

Détermination des perturbations locales en théorie de l'eau peu profonde généralisée. Problème d'Hilbert-Riemann

Onde solitaire
Perturbations locales
Fonction holomorphe
Transformations conformes
Problème d'Hilbert-Riemann

Solitary wave
Local perturbations
Analytical functions
Conformal transformations
Hilbert-Riemann's problem

Smaïl NAASSE ^a, Abdelhak KABBAJ ^b

^a Faculté des Sciences, Université Mohamed-V, Rabat, Maroc.

^b École Normale Supérieure, BP n° 5118, Takaddoum, Rabat, Maroc.

Reçu le 30/5/89, révisé le 11/10/89, accepté le 24/10/89.

RÉSUMÉ

Dans un océan homogène, le passage d'une onde longue au dessus d'un seuil engendre des perturbations locales dont les effets sont étudiés dans le présent travail. La théorie de l'eau peu profonde généralisée permet de déterminer aussi bien les coefficients de réflexion et de transmission que les perturbations locales. La détermination de ces dernières se ramène à la résolution du problème d'Hilbert-Riemann pour une configuration géométrique polygonale du seuil.

Oceanologica Acta, 1990, 13, 2, 171-176.

ABSTRACT

Calculation of local perturbations using the generalized shallow-water theory — Hilbert-Riemann's problem

For a homogeneous ocean, we study the effects of local perturbations on a sill when a long-wave passes over it. Generalized shallow-water theory permits us to determine reflexion and transmission coefficients as well as the local perturbations. Doing so is equivalent to solving a Hilbert-Riemann's problem for a sill of polygonal geometric configuration.

Oceanologica Acta, 1990, 13, 2, 171-176.

INTRODUCTION

Un problème classique en hydrodynamique des fluides à surface libre est l'étude des perturbations engendrées par le passage d'une onde sur un obstacle. Parmi les nombreux travaux consacrés à ce sujet, citons ceux de Lamb (1932), Dean (1945), Ursell (1947), Ogilvie (1960), et Evans (1970). Les études théoriques sont menées dans le cadre de la théorie linéarisée mais ne sont valables que pour les ondes incidentes de faible amplitude relative; lorsque cette amplitude augmente, les termes d'ordre supérieur prennent une importance qui peut devenir prépondérante et rendre inopérante la théorie linéaire. Pour l'étude des ondes longues et de leurs effets sur les obstacles, en l'occurrence un seuil, nous utilisons la théorie de « l'eau peu profonde généralisée » proposée par Germain (1971) qui met en évidence les perturbations locales.

POSITION DU PROBLÈME

Les équations de base sont formulées en variables paramétriques en schématisant le problème de la façon suivante :

Il s'agit d'étudier les mouvements bidimensionnels d'un fluide homogène parfait, pesant, dans un canal à fond imperméable, de section rectangulaire, présentant un haut-fond (fig. 1). Une onde longue provenant de l'infini en amont affronte le seuil, donnant naissance à un train d'ondes réfléchies et transmises ainsi qu'à des perturbations localisées au voisinage du seuil.

L'objet du présent travail est la détermination de ces perturbations locales.

Notons par M_0 , de coordonnées (a, b) , la position d'une particule fluide à l'instant initial; à l'instant t son

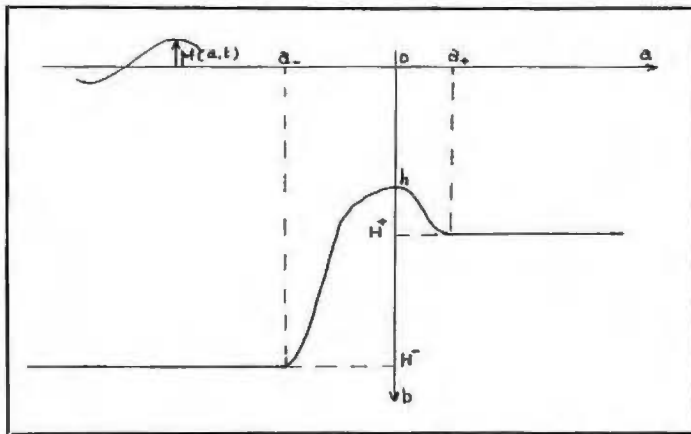


Figure 1
Configuration géométrique du canal.
Geometric configuration of the channel.

