

Modèle tridimensionnel de circulation et de dispersion en zone côtière à marée. Premiers essais : cas schématique et baie de Seine

Modèle
Courant
Tridimensionnel
Seine
Côtier
Model
Current
Three-dimensional
Seine
Coastal

B. Thouvenin, J.-C. Salomon
Laboratoire d'Océanographie Physique, ERA 766, Faculté des Sciences, Université de
Bretagne Occidentale, 6, avenue Victor-Le Gorgeu, 29283 Brest Cedex.

Reçu le 14/2/84, révisé le 14/4/84, accepté le 26/4/84.

RÉSUMÉ

Pour reproduire et étudier le caractère tridimensionnel de la circulation marine dans les régions côtières à marée, il a semblé intéressant de développer un modèle numérique adapté à ces zones, qui tienne compte de la topographie réelle et des variations de la surface libre.

Les équations non linéaires sont résolues directement en généralisant une technique en différences finies mixte (explicite-implicite), déjà employée dans des modèles bidimensionnels verticaux.

Le modèle a été appliqué à quelques cas schématiques pour tester le programme en eau homogène dans des bassins à fond plat, de façon à reproduire des courants dus au vent ou liés à une onde de marée. Puis on a considéré le cas d'une topographie accidentée (chenal) et enfin les courants de densité au niveau d'un front de salinité.

Les résultats ont été comparés à des solutions théoriques (point amphidromique, spirale d'Ekman) ou aux résultats d'autres modèles.

Une première tentative d'application à une région réelle a été effectuée dans la baie de Seine.

Malgré quelques points particuliers à améliorer dans le schéma numérique, les résultats de ces différents essais sont dans l'ensemble encourageants, et montrent que le modèle reproduit bien les différents phénomènes physiques auxquels on s'intéresse dans les régions littorales.

Oceanol. Acta, 1984, 7, 4, 417-429.

ABSTRACT

Three-dimensional model of circulation and dispersion in a tidal coastal area

In order to reproduce and investigate the marine circulation in the coastal tidal zone, and especially its three dimensional nature, it appeared interesting to develop a numerical model which could take account of the real bottom topography and the variations of the free surface.

Navier-Stokes equations are solved in a straight forward manner, generalizing a finite difference technique already used in two-dimensional vertical models.

To test the computational program, the model was applied to a number of flat bottom schematic basins, where we reproduced wind driven currents and tide propagation. Then we considered the particular case of a real channel and, finally, density currents associated with a salty wall.

Model results are compared to theoretical solutions (amphidromic point, Ekman spiral) or results obtained from other models.

The first attempt to apply the model to a real area was for the Bay of Seine. Although certain specific points in the numerical scheme could be improved, results seem favourable, and show that the model reproduces quite well the different physical phenomena of interest in coastal areas.

Oceanol. Acta, 1984, 7, 4, 417-429.

INTRODUCTION

Le caractère tridimensionnel de la circulation marine dans les régions côtières à marée est essentiel. Nous avons donc cherché à réaliser un modèle mathématique capable de reproduire les phénomènes physiques dans les trois directions, et de tenir compte de la forme réelle des fonds et des variations spatiales et temporelles de la surface libre.

Parmi les différentes approches du problème tridimensionnel il existe les modèles « multi couches » (Leendertse, Liu, 1975; 1978) qui superposent plusieurs modèles bidimensionnels intégrés sur l'épaisseur de chacune des couches et fournissent une approximation en escalier du profil des vitesses. Ils sont difficilement applicables aux régions littorales, où le marnage est du même ordre de grandeur que la profondeur.

Une autre démarche consiste à découpler le calcul de la structure verticale de celui du courant moyen évalué à l'aide d'un modèle bidimensionnel horizontal. Cette technique a été employée de deux façons :

— soit le modèle vertical préliminaire à une dimension recherche des formulations appropriées de la dépendance verticale du champ de vitesse et les transmet au modèle intégré sur la verticale (Forristall, 1974; Heaps, 1971; 1980; Davies, Owen, 1979);

— soit les prédictions du modèle bidimensionnel pré-existant fournissent les valeurs locales de forcing et les conditions aux limites au modèle vertical (Nihoul, 1977; Le Hir, 1980).

Dans les deux cas et quelle que soit la technique de résolution de la structure verticale [analytique (Forristall), multimode (Heaps, Davies, Nihoul), ou numérique (Le Hir)], la décomposition même des équations constitue un point faible puisqu'il ne peut y avoir d'interaction entre les variables des deux modèles sauf par un procédé d'itération. La loi de frottement, si elle est paramétrée en fonction du courant moyen, n'est pas réellement valide, notamment pendant les périodes de renverse.

Le couplage entre les deux calculs n'est possible que s'ils sont effectués en parallèle, ce qui rejoint la technique de séparation en deux modes — mode externe et mode interne — avec des pas de temps différents (Sheng *et al.*, 1978; Blumberg, Mellor, 1980).

L'hypothèse de « toit rigide » qu'utilisent certains auteurs (Bennett, 1977) pour éliminer l'onde barotrope ne peut être employée dans le cas de zones littorales à marée.

Freeman *et al.* (1972) ont été les premiers à utiliser le changement de variables $\xi = \frac{z}{H}$ qui permet d'avoir toujours le même nombre de points sur la verticale, quelle que soit la profondeur. Cette technique a été reprise ensuite par de nombreux auteurs mais elle a l'inconvénient de rendre les équations beaucoup plus complexes. Freeman *et al.* ont tenté de résoudre directement les équations, mais au prix de sévères simplifications sur la viscosité turbulente et les conditions aux limites.

Nous avons choisi de refaire un tel essai en abandonnant ce changement de variables et en utilisant la technique explicitée par Hamilton (1975; 1976) pour traiter les points aux limites supérieures et inférieures. Un modèle bidimensionnel en plan vertical (x, z) de ce type avait déjà été appliqué avec succès sur plusieurs sites littoraux (Hamilton, 1975, sur le canal de Rotterdam; de Borne de Grandpré, 1979, sur l'estuaire de la Gironde; Salomon, 1981, sur l'estuaire de la Seine; de Borne de Grandpré *et al.*, 1981, sur l'estuaire du Saint-Laurent).

Nous avons repris cette méthode générale, et développé le modèle sur la coordonnée transversale y.

FORMULATION MATHÉMATIQUE

Les phénomènes physiques auxquels on s'intéresse sont principalement les oscillations d'inertie, les ondes de marée, les courants dus au vent et les courants de densité.

Les équations qui les gouvernent sont les équations de Navier-Stokes, qui s'écrivent de la façon suivante dans le repère orthonormé direct (O, x, y, z) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv + ag (\zeta - z) \frac{\partial \bar{S}}{\partial x} + g \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \left[N'_{xx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + N'_{yy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(N'_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu + ag (\zeta - z) \frac{\partial \bar{S}}{\partial y} + g \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \left[N'_{yx} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + N'_{yy} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(N'_{yz} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial S}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial S}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial S}{\partial z} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (5)$$

$$\rho = \rho_0 (1 + a S) \quad a = 0,78 \cdot 10^{-3} \quad (6)$$

Dans ces équations, on a fait les hypothèses suivantes :

- approximation hydrostatique;
- approximation de Boussinesq;
- incompressibilité de l'eau;
- forces astrales négligeables;
- paramètres de Coriolis constant.

(u, v, w) sont les composantes de la vitesse selon les 3 axes (l'axe vertical étant dirigé vers le haut), f est le

paramètre de Coriolis, S est la salinité, ζ l'élévation de la surface et ρ_0 la masse volumique de l'eau douce. Les coefficients $\frac{N'}{\rho} = N$ et K sont les coefficients de viscosité et de diffusion turbulente qui paramètrent les échanges turbulents selon les trois axes. On considère les coefficients horizontaux constants dans l'espace et dans le temps.

Les gradients horizontaux de pression dans les équations (1) et (2) sont exprimés à partir de l'équation hydrostatique (5) et de l'équation d'état (6) en fonction de la pente de la surface et du gradient horizontal de la salinité moyenne S sur la verticale.

L'équation de la continuité (3) est transformée par le biais de deux intégrations différentes pour obtenir les variations de la surface de l'eau et la valeur de la vitesse verticale à chaque profondeur :

Par intégration entre le fond ($-h$) et la surface (ζ), il vient :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} = 0 \quad (\text{éq. 7})$$

avec

$$\bar{U} = \int_{-h}^{\zeta} u \, dz \quad \bar{V} = \int_{-h}^{\zeta} v \, dz$$

Par intégration entre le fond ($-h$) et la cote (z), il vient :

$$w(x, y, z) = - \int_{-h}^z \frac{\partial u}{\partial x} \, dz - \int_{-h}^z \frac{\partial v}{\partial y} \, dz \quad (\text{éq. 8})$$

On obtient ainsi 5 équations 1, 2, 4, 7, 8 que l'on résout directement en conservant les termes non linéaires. Une approximation supplémentaire a été introduite à ce stade pour simplifier les calculs : les salinités moyennes $S(x, y)$ sont approximées en salinités ponctuelles $S(x, y, z)$, ce qui restreint les applications du modèle à des estuaires peu stratifiés ou dont les profils verticaux de salinité sont peu différents sur l'horizontale. Cette restriction pourrait aisément être levée en incorporant au modèle le calcul de l'intégrale des salinités sur la verticale.

