

**L'ABSORPTION DYNAMIQUE DES ONDES DE GRAVITE
EN REGIME INSTATIONNAIRE**

Thèse de Doctorat

Spécialité: DYNAMIQUE DES FLUIDES ET DES TRANSFERTS

ECOLE DOCTORALE
SCIENCES POUR L'INGENIEUR
DE NANTES

Présentée et soutenue publiquement par

Christophe MAISONDIEU

Le 25 Mars 1993 à l'Ecole Centrale de Nantes

devant le Jury ci-dessous:

M. Jean-Pierre GERMAIN	<i>Président, Rapporteur</i>
M. Pierre GUEVEL	<i>Rapporteur</i>
M. Patrice SULMONT	<i>Examineur</i>
M. Alain CLEMENT	<i>Examineur</i>

Directeur de thèse: M. Alain CLEMENT

Laboratoire de Mécanique des Fluides - Division Hydrodynamique Navale

**LISTE DES PROFESSEURS DES UNIVERSITES
EN POSTE A L'ECOLE CENTRALE DE NANTES**

Directeur : Professeur Pierre VAUSSY

MM les Professeurs	CHEDMAIL	Patrick	Mécanique, Génie mécanique, Génie civil
	CHIEM	Chi Yuen	"
	DAUBISSE	J.Claude	"
	DUBIGEON	Serge	"
	LAMY	Bernard	"
	LE HOUEDEC	Donatien	"
	MARICHAL	Dominique	"
	PESEUX	Bernard	"
	PIQUET	Jean	"
	REY	Claude	"
	ROYER	Jean	"
	SIEFFERT	J.Georges	"
	SULMONT	Patrice	"
	VAUSSY	Pierre	"
VILAINE	Jacques	"	
	DONCARLI	Christian	Génie informatique, Automatique et traitement
	KHALIL	Wisama	du signal
	LAFAY	J.François	"
de	LARMINAT	Philippe	"
	LE CORRE	J.François	"
	POGU	Marc	Mathématiques appliquées et traitement des mathématiques
	LUCAS	P.Michel	Informatique
	LE MAITRE	Félix	Milieux denses et matériaux
	RAMSTEIN	J.Bruno	Constituants élémentaires
	FRAYRET	J.Pierre	Chimie organique, minérale et industrielle

Le 3 Novembre 1992



-Couché !

REMERCIEMENTS

Je remercie ici Monsieur le Professeur P. SULMONT pour m'avoir accueilli durant ces trois années au sein du Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'E.C.N. et avoir bien voulu accepter de faire partie du jury.

Monsieur Pierre GUEVEL et Monsieur le Professeur J.P. GERMAIN ont bien voulu s'intéresser à mon travail et en être les rapporteurs. J'y suis très sensible et les prie pour cela de bien vouloir accepter mes plus vifs remerciements.

Travailler et collaborer avec Alain CLEMENT aura été durant ces presque quatre années d'échanges, un réel plaisir. Plus que de simples remerciements, je voudrais donc exprimer ici le souhait que se renouvelle et se prolonge cette expérience.

Un tel travail de recherche ne pouvait s'effectuer qu'avec la collaboration d'un grand nombre de personnes. Je voudrais donc encore remercier ici tous ceux qui, de près ou de loin, consciemment ou inconsciemment, par leur compétence ou leur seule bonne humeur, leurs idées ou leur simple patience, m'ont aidé à le mener à son terme.

SOMMAIRE

I

INTRODUCTION

II

MODELISATION DE L'ABSORPTION DYNAMIQUE EN THEORIE LINEARISEE ETUDE DANS LE DOMAINE FREQUENTIEL

II-1	<i>PRESENTATION DU PROBLEME</i>	p.11
II-2	<i>ADIMENSIONALISATION</i>	p.14
II-3	<i>POTENTIEL GENERE PAR UN BATTEUR PISTON EN MOUVEMENT D'OSCILLATIONS HARMONIQUES DANS UN CANAL SEMI-INFINI</i>	p.16
II-4	<i>POTENTIEL INCIDENT ET REFLECHI SUR LA PAROI S⁻</i>	p.18
II-5	<i>POTENTIEL TOTAL AU VOISINAGE DE S⁻</i>	p.19
II-6	<i>SOLUTION OPTIMALE AVEC FRONTIERE INFINIMENT SOUPLE</i>	p.20
II-6-1	<i>Frontière infiniment souple: domaine fréquentiel</i>	p.20
II-6-2	<i>Frontière infiniment souple: domaine temporel</i>	p.21
II-7	<i>SOLUTION OPTIMALE AVEC FRONTIERE A UN DEGRE DE LIBERTE</i>	p.24
II-7-1	<i>La vitesse de l'absorbeur</i>	p.26
II-7-2	<i>Les efforts hydrodynamiques sur l'absorbeur</i>	p.26
II-7-3	<i>La fonction de transfert d'absorption</i>	p.29
II-8	<i>LE MODE ASYMPTOTIQUE BASSES FREQUENCES</i>	p.34
II-9	<i>L'ABSORBEUR DE SALTER</i>	p.36

III

MODELISATION DE L'ABSORPTION DYNAMIQUE EN THEORIE LINEARISEE ETUDE DANS LE DOMAINE TEMPOREL

III-1 DEFINITIONS ET OPERATEURS MATHEMATIQUES.....	p.42
<i>La fonction de Heaviside.....</i>	<i>p.42</i>
<i>L'impulsion de Dirac.....</i>	<i>p.42</i>
<i>Le produit de convolution</i>	<i>p.43</i>
<i>La transformation de Fourier</i>	<i>p.44</i>
<i>La transformation de Laplace.....</i>	<i>p.45</i>
<i>Les systèmes linéaires invariants en temps.....</i>	<i>p.47</i>
<i>Réponse impulsionnelle d'un système L.T.I.....</i>	<i>p.47</i>
<i>La causalité</i>	<i>p.49</i>
<i>La stabilité.....</i>	<i>p.50</i>
III-2 MODELISATION DES ECOULEMENTS DANS UN CANAL BORNE.....	p.51
III-2-1 <i>Le potentiel total des écoulements.....</i>	p.52
III-2-2 <i>La pression dynamique au sein du fluide</i>	p.54
III-2-3 <i>Les efforts hydrodynamiques sur l'absorbeur</i>	p.54
III-3 PRESENTATION DE LA MISE EN ŒUVRE NUMERIQUE.....	p.57
III-4 PRESENTATION DES GRANDEURS CARACTERISTIQUES.....	p.60
III-4-1 <i>Les énergies dans le canal</i>	p.60
III-4-2 <i>La déformée de surface libre</i>	p.61
III-5 SOLUTION AVEC FRONTIERE A UN DEGRE DE LIBERTE.....	p.63
III-5-1 <i>La réponse impulsionnelle de l'absorbeur.....</i>	p.64
III-5-2 <i>La réponse impulsionnelle de radiation d'un batteur piston.....</i>	p.65
III-6 RECHERCHE ET PRESENTATION DES SOLUTIONS.....	p.68
III-6-1 <i>L'absorption en mode basses fréquences</i>	p.69

III-6-1-1 Résultats et limites du modèle asymptotique basses fréquences..	p.70
III-6-2 <i>Recherche d'un modèle causal</i>	p.90
III-6-2-1 Démonstration préliminaire.....	p.90
III-6-2-2 Application au cas de la fonction de transfert d'absorption	p.93
III-6-2-3 Le modèle causal approché.....	p.95
III-6-2-4 Identification des réponses impulsionnelles.....	p.98
III-6-2-5 Résultats du modèle causal approché.....	p.102
III-6-2-6 Relation de type <i>Salter</i>	p.125
III-6-3 <i>Recherche d'un modèle causal exact par identification de $H(i\omega)$</i> ..	p.127
III-6-3-1 Ecriture de $H(i\omega)$ sous forme de fraction rationnelle.....	p.128
III-6-3-2 Ecriture d'une relation de la forme $V(i\omega) = A(i\omega).V(i\omega) - B(i\omega).F(i\omega)$	p.131
III-6-3-3 Détermination des réponses impulsionnelles $a(t)$ et $b(t)$	p.135
<i>Présentation de la méthode des polynômes de Naslin</i>	p.136
<i>Application au calcul des transmittances $A(i\omega)$ et $B(i\omega)$</i>	p.137

IV

LE MODELE PHYSIQUE

IV-1 LE CANAL EXPERIMENTAL.....	p.142
IV-1-1 <i>Le batteur générateur</i>	p.142
IV-1-2 <i>Le batteur absorbeur</i>	p.143
IV-1-3 <i>La motorisation et l'électronique de commande</i>	p.144
IV-2 LES FONCTIONS DE TRANSFERT DES BATTEURS.....	p.146
IV-2-1 <i>La fonction de transfert du générateur</i>	p.146
IV-2-2 <i>La fonction de transfert de l'absorbeur</i>	p.148
IV-2-2-1 Mode basses fréquences.....	p.149
IV-2-2-2 Mode général.....	p.150
IV-3 LA PROGRAMMATION DES CONSIGNES.....	p.151
IV-3-1 <i>Le logiciel LabVIEW</i>	p.151
IV-3-2 <i>La commande de génération</i>	p.153
IV-3-3 <i>La commande d'absorption</i>	p.155
CONCLUSION	p.159

ANNEXES

ANNEXE 1

-POTENTIEL DE RADIATION D'UN BATTEUR PISTON..... p.165

ANNEXE 2

-GRANDEURS CARACTERISTIQUES DERIVANT DU POTENTIEL
DANS UN CANAL BORNE..... p.175
-La pression dynamique..... p.177
-Les efforts hydrodynamiques exercés par le fluide sur une paroi..... p.177
-Les énergies dans le canal..... p.179

ANNEXE 3

LE LISSAGE PAR SOMMES D'EXPONENTIELLES..... p.187

BIBLIOGRAPHIE

I

INTRODUCTION

La recherche expérimentale en hydrodynamique navale passe le plus souvent, compte tenu des dimensions des structures habituellement étudiées, par des essais et mesures en bassin de carènes, menés sur des maquettes à échelle réduite de ces structures (navires, plate-formes d'exploitation pétrolière,...). Les caractéristiques les plus généralement appréhendées lors de ces études sont la résistance à l'avancement des navires, leurs qualités de manœuvrabilité mais aussi leur comportement sur mer formée. Il a fallu pour ce faire doter ces bassins de systèmes générateurs de houle, le plus souvent constitués de volets articulés, pivotant autour d'un axe immergé et mis en action par des systèmes de vérins comme celui que l'on peut voir au bassin des carènes de l'Ecole Centrale de Nantes, ou encore de profils ellipsoïdaux en rotation autour d'un axe.