déplacement sera représenté par :

$$\begin{cases} X(a, b, t) = x(a, b, t) - a \\ Y(a, b, t) = y(a, b, t) - b \end{cases} \quad (I.1)$$

Les conditions cinématiques et dynamiques qui traduisent respectivement l'incompressibilité et l'irrotationnalité du fluide s'écrivent :

$$\frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial Y}{\partial b} + \frac{\partial X}{\partial a} \cdot \frac{\partial Y}{\partial b} - \frac{\partial X}{\partial b} \cdot \frac{\partial Y}{\partial a} = 0 \quad (I.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial b \partial t} \cdot \left(1 + \frac{\partial X}{\partial a}\right) - \frac{\partial X}{\partial b} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial a \partial t} \\ + \frac{\partial Y}{\partial a} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial b \partial t} - \left(1 + \frac{\partial Y}{\partial b}\right) \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial a \partial t} = 0. \end{aligned} \quad (I.3)$$

L'isobarité à la surface libre s'écrit, en prenant la pression atmosphérique comme pression de référence :

$$\left[\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \cdot \left(1 + \frac{\partial X}{\partial a}\right) + \frac{\partial Y}{\partial a} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = g \cdot \frac{\partial Y}{\partial a} \right]_{b=0} \quad (I.4)$$

Le fond est imperméable :

- Sur les parties horizontales :

$$Y(a, H^\pm, t) = 0. \quad (I.5)$$

- Sur le seuil :

$$X(f(b), b, t) + a = F(Y(f(b), b, t) + b) \quad (I.6)$$

où $a = f(b)$ représente l'équation du seuil.

Nous supposons qu'il n'y a pas de réflexion en aval. Le problème ainsi posé étant non linéaire, il est nécessaire de faire appel à une méthode de développement. Dans le cas des ondes longues, la théorie linéarisée suivant la méthode du petit paramètre de Poincaré perd son sens. En effet, pour une grande longueur d'onde, le petit paramètre de Poincaré « a » prend la valeur :

$$\begin{aligned} \ll a \gg = A \sqrt{\frac{g}{H}} \cdot \frac{\lambda}{4\pi} \quad & A : \text{amplitude de l'onde} \\ & g : \text{champ de la pesanteur} \\ & H : \text{profondeur} \\ & \lambda : \text{longueur d'onde} \end{aligned} \quad (I.7)$$

Lorsque la longueur d'onde augmente, le petit paramètre de Poincaré croît. Le cas limite de l'onde solitaire d'amplitude non nulle ne peut donc pas être décrit par la théorie linéarisée classique. Pour ce faire, nous utilisons la méthode de « l'eau peu profonde généralisée ».

Nous effectuons une distorsion sur la variable horizontale ainsi que sur le temps. Cette distorsion est caractérisée par le petit paramètre ϵ non précisé *a priori* :

$$\alpha = \epsilon \cdot a, \quad \beta = b, \quad \tau = \epsilon \cdot t.$$

Nous cherchons la solution du problème sous la forme de développement en séries doubles :

$$\begin{aligned} X(\alpha, \beta, \tau) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^n X_{n,m}(\alpha, \beta, \tau) \cdot e^{-m \cdot (K(\alpha)/\epsilon)} \end{aligned} \quad (I.8)$$

$$\begin{aligned} Y(\alpha, \beta, \tau) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^n Y_{n,m}(\alpha, \beta, \tau) \cdot e^{-m \cdot (K(\alpha)/\epsilon)} \end{aligned}$$

où $K(\alpha)$ est une fonction à déterminer de telle manière que les termes qui expriment les perturbations locales décroissent exponentiellement lorsqu'on s'éloigne du seuil.

$(X_{n,m}(\alpha, \beta, \tau), Y_{n,m}(\alpha, \beta, \tau))$ constitue l'approximation d'ordre (n, m) . Notons qu'au moyen de la distorsion effectuée sur la variable horizontale, le seuil considéré de pente assez forte est amené à une section voisine de la verticale.