Les intégrales de chaque composante u et v et les débits d'eau U et V sont calculés en considérant chaque variable comme une fonction continue de la profondeur. Les intégrales peuvent alors être évaluées de façon précise à l'aide de splines à une dimension rejoignant les points de calcul et satisfaisant les conditions aux limites à la surface et au fond. Cette procédure permet également d'extrapoler leurs valeurs en des points virtuels extérieurs au domaine d'intégration qui sont utilisés dans les expressions en différences finies lorsque deux colonnes d'eau voisines n'ont pas le même nombre de points sur la verticale. Cette technique, qui fait l'originalité du modèle tridimensionnel, permet de résoudre les équations en tenant compte de la forme réelle du domaine et de ses variations temporelles.

GRILLE DE CALCUL

La grille de calcul est composée de trois maillages distincts, à pas constants, décalés d'un demi pas d'espace DX , DY ou DZ , selon les 3 directions. L'un relie les composantes u du courant, l'autre les composantes v et le troisième les composantes w ou les salinités S .

La disposition verticale de la grille est la même que celle de Heaps, tandis que dans un plan horizontal, on retrouve la grille classique des modèles bidimensionnels.

La figure 1 décrit sa configuration dans les 3 dimensions, chaque maille forme donc un parallélépipède de côté DX , DY , DZ , repéré par les indices (i, j, k) sur les axes Ox , Oy , Oz . Ce dernier a pour origine un niveau arbitraire repéré par l'indice K sur la verticale.

Les points situés juste au-dessous de la surface et juste au-dessus du fond sont repérés par leurs indices particuliers calculés à chaque pas de temps pour la limite supérieure (Hamilton, 1975; Thouvenin, 1983).

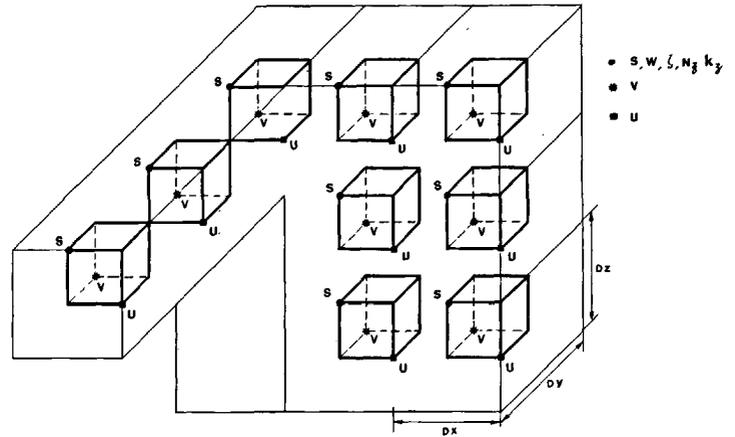


Figure 1
Grille tridimensionnelle des points de calcul.
Three-dimensional grid used for computations.

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

Le procédé de résolution en différences finies est mixte implicite-explicite et détaillé ci-après. On notera que toutes les dérivées spatiales sont centrées, à l'exception des termes d'advection horizontale dans l'équation du sel. Le terme de gradient de pression, particulièrement important pour la stabilité du schéma, est traité de façon implicite.

$$\begin{aligned} \zeta^{t+DT}(i, j) &= \zeta^t(i, j) \\ &+ DT \left(\frac{\bar{U}_{t-1, j}^t - \bar{U}_{t, j}^t}{DX} + \frac{\bar{V}_{t, j-1}^t - \bar{V}_{t, j}^t}{DY} \right) \\ W^{t+DT}(i, j, k) &= - \frac{QX_{i, j, k}^t - QX_{t-1, j, k}^t}{DX} \\ &\quad - \frac{QY_{i, j, k}^t - QY_{t, j-1, k}^t}{DY} \\ QX &= \int_{-h}^z u' \, dz \quad QY = \int_{-h}^z v' \, dz \\ \frac{S_{i, j, k}^{t+DT} - S_{i, j, k}^t}{DT} &+ \frac{1}{4DX} [UA \, 1 (S_{i+1, j, k}^t - S_{i, j, k}^t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ UA 2 (S_{i,j,k}^t - S_{i-1,j,k}^t) + \Delta S_u (UA 1 + UA 2) \\
 &+ \frac{1}{4DY} [VA 1 (S_{i,j+1,k}^t - S_{i,j,k}^t) \\
 &+ VA 2 (S_{i,j,k}^t - S_{i,j-1,k}^t) + \Delta S_v (VA 1 + VA 2)] \\
 &+ w_{i,j,k} (S_{i,j,k-1}^t - S_{i,j,k+1}^t) / 2 DZ \\
 &- K_x (S_{i+1,j,k}^t - S_{i,j,k}^t - S_{i,j,k}^{t+DT} + S_{i-1,j,k}^{t+DT}) / DX^2 \\
 &- K_y [S_{i,j+1,k}^t - S_{i,j,k}^t - S_{i,j,k}^{t+DT} + S_{i,j-1,k}^{t+DT}] / DY^2 \\
 &- [(K_{zi,j,k-1} + K_{zi,j,k}) (S_{i,j,k-1}^{t+DT} - S_{i,j,k}^{t+DT}) \\
 &- (K_{zi,j,k+1} + K_{zi,j,k}) (S_{i,j,k}^{t+DT} - S_{i,j,k+1}^{t+DT})] / 2 DZ^2 = 0
 \end{aligned}$$

avec :

$$UA 1 = \frac{u_{i,j,k}^t + u_{i,j,k-1}^t}{2} \quad UA 2 = \frac{u_{i-1,j,k}^t + u_{i-1,j,k-1}^t}{2}$$

$$\Delta S_u = S_{i+1,j,k}^t - S_{i,j,k}^t \quad \text{si } UA 1 + UA 2 < 0$$

$$\Delta S_u = S_{i,j,k}^t - S_{i-1,j,k}^t \quad \text{si } UA 1 + UA 2 \geq 0$$

idem symétriquement pour VA 1, VA 2, ΔS_v ,

$$\begin{aligned}
 &\frac{u_{i,j,k}^{t+DT} - u_{i,j,k}^t}{DT} + \frac{u_{i,j,k}^t (u_{i+1,j,k}^t - u_{i-1,j,k}^t)}{2DX} \\
 &+ \frac{\bar{V}}{2DY} (u_{i,j+1,k}^t - u_{i,j-1,k}^t) \\
 &+ \frac{(w_{i+1,j,k}^t + w_{i,j,k}^t) (u_{i,j,k-1}^t - u_{i,j,k}^t)}{4DZ} \\
 &+ \frac{(w_{i+1,j,k+1}^t + w_{i,j,k+1}^t) (u_{i,j,k}^t - u_{i,j,k+1}^t)}{4DZ} \\
 &- f \bar{V} + g \frac{\zeta_{i+1,j}^{t+DT} - \zeta_{i,j}^{t+DT}}{DX} + a.g. \left(\frac{\zeta_{i+1,j}^{t+DT} - \zeta_{i,j}^{t+DT}}{2} - z \right) \\
 &\left(\frac{S_{i+1,j,k}^{t+DT} + S_{i+1,j,k+1}^{t+DT} - S_{i,j,k}^{t+DT} - S_{i,j,k+1}^{t+DT}}{2DX} \right) \\
 &= N_x \frac{(u_{i+1,j,k}^t + u_{i-1,j,k}^t - 2u_{i,j,k}^t)}{DX^2} \\
 &+ N_{xy} \frac{(u_{i,j+1,k}^t + u_{i,j-1,k}^t - 2u_{i,j,k}^t)}{DY^2} \\
 &+ \frac{(N_{zi,j,k} + N_{zi+1,j,k}) (u_{i,j,k-1}^{t+DT} - u_{i,j,k}^{t+DT})}{2DZ^2} \\
 &- \frac{(N_{zi,j,k+1} + N_{zi+1,j,k+1}) (u_{i,j,k}^{t+DT} - u_{i,j,k+1}^{t+DT})}{2DZ^2}
 \end{aligned}$$

avec :

$$\bar{V} = (v_{i,j,k}^t + v_{i+1,j,k}^t + v_{i,j-1,k}^t + v_{i+1,j-1,k}^t) / 4$$

• L'équation en v est symétrique de l'équation en u .