C'est avec le développement de ces essais sur houle, essentiellement depuis une quarantaine d'années, que sont apparues les limites des mesures en bassin. En effet, la taille de ces derniers étant limitée par nécessité, la houle se propageant dans le canal à des vitesses non négligeables vient rapidement se réfléchir sur les parois, conduisant en très peu de temps à un "état de mer" complètement différent de celui que l'on cherchait initialement à obtenir. La confusion apparaissant au sein des écoulements suite à ces réflexions est telle qu'il n'est alors plus possible de réaliser de mesures, le champ de vagues incident étant trop fortement bruité par les ondes réfléchies.

Pour pallier ce genre de difficultés, les bassins d'essais actuels sont le plus souvent munis, face aux générateurs, de systèmes d'absorptions dits passifs, généralement constitués de plages inclinées de rugosité contrôlée dissipant une partie de l'énergie de la houle incidente, par les effets de la rugosité et de la turbulence, le plus souvent après avoir provoqué le déferlement. Ce type de systèmes passifs possède deux inconvénients majeurs. Tout d'abord, leur efficacité

dépend des caractéristiques de la houle incidente (en particulier de sa longueur d'onde) et est loin d'être totale. De plus, la pente de ces plages ne pouvant être trop raide pour qu'elles soient efficaces, elles occupent une partie non négligeable du bassin, pouvant dépasser 10% de la longueur totale, limitant d'autant le domaine utile.

Le développement et l'amélioration de ces structures d'essais passe donc par l'élimination de ces phénomènes de réflexions. L'étape suivante dans ce domaine de l'absorption des ondes de gravité qui constituent la houle passe par l'absorption dite dynamique.

La théorie générale des absorbeurs dynamiques repose sur le principe de la superposition des ondes en théorie linéarisée et sur le fait en particulier que deux ondes de même fréquence et d'amplitudes égales et opposées s'annulent. Il s'agit donc contrairement au cas des systèmes passifs qui dissipent l'énergie dans le fluide sous une forme dégradée, de dissiper cette énergie à l'extérieur du fluide, dans le système absorbeur qui doit être, en moyenne, récepteur.

Bien que les ondes de gravité suivent des lois de comportement spécifiques (dispersion en fonction de la fréquence), le principe général de l'absorption dynamique de la houle est à rapprocher de celui de l'absorption active des ondes sonores, étudié en acoustique pour la réalisation par exemple de casques anti-bruit, ou encore, dans le tout autre domaine de la sismique, de celui de l'étude de structures antisismiques [68] [77].

D'un point de vue théorique, l'étude de l'absorption dynamique entre dans le cadre plus large de la recherche de conditions aux limites absorbantes (ou N.R.B.C. comme Non-Radiating Boundary Conditions, pour les anglo-saxons). La recherche de telles conditions s'impose dès lors que l'on souhaite simuler numériquement en domaine borné la propagation d'ondes, de toute nature, dans un domaine ouvert, non borné. Il s'agit d'un domaine de recherche à part entière et de nombreux travaux sont publiés sur ce thème (On pourra se reporter à des articles récents comme [5], [29], [50], [54],...).

Dans le cas des écoulements à surface libre, l'écriture de ces conditions aux limites est le plus souvent basée sur la relation différentielle dite de *Sommerfeld*, liant dans le domaine fréquentiel les grandeurs locales de vitesse (sur la frontière) et de pression et faisant intervenir la vitesse de phase des ondes se propageant dans le domaine. Cette dernière, fonction réelle explicite de la fréquence, n'est pas transposable dans le domaine temporel. Cette approche, qui revient à la détermination d'une fonction du temps assimilable en quelque sorte à une "vitesse de phase instantanée" [25], [57], a été tentée sans justification en régime instationnaire. *Orlansky* [69], en particulier, a proposé une méthode pour des écoulements hyperboliques, reprise par *Chan* [11] dans le cas d'écoulements à surface libre et qui est, semble-t-il, la seule méthode permettant de s'affranchir d'une connaissance a priori du contenu fréquentiel du système d'ondes arrivant à la paroi. *Engquist* et *Majda* [25] ont tenté, en introduisant des hypothèses d'approximation, de faire intervenir des relations différentielles d'ordre supérieur entre les mêmes grandeurs mais n'ont pu trouver de justification physique à ces hypothèses, en limitant l'application aux modèles numériques.

Ces méthodes, développées en vue d'une "absorption numérique" des ondes sortantes, sont caractérisées par le fait qu'elles ne font intervenir que des grandeurs locales en espace et en temps. Leur transposition à un système physique expérimental est de fait irréalisable car elle impliquerait l'emploi de parois souples dont le contrôle et l'asservissement ne sont à ce jour guère envisageables.

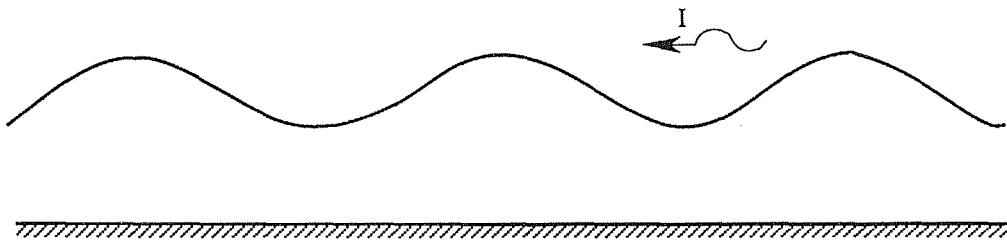
On se propose dans le cadre de cette étude de déterminer une relation d'absorption, utilisée comme loi de comportement d'une frontière rigide, qui soit utilisable comme condition aux limites ouverte d'un problème numérique mais qui soit aussi et surtout applicable à un système physique concret, autrement dit à un absorbeur dynamique de houle.

Un tel système doit être réalisable pratiquement et son contrôle ne dépendre que de grandeurs physiques accessibles à la mesure. Parmi les absorbeurs dynamiques déjà étudiés, on peut citer en particulier celui proposé par *Milgram* [64], permettant au moyen d'une relation appropriée et connaissant la dénivelée de surface libre en amont d'un volet articulé, d'imposer à celui-ci un mouvement tel qu'il absorbe l'onde incidente. Plus récemment, *Salter* [72] a développé un autre système basé sur le même principe mais faisant intervenir comme donnée d'entrée les efforts totaux sur l'absorbeur.

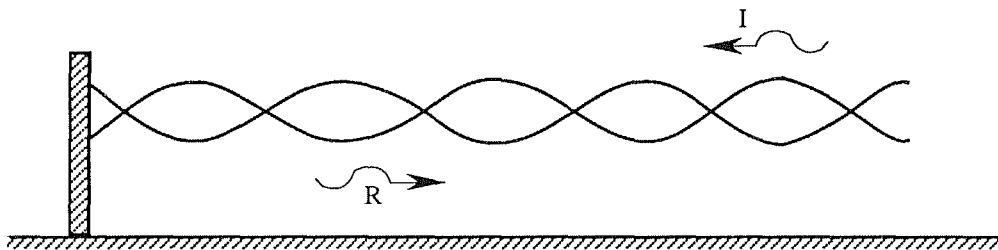
On fait ici le choix d'une frontière rigide verticale assujettie à se déplacer en un mouvement de translation horizontale, autrement dit, d'un batteur piston. La loi de vitesse que l'on cherche alors à déterminer pour que ce batteur fonctionne en absorbeur fait nécessairement intervenir une grandeur caractéristique de l'écoulement. On choisit pour celle-ci les efforts hydrodynamiques exercés par le fluide sur la paroi, moins sensible en particulier aux perturbations locales que la déformée de surface libre.

Sur cette base, le principe de l'absorption dynamique peut être simplement décrit à l'aide des schémas de la FIGURE 1. Une onde incidente I, se propageant dans un milieu de profondeur finie, subit lorsqu'elle rencontre un obstacle sous forme d'une paroi fixe placée dans un plan perpendiculaire à sa direction de propagation, une réflexion totale qui se traduit par l'apparition d'une onde réfléchie R de même fréquence. Dans le cadre d'une modélisation linéaire, cette onde réfléchie peut être superposée à la première sans qu'il y ait de retard entre les deux (FIGURE 1b). Le principe de l'absorption dynamique repose alors sur l'idée qu'en remplaçant ce mur fixe par une paroi mobile, il est possible de générer, par le mouvement de cette dernière, une onde ayant des caractéristiques telles que superposée à l'onde réfléchie, elle entraîne leur annihilation mutuelle. On retrouverait alors dans le bassin ainsi fermé une houle équivalente à la houle initiale se propageant en milieu infini (FIGURE 1d).

Cette présentation faisant appel au principe de superposition ne tient bien entendu que dans le cadre d'une approche linéarisée du problème. Par ailleurs, la génération d'ondes par un batteur piston entraîne l'apparition de vagues dites proches, ne se propageant pas et faisant qu'à proximité de la paroi, l'absorption ne pourra être parfaite. Le problème n'est de fait pas aussi simple que cette description pourrait laisser supposer.