Les calculs menés jusqu'à l'ordre $(2, m)$ nous ont permis de dégager la solutions à l'ordre $(1, m)$ de part et d'autre du seuil, compte tenu des conditions dans la masse fluide, sur les fonds horizontaux et à la surface libre ainsi que le fait que nos solutions soient bornées :

- en amont du seuil ($\alpha < 0$) :

$$\begin{aligned} X^- = X_e \left(\tau - \frac{\alpha}{\sqrt{gH^-}} \right) + X_r \left(\tau + \frac{\alpha}{\sqrt{gH^-}} \right) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} A_{1,m}^-(\tau) \cdot \cos \left(\frac{m\pi}{H^-} \beta \right) \cdot e^{m(\pi\alpha/\epsilon H^-)} \end{aligned} \quad (I.9)$$

$$Y^- = - \sum_{m=1}^{\infty} A_{1,m}(\tau) \cdot \sin \left(\frac{m\pi}{H^-} \beta \right) \cdot e^{m(\pi\alpha/\epsilon H^-)}$$

- en aval du seuil ($\alpha > 0$) :

$$\begin{aligned} X^+ = X_e \left(\tau - \frac{\alpha}{\sqrt{gH^+}} \right) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} A_{1,m}^+(\tau) \cdot \cos \left(\frac{m\pi}{H^+} \beta \right) \cdot e^{-m(\pi\alpha/\epsilon H^+)} \end{aligned} \quad (I.10)$$

$$Y^+ = \sum_{m=1}^{\infty} A_{1,m}^+(\tau) \cdot \sin \left(\frac{m\pi}{H^+} \beta \right) \cdot e^{-m(\pi\alpha/\epsilon H^+)}$$

où

$$* X_e \left(\tau - \frac{\alpha}{\sqrt{gH^\pm}} \right) \text{ caractérise l'onde émise.}$$

- * $X_r\left(\tau + \frac{\alpha}{\sqrt{gH^-}}\right)$ caractérise l'onde réfléchie.
- * $X_t\left(\tau - \frac{\alpha}{\sqrt{gH^-}}\right)$ caractérise l'onde transmise.
- * $A_{1,m}^\pm(\tau)$ caractérisent les perturbations locales au voisinage du seuil.

Il est possible de déterminer l'onde réfléchie et l'onde transmise, sans avoir à résoudre complètement le problème, en remarquant d'une part que le débit instantané à l'entrée et à la sortie du seuil est indépendant des perturbations locales, et d'autre part, que la dénivellation de la surface libre au droit du seuil à l'ordre 2 en ϵ n'est pas fonction des perturbations locales du moins à cet ordre d'approximation.

Nous obtenons donc au droit du seuil :

$$\begin{aligned} X_r(\tau) &= -\frac{1 - \sqrt{H^+/H^-}}{1 + \sqrt{H^+/H^-}} X_e(\tau) \\ X_t(\tau) &= \frac{2 \cdot (H^-/H^+)}{1 + \sqrt{H^-/H^+}} X_e(\tau) \end{aligned} \quad (I.11)$$

DÉTERMINATION DES PERTURBATIONS LOCALES

Les perturbations locales s'expriment en fonction de la variable $(\alpha/\epsilon = a)$ qui est la variable horizontale réelle. La distorsion est donc défaite et nous revenons à la configuration géométrique réelle du seuil pour la détermination des perturbations locales caractérisées par les $A_{1,m}^\pm(\tau)$.

Nous sommes amenés, en combinant les relations définissant X^\pm et Y^\pm , à chercher une fonction analytique dans le domaine défini pour la configuration géométrique du canal (sauf aux points de singularité) ayant comme développement en série :

$$\begin{aligned} a \leq 0 \quad F^-(z) &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_{1,m}^- \cdot e^{m(\pi/H^-) \cdot z}, \\ a \geq 0 \quad F^+(z) &= \frac{H^+}{H^-} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_{1,m}^+ e^{-m(\pi/H^+) \cdot z} \right), \end{aligned} \quad (II.1)$$

$z = a + i \cdot b$

avec

$$a_{1,m}^- = \frac{A_{1,m}^-(\tau)}{X_e(\tau) + X_r(\tau)}, \quad a_{1,m}^+ = \frac{A_{1,m}^+(\tau)}{X_t(\tau)} \quad (II.2)$$

Par un procédé simple de calcul d'intégrale complexe, nous obtenons :

$$a_{1,m}^- = \frac{1}{H^-} \cdot \text{Im} \int_a^{a'+iH^-} F(z) \cdot e^{-m(\pi/H^-) \cdot z} \cdot dz; \quad a < 0, \quad a' < a_- \quad (II.3)$$

$$a_{1,m}^+ = \frac{1}{H^+} \cdot \text{Im} \int_a^{a'+iH^+} F(z) \cdot e^{m(\pi/H^+) \cdot z} \cdot dz; \quad a > 0, \quad a' > a_+$$

Le problème consiste donc à déterminer, dans le domaine défini par la configuration géométrique du canal, une fonction analytique $F(z)$ vérifiant les conditions aux limites.