On a tenté d'étudier la stabilité de ce schéma par la méthode de von Neumann en considérant l'eau homogène et en se plaçant en un point éloigné des limites. Chaque variable u, v, w et ζ est décomposée en série de Fourier :

$$\text{Exemple : } u^t = \sum u_m^n e^{1km_x x} e^{1km_y y} e^{KH_m z} KH_m = km_x^2 + km_y^2$$

et en substituant un terme de cette série dans les équations, on recherche la matrice G telle que :

$$\begin{pmatrix} u^{t+DT} \\ v^{t+DT} \\ w^{t+DT} \\ \zeta^{t+DT} \end{pmatrix} = [G] \begin{pmatrix} u^t \\ v^t \\ w^t \\ \zeta^t \end{pmatrix}$$

Le schéma est stable si les valeurs propres de G sont inférieures à l'unité. Du fait de la complexité de cette matrice, on n'a pu trouver de critère analytique simple reliant le pas de temps aux autres paramètres. On a donc utilisé une résolution numérique pour obtenir la valeur limite du pas de temps au-delà duquel le schéma est instable, en fonction du pas d'espace DX (fig. 2).

On observe qu'après une forte croissance correspondant au critère classique des schémas explicites $\frac{DX}{DT} > 2\sqrt{gH}$, cette limite est assez faible et pratique-

ment indépendante de DX . D'autre part, elle varie très fortement en fonction de la profondeur H et du coefficient de viscosité horizontale N_x . La forme du profil vertical du coefficient de viscosité verticale N_z joue également un rôle, mais de moindre importance.

Le modèle apparaît donc adapté à des régions de moyenne échelle, pour lesquelles une discrétisation spatiale de quelques kilomètres est suffisante. En-deçà de cette valeur, le critère devient très sévère. D'autre part, à moins d'augmenter le coefficient de viscosité horizontale N_x , il est également très restrictif pour des profondeurs importantes. Ces conclusions ont été parfois démenties par les essais d'applications schématisées du modèle. Il est apparu que ce critère pouvait être fortement dépassé. En fait, les instabilités se développent surtout dans le cas où la topographie est accidentée et lorsque le calcul fait souvent appel aux extrapolations en dehors de la limite inférieure.

CONDITIONS AUX LIMITES

Limites horizontales

Pour satisfaire à la condition d'imperméabilité, on impose aux limites fermées de passer par les points de calcul de la composante de courant qui leur est perpendiculaire, et qui est alors automatiquement nulle.

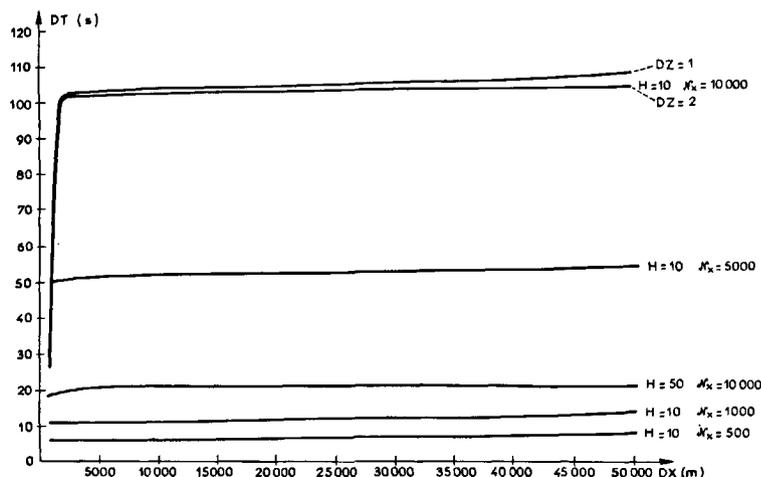
Aux limites ouvertes passant par les points de calcul des niveaux, on fournit à chaque pas de temps les élévations de la surface et les salinités si le courant est dirigé vers l'intérieur du domaine. Dans le cas contraire, l'équation d'advection du sel est résolue pour ces points en négligeant la diffusion horizontale et en décentrant les termes d'advection.

Les vitesses verticales w sont calculées par interpolation linéaire entre la surface et le fond :

$$w(\zeta) = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

$$w(-h) = 0.$$

Figure 2
Critère de stabilité.
Stability criterion.



Ce calcul peut conduire à des résultats erronés, dans des secteurs très fortement stratifiés. Il oblige donc à choisir des limites ouvertes éloignées du domaine d'intérêt.

Limites verticales

Les flux de sel à travers la surface et le fond sont nuls :

$$K_z \frac{\partial S}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} = 0, \quad K_z \frac{\partial S}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0.$$

D'autre part, le frottement au fond est exprimé par une loi quadratique de la vitesse à 1 m au-dessus du fond $-(u_D, v_D)$

$$N_z \frac{\partial u}{\partial z} = kft u_D \sqrt{u_D^2 + v_D^2}, \quad N_z \frac{\partial v}{\partial z} = kft v_D \sqrt{u_D^2 + v_D^2}$$

En surface, pour tenir compte du vent, on exprime la dérivée du courant sur la limite en fonction de la vitesse du vent :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau su}{\rho N_z} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau sv}{\rho N_z}, \quad \tau s = \rho_a C_D \|Ve\|^2$$

avec : ρ_a : masse volumique de l'air ;

C_D : coefficient analogue à une longueur de rugosité dont la valeur dépend du vent ;

Ve : vitesse du vent.

Toutes ces conditions aux limites sont satisfaites en modifiant les termes d'advection, de viscosité et de diffusion verticale aux points limites immédiatement sous la surface et au-dessus du fond. Pour les dérivées premières, les valeurs extrapolées paraboliquement en dehors du domaine sont utilisées, ou bien les dérivées aux points limites sont calculées directement à partir du polynôme du deuxième degré satisfaisant à ces conditions. Les dérivées secondes dans les termes de viscosité et de diffusion sont obtenues à partir de fonctions cubiques, passant par 3 points intérieurs au domaine.

COEFFICIENTS DE VISCOSITÉ ET DE DIFFUSION TURBULENTE

Les coefficients de viscosité et de diffusion turbulente simulent l'intensité des échanges turbulents. Ils sont paramétrés de façon semi-empirique.

Les coefficients horizontaux $N_x (= N_y)$ ont toujours été choisis constants. Par contre, les coefficients de diffusion K_x et K_y sont fonction du courant pour compenser la diffusion numérique engendrée par le décentrage des termes d'advection du sel. A l'aide de la méthode de Hirt, on peut quantifier cette diffusion et la minimiser en exprimant les coefficients de la façon suivante :

$$K_x = -|u| \frac{DX}{4} + K'_x, \quad K_y = -|v| \frac{DY}{4} + K'_y$$

K'_x et K'_y sont les coefficients réels de diffusion que l'on se donne arbitrairement.

Les coefficients N_z et K_z sont modélisés plus précisément en fonction des caractéristiques de l'écoulement, c'est-à-dire principalement selon la profondeur, la vitesse moyenne ou la vitesse à 1 m au-dessus du fond et le nombre de Richardson global pour introduire l'effet de la densité. Différentes formules ont été utilisées dans les applications : fonction linéaire de z , formule dérivée de la loi de Prandtl près du fond, ou bien encore fonctions plus complexes empruntées à d'autres auteurs.

Application à des cas schématiques

Premiers essais en eau homogène et fond plat

Le modèle a été testé sur différents cas schématiques dont les solutions théoriques étaient connues. Certains résultats ont été comparés à ceux d'autres modèles. Dans les premiers essais, l'eau est considérée comme homogène et le fond est plat.

- Dans un bassin ouvert sur un côté, on a reproduit la formation d'un point amphidromique virtuel résultant de la superposition d'une onde de marée semi-diurne et de sa réflexion sur le fond du bassin.

La figure 3 montre un exemple de champ de courant en coupe verticale xOz à travers une longueur de bassin. La figure 4 représente la zone d'amplitude minimale associée au resserrement des lignes d'égale phase, et située à une distance égale au quart de la longueur d'onde, comme le prédit la théorie.

- Le deuxième essai décrit la circulation tridimensionnelle associée aux seiches longitudinales et transversales

Figure 3
Courants induits par une onde dans un bassin (1^{er} cas).
Wave-induced currents in a basin (1st case).