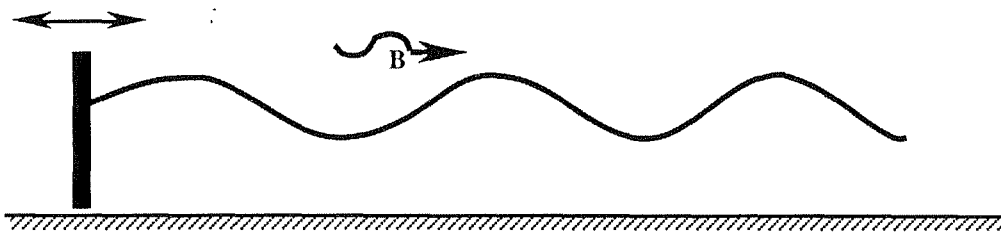


-a)

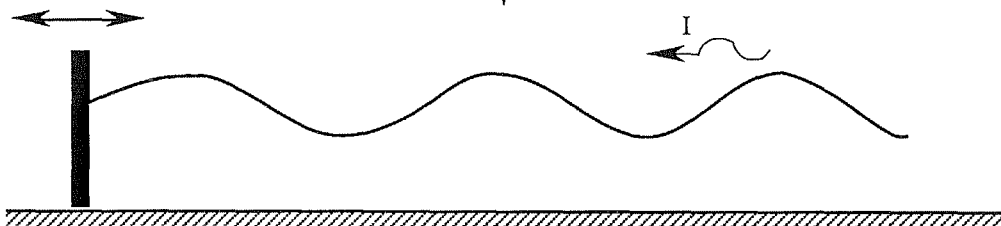


-b)

+



-c)



-d)

FIGURE 1

Compte tenu des propriétés même des fluides, il n'est possible d'avoir accès par la mesure instantanée, qu'à une connaissance globale des écoulements et ce, quelle que soit la grandeur caractéristique prise en compte lors de la mesure. On ne pourra en particulier pas identifier au sein des écoulements la composante incidente indépendamment des composantes réfléchie ou de radiation.

Dans une description temporelle et si l'on se place du point de vue de l'historique des efforts sur le batteur, il sera impossible de discerner ce qui en constitue l'avenir (onde incidente) et ce qui en constitue le passé (onde réfléchie). Il ne sera par suite pas aisé de garantir la causalité du système et donc sa réalisabilité.

Le but de ce travail est de déterminer une loi d'absorption applicable dans le cas d'un batteur piston, suivant une formulation efforts-vitesse transposable à terme à un système physique concret. La résolution du problème dans le domaine fréquentiel, tout d'abord exposée, ne pose aucun problème. Le passage au domaine temporel par transformation de Fourier inverse est ensuite présenté. On met ainsi en lumière l'origine des difficultés rencontrées pour obtenir un modèle causal, réalisable. Plusieurs méthodes sont proposées pour contourner cette difficulté intrinsèque. On évoque enfin brièvement la partie expérimentale de ce travail qui, pour des raisons matérielles, n'a pu être menée à son terme.

MODÉLISATION DE L'ABSORPTION DYNAMIQUE
EN THÉORIE LINÉARISÉE

II

ÉTUDE DANS LE DOMAINE FRÉQUENTIEL

II-1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME.

On considère dans le cadre de cette étude, un élément de fluide pesant, contenu dans un canal rectangulaire bidimensionnel semi-infini, de profondeur finie h et limité à son extrémité par une paroi verticale mobile (FIGURE 2).

On associe à ce canal un repère plan orthonormé dont l'origine est située à l'intersection de la surface libre du fluide au repos ($y=0$) et de la position de repos de la paroi du canal ($x=0$). Les abscisses sont comptées positives de gauche à droite à partir de l'origine et les ordonnées positives suivant la verticale ascendante.

La paroi verticale limitant le domaine est mobile et peut donc fonctionner en batteur de houle. Elle est notée S^- et est animée d'une vitesse \vec{V} , comptée positive dans le sens des x croissants. Les normales sont orientées vers l'extérieur du domaine fluide.

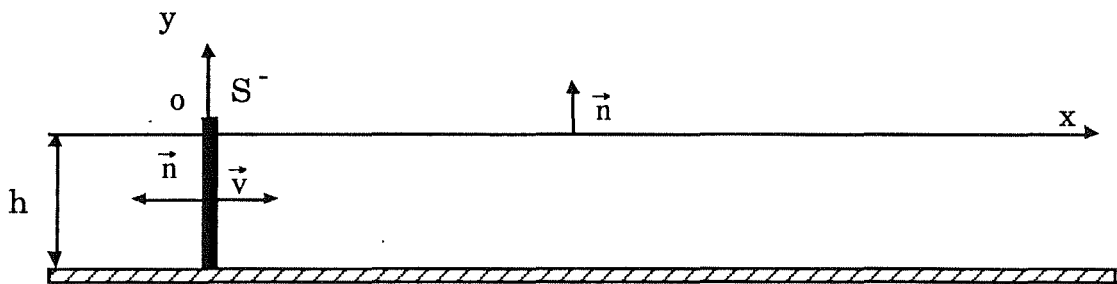


FIGURE 2

On considère dans ce canal une onde incidente progressive, générée à l'infini et se propageant donc suivant la direction des x décroissants. On se propose alors de déterminer la loi de vitesse de S^- faisant de celui-ci un absorbeur, c'est à dire lui permettant de se comporter de telle façon qu'il ne réfléchisse pas cette onde incidente et que le champ de vagues se développant dans le canal soit alors équivalent, sauf peut être au voisinage de S^- , à celui qui se propagerait dans un domaine infini.

L'étude mathématique générale du système sera développée dans le cadre de la théorie linéaire des écoulements à potentiel de vitesse et avec toutes les approximations que cela sous entend.

On est ainsi amené à faire les trois hypothèses suivantes sur le fluide contenu dans le canal :

- Fluide parfait et homogène
- Fluide incompressible
- Ecoulement irrotationnel

La cinématique de l'écoulement est alors entièrement déterminée dès lors que l'on connaît la fonction potentiel $\Phi(X,Y,T)$ dont dérive le champ de vitesse des particules de fluide. Compte tenu des hypothèses précédentes, ce potentiel des vitesses satisfait à l'équation de Laplace:

$$[\text{II-1}] \quad \Delta\Phi(X,Y,T) = 0 \quad (0 < X < \infty, -h < Y < 0, T \geq 0)$$

Equation à laquelle il convient de rajouter les conditions aux limites et conditions initiales caractérisant le système.

Les conditions aux limites, c'est à dire sur la paroi, le fond et la surface libre, s'écrivent dans le cas de la théorie bidimensionnelle linéaire:

$$[\text{II-2}] \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\Phi(0,Y,T)}{\partial X} = \vec{v}(T) \cdot \vec{n} = -v(T) \quad \text{sur l'absorbeur } (x=0, -h \leq Y \leq 0) \\ \frac{\partial\Phi(X,0,T)}{\partial Y} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2\Phi(X,0,T)}{\partial T^2} = 0 \quad \text{sur la surface libre } (0 \leq X < \infty, Y=0) \\ \frac{\partial\Phi(X,-h,T)}{\partial Y} = 0 \quad \text{sur le fond } (0 \leq X < \infty, Y=-h) \end{array} \right.$$

La condition de glissement sur la paroi impose au fluide une vitesse horizontale égale à la vitesse de translation du batteur.

La condition de surface libre traduit à la fois la condition dynamique de pression nulle et la condition cinématique sur la vitesse des particules de fluide

La condition de vitesse verticale nulle sur le fond est une condition d'imperméabilité.

On considère qu'à l'instant initial, le fluide est au repos dans le canal et le potentiel nul en tout point. Le batteur quant à lui, est à sa position de repos, ce qui se traduit par les relations:

$$[\text{II-3}] \quad \left| \begin{array}{l} \Phi(X, Y, 0) = 0 \\ V(0) = 0 \end{array} \right. \quad (0 \leq X < \infty, -h \leq Y \leq 0)$$

La réponse du fluide à une excitation sinusoïdale du batteur est linéaire, grâce aux hypothèses consenties. Après extinction des transitoires, en régime harmonique établi, le potentiel des vitesses sera de la forme:

$$[\text{II-4}] \quad \Phi(X, Y, T) = \text{Re} \left\{ \Phi_0(X, Y) \cdot e^{iWT} \right\} = \Phi^{\circ} \cos(WT) + \Phi^{\circ\circ} \sin(WT)$$

Le potentiel $\Phi(X, Y, T)$ est une grandeur réelle. Afin d'alléger l'écriture, on omettra de préciser dans la suite des développements dans le domaine fréquentiel la notation $\text{Re}\{\}$ indiquant que l'on ne considère que la partie réelle du terme $\Phi_0(X, Y) \cdot e^{iWT}$.

Avec cette notation, la condition de surface libre donnée dans le système d'équations [II-2] devient:

$$[\text{II-5}] \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial Y} - \frac{W^2}{g} \cdot \Phi_0 = 0 \quad (Y=0)$$

elle est alors indépendante du temps et se ramène à une condition de type *Robin-Fourier* sur la position moyenne ($Y=0$) de la surface libre.

II-2 ADIMENSIONALISATION

Le problème général ainsi posé, on peut effectuer une adimensionalisation des différentes grandeurs afin d'homogénéiser les résultats présentés par la suite. Les grandeurs physiques sont représentées en caractères majuscules et leurs équivalents adimensionnels en minuscules.

- Les longueurs sont réduites par la profondeur h du canal:

$$x = \frac{X}{h} \qquad y = \frac{Y}{h}$$

- Le temps est réduit par le terme $\sqrt{\frac{g}{h}}$

$$t = T \cdot \sqrt{\frac{g}{h}}$$

- La pulsation est réduite par le terme $\sqrt{\frac{h}{g}}$

$$\omega = W \cdot \sqrt{\frac{h}{g}}$$

- La vitesse est réduite par le terme $\sqrt{g \cdot h}$

$$v = \frac{V}{\sqrt{g \cdot h}}$$

- Le potentiel est réduit par le terme $\frac{1}{h^2} \cdot \sqrt{\frac{h}{g}}$

$$\phi = \Phi \cdot \frac{1}{h^2} \cdot \sqrt{\frac{h}{g}}$$

- La déformée de surface libre est réduite par la profondeur h du canal

$$\eta = \frac{H}{h}$$

- La pression est réduite par le terme $\rho \cdot g \cdot h$

$$p = \frac{P}{\rho \cdot g \cdot h}$$

- Les efforts par unité de largeur sont réduits par le terme $\rho \cdot g \cdot h^2$

$$f = \frac{F}{\rho \cdot g \cdot h^2}$$

- Le travail est réduit par le terme $\frac{1}{\rho \sqrt{g^3 \cdot h^5}}$

$$T = \frac{T}{\rho \sqrt{g^3 \cdot h^5}}$$

- L'énergie est réduite par le terme $\frac{1}{\rho \cdot g \cdot h^3}$

$$e = \frac{E}{\rho \cdot g \cdot h^3}$$

**II-3 POTENTIEL GÉNÉRÉ PAR UN BATTEUR PISTON EN MOUVEMENT
D'OSCILLATIONS HARMONIQUES DANS UN CANAL SEMI-INFINI**

On considère un canal semi-infini dont la frontière est mobile et peut donc être génératrice d'ondes se propageant au sein du fluide. La loi de vitesse $v(y,t)$ de cette paroi est a priori quelconque et peut donc dépendre à la fois des variables locales d'espace y et de temps t . Dans le cas particulier où la frontière est constituée d'une paroi rigide, la loi de vitesse peut être écrite en séparant les variables: $v(y,t) = f(y).v(t)$ et dans le cas du batteur piston (paroi verticale), on a encore plus simplement: $v(y,t) = v(t)$.