Cas du seuil de forme prismatique

Il est possible d'établir la solution explicite pour un seuil de section polygonale grâce aux transformations de Schwartz-Christoffel.

En effet, nous avons à déterminer une fonction analytique $F(a+ib)$ dans le domaine schématisé par la figure 2 et astreinte à ce que la partie « Image » soit nulle sur toute la frontière du domaine sauf sur les faces BC et DE du seuil où l'on impose respectivement :

$$R_e(F(z)) = \cotg(\delta\pi) \cdot \text{Im}(F(z)) \quad \text{sur [BC]} \quad (II.4)$$

$$R_e(F(z)) = -\cotg(\sigma\pi) \cdot \text{Im}(F(z)) \quad \text{sur [DE]}. \quad (II.5)$$

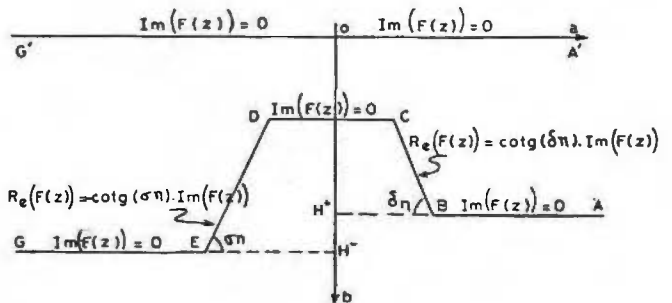


Figure 2
Configuration géométrique polygonale du seuil.
Polygonal geometric configuration of the sill.

Le problème ainsi posé est un problème d'Hilbert-Riemann homogène dans le cas d'un contour non fermé, ce qui revient à chercher une fonction analytique :

$$F(z) = u(a, b) + iv(a, b)$$

avec comme condition sur la frontière (C) du domaine (D) :

$$v(\xi) = B(\xi) \cdot u(\xi)$$

où $B(\xi)$ est une fonction réelle de la variable complexe (ξ) , continue par morceaux.

La résolution d'un tel problème est due à M. Muskhilishvili (1963).

Transformation conforme

On associe au domaine D, simplement connexe, le demi-plan complexe supérieur à partir de l'intégrale de Schwartz-Christoffel :

$$z(w) = K \cdot \int_{w_0}^w \frac{(w-c)^\delta \cdot (w-d)^\sigma}{w \cdot (w-1)^\delta \cdot (w-q)^\sigma} dw + z(w_0), \quad (II.6)$$

c, d, q , sont des constantes réelles et K est *a priori* une constante complexe que l'on déterminera à partir des correspondances définies par la transformation conforme; w_0 est un point arbitraire du demi-plan supérieur.

Nous effectuons la transformation conforme définie par l'intégrale (2.6) qui, au domaine D constitué par la configuration géométrique réelle du canal, associe le demi-plan complexe supérieur tel que, le long de l'axe réel, la fonction analytique $G(w)$ que nous cherchons soit astreinte à vérifier les conditions aux limites imposées par les conditions d'imperméabilité (fig. 3).

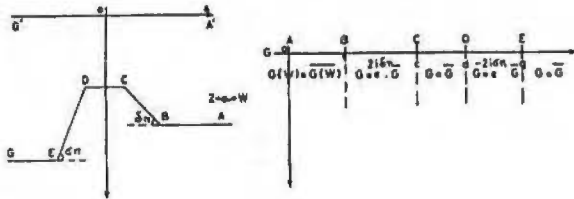


Figure 3
Transformation conforme.
Conformal transformation.