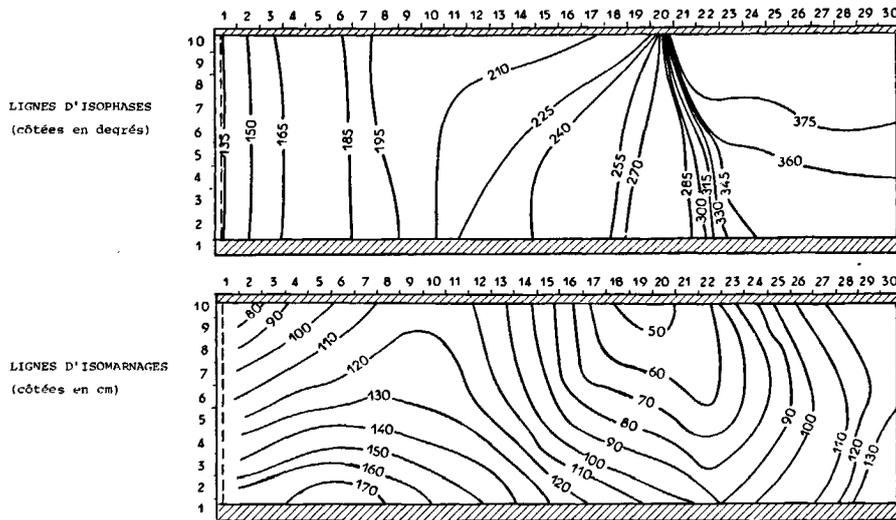
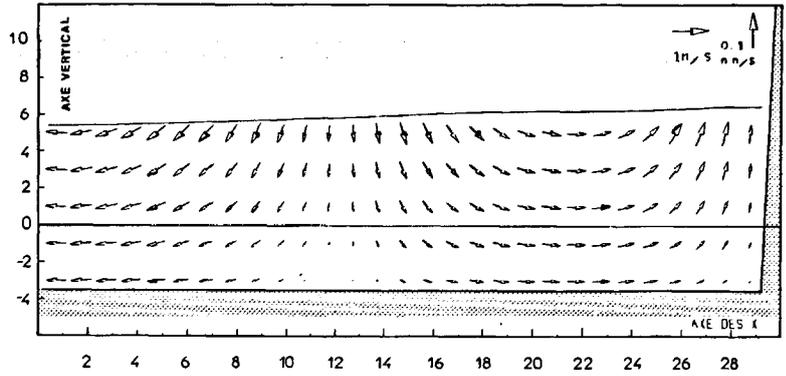


Figure 4
Lignes d'isophases et d'isomarnages (1^{er} cas).
Wave phase and amplitude isoline (1st case).

dans un bassin fermé à fond plat sur lequel le vent a soufflé durant deux heures.

Les résultats du modèle tridimensionnel ont été comparés à ceux d'un modèle bidimensionnel intégré sur la verticale appliqué par Salomon (1982) dans le même bassin.

La figure 5 montre les variations du niveau en fonction du temps calculées par les deux modèles en un même point situé dans un angle du bassin. Bien que leurs amplitudes diffèrent dans les premières heures de la simulation, les deux courbes sont bien en phase et permettent de visualiser les aller-retour des deux ondes longitudinales et transversales qui entrent en résonance du fait des dimensions particulières du bassin. La longueur est en effet égale à 3 fois sa largeur.

● L'action d'un vent soufflant sur une portion de mer ouverte initialement au repos a également été reproduite. On observe la combinaison de la spirale d'Eckman et des oscillations d'inertie (fig. 6).

La valeur du coefficient a de la spirale $\left(V_0 e^{-az} \cos\left(\frac{\pi}{4} - az\right) \right)$ est proche de la valeur théorique $\left(a = \sqrt{\frac{f}{2N_z}} \right)$. Elle est légèrement plus faible et met ainsi en évidence la diffusion numérique verticale du modèle.

$N_z = 8.10^{-2}$ MKS, valeur théorique de $a = 0,025$;
valeur donnée par le modèle $0,021 < a < 0,025$.

Or, $a = 0,021$ correspond à un $N_z = 0,1$ MKS.

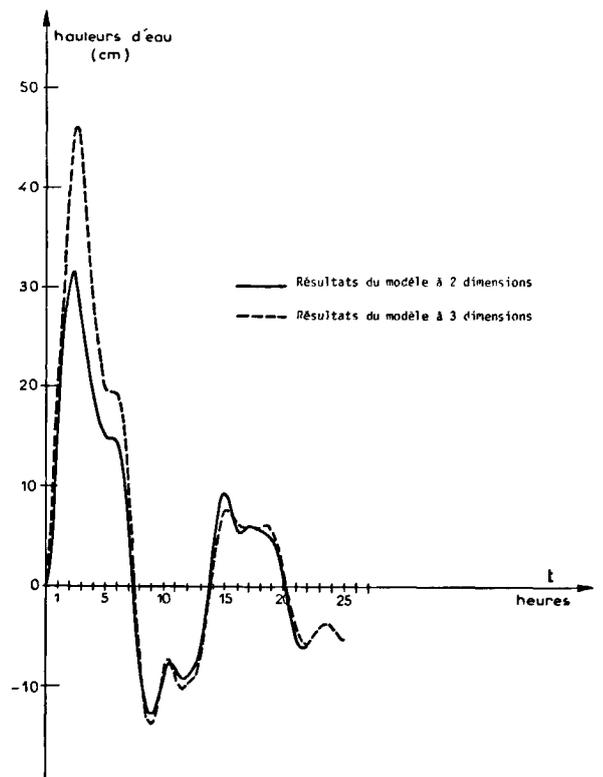


Figure 5
Variations du niveau d'eau en fonction du temps. Résultats des 2 modèles (2^e cas).
Time variations of the water surface elevation. Results of the two models (2nd case).

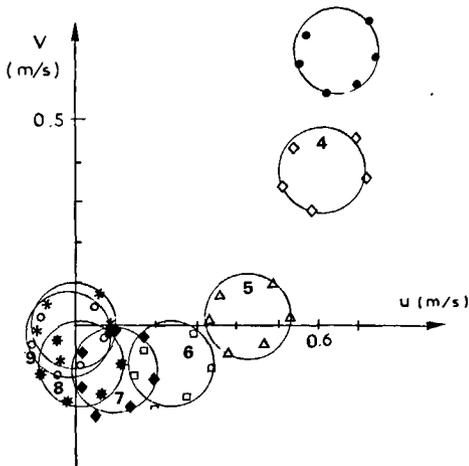


Figure 6
Oscillations dans le temps de la spirale d'Ekman (3^e cas).
Current velocity oscillations with time (3rd case).

● Ces premiers essais ont permis de vérifier le bon fonctionnement du programme. La confrontation des résultats avec des solutions théoriques a montré que le modèle reproduisait bien les phénomènes physiques recherchés tels que l'action du vent, les phénomènes d'inertie, la propagation des ondes longues, la réflexion sur les frontières,

● Le troisième essai illustre un défaut du modèle dû à l'expression explicite du terme de Coriolis. Lorsque le vent est interrompu (fig. 7), l'énergie ne décroît pas au cours du temps, comme elle devrait le faire, mais elle augmente légèrement et ceci d'autant plus que le pas de temps est grand. Ce défaut dont l'origine est tout-à-fait claire, peut être facilement compensé par un terme d'amortissement (fig. 8).

Compte tenu des objectifs que l'on a fixés au modèle, cet inconvénient n'aura aucune importance pratique, puisque en zone littorale les termes de dissipation d'énergie par friction sont beaucoup plus élevés que celui dont il est question ici.

Les premières applications où l'on a considéré l'eau homogène et le fond plat ne peuvent encore illustrer les possibilités du calcul tridimensionnel, qui prend tout son sens lorsqu'on y ajoute une densité variable et une topographie accidentée. Le programme a donc été testé dans ces deux cas séparément.

Autres essais. Topographie accidentée ou densité variable

● On considère une portion de canal en eau homogène traversé par un chenal oblique plus profond. Cet essai s'inspire directement d'une application réalisée par le Laboratoire National Hydraulique (Warluzel, Burg, 1979). Bien que les échelles n'aient pas été respectées, on observe des résultats similaires. Les figures 9 et 10 montrent les profils verticaux de la composante u du courant et de son angle θ par rapport à l'axe Ox pour des points situés sur le talus amont (fig. 9) et sur le talus aval (fig. 10) du chenal. Les 3 courbes tracées correspondent à des coefficients de viscosité horizontale et verticale différents.

● Le cinquième essai teste le modèle dans sa forme complète, c'est-à-dire en résolvant l'équation d'advec-

tion du sel. On considère un bassin fermé à fond plat avec un front transversal de salinité séparant l'eau douce à 0‰ à l'Ouest de l'eau salée à 29‰ à l'Est. Cette différence de densité provoque l'abaissement de la surface dans la partie salée (fig. 11) et au niveau du front se développe une circulation de densité caractérisée par une inversion de courant sur la verticale (fig. 12).