La résolution du problème différentiel que constitue la détermination du potentiel associé à l'onde générée dans un canal semi-infini par un batteur piston animé d'une vitesse $v(t)$ donnée, entièrement décrit par le jeu d'équations suivant:

[II-6]	$\Delta\phi=0$	dans le fluide
	$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \vec{v} \cdot \vec{n}$	sur le batteur ($x=0, -1 \leq y \leq 0$)
	$\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\omega^2}{g} \cdot \phi = 0$	sur la surface libre ($y=0$)
	$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0$	sur le fond ($y=-1$)

ne pose pas de problème majeur.

Dans le cas présent du mouvement harmonique établi à la fréquence ω , la vitesse de translation de l'absorbeur

[II-7] $\vec{v}(t) = v(t) \cdot \vec{x}$

peut s'exprimer en régime harmonique établi par une relation de la forme:

$$[\text{II-8}] \quad v = v^{\circ} \cos(\omega t) + v^{\infty} \sin(\omega t) = \operatorname{Re}\left\{\left(v^{\circ} - i.v^{\infty}\right).e^{i\omega t}\right\}$$

La classique méthode de séparation des variables pour laquelle on écrit le potentiel sous forme d'un produit de fonctions de chacune des variables indépendantes:

$$[\text{II-9}] \quad \phi(x,y,t) = \operatorname{Re}\{F(x).G(y).e^{i\omega t}\}$$

conduit à l'expression générale du potentiel (cf. ANNEXE 1):

$$[\text{II-10}] \quad \phi(x,y,t) = [A.\cos(m_0x - \omega t) + B.\sin(m_0x - \omega t)].\cosh(m_0(y+1)) \\ + \sum_{k=1}^{k=\infty} [C^k \cos(\omega t) + S^k \sin(\omega t)].e^{-m_k x}.\cos(m_k(y+1))$$

avec les relations de dispersion sur les modes:

$$[\text{II-11a}] \quad m_0.\tanh(m_0) = \omega^2$$

$$[\text{II-11b}] \quad m_k.\operatorname{tg}(m_k) = -\omega^2$$

Les nombres d'onde m_k étant les racines positives de l'équation implicite [II-11b], le second terme de l'expression du potentiel décroît de manière exponentielle lorsque la distance au batteur x augmente, devenant rapidement négligeable devant le premier. C'est pourquoi il est souvent appelé terme de vagues proches ou évanescentes.

Les coefficients A, B, C^k et S^k s'expriment en fonction des amplitudes de la vitesse v° et v^{∞} par les relations:

$$[\text{II-12a}] \quad \left\{ \begin{array}{l} A = v^{\circ}.v^{\infty} \\ B = v^{\circ}.v^{\infty} \end{array} \right.$$

$$[\text{II-12b}] \quad \left\{ \begin{array}{l} C^k = v^k.v^{\circ} \\ S^k = v^k.v^{\infty} \end{array} \right.$$

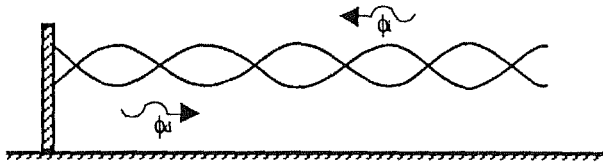
dans lesquelles les coefficients v° et v^k ont été obtenus en décomposant $v(t)$ sur la base de la famille des fonctions orthogonales $\cosh(m_0(y+1))$ et $\cos(m_k(y+1))$ apparaissant dans l'expression du potentiel [II-10]. En écrivant la condition de glissement sur le batteur et en faisant apparaître les identités remarquables liées aux propriétés des fonctions orthogonales (cf. ANNEXE 1), il vient, en identifiant terme à terme:

$$[\text{II-13a}] \quad v^{\circ} = \frac{4.\sinh(m_0)}{m_0.(2.m_0 + \sinh(2.m_0))}$$

$$[\text{II-13b}] \quad v^k = -\frac{4.\sin(m_k)}{m_k.(2.m_k + \sin(2.m_k))}$$

II-4 POTENTIEL INCIDENT ET RÉFLÉCHI SUR LA PAROI S⁻

On considère un canal bidimensionnel semi-infini de frontière S⁻ immobile. Sur cette paroi arrive une houle d'Airy, se propageant depuis l'infini, de la droite vers la gauche (vers les x négatifs dans le repère de la FIGURE 2). Puisque l'on se propose à terme de déterminer une loi de mouvement pour la frontière S⁻, permettant de la faire fonctionner comme un batteur absorbeur, on peut faire l'hypothèse que le champ de vagues incident a été généré à une distance suffisamment grande pour que l'on puisse en négliger le terme évanescent. Le potentiel ϕ_i associé à cette onde incidente a alors pour expression:



$$[II-14a] \quad \phi_i = [A_i \cos(m_0 x + \omega t) + B_i \sin(m_0 x + \omega t)] \cdot \cosh(m_0(y+1))$$

La présence de la paroi S⁻ immobile entraîne une réflexion totale de l'onde incidente et donc l'apparition d'un potentiel réfléchi ϕ_d . En écrivant la condition de glissement sur S⁻ fixe:

$$[II-15] \quad \left. \frac{\partial \phi_d}{\partial x} = - \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right|_{x=0}$$

il vient une relation entre les coefficients d'amplitude des potentiels ϕ_i et ϕ_d :

$$[II-16] \quad \left| \begin{array}{l} A_d = A_i \\ B_d = -B_i \end{array} \right.$$

et le potentiel associé à l'onde réfléchie progressive se propageant vers les x positifs s'écrit:

$$[II-14b] \quad \phi_d = [A_i \cos(m_0 x - \omega t) - B_i \sin(m_0 x - \omega t)] \cdot \cosh(m_0(y+1))$$

En présence d'une houle d'Airy incidente et en l'absence de mouvement de la paroi, le potentiel total de l'écoulement s'écrit en vertu des hypothèses de linéarisation comme la somme $\phi_i + \phi_d$.

II-5 POTENTIEL TOTAL AU VOISINAGE DE S^-

Si l'on considère à présent la frontière S^- comme une surface plane verticale rigide et mobile, il convient d'ajouter à ces deux potentiels celui associé à l'onde générée par le mouvement de cette paroi. Cette onde se propage vers les x positifs. Elle présente une composante évanescence ou vague proche et une composante progressive. Si l'on prend pour expression de la vitesse de la paroi la relation [II-8], le potentiel de radiation ϕ_b associé à cette onde a donc pour expression:

$$\begin{aligned}
 \text{[II-14c]} \quad \phi_b = & [A_b \cos(m_0 x - \omega t) + B_b \sin(m_0 x - \omega t)] \cdot \cosh(m_0(y+1)) \\
 & + \sum_{k=1}^{k=\infty} [C_b^k \cos(\omega t) + S_b^k \sin(\omega t)] \cdot e^{-m_k x} \cdot \cos(m_k(y+1))
 \end{aligned}$$

où les coefficients A_b, B_b, C_b^k et S_b^k sont donnés par les expressions [II-12] et [II-13].

On pourra noter que dans ces formulations des potentiels, aucune hypothèse n'a été faite jusqu'à présent en ce qui concerne les propriétés d'absorption de la paroi S^- . On a simplement développé l'expression du potentiel total dans le canal au voisinage de la paroi mobile:

$$\text{[II-17]} \quad \phi(x, y, t) = \phi_i + \phi_d + \phi_b$$

$$\begin{aligned}
 \phi(x, y, t) = & [(A_b + A_i) \cos(m_0 x - \omega t) + (B_b - B_i) \sin(m_0 x - \omega t) + A_i \cos(m_0 x + \omega t) + B_i \sin(m_0 x + \omega t)] \cdot \cosh(m_0(y+1)) \\
 \text{[II-18]} \quad & + \sum_{k=1}^{\infty} [C_b^k \cos(\omega t) + S_b^k \sin(\omega t)] \cdot e^{-m_k x} \cdot \cos(m_k(y+1))
 \end{aligned}$$

On n'a pas précisé, jusqu'à maintenant, l'origine du potentiel incident. Celui-ci peut-être dû au mouvement d'un batteur ou d'un corps situé dans le bassin et émettant lui même des ondes vers S^- ou encore de toute combinaison des deux.

Le domaine d'étude étant décrit et les écoulements en son sein caractérisés, il est dès lors possible de s'intéresser au problème de l'absorption. On va donc maintenant s'attacher plus particulièrement à développer de nouvelles hypothèses, conditions supplémentaires à imposer au mouvement du batteur S^- pour qu'il se comporte en absorbeur dynamique.

II-6 SOLUTION OPTIMALE AVEC FRONTIÈRE INFINIMENT SOUPLE

Le problème de l'absorption a déjà fait l'objet de plusieurs études, essentiellement dans le but de réduire le domaine et par suite la durée de calcul des codes de résolution numérique de problèmes extérieurs. Différentes méthodes ont été proposées jusqu'à présent. L'angle essentiellement numérique sous lequel ce problème a été étudié a plus particulièrement favorisé le développement de conditions d'absorption locales sous forme de frontières dites ouvertes dont le comportement peut se rapprocher de celui d'une paroi infiniment souple.