Résolution du problème d'Hilbert-Riemann

Nous avons effectué le changement de variable qui transforme la fonction analytique $F(z)$, définie dans le domaine représentant la configuration géométrique du canal, en la fonction $G(w)$ définie dans le demi-plan complexe positif où $G(w)$ est analytique et qui vérifie sur l'axe des réels ($\text{Im } w = 0$) les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} G(w) &= e^{2i\delta \cdot \pi} \cdot \overline{G(w)}, & w \in]1, c[\\ G(w) &= \overline{G(w)}, & w \in]-\infty, 1[\cup]c, d[\cup]q, +\infty[\\ G(w) &= e^{-2i\sigma \cdot \pi} \cdot \overline{G(w)}, & w \in]d, q[\end{aligned} \tag{II.7}$$

où $\overline{G(w)}$ représente le conjugué de $G(w)$.
En désignant par $\varnothing(w)$ la fonction définie par :

$$\begin{aligned} \varnothing(w) &= \varnothing^+(w) = G(w), & \text{Im } w \geq 0 \\ \varnothing(w) &= \varnothing^-(w) = \overline{G(w)}, & \text{Im } w \leq 0. \end{aligned} \tag{II.8}$$

La fonction est astreinte à satisfaire sur l'axe des réels les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \varnothing(w) &= e^{2i\pi \cdot \delta} \cdot \varnothing^-(w), & w \in]1, c[\\ \varnothing^+(w) &= \varnothing^-(w), & w \in]-\infty, 1[\cup]c, d[\cup]q, +\infty[\\ \varnothing^+(w) &= e^{-2i\pi \cdot \sigma} \cdot \varnothing^-(w), & w \in]d, q[. \end{aligned} \tag{II.9}$$

C'est un problème classique d'Hilbert-Riemann homogène. La fonction analytique ainsi cherchée s'écrit :

$$\begin{aligned} G(w) &= K(w) \cdot \frac{(w-d)^\sigma \cdot (w-c)^\delta}{(w-q)^\sigma \cdot (w-1)^\delta}, \\ \text{Im } w &\geq 0 \end{aligned} \tag{II.10}$$

où $K(w)$ est une fonction analytique sauf éventuellement aux points de discontinuité qui sont $(1, c, d, q)$.
 $G(w)$ est astreinte à vérifier les conditions imposées à

l'infini en amont et en aval du canal, ce qui impose :

$$K(\infty) = 1; \quad K(0) = \left(\frac{H^-}{H^+} \right)^2. \tag{II.11}$$

Calcul de la pression en présence d'un seuil

La pression au sein du fluide est fournie à partir de l'équation de Bernoulli en coordonnées de Lagrange :

$$\begin{aligned} p - p_a &= \rho \cdot g \cdot b + \rho \cdot g (Y(a, b, t) - Y(a, 0, t)) \\ &- \rho \int_0^b \left[\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \frac{\partial X}{\partial b} + \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \left(1 + \frac{\partial Y}{\partial b} \right) \right] db, \end{aligned} \tag{II.12}$$

avec
 p_a : pression atmosphérique.
 ρ : masse volumique du fluide.
 g : accélération de la pesanteur.

$Y(a, 0, t)$: dénivellation de la surface libre à l'instant t .
Au second ordre d'approximation, la pression en tout point du fluide s'écrit, conformément à la théorie de « l'eau peu profonde généralisée » :

$$\begin{aligned} p(a, b, t) &= (p_a + \rho \cdot gb) + \varepsilon \rho \cdot g Y_1(a, b, t) \\ &+ \varepsilon^2 \rho \cdot g (Y_{2,0}(a, b, t) - Y_{2,0}(a, 0, t)) \end{aligned} \tag{II.13}$$

d'où la pression de part et d'autre du seuil :

$$\begin{aligned} p^\pm &= (p_a + \rho \cdot gb) - \rho \cdot g \frac{2 \cdot \text{Im } F(a+ib)}{H^-(1 + \sqrt{H^+/H^-})} \\ &\times \left[\int_{a=0}^b \mu_e(a, t) da \right] - \rho \cdot g \frac{2b \mu_e(a, t)}{H^\pm (1 + \sqrt{H^+/H^-})}, \end{aligned} \tag{II.14}$$

où $\mu_e(a, t)$ représente la dénivellation de la surface libre correspondant à l'onde émise.
Notons que le terme

$$\left(\frac{-2\rho \cdot g \text{Im } F(a+ib)}{H^-(1 + \sqrt{H^+/H^-})} \left[\int \mu_e(a, t) da \right] \right)_{a=0}$$

représente la contribution des perturbations locales en présence du seuil.