● Les deux derniers essais schématiques ont mis en évidence des effets tridimensionnels provoqués d'une part par la topographie irrégulière (canalisation du courant dans le chenal surtout au fond, déviation de la vitesse plus importante sur le talus amont que sur le talus aval,....) et d'autre part par un gradient horizontal de salinité (inversion du courant sur la verticale, mouvements ascendants et descendants de part et d'autre du front, action de la force de Coriolis...).

L'utilisation de valeurs extrapolées aux points situés au-dessous du fond lorsque la topographie est acciden-

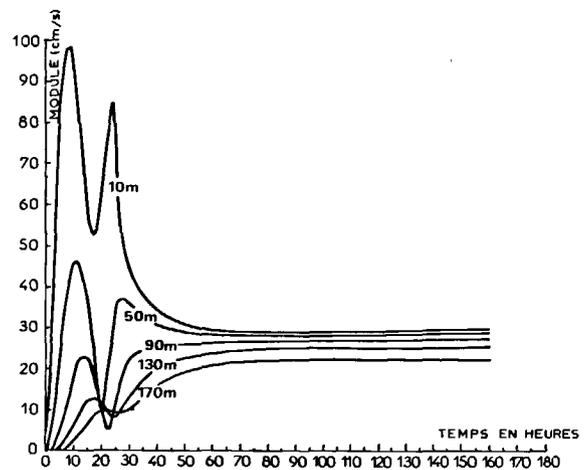


Figure 7
Variations de la vitesse en fonction du temps (3^e cas). Vent nul au bout de 33 heures.
Time variations of the current velocity (3rd case). No wind after 33 hours.

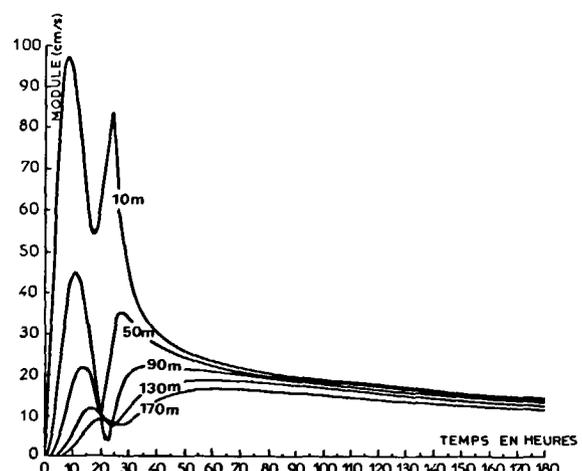


Figure 8
Variations de la vitesse en ajoutant un terme d'amortissement (3^e cas).
Time variations of the current velocity with damping (3rd case).

Figure 9
 Profils verticaux du courant u et de sa déviation θ sur le talus amont (4^e cas).

Vertical profiles of the longitudinal velocity u and its deviation θ on the upstream slope (4th case).

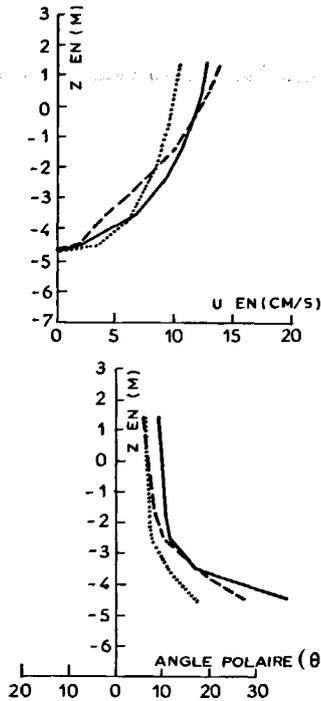
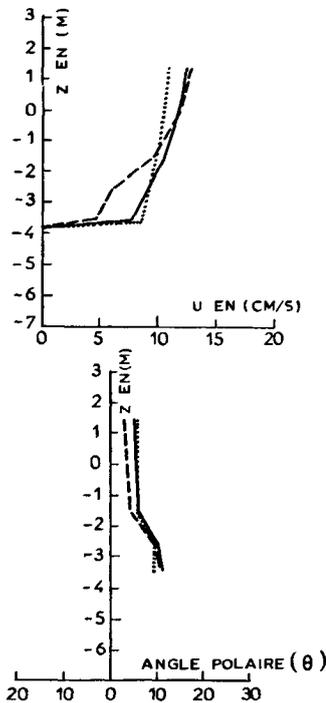


Figure 10
 Profils verticaux du courant u et de sa déviation θ sur le talus aval (4^e cas).

Vertical profiles of the longitudinal velocity u and its deviation θ on the downstream slope (4th case).



tée conduit dans certains cas à l'apparition d'instabilités numériques. Une mauvaise évaluation de ces vitesses virtuelles peut entraîner une erreur importante sur le terme de viscosité horizontale, et engendrer ainsi des tourbillons numériques, bien que la pente du fond soit faible. Pour éviter de tels effets, ces valeurs extrapolées sont prises nulles dans le calcul de la viscosité horizontale.

Ce dernier essai a permis d'étudier la diffusion numérique du modèle, engendrée par le décentrement des termes d'advection horizontale dans l'équation d'advection du sel.

En effet, d'après la méthode de Hirt appliquée à l'équa-

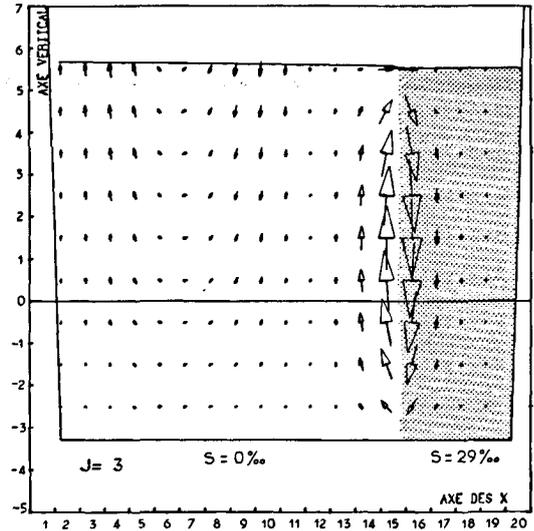


Figure 11
 Coupe verticale des courants induits par un front de salinité (5^e cas).
Density currents in a vertical section (5th case).

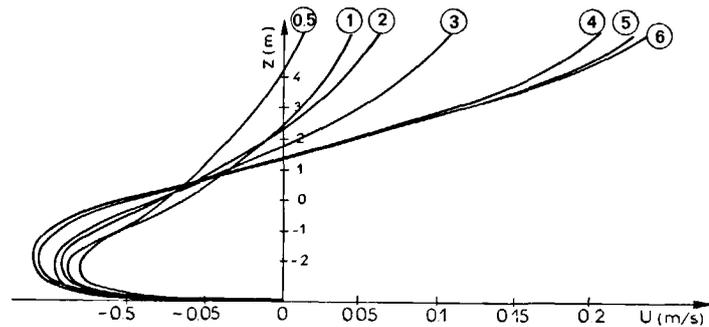


Figure 12
 Évolution dans le temps ($T = 0,5$ h à $T = 6$ h) du profil vertical du courant u au niveau du front de salinité (5^e cas).
Time variations of vertical profile of the longitudinal velocity at the salinity front (5th case).

tion d'advection à une dimension, on obtient l'équation effectivement résolue :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} - \left[K_x - \frac{u^2 DT}{2} + |u| \left| \frac{DX}{4} - \frac{K_x u DT}{DX} \right| \right] \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 0$$

avec :

$$\frac{u^2 DT}{2} - \frac{K_x u DT}{DX} \ll |u| \frac{DX}{4}$$

Pour compenser cet écart, on doit choisir des coefficients de diffusion horizontale K_x variables en fonction de $|u|$ et DX (cf. plus haut).

Après ces quelques essais le modèle a été appliqué à une région réelle du littoral français : la baie de Seine.

Application à la baie de Seine

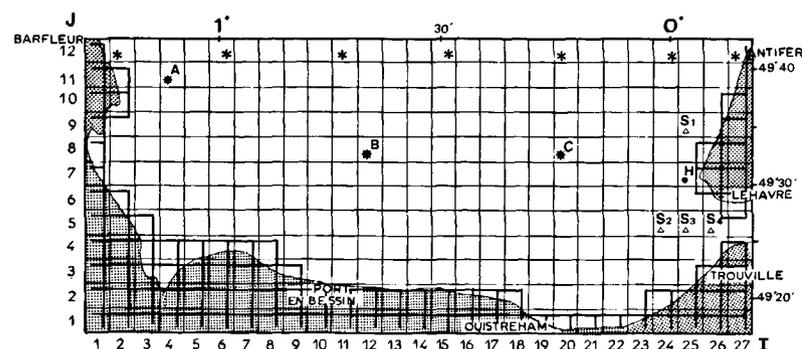
Certaines caractéristiques de la marée dans la baie rendent sa modélisation particulièrement délicate :

- le rapport marnage/profondeur est important ;
- la courbe des niveaux est fortement déformée, elle présente à la fois un front raide et une « tenue de plein » ;
- les profondeurs varient beaucoup entre l'ancienne vallée de la Seine (45 m), et les petits fonds de l'estuaire et du Sud de la baie ;
- la frontière ouverte est très longue.