II-6-1 Frontière infiniment souple: domaine fréquentiel

Parmi ces méthodes d'absorption développées dans le cadre de la simulation numérique des écoulements à surface libre, l'une des plus répandues (cf [9], [11]) consiste, dans le cas d'un canal bidimensionnel, à considérer un bassin fermé à l'une de ses extrémités par une frontière infiniment souple sur laquelle on applique la condition dite de *Sommerfeld*. Cette condition, si l'on prend les notations précédentes, s'écrit:

$$[\text{II-19}] \quad \frac{\partial \phi(y)}{\partial t} = c(\omega) \cdot \frac{\partial \phi(y)}{\partial n}$$

Cette relation n'est bien sûr valable que dans le cas d'une onde incidente monochromatique décrite par un potentiel d'*Airy*. Dans ce cas, le coefficient $c(\omega)$ n'est autre que la vitesse de phase de l'onde et dépend explicitement de la pulsation ω .

$$[\text{II-20}] \quad c(\omega) = \frac{\omega}{m_0}$$

où m_0 est le nombre d'onde déterminé par la relation de dispersion [II-11a].

On voit tout de suite que cette relation ne pourra s'étendre au delà du cas particulier de la houle monochromatique en régime établi. Il suffit pour s'en convaincre de considérer un

potentiel incident qui soit la somme de deux potentiels d'Airy à deux fréquences différentes. Les potentiels vont bien s'additionner par linéarité, mais chaque onde ayant sa propre vitesse de phase, la relation [II-19] n'aura plus de sens.

II-6-2 *Frontière infiniment souple: domaine temporel*

Cette solution est définie dans le domaine fréquentiel. Pour passer dans le domaine temporel et obtenir ainsi une relation d'absorption en régime instationnaire, il faut en calculer la transformée de Fourier inverse (cf chap.III-1). Ceci conduit à la relation de convolution

$$[\text{II-21}] \quad p(t) = c(t) * v_n(t)$$

applicable en tout point de la paroi, où $c(t)$ est la transformée de Fourier inverse de $c(\omega)$.

Si $p(t)$, pression dynamique et $v_n(t)$, vitesse normale instantanée ont un sens physique, il n'en n'est pas de même pour le terme $c(t)$ puisque comme on l'a vu, la vitesse de phase est une fonction explicite de la pulsation.

Différents auteurs ont cependant tenté cette approche, développant diverses méthodes permettant de réduire, dans le cas d'un groupe d'ondes incidentes, cette convolution à une simple multiplication par un coefficient assimilé à une "vitesse de phase instantanée".

La méthode la plus élémentaire qui consiste à prendre pour célérité celle du mode de l'onde principale se propageant dans le domaine [57], quand elle existe, n'est pas satisfaisante puisqu'alors tous les autres modes seront réfléchis. Elle implique de plus la connaissance a priori ou l'estimation en temps réel de cette "onde principale".

Orlansky [69] a présenté une méthode numérique d'estimation de $c(t)$ dans le cas d'écoulements hyperboliques, méthode la plus généralement reprise [11],[71] et adaptée à d'autres types d'écoulements.

Se plaçant en une abscisse voisine de la paroi, il calcule le coefficient c à un instant $t-dt$ à l'aide d'un schéma analogue à la condition de radiation de *Sommerfeld* [II-19],

$$[\text{II-22}] \quad c(t) = \frac{\partial \phi}{\partial t} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} \right]^{-1}$$

la position du point de calcul et le pas de temps dt étant choisis tels qu'à l'instant t , le point considéré soit translaté sur la paroi. Cette méthode a été reprise par *Chan* [11] dans le cas d'écoulements à surface libre pour lesquels elle semble donner des résultats satisfaisants.

On remarque que cette expression prend une forme indéterminée lorsque, au point de calcul considéré, la vitesse normale est nulle. Dans ce cas, en effet,

$$[\text{II-23}] \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

Pour pallier cette difficulté, *Jagannathan* [39] utilise dans ce cas une valeur moyenne des vitesses de phase instantanées calculées en différents points au voisinage de la frontière. *Lee* et *Leonard* [55], quant à eux, proposent une relation asymptotique permettant d'établir cette vitesse instantanée à partir de la célérité c_p de l'onde principale se propageant dans le canal en régime établi. Le calcul de c_p demande alors une connaissance a priori du contenu fréquentiel de l'écoulement dans le canal ce qui n'est pas compatible avec un fonctionnement réellement instationnaire. De plus c_p ne pourra de toute façon pas être connue précisément dans le cas d'un écoulement polychromatique.

L'étude de ces méthodes d'absorption, dites aussi conditions aux limites non réfléchissantes, n'a pas ici été poussée plus avant pour les raisons suivantes:

Pour être efficaces sur toute la gamme utile des fréquences, elles nécessitent le plus souvent la connaissance a priori d'une fréquence dominante du train d'onde incident. En un mot, elles doivent être "accordées".

De plus, elles ne sont pas transposables à l'absorption "physique" puisque, étant locales en fonction de la variable y , elles nécessiteraient la mise au point de batteurs souples asservis, ce qui n'est pas raisonnablement envisageable à l'heure actuelle.

De façon plus précise, si l'on voulait situer la condition d'*Orlansky* par rapport à l'approche envisagée dans le cadre de cette étude, on pourrait la qualifier de "relation différentielle instationnaire d'ordre zéro", alors que l'on recherche, dans le cas particulier de la plaque plane en translation, des "relations différentielles stationnaires d'ordre élevé" entre les mêmes grandeurs: vitesse de la surface absorbante et efforts (ou pression) hydrodynamiques.

La relation d'*Orlansky* est différentielle d'ordre zéro en ce sens qu'elle est une simple relation de proportionnalité et est instationnaire puisque le coefficient de proportionnalité dépend du temps. Toute la dynamique du problème d'absorption ne saurait être traduite par une relation de ce type qui ne fait intervenir ni dérivées en temps des efforts, ni dérivées en temps de la vitesse.

Des conditions aux limites non réfléchissantes locales en espace, et d'un ordre supérieur ont été proposées, notamment par *Engquist* et *Majda* [25], mais n'ont encore pas été semble-t-il appliquées à l'absorption des ondes de gravité. De plus, leur développement fait appel à des approximations pour lesquelles les auteurs n'ont pas trouvé de justification physique.

On propose ici une approche différente puisque dès le départ, on fait le choix d'un mode de déformation rigide et imposé de la surface absorbante. De fait, le passage du domaine fréquentiel au domaine temporel (et réciproquement) conserve un sens physique puisqu'il concerne un nombre fini (=1) de degrés de liberté.

II-7 SOLUTION OPTIMALE AVEC FRONTIÈRE À UN DEGRÉ DE LIBERTÉ

Le but de cette étude étant de développer une loi de comportement qui rende la frontière d'un canal bidimensionnel non réfléchissante et qui soit aussi bien applicable à un système expérimental que modélisable numériquement sur la partie utile du spectre de fréquence, on cherche à définir cette fois la condition d'absorption à partir du modèle physique choisi pour sa réalisabilité.

On se place donc dans le cas du bassin semi-infini limité par une paroi rigide verticale pouvant se déplacer horizontalement en un mouvement de translation. Toute la théorie développée ci-après à partir de cette hypothèse pourrait l'être aussi bien pour un absorbeur de type volet articulé, voire volet à double articulation [12]. Le principe de l'absorption dynamique en théorie linéarisée est en fait basé sur l'idée que l'on peut superposer à l'onde réfléchie par la paroi rigide qui constitue l'absorbeur, une onde, engendrée par le mouvement de ce dernier et telle que cette superposition entraîne l'annihilation des deux ondes (réfléchie et radiée) l'une par l'autre, tout au moins à une certaine distance du batteur.

Cette condition d'absorption s'exprime en fonction des potentiels de radiation et de diffraction, sous la forme:

$$[\text{II-24}] \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \phi_b + \phi_d = 0$$

Lorsque x tend vers l'infini, l'expression [II-14c] du potentiel de radiation ϕ_b se simplifie et s'écrit:

$$[\text{II-25}] \quad \phi_b = [A_b \cos(m_0 x - \omega t) + B_b \sin(m_0 x - \omega t)] \cdot \cosh(m_0(y+1))$$

Ce qui, compte tenu de la relation liant les potentiels incident et de radiation conduit, en reprenant l'expression [II-14a] du potentiel incident, à la condition d'absorption optimale sur les coefficients de ces deux potentiels:

$$[\text{II-26}] \quad \left| \begin{array}{l} A_b = -A_i \\ B_b = B_i \end{array} \right.$$

Le potentiel total de l'écoulement dans un canal s'écrit alors:

$$\begin{aligned}
 \text{[II-27]} \quad \phi(x,y,t) = & [A_0 \cos(m_0 x + \omega t) + B_0 \sin(m_0 x + \omega t)] \cdot \cosh(m_0(y+1)) \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} [C_k^k \cos(\omega t) + S_k^k \sin(\omega t)] \cdot e^{-m_k x} \cdot \cos(m_k(y+1))
 \end{aligned}$$

On voit qu'il ne reste plus alors dans le bassin que l'onde progressive incidente et les vagues dites proches qui ne représentent qu'une déformation locale du champ de vagues au voisinage de la surface et ne se propagent pas dans le bassin. Elles sont dues au fait que le batteur n'est pas infiniment souple et que les vitesses normales locales (en y) ne peuvent être partout égales aux vitesses horizontales du champ incident. Néanmoins, l'absence dans [II-27] de vagues se propageant vers les x positifs indique que l'absorption obtenue en imposant la condition [II-26] est totale.

L'absorbeur dynamique ainsi défini devant être appliqué à un modèle physique concret, on va maintenant chercher à écrire cette condition d'optimisation de l'absorption sous la forme d'une relation liant une grandeur caractéristique du déplacement du batteur, comme par exemple sa vitesse, à une grandeur caractéristique mesurable de l'écoulement dans le canal. Dans les travaux de *Milgram* [64], c'est la hauteur d'eau mesurée à une certaine distance en avant du batteur qui est considérée comme la variable d'entrée à partir de laquelle on va pouvoir faire réagir le batteur. Ce choix présente deux inconvénients qui sont autant de raisons pour lesquelles on ne l'a pas retenu ici. Dans une mesure de la déformée de surface libre en avant du batteur apparaissent, mêlées, les ondes arrivant à la paroi, qui représentent le "futur" pour l'absorbeur et les ondes repartant, si l'absorption n'est pas parfaite, qui représentent le "passé". Le signal d'entrée est dans ce cas perturbé puisqu'il n'est pas envisageable de mesurer le train d'ondes incidentes indépendamment du train d'ondes réfléchies.