Le choix de la représentation de la surface libre doit être caractérisé par la théorie de l'eau peu profonde qui nous a permis de mener nos calculs.

La représentation de l'onde émise est en toute circonstance modélisée par l'équation de Korteweg-de Vries (1885) dont la solution est une onde conoïdale admettant comme cas limite, quand la longueur d'onde augmente indéfiniment, l'onde solitaire.

Cas du passage d'une onde solitaire sur un seuil

L'application numérique envisagée concerne le passage d'une onde solitaire, sur un seuil prismatique. Nous comparons la pression due aux perturbations locales à la pression dynamique.

Dans le cas d'une onde solitaire émise de l'infini en

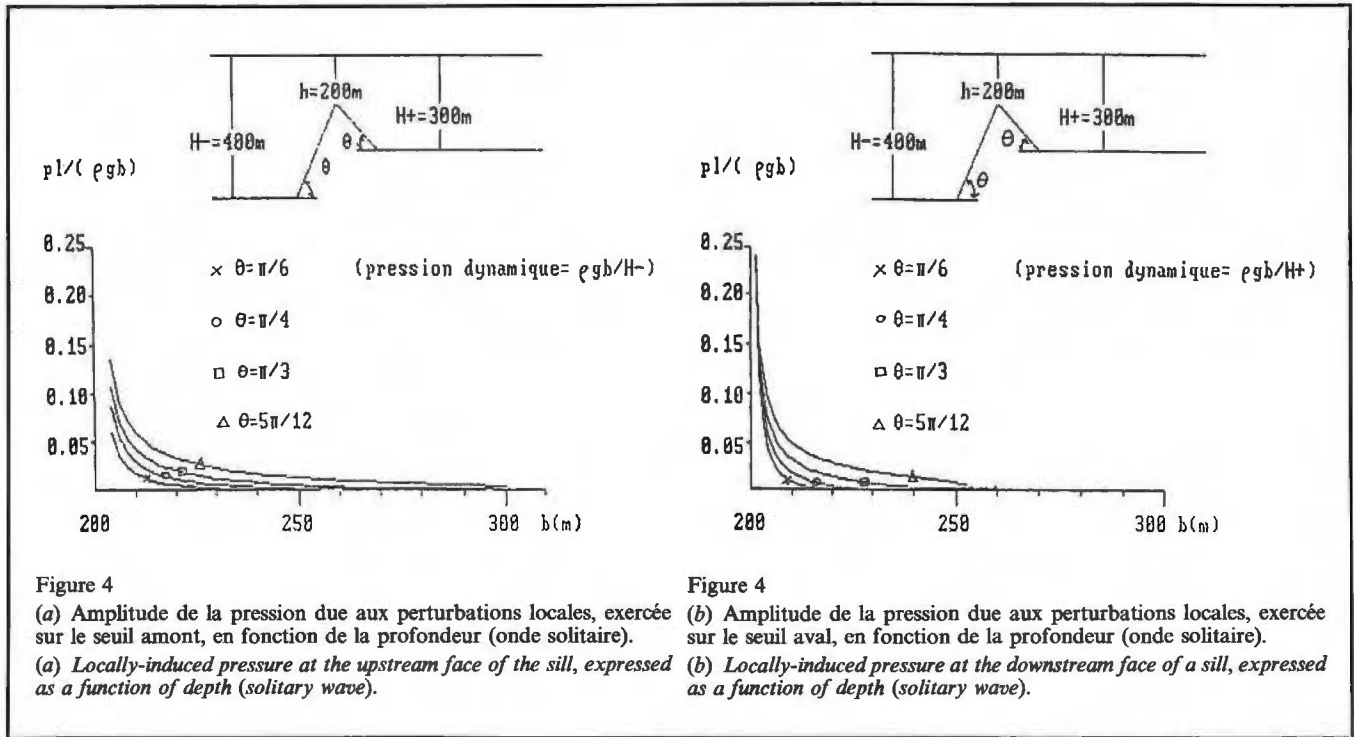


Figure 4
 (a) Amplitude de la pression due aux perturbations locales, exercée sur le seuil amont, en fonction de la profondeur (onde solitaire).
 (a) Locally-induced pressure at the upstream face of the sill, expressed as a function of depth (solitary wave).