La limite de la zone a été choisie sur le parallèle joignant Antifer à Barfleury.

Les pas d'espace sont de 4 km dans le plan horizontal et de 4 m dans le plan vertical (fig. 13).

Les conditions aux limites et les conditions initiales, pour les courants et les niveaux, sont fournies par un modèle bidimensionnel horizontal (Salomon, 1982), dont le pas d'espace est de 2 km.



$$K_x = 30 - |u| \frac{DX}{4} \quad K_y = 30 - |v| \frac{DY}{4} \quad (\text{diffusion horizontale})$$

$$N_z = 7.10^{-4} + 5.10^{-2} \bar{U} \log_{10}(0,1 z^3 + 1) (1 + 7 R i)^{-0,25}$$

$$K_z = 7.10^{-4} + 5.10^{-2} \bar{U} \log_{10}(0,1 z^3 + 1) (1 + R i)^{-1,75}$$

U : vitesse moyenne sur la profondeur

$$R i : \text{nombre de Richardson global } R i = \frac{ag H \Delta S}{U^2}$$

Le pas de temps est égal à 10 secondes dans le premier essai, lorsque l'eau est homogène. Dans le deuxième essai, on résoud l'équation du sel et on a légèrement augmenté la valeur de DT (= 15 s) pour diminuer les temps de calcul.

RÉSULTATS

Ces premiers résultats sont présentés comme une illustration des possibilités du modèle. Ils ne prétendent pas, à ce stade de développement, fournir une vision complète et certaine de la circulation dans la baie.

Les données de salinité sont issues de mesures sur le site.

La situation que nous avons choisie correspond à la journée du 3 octobre 1978 dans une période de vives eaux, le débit fluvial de la Seine étant égal à 450 m³/s.

Les composantes du courant intégrées sur la profondeur fournies par le modèle bidimensionnel sont développées sur la verticale pour le modèle tridimensionnel selon un profil de Prandtl.

$$u(z) = \frac{\bar{U}}{\log(H u / ez_0)} \log\left(\frac{z+z_0}{z_0}\right);$$

$$v(z) = \frac{\bar{V}}{\log(H v / ez_0)} \log\left(\frac{z+z_0}{z_0}\right)$$

(z₀ = 0,01 m).

Les coefficients de viscosité et de diffusion ont été choisis de façon empirique, en se basant sur des expressions déjà employées dans un précédent modèle, en plan vertical, de l'estuaire de la Seine (Salomon, 1981).

$$k_{ft} = 5.10^{-3} \text{ MKS (coefficient de frottement)}$$

$$N_x = 10000 \text{ MKS} = N_y \text{ (viscosité horizontale)}$$

Figure 13
Grille horizontale de calcul de la baie de Seine. DX = DY = 4 km ; DZ = 4 m.
Horizontal grid used for the Bay of Seine (DX = DY = 4 km, DZ = 4 m).

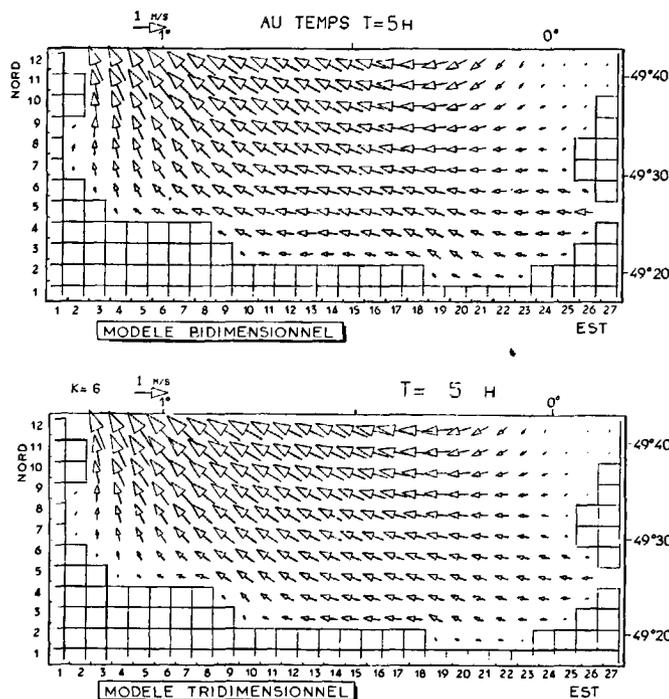


Figure 14
Champs de courants horizontaux 2 heures 1/2 avant la Basse Mer du Havre, calculés par les deux modèles.
Horizontal current field computed from the two models 2 h 1/2 before low tide.

Premier essai : eau homogène

Une comparaison qualitative des résultats du modèle « 3 D » et du modèle « 2 D » montre une bonne concordance générale des deux calculs en courants horizontaux et en niveaux d'eau, sauf dans l'estuaire de la Seine (fig. 14).

Le désaccord est dû à l'approfondissement artificiel de l'estuaire, effectué pour le modèle « 3 D » afin de disposer en toute circonstance d'au moins deux points de calcul de salinité sur la verticale.

La grandeur du pas d'espace vertical relativement à la faiblesse des profondeurs met en lumière un handicap de tous les modèles qui possèdent la dimension verticale, lorsqu'ils sont appliqués en zone littorale.

Ici, à cause du pas vertical constant, il est coûteux de modéliser de façon précise des régions de profondeurs très différentes.

A l'inverse, une technique qui emploierait un même nombre de points de calcul en tout lieu, quelle que soit la hauteur d'eau, ne permettrait pas de faire un calcul cohérent de structures ayant une dimension verticale constante. On peut citer les gradients de vitesse à proximité du fond, ou des tourbillons d'axe horizontal, qui seraient bien reproduits dans les secteurs où les points de calcul sont rapprochés, et impossibles à représenter

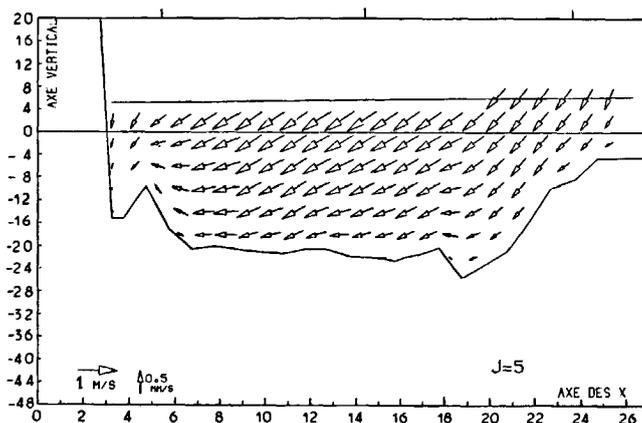
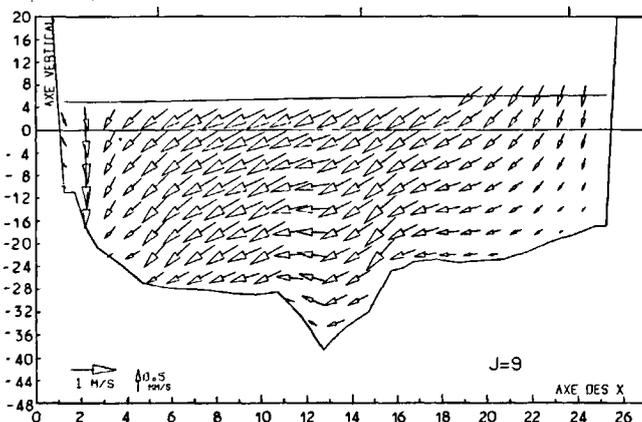


Figure 15
Coupes verticales Ouest-Est des courants (se référer à la figure 13 pour positionner les différentes ordonnées).
Velocity components along East-West cross-sections (see Figure 13 for the positions of transects).