Par ailleurs, d'un point de vu pratique, cette mesure sera plus facilement bruitée que la mesure directe des efforts hydrodynamiques, retenue ici.

En gardant présente à l'esprit la relation de type *Sommerfeld-Orlansky* liant vitesse locale de déplacement de la paroi et pression dynamique, on choisit de chercher une relation entre les grandeurs non-locales correspondantes, à savoir: vitesse du piston et efforts hydrodynamiques sur sa paroi.

II-7-1 *La vitesse de l'absorbeur.*

Soit $v(t)$ la loi de vitesse de translation de l'absorbeur:

$$[\text{II-28}] \quad \vec{v}(t) = v(t) \cdot \vec{x}$$

On a vu lors du calcul du potentiel associé à une onde générée par le mouvement d'un batteur piston qu'elle peut s'écrire en régime harmonique sous la forme [II-8] et qu'il existe des relations [II-12a, b] entre les coefficients v° et v^{∞} de la vitesse et A_b , B_b , C_b^k et S_b^k du potentiel de radiation de la paroi S^- faisant intervenir les coefficients v^0 et v^k donnés par les relations [II-13a] et [II-13b].

La vitesse de l'absorbeur s'exprime donc simplement en fonction de A_b et B_b par la relation:

$$[\text{II-29}] \quad v = \frac{B_b}{v^0} \cos(\omega t) + \frac{A_b}{v^0} \sin(\omega t)$$

Reprenant alors la condition d'optimisation [II-26] sur les coefficients des potentiels incident et de radiation, on obtient l'expression de la vitesse de translation de l'absorbeur lorsque celui-ci fonctionne en mode d'absorption totale:

$$[\text{II-30}] \quad v = \frac{B_i}{v^0} \cos(\omega t) - \frac{A_i}{v^0} \sin(\omega t)$$

Cette vitesse, dite vitesse d'absorption optimale, s'exprime donc en fonction des seuls coefficients du potentiel incident, unique donnée a priori connue des écoulements dans le canal.

II-7-2 *Les efforts hydrodynamiques sur l'absorbeur.*

Le paramètre choisi comme entrée du système d'absorption, permettant la détermination et le contrôle du mouvement de l'absorbeur, est l'effort hydrodynamique total mesuré sur la paroi de ce dernier. Cet effort $f(t)$ est, dans le cadre de la théorie linéarisée, obtenu par

superposition des forces dues aux trois ondes identifiées dans le canal, c'est à dire efforts incidents f_i , efforts de diffraction f_d et efforts de radiation f_r .

Les efforts hydrodynamiques exercés par le fluide sur la paroi sont obtenus par intégration de la pression totale sur la surface de l'absorbeur, ce qui donne pour expression des efforts par unité de largeur:

$$[\text{II-31}] \quad \vec{f} = \int_{-1}^0 p \cdot \vec{n} \, dy$$

La pression totale au sein du fluide est donnée par la relation de *Bernoulli* :

$$[\text{II-32}] \quad p = -\rho g z - \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} v^2$$

D'une façon consistante vis à vis des hypothèses de linéarisation, on négligera dans la suite des calculs le terme quadratique. La contribution du terme hydrostatique donnant un terme constant en temps (au premier ordre) sera elle aussi négligée. On ne retiendra finalement que le terme de pression dynamique:

$$[\text{II-33}] \quad p = - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

La relation [II-31] devient alors:

$$[\text{II-34}] \quad \vec{f} = - \int_{-1}^0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \vec{n} \, dy$$

Avec les notations précédemment définies (FIGURE 2), les efforts hydrodynamiques exercés par le fluide sur la paroi S^- sont finalement donnés par:

$$[\text{II-35}] \quad f = \int_{-1}^0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot dy$$

La dérivé par rapport au temps du potentiel optimisé dans le canal lorsque le batteur fonctionne en absorbeur [II-27] calculée sur la paroi S^- ($x=0$) à pour expression:

$$[\text{II-36}] \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{x=0} = \omega \cdot \left\{ [B_1 \cos(\omega t) - A_1 \sin(\omega t)] \cdot \cosh(m_0(y+1)) + \sum_{k=1}^{k=\infty} [S_b^k \cos(\omega t) - C_b^k \sin(\omega t)] \cdot \cos(m_k(y+1)) \right\}$$

Résultat qui associé à:

$$\int_{-1}^0 \cosh(m_0(y+1)) dy = \frac{\text{sh}(m_0)}{m_0} \quad \text{et} \quad \int_{-1}^0 \cos(m_k(y+1)) dy = \frac{\sin(m_k)}{m_k}$$

conduit à l'expression des efforts hydrodynamiques sur S^r en mode d'absorption parfaite:

$$[\text{II-37}] \quad f(t) = \omega \left[[B_i \cos(\omega t) - A_i \sin(\omega t)] \cdot \frac{\sinh(m_0)}{m_0} + \sum_{k=1}^{k=\infty} [S_b^k \cos(\omega t) - C_b^k \sin(\omega t)] \cdot \frac{\sin(m_k)}{m_k} \right]$$

Il est important de noter que ces efforts sont fonction à la fois des coefficients du potentiel associé à l'onde incidente et des coefficients du terme dit de vagues proches apparu dans l'expression du potentiel de radiation.

En effectuant le même calcul sur les potentiels ϕ_i , ϕ_d et ϕ_b , on obtient les expressions des efforts "incident", de "diffraction" et de "radiation", respectivement:

$$[\text{II-38a}] \quad f_i(t) = \omega \left\{ [B_i \cos(\omega t) - A_i \sin(\omega t)] \cdot \frac{\sinh(m_0)}{m_0} \right\}$$

$$[\text{II-38b}] \quad f_d(t) = \omega \left\{ [B_i \cos(\omega t) - A_i \sin(\omega t)] \cdot \frac{\sinh(m_0)}{m_0} \right\}$$

$$[\text{II-38c}] \quad f_b(t) = \omega \left[[-B_i \cos(\omega t) + A_i \sin(\omega t)] \cdot \frac{\sinh(m_0)}{m_0} + \sum_{k=1}^{k=\infty} [S_b^k \cos(\omega t) - C_b^k \sin(\omega t)] \cdot \frac{\sin(m_k)}{m_k} \right]$$

Les efforts incidents et réfléchis sur la paroi sont égaux. L'effort total sur la paroi est donc tel que:

$$[\text{II-39}] \quad f(t) = 2 \cdot f_i(t) + f_b(t)$$

On remarque d'autre part que les efforts de radiation $f_b(t)$ et totaux $f(t)$ ont des expressions très voisines dans lesquelles on peut dissocier le terme d'efforts dû au champ de vagues proches de celui des efforts dûs au champ lointain. Nécessairement, le terme associé au champ de vagues proches est identique dans les deux expressions. Les efforts associés au champ lointain sont, en régime d'absorption totale, en phase avec la vitesse de l'absorbeur. Ils sont égaux aux efforts incidents dans le terme $f(t)$ et à l'opposé de ces efforts dans le terme $f_b(t)$. On voit donc que, au terme d'efforts de vagues proches près, lié à la génération par un batteur piston, les efforts totaux et de radiation sont, en régime d'absorption totale, égaux et opposés. Ceci fait apparaître la nécessité d'étudier l'influence réelle de ce terme de vagues évanescents sans lequel on aurait une relation d'absorption directe.

II-7-3 La fonction de transfert d'absorption

De manière générale, dans le domaine fréquentiel, l'évolution de l'état d'un système linéaire à entrée E et sortie S simples, peut être représenté par le rapport

$$[II-40] \quad H(i\omega) = \frac{S(i\omega)}{E(i\omega)}$$

généralement appelé fonction de transfert ou transmittance du système [21].

Dans le cas de l'absorbeur dynamique, le paramètre de sortie, l'inconnue du système, est la vitesse de translation du batteur entraînant l'absorption de l'onde incidente ou, plus exactement, l'annihilation de l'onde réfléchie. On considère alors comme paramètre d'entrée ou consigne, l'effort hydrodynamique en régime optimal [II-37].

Une représentation concrète du système physique que constitue l'absorbeur, batteur piston sur lequel se réfléchit une onde incidente, peut être donnée par le schéma ci-dessous si l'on prend pour relation d'absorption l'égalité [II-40] caractéristique d'un système linéaire invariant en temps.

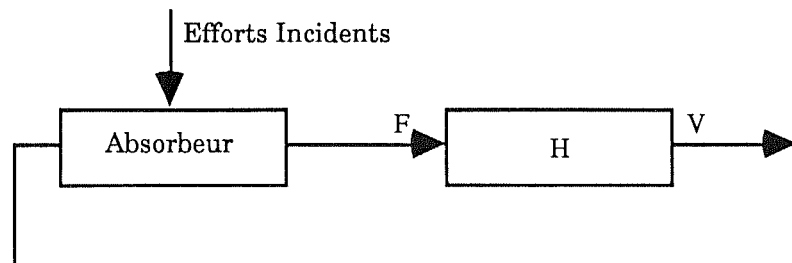


FIGURE 3

Il convient de rappeler que dans ce schéma, la perturbation correspondant aux efforts incidents n'est pas mesurable et que la seule grandeur d'entrée accessible est le terme d'effort total F. L'absorbeur qui est ici représenté en quelque sorte en "boite noire" peut être explicité par le schéma de la FIGURE 4 donné page suivante.