Figure 4
 (b) Amplitude de la pression due aux perturbations locales, exercée sur le seuil aval, en fonction de la profondeur (onde solitaire).
 (b) Locally-induced pressure at the downstream face of a sill, expressed as a function of depth (solitary wave).

amont, la dénivellation de la surface libre est représentée par :

$$\mu_e(a, t) = \frac{-A_e}{ch^2(\sqrt{3A_e/H^-} (a - \sqrt{g \cdot H^-} \cdot t) / 2H^-)} \quad (II.15)$$

La pression dynamique, en tout point du seuil, s'écrit en amont (-) et en aval (+):

$$p_D^\pm = \frac{2\rho \cdot g \cdot b}{H^\pm (1 + \sqrt{H^\pm/H^-})} \times \frac{A_e}{ch^2(\sqrt{3g \cdot A_e} \cdot t / 2H^-)} \quad (II.16)$$

La pression due aux perturbations locales en amont (-) et en aval (+) du seuil s'écrit :

$$p_{PL}^\pm = \frac{\rho \cdot g \cdot \sqrt{A_e \cdot H^- / 3}}{1 + \sqrt{H^\pm/H^-}} \cdot \text{Im} F(a + ib) \times \text{th} \left(\frac{\sqrt{3g \cdot A_e}}{2 \cdot H^-} \cdot t \right) \quad (II.17)$$

où $F(a + ib)$ est la fonction caractérisant les perturbations locales. Les constantes de la transformation conforme se déterminent par la méthode de « dichotomie »; l'intégration numérique utilise la méthode de Gauss-Jacobi.

Nous avons tracé l'évolution de la pression due aux perturbations locales (fig. 4) en fonction de la profondeur autour du seuil dans le cas du passage d'une onde solitaire provenant de la plaine abyssale en affrontant

des talus de différentes pentes.

Nous remarquons l'importance de la pression due aux perturbations locales par rapport à la pression dynamique; elle s'explique en théorie de l'eau peu profonde généralisée, où les perturbations locales apparaissent au premier ordre tandis que la pression dynamique n'intervient qu'au second ordre.

La pression dynamique décroît selon une fonction « sech² » du temps, alors que la pression due aux perturbations locales croît selon une fonction « th »; donc seules persistent les perturbations locales qui devraient s'atténuer si nous tenions compte des termes de frottement sur le fond. La variation de la pente du seuil dans un domaine raisonnable n'a pas d'effet sensible sur le calcul des perturbations locales; l'assimilation du seuil à une pente droite, en théorie de l'eau peu profonde, simplifiant considérablement les calculs, est donc tout à fait justifiée.

CONCLUSION

La théorie de « l'eau peu profonde généralisée » nous a permis de justifier de l'importance des perturbations autour d'un obstacle tel qu'un seuil, sous l'effet du passage d'une onde longue. La méthode proposée est entièrement analytique.

Les schémas classiques « diffraction-radiation » utilisés dans le calcul des efforts sur des structures complètement ou partiellement immergées négligent les perturbations locales. Dans le cas des ondes longues, il est nécessaire de tenir compte de ces perturbations pour estimer correctement les efforts sur les structures en mer.

RÉFÉRENCES

- Dan W. R.** (1945). On the reflexion of surface waves by a submerged plane barrier. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **41**, 231-238.
- Evans D. V.** (1970). Diffraction of water waves by a submerged vertical plate. *J. Fluid Mech.*, **40**, 433-451.
- Germain J.-P.** (1971). Sur la généralisation de la théorie des mouvements en eau peu profonde. *C.R.A.S., Série A*, **273**, 1093.
- Korteweg D. J. and G. De Vries** (1885). On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal. *Phil. Mag., Series 5*, **39**, pp. 422-443.
- Muskhilishvili N. F.** (1963). *Singular integral equations. Hilbert-Riemann's problem.* Noordhoff Publ.
- Ogilvie T. F.** (1960). Propagations of waves over an obstacle in water of finite depth. *Ph. D Thesis U. of California, Berkeley.*
- Ursell F.** (1947). The effect of a fixed vertical barrier on surface waves in deep water. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **45**.
-