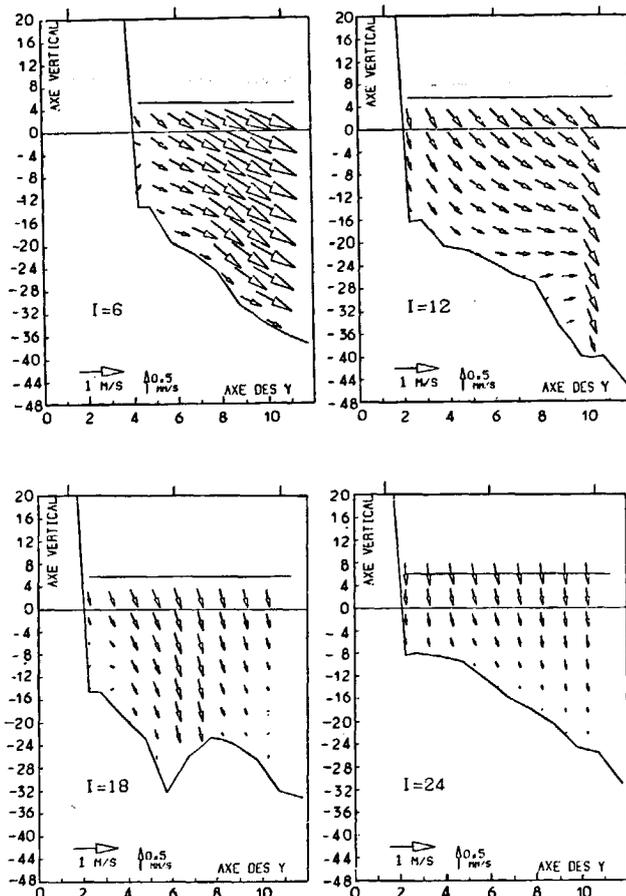


Figure 16
Coupes verticales Sud-Nord en différentes abscisses i.
Velocity components along North-South vertical cross-sections.

ailleurs, d'où la naissance d'oscillations numériques indésirables.

Les figures 15 et 16 montrent un exemple de la circulation tridimensionnelle dans la baie, en coupes verticales, longitudinales (fig. 15) et transversales (fig. 16). L'axe vertical a été dilaté par rapport aux axes horizontaux. On observe sur ces champs de vitesse certains effets de la topographie :

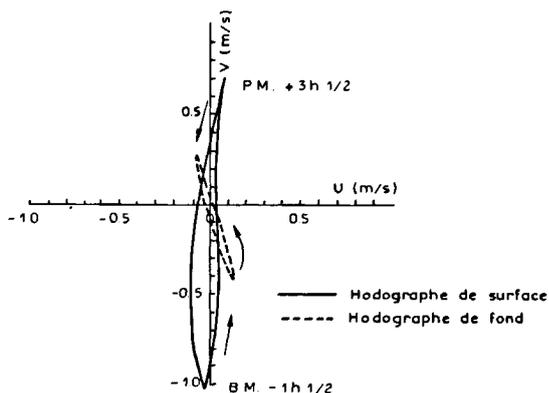


Figure 17
Hodographes au point $i = 3, j = 9$. Influence de la topographie.
Hodographs at location $i = 7, j = 9$ showing topographic influence.

- mouvements verticaux en profondeur, invisibles en surface;
- inversion de vitesse verticale due à des accidents de la topographie (coupe xOz, $j = 5$, en $i = 5,6$);
- inversion de la composante longitudinale du courant (coupe xOz, $j = 9$, en $i = 3$).

En ce point, le courant porte à l'Est et suit la côte, tandis qu'au fond il est dirigé vers l'Ouest, parallèlement à la ligne de la topographie. Les hodographes de surface et de fond ont alors des directions différentes (fig. 17).

On retrouve également le déphasage du courant sur la verticale qui peut donner lieu à une inversion de la vitesse au moment de la renverse (point A - cf. fig. 13; fig. 18 a). Cette avance du fond par rapport à la surface est observée sur les projections horizontales des vitesses en ce point; l'hodographe de fond est décalé vers la gauche par rapport à l'hodographe de surface (fig. 18 b).

Deuxième essai : densité variable

A partir d'un champ de salinité qui est utilisé comme condition initiale, le modèle complet permet d'observer les effets des gradients de densité sur la structure tridimensionnelle des courants.

Nous ne prendrons ici que l'exemple du point S₃ dans l'estuaire (position fig. 13) où les gradients horizontaux de salinité sont assez forts (0,9 ‰/km). On observe en ce point un basculement des profils verticaux de la composante Ouest-Est du courant (fig. 19) provoqué par l'intensification du courant au fond vers les eaux moins salées de l'estuaire.

Ce cisaillement vertical plus important est reproduit sur les hodographes intégrés (fig. 20) tracés en surface et au fond dans le premier et le deuxième essais. Lorsque la stratification est prise en compte, on observe des « vitesses résiduelles » (vecteur joignant les points 1 et 12) contraires en surface et au fond, typiques d'une circulation d'estuaire.

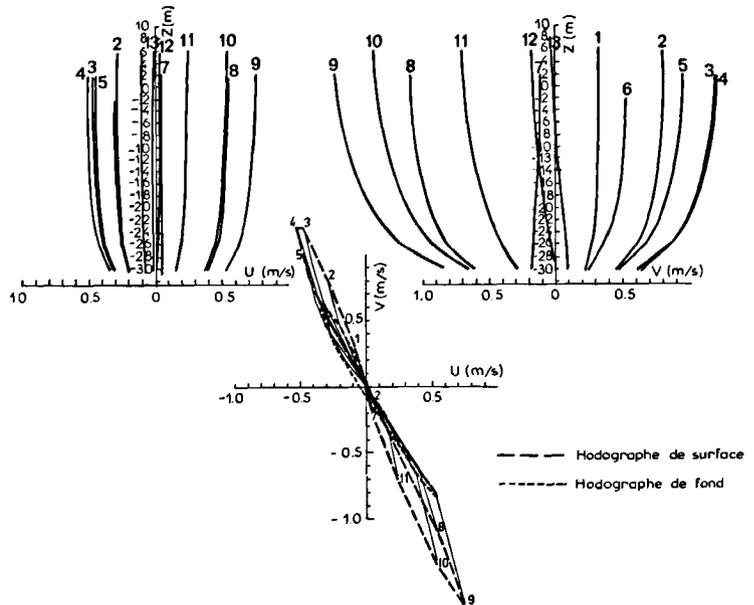


Figure 18
 a) Profils verticaux des composantes u et v au point A.
 b) Projection horizontale des vitesses au point A. Hodographes de fond et de surface (courbe N° 1 Pleine Mer du Havre + 1 heure 1/2).
 a) Vertical profiles of velocity components u and v at point A.
 b) Horizontal projections of the current velocity at point A. Bottom and surface hodographs (curve N° 1: High tide in Le Havre + 1 h 1/2).

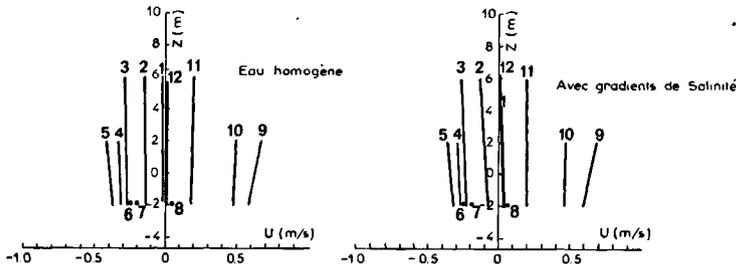
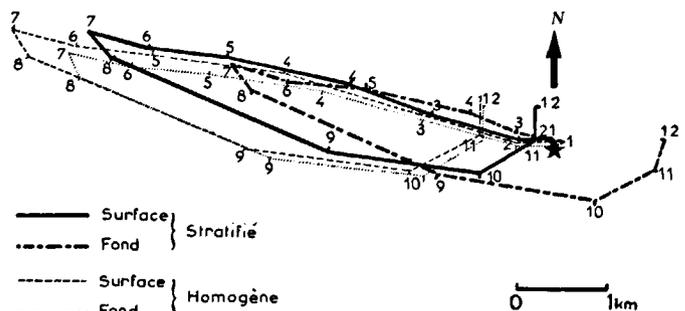


Figure 19
 Évolution des profils verticaux du courant U pendant une marée au point S₃.
 Evolution of vertical profile of the longitudinal component during a tidal cycle at point S₃.

Figure 20
 Hodographes intégrés en surface et au fond au point S₃.
 Surface and bottom integrated hodograph at point S₃.



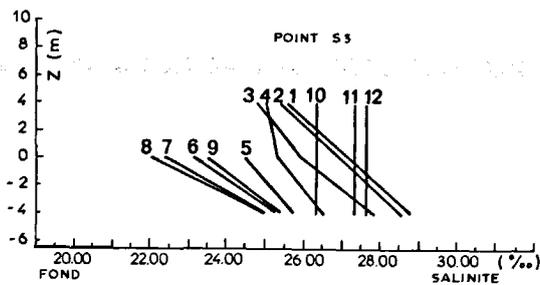


Figure 21
Profils verticaux des salinités au cours d'une marée au point S₃.
Vertical profiles of salinity during a tidal cycle at point S₃.