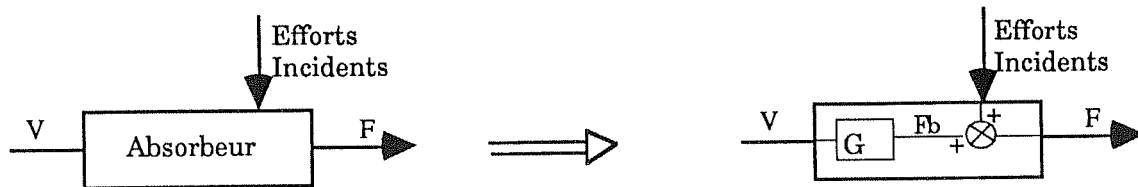


FIGURE 4

F_b représente les efforts de radiation obtenus en fonction de la vitesse V de l'absorbeur par l'intermédiaire de la fonction de transfert G .

En régime harmonique, on écrit la vitesse sous la forme:

$$[II-41] \quad v = \text{Re} \{ V \cdot e^{i\omega t} \}$$

avec, d'après [II-8]:

$$[II-42] \quad V = v^\circ - i \cdot v^\infty$$

et la force:

$$[II-43] \quad f = \text{Re} \{ F \cdot e^{i\omega t} \}$$

avec, d'après [II-37] et [II-30]:

$$[II-44] \quad F = \omega \cdot \left\{ \left[\frac{v^0 \cdot \sinh(m_0)}{m_0} + i \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{v^k \cdot \sin(m_k)}{m_k} \right] [v^\circ - i v^\infty] \right\}$$

Remarque: L'écriture sous cette forme des efforts de radiation [II-38c] de l'absorbeur en régime optimisé conduit à:

$$[II-45] \quad F_b = \omega \cdot \left\{ - \left[\frac{v^0 \cdot \sinh(m_0)}{m_0} - i \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{v^k \cdot \sin(m_k)}{m_k} \right] [v^\circ - i v^\infty] \right\}$$

La condition d'optimisation s'exprime donc en terme d'efforts dans le domaine des fréquences par le fait que les efforts totaux sur le batteur et les efforts de radiation forment au signe près une paire d'éléments conjugués.

L'application des définitions de la transformation de Fourier montre que, dans le cas particulier du régime harmonique, la fonction de transfert de l'absorbeur $H(i\omega) = \frac{S(i\omega)}{E(i\omega)}$, se ramène au rapport $H(i\omega) = \frac{V}{F}$ ce qui, en remplaçant v^0 et v^k par leurs valeurs, conduit à l'expression générale de la transmittance de l'absorbeur idéal:

$$[II-46] \quad H(i\omega) = \frac{1}{4.\omega} \cdot \frac{1}{\frac{\sinh^2(m_0)}{m_0^2.(2.m_0 + \sinh(2.m_0))} - i \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin^2(m_k)}{m_k^2.(2.m_k + \sin(2.m_k))}}$$

$H(i\omega)$ est une fonction complexe ne dépendant que de la pulsation ω , les nombres d'onde m_0 et m_k de la décomposition sur les modes étant obtenus par les relations de dispersion [II-11a] et [II-11b].

Les courbes des FIGURES 5a et 5b montrent le comportement général de $H(i\omega)$ en parties réelle et imaginaire d'une part et en module et argument d'autre part.

Afin de fixer un peu les idées avant d'étudier plus précisément ces courbes, on peut donner un ordre de grandeur du spectre utile dans le cadre des applications physiques concrètes. Une valeur de 4 pour la pulsation adimensionnelle ω correspond à une fréquence de 2.06 Hz pour une houle réelle se propageant dans un canal d'un mètre de profondeur, comme celui que l'on utilisera ultérieurement dans l'étude expérimentale. La valeur de 2 Hz est généralement admise comme étant l'ordre de grandeur de la fréquence limite au delà de laquelle les ondes ne se propagent plus. Naturellement, plus le bassin considéré est profond, plus on peut aller loin dans le domaine de ω .

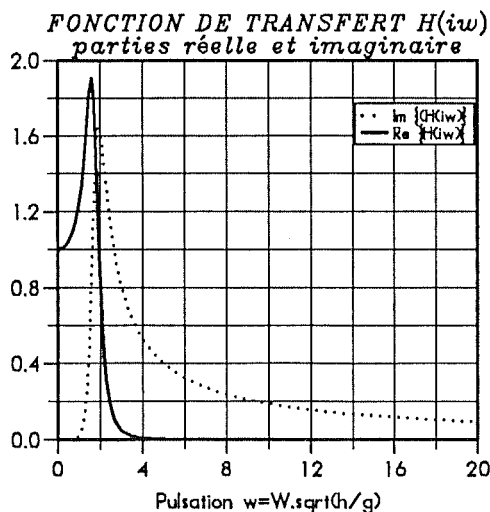


FIGURE 5a

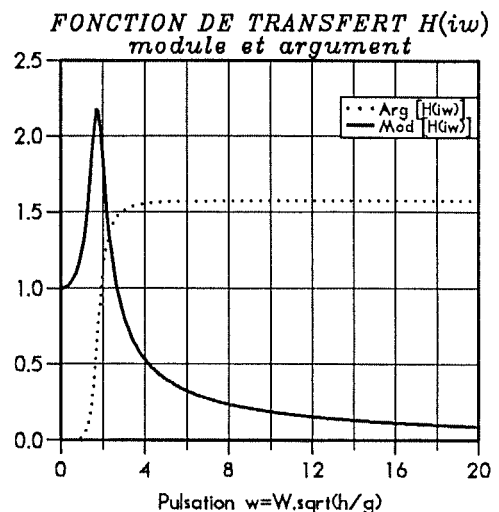


FIGURE 5b

L'étude du comportement asymptotique au voisinage de l'origine et à l'infini permet de mettre en évidence des caractéristiques particulièrement intéressantes du modèle d'absorption.

A la limite, lorsque ω tend vers 0, les nombres d'ondes donnés par les relations de dispersion [II-11a] et [II-11b] tendent vers les valeurs

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} m_0 = \omega = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} m_k = (2k-1)\pi$$

ce qui entraîne pour la fonction de transfert:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}\{H(\omega)\} = 1$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Im}\{H(\omega)\} = 0$$

A l'origine et au voisinage de l'origine, la partie réelle de $H(i\omega)$ est unitaire et varie peu autour de cette valeur comme on peut le voir sur la courbe de la FIGURE 5a, alors que la partie imaginaire reste nulle. Le système se comporte donc en simple proportionnel, il n'y a pas de déphasage entre l'entrée et la sortie. Cette caractéristique de la fonction de transfert aux basses fréquences est intéressante car elle fournit un mode de fonctionnement particulièrement simple qui sera étudié ultérieurement; on pourra en particulier la rapprocher de la solution avec frontière infiniment souple (cf. §II-8).

Pour les hautes fréquences au contraire, on a:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} m_0 = \omega^2$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} m_k = (2k-1) \frac{\pi}{2}$$

et les parties réelle et imaginaire de la fonction de transfert ont pour limite:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re}\{H(i\omega)\} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega \operatorname{Im}\{H(i\omega)\} = \frac{1}{2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left[(2k-1) \frac{\pi}{2} \right]^3}$$

La fonction de transfert tend vers une forme imaginaire pure, autrement dit, le système tend à se comporter comme un déphaseur pur. Pour des valeurs de la pulsation supérieures à 4, l'argument de $H(i\omega)$ devient constant et égal à $\frac{\pi}{2}$, la vitesse sera donc en quadrature avant par rapport aux efforts. Le calcul des limites montre que $\operatorname{Im}\{H(i\omega)\}$ décroît à l'infini comme l'inverse de la pulsation, à une constante multiplicative près. On obtient pour valeur de cette constante (Abramowitz [1], p.812 Table 23.3):

$$H_{\infty}^1 = 1.8424539$$

Dans le domaine des hautes fréquences, la relation efforts-vitesse sera donc de la forme:

$$[\text{II-47}] \quad \mathbf{V} = \frac{i.H_{\omega}^I}{\omega} \cdot \mathbf{F} = - \frac{H_{\omega}^I}{i.\omega} \cdot \mathbf{F}$$

Or, en régime harmonique, la dérivée de la vitesse a pour expression

$$[\text{II-48}] \quad \dot{\mathbf{v}} = i\omega.v$$

On voit que pour les hautes fréquences l'absorbeur idéal doit se comporter de façon telle que les efforts restent toujours proportionnels à l'accélération du mouvement de translation du batteur:

$$[\text{II-49}] \quad \dot{\mathbf{V}} = -H_{\omega}^I \cdot \mathbf{F}$$

Il convient, pour expliquer l'origine de ce déphasage apparaissant de manière significative pour des pulsations supérieures à $\omega=1$, de revenir à l'expression [II-27] du potentiel optimisé. On constate en effet que, dans l'expression de l'argument de la fonction de transfert:

$$[\text{II-50}] \quad \text{Arg}\{H(i\omega)\} = \text{Atan} \left[- \frac{\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin^2(m_k)}{m_k^2 \cdot (2.m_k + \sin(2.m_k))}}{\frac{\text{sh}^2(m_0)}{m_0^2 \cdot (2.m_0 + \text{sh}(2.m_0))}} \right]$$

le terme dépendant de la décomposition sur les modes m_k est celui qui prend le plus de poids lorsqu'augmente la fréquence. Or ce terme est, dans l'expression des efforts, dépendant des coefficients C_s^k et S_b^k associés à la composante évanescente du potentiel alors que le terme en m_0 , qui tend rapidement vers 0 est, lui, associé aux coefficients A_i et B_i du potentiel de l'onde incidente. On peut donc dire que le déphasage entre les efforts hydrodynamiques et la vitesse de translation de l'absorbeur est dû à l'existence du terme de vagues proches et est une caractéristique de la radiation d'ondes par le batteur piston. On peut rappeler que dans le cas de l'absorbeur infiniment souple en régime fréquentiel, effort total et vitesse sont toujours en phase.

Remarque: Il convient de rappeler que la notion de composante évanescente est associée à une description fréquentielle du phénomène de radiation par une paroi rigide mobile et que, étant associée à la partie imaginaire d'une expression complexe, elle ne peut être directement transposée dans le domaine temporel où n'apparaissent que des grandeurs réelles.

II-8 LE MODE ASYMPTOTIQUE BASSES FRÉQUENCES.

