b).

LX = LY = 500 km, couches 1 (c) et 2 (d).

$\Delta(\xi_1) = 0,5$, $\Delta(\xi_2) = 2$.

Vorticity fields in the same conditions as Figure 6.

LX=750 km, LY=500 km, layer 1 (a) and 2 (b).

LX=LY=500 km, layer 1 (c) and 2 (d).

$\Delta(\xi_1) = 0.5$, $\Delta(\xi_2) = 2$.

RÉFÉRENCES

- Arakawa A., 1966. Computational design for long term integration of the equations of fluid motions, *J. Comp. Phys.*, **1**, 119-143.
- Bretherton F. P., Karweit M. J., 1975. *Mid-ocean mesoscale modelling. Numerical models of ocean circulation*, National Academy of Science, Washington D.C., 237-249.
- Bretherton F. P., Haidvogel D. B., 1976. Two-dimensional turbulence above topography, *J. Fluid Mech.*, **78**, 129-154.
- Camerlengo A. L., O'Brien J. J., 1980. Open boundary conditions in rotating fluids, *J. Comp. Phys.*, **35**, 12-35.
- Chapman D. C., 1985. On the numerical treatment of cross-shelf open boundaries in a barotropic coastal ocean model, à paraître dans *J. Phys. Oceanogr.*
- Charney J. G., Fjortoft R., Von Neumann J., 1950. Numerical integration of the barotropic vorticity equation, *Tellus*, **2**, 237-254.
- Davies H. C., 1976. A lateral boundary condition for multi-level prediction models, *Quart. J. R. Meteorol. Soc.*, **102**, 405-418.
- Engquist B., Majda A., 1977. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves, *Math. Comput.*, **31**, 629-651.
- Haidvogel D. B., Robinson A. R., Schulman E. E., 1980. The accuracy, efficiency and stability of three numerical models with application to open ocean problems, *J. Comp. Physics*, **34**, 1.
- Hua B. L., Haidvogel D. B., 1985. Vertical structure of quasi-geostrophic turbulence, soumis à *J. Atmos. Sci.*
- Miller M. J., Thorpe A. J., 1981. Radiation conditions for the lateral boundaries of limited area numerical models, *Quart. J. R. Meteorol. Soc.*, **107**, 615-628.
- Olinger J., Sundstrom A., 1978. Theoretical and practical aspects of some initial boundary value problems in fluid dynamics, *SIAM J. Appl. Math.*, **35**, 419-446.
- Orlanski I., 1976. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows, *J. Comp. Phys.*, **21**, 3, 251-269.
- Pearson R. A., 1974. Consistent boundary conditions for numerical models of systems that admits dispersive waves, *J. Atmos. Sci.*, **31**, 6, 1481-1489.
- Pedlosky J., 1979. *Geophysical fluid dynamics*, Springer-Verlag.
- Raymond W. H., Kuo H. L., 1984. A radiation boundary condition for multi-dimensional flows, *Quart. J. Meteorol. Soc.*, **110**, 535-551.
- Rhines P. B., 1975. Waves and turbulence on a β -plane, *J. Fluid Mech.*, **69**, 3, 417-443.
- Rhines P. B., 1979. Geostrophic turbulence, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **11**, 401-441.
- Robinson A. R., Haidvogel D. B., 1980. Dynamical forecast experiments with a barotropic open ocean model, *J. Phys. Oceanogr.*, **10**, 1909-1928.
- Robinson A. R., Carton J. A., Mooers C. N. K., Walstad L. J., Carter E. F., Rienecker M. M., Smith J. A., Leslie W. G., 1984. A real-time dynamical forecast of ocean synoptic/mesoscale eddies, *Nature*, **309**, juin 1984.
- Roed L. P., Smedstad O. M., 1984. Open boundary conditions for forced waves in a rotating fluid, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **5**, 2, 414-426.
- Sundstrom A., Elvius T., 1979. Computational problems related to limited-area modelling, in: *Numerical methods used in atmospheric models*, **11**, chap. 7, GARP Series n° 17.
- Verron J., 1985. Topographic eddies in temporally varying oceanic flows, à paraître dans *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*
- Verron J., Le Provost C., 1985. A numerical study of quasi-geostrophic flow over isolated topography, *J. Fluid Mech.*, **154**, 231-252.