Les effets de l'inversion de densité qui en résulte, et qui probablement existent dans la nature de manière fugace, ne peuvent être correctement simulés dans le cadre de l'approximation hydrostatique. On considère donc que c'est par diffusion verticale intense, et non par advection que le contenu en sel se redistribue uniformément sur la verticale (fig. 21).

On peut espérer que des conditions initiales de salinité plus précises, et un meilleur étalonnage des profils verticaux de vitesse diminueraient la fréquence de ce phénomène. Des mesures en nature devront également préciser si des structures de densité inversée existent réellement, et quelle est leur durée de vie.

CONCLUSION

Cette application à une zone réelle a mis en évidence l'intérêt que présente ce modèle, mais aussi les contraintes imposées par sa forme actuelle.

- Lorsque les profondeurs varient beaucoup dans la zone étudiée, on est conduit à utiliser un pas d'espace petit sur tout le domaine. Le problème est bien connu dans tous les types de modèles, et peut être élégamment résolu par la technique des modèles gigognes, notamment. Cette solution a déjà été utilisée pour le modèle « 2 D » en plan vertical dont celui-ci est une extrapolation (de Borne de Grandpré *et al.*, 1981).

- La stabilité est faible. Pour limiter l'emplacement mémoire de ce modèle « 3 D », on a développé un schéma numérique mixte implicite-explicite, qui n'utilise que deux niveaux de discrétisation temporelle. Le critère de stabilité théorique qui en résulte est acceptable en milieu côtier et littoral, pour une discrétisation spatiale de quelques kilomètres. on a d'ailleurs pu constater, lors d'applications à des bassins de forme géométrique simple, qu'il était possible de dépasser ce critère. L'application à la baie de Seine a été plus délicate puisqu'il a fallu réduire le pas de temps jusqu'à 15 et même 10 s. Plus que le schéma numérique lui-même, il apparaît que sa dégénérescence près des limites solides de forme quelconque, pose des problèmes. C'est une

conséquence des impératifs très sévères auxquels doivent répondre les modèles mathématiques en zone côtière.

Une diminution du pas d'espace vertical, en restreignant le nombre de points aux frontières par rapport aux points intérieurs du modèle, améliorerait les performances.

- Les paramètres d'échange turbulent sont donnés ici de manière empirique. Il serait possible de compléter le modèle en résolvant simultanément l'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente, et de son taux de dissipation, mais cette sophistication ne sera vraiment nécessaire que lorsque les effets numériques du schéma auront été bien quantifiés.

Au titre des points forts du modèle, soulignons sa conception réellement tridimensionnelle. Cela nous semble constituer un progrès par rapport aux modèles pseudo-tridimensionnels qui associent un modèle « 2 D » et un modèle « 1 D », sans les intégrer totalement.

La notion de couche n'intervient pas. Il s'agit sur l'axe vertical, d'un modèle en valeurs locales, capable de traiter un domaine de forme géographique complexe, sans limitation de l'amplitude des variations de niveau.

Le fait que les points de calcul occupent une position fixe est également un avantage pour reproduire de façon identique sur tout le domaine des structures de faible dimension, ou pour conserver une vision eulérienne des phénomènes.

L'application du modèle à des situations schématiques s'est déjà révélée très fructueuse. La simulation du vent sur un océan visqueux, en prenant en compte tous les termes des équations de Navier-Stokes, mériterait à elle seule une interprétation théorique détaillée. Il en est de même pour les courants induits dans un bassin par la juxtaposition de masses d'eau douce et salée : la séparation et la persistance des courants de convection le long de l'interface qui se déplace, et des mouvements associés à l'onde barotrope, est riche d'enseignements. En produisant des structures de densité inverses de celles que l'on a coutume d'envisager, le modèle soulève un problème qui avait été ignoré jusqu'ici.

Sur ces questions, et sur d'autres, le modèle démontre son intérêt et ses possibilités. Mais un modèle « 3 D » est une construction complexe qui doit évoluer et s'améliorer longuement avant de parvenir à une configuration optimale, adaptée à la résolution des problèmes concrets qui se posent à l'océanographie côtière. On le vérifie à propos des modèles bidimensionnels, qui s'améliorent encore aujourd'hui.

Le modèle présenté est largement perfectible, mais dans son état actuel, il nous paraît constituer déjà un outil efficace pour l'étude en trois dimensions de l'hydrodynamique côtière.

Ce travail, effectué dans le cadre du Greco « Manche », a été financé par contrat CNEXO/COB.

RÉFÉRENCES

- Bennett J. R.**, 1977. A three-dimensional model of lake Ontario's summer circulation. comparison with observations, *J. Geophys. Oceanogr.*, 7, 591-601.
- Blumberg A., Mellor G. L.**, 1980. *A coastal ocean numerical model. Lecture notes on coastal and estuarine studies. Mathematical modelling of estuarine physics*, edited by J. Sundermann et al., Springer Verlag, Berlin, 203-214.
- Davies A. M., Owen A.**, 1979. Three dimensional numerical sea model using the Galerkin method with a polynomial basis set, *Appl. Math. Modelling*, 3, 321-428.
- De Borne de Grandpré C.**, 1979. Modèle bidimensionnel en temps réel de la circulation verticale estuarienne. Application à la Gironde, *Oceanol. Acta*, 2, 1, 61-68.
- De Borne de Grandpré C., El Sabh M. L., Salomon J.-C.**, 1981. A two-dimensional numerical model of the vertical circulation of tides in the Saint-Lawrence estuary, *Estuarine, Coastal Shelf-Sci.*, 12, 375-387.
- Forristall G. Z.**, 1974. Three dimensional structure of storm generated currents, *J. Geophys. Res.*, 79, 2721-2729.
- Freeman N. G., Hale A. M., Danard M. B.**, 1972. A modified sigma equations approach to the numerical modelling of Great Lakes hydrodynamics, *J. Phys. Res.*, 77, 1050-1060.
- Hamilton P.**, 1975. A numerical model of the vertical circulation of tidal estuaries and its application of the Rotterdam Waterway, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 40, 1-21.
- Hamilton P.**, 1976. On the numerical formulation of a time dependent multi-level model of an estuary, with particular reference to boundary conditions, *Estuarine processes*, 2, Martin Wiley ed.
- Heaps N. S.**, 1971. On the numerical solution of the three dimensional hydrodynamical equations for tides and storm surges, *Mem. Soc. R. Sci., Liège*, 6, 2, 143-180.
- Heaps N. S.**, 1980. Spectral method for the numerical solution of the three dimensional hydrodynamic equations for tides and surges, in: *Notes on coastal and estuarine studies, mathematical modelling of estuarine physics*, edited by J. Sundermann et al., Springer-Verlag, Berlin, 75-89.
- Leendertse J. J., Liu S. K.**, 1975. Three dimensional flow simulation in estuaries, The Rand Paper Series, 5452.
- Leendertse J. J., Liu S. K.**, 1978. A three dimensional turbulent energy model for non homogeneous estuaries and coastal sea systems, in: *Hydrodynamics of estuaries and fjords*, edited by J. C. J. Nihoul, Elsevier, Amsterdam, 387-405.
- Le Hir P.**, 1980. Calcul par modélisation numérique de la structure verticale des courants et application à la baie de Seine, *Thèse 3^e cycle, Univ. Bretagne Occidentale*, 122 p.
- Nihoul J.-C.-J.**, 1977. Three dimensional model of tides and storm surges in a shallow well mixed continental sea, in: *Dynamics in atmosphere and oceans*, 2, edited by J.-C.-J. Nihoul, Elsevier, Amsterdam, 29-47.
- Salomon J.-C.**, 1981. Modelling the turbidity maximum in the Seine estuary, in: *Ecohydrodynamics*, edited by J.-C.-J. Nihoul, Elsevier, Amsterdam.
- Salomon J.-C.**, 1982. Modèle mathématique de la circulation de marée en baie de Seine, Rapport interne, Univ. Brest, 30 p.
- Salomon J.-C., Le Hir P.**, 1981. *Étude de l'estuaire de la Seine. Modélisation numérique des phénomènes physiques*, Univ. Bretagne Occidentale, 286 p.
- Sheng Y. P., Lick W., Gedney R. T., Molls F. B.**, 1978. Numerical computation of three dimensional circulation in lake Erie. A comparison of a free-surface model and a rigid-lid model, *J. Geophys. Oceanogr.*, 8, 713-727.
- Thouvenin B.**, 1983. Modèle tridimensionnel de circulation et de dispersion pour des régions côtières à marée, *Thèse 3^e cycle, Univ. Bretagne Occidentale*, 269 p.
- Warluzel A., Burg M. C.**, 1979. Chenaux de navigation. Étude de la répartition tridimensionnelle des composantes horizontales des vitesses. Comparaison entre les résultats d'un code de calcul et ceux d'une étude expérimentale, Rapport du Laboratoire National d'Hydraulique, HE 041/79.22, 36 p.