Comme on vient de l'évoquer, l'étude du comportement asymptotique de la fonction de transfert au voisinage de l'origine, permet de mettre en évidence une simple relation proportionnelle entre les efforts hydrodynamiques sur le batteur et la vitesse de translation de ce dernier, que l'on peut écrire:

$$[\text{II-51}] \quad V = \text{Re} \{ H(i\omega) \} \cdot F$$

Relation entre la vitesse du piston V et les efforts totaux F qui s'apparente à la relation de *Sommerfeld* [II-19] entre vitesse et pression locales dans le cas des parois souples.

Compte tenu de la faible variation de $\text{Re} \{ H(i\omega) \}$ sur le domaine $\omega \in [0,1]$, on peut considérer la fonction de transfert égale au gain statique $H(0)=1$ sur cet intervalle et approcher ainsi la relation d'absorption par:

$$[\text{II-52}] \quad V = F$$

Cette relation est caractéristique de ce que l'on appellera le mode basses fréquences. L'intérêt de ce modèle asymptotique vient évidemment de sa simplicité de mise en œuvre.

On considère une houle d'airy, générée à l'infini et se propageant en l'absence de toute paroi. Le potentiel associé à une telle onde est donné par la relation [II-14a]. On considère alors une tranche de fluide au point d'abscisse x . Sur cette coupe, la dérivée en temps du potentiel s'écrit:

$$[\text{II-53}] \quad \frac{\partial \phi_i(x,y,t)}{\partial t} = \omega_0 [-A_i \sin(m_0 x + \omega t) + B_i \cos(m_0 x + \omega t)] \cdot \cosh(m_0(y+1))$$

et la dérivée par rapport à la variable d'espace x a pour expression:

$$[\text{III-54}] \quad \frac{\partial \phi_i(x,y,t)}{\partial x} = m_0 [-A_i \sin(m_0 x + \omega t) + B_i \cos(m_0 x + \omega t)] \cdot \cosh(m_0(y+1))$$

La vitesse de phase d'une onde telle que celle caractérisée par le potentiel $\phi_i(x,y,t)$ est donnée par:

$$[\text{II-55}] \quad c(\omega) = \frac{\omega}{m_0}$$

On voit donc apparaître la relation de *Sommerfeld* valable en toute ordonnée y de la tranche considérée:

$$[\text{II-55}] \quad \frac{\partial \phi_i(x,y,t)}{\partial t} = c(\omega) \cdot \frac{\partial \phi_i(x,y,t)}{\partial x}$$

A la limite basse fréquence, lorsque ω tend vers zéro, la vitesse de phase $c(\omega)$ tend vers 1 et l'on retrouve ainsi pour des grandeurs dépendant de la variable locale d'espace y la relation asymptotique basses fréquences [II-52] obtenue pour des grandeurs non locales à partir de l'expression de la fonction de transfert d'absorption.

II-9 L'ABSORBEUR DE SALTER

Par ailleurs et à titre de remarque, on peut établir un parallèle entre ce modèle asymptotique basses fréquences et l'absorbeur expérimental mis au point en 1979 par *Salter* au bassin de l'Université d'Edimburgh [72]. Ce dernier fonctionnant en régime optimal lorsque la vitesse de l'absorbeur est en phase avec les efforts hydrodynamiques qu'il subit.

L'absorbeur proposé par *Salter* est constitué d'un batteur plan et entraîné dans un mouvement de rotation autour d'un axe immergé par un moteur électrique de telle manière que la vitesse de déplacement soit toujours en phase avec les efforts hydrodynamiques. Pour ce faire, on mesure les efforts instantanés totaux (inertie, hydrostatique, ...) sur le batteur et on utilise le résultat de cette mesure comme consigne de vitesse du mouvement. On mesure alors la vitesse réelle du batteur, le signal secondaire ainsi obtenu est retranché au premier faisant ainsi du système un système amorti. De plus, un élément dérivateur et un intégrateur sont placés en parallèle et reçoivent en entrée la copie de vitesse permettant d'obtenir respectivement un terme d'inertie et un terme de raideur (correspondant en fait à la composante hydrostatique des efforts) que l'on retranche à leur tour de la consigne, rendant alors le système équivalent à un élément à inertie nulle et à très faible raideur. Ces deux termes servent à compenser le fait que, dans la mesure des efforts interviennent, en plus de la composante hydrodynamique, une composante d'inertie de la partie mécanique du montage et une composante hydrostatique. On n'a donc plus qu'un système sans masse soumis aux seuls efforts hydrodynamiques et amorti de façon que sa vitesse reste toujours en phase avec ces derniers. Ce système expérimental est surtout intéressant en ce sens qu'il fait intervenir une simple relation de proportionnalité entre les efforts hydrodynamiques instantanés sur l'absorbeur et la vitesse de celui-ci, relation que l'on retrouve dans le cas du batteur piston en translation pour les basses fréquences.

On verra par la suite que dans les fréquences plus élevées, ce mode de fonctionnement n'est qu'une approximation du mode de fonctionnement idéal. Il n'existe que peu de données présentant l'efficacité réelle de ce système dont l'étude n'a pas fait l'objet de publications scientifiques. Il paraît cependant possible de le rendre efficace pour une fréquence fixe donnée, correspondant par exemple à une fréquence principale d'utilisation, en modulant le poids des différents termes retranchés à la consigne de vitesse.

Cette étude fréquentielle apporte donc, outre une présentation des potentiels associés aux ondes incidentes et réfléchies susceptibles de se propager dans un canal semi-infini bidimensionnel de profondeur fini et du potentiel associé à l'onde générée par un batteur piston en régime d'oscillations harmoniques, une première approche de l'absorption dynamique.

Celle-ci y est définie dans son principe général, puis les solutions classiques de conditions aux limites, correspondant à des frontières infiniment souples, sont présentées. Enfin, on détermine une relation d'absorption par un batteur piston, sous forme d'une fonction de transfert complexe faisant intervenir efforts hydrodynamiques et vitesse de l'absorbeur. L'écriture de cette relation fréquentielle met en évidence la réalité de l'existence de l'absorption dynamique des ondes de gravité par un batteur piston.

MODÉLISATION DE L'ABSORPTION DYNAMIQUE
EN THÉORIE LINÉARISÉE

III

ÉTUDE DANS LE DOMAINE TEMPOREL

L'étude précédemment développée a permis de mettre en évidence la fonction de transfert caractéristique de l'absorbeur parfait, fonction d'un paramètre unique, la pulsation ω . Cette fonction permet comme on l'a constaté de donner, pour chaque mode de propagation, la vitesse de translation à imposer à l'absorbeur pour qu'il fonctionne de manière optimale dans l'hypothèse du régime harmonique établi (vitesse proportionnelle aux efforts à basse fréquence puis apparition d'un déphasage conduisant à une quadrature à mesure que la fréquence augmente). On conçoit aisément que cette caractérisation harmonique du système n'est pas suffisante pour en décrire le comportement physique réel. En particulier si l'on considère le caractère polychromatique et instationnaire des ondes de gravité susceptibles de se propager dans le canal. Il convient donc de définir une fonction non plus de la pulsation mais du temps, faisant intervenir une superposition des solutions déterminées pour chacune des fréquences du spectre. Pour ce faire et obtenir une description instantanée en régime instationnaire des grandeurs et des phénomènes liés à l'absorption, on utilise plus particulièrement la transformée de Fourier et les opérateurs de convolution, outils mathématiques habituels en analyse et traitement des signaux, mais aussi les propriétés plus générales de la transformée de Laplace, plus couramment employée par les automaticiens.

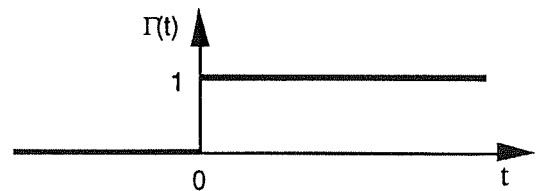
III-1 DÉFINITIONS ET OPERATEURS MATHÉMATIQUES.

Avant de poursuivre plus avant l'étude de l'absorption en régime instationnaire, il convient de présenter les différents opérateurs mathématiques et leurs propriétés essentielles, ainsi que les éléments importants de la théorie des systèmes linéaires invariants en temps, catégorie de systèmes dans laquelle entre l'absorbeur dynamique étudié ici grâce aux hypothèses de linéarisation consenties au début de l'étude. Il ne s'agit pas, bien entendu, de reprendre toutes les démonstrations mais simplement de rappeler les définitions et propriétés essentielles que l'on aura à utiliser, et de préciser les notations de manière à éviter toute ambiguïté dans les développements ultérieurs.

La fonction de Heaviside.

On appelle fonction de Heaviside ou échelon unité la fonction $\Gamma(t)$ définie par

$$[\text{III-1}] \quad \Gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$



L'impulsion de Dirac.

On définit généralement l'impulsion de *Dirac* [7], notée $\delta(t)$, par la relation:

$$[\text{III-2}] \quad \begin{cases} \delta(t) = 0 & \text{si } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On la présente aussi parfois comme la dérivée de l'échelon unité:

$$[\text{III-3}] \quad \delta(t) = \frac{d\Gamma(t)}{dt}$$

$\delta(t)$ n'est pas une fonction au sens propre du terme, mais une distribution. On ne s'étendra pas ici sur les précautions d'emploi ni sur le cadre théorique nécessaire à l'utilisation des distributions.

Le produit de convolution.

Soient $f(t)$ et $h(t)$ deux fonctions éventuellement complexes, continues par morceaux et sommables en valeur absolue sur $]-\infty, +\infty[$, alors la fonction $g(t)$ définie par la relation intégrale

$$[\text{III-4}] \quad g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau) dt$$

est appelé produit de convolution de $f(t)$ par $h(t)$.

Un simple changement de variable dans l'intégrale permet de faire apparaître la commutativité du produit de convolution:

$$[\text{III-5}] \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) \cdot h(\tau) dt$$

et on note généralement:

$$g(t) = f(t) * h(t) = h(t) * f(t)$$

On verra tout l'intérêt de cette opération dans la description des processus associés aux systèmes linéaires invariants en temps. On peut dire, pour tenter de la définir, qu'elle permet de caractériser le pouvoir de résolution d'un système physique.

On peut noter le cas particulier de la convolution par une impulsion de *Dirac*. En effet, compte tenu de la relation [III-2], il vient :

$$[\text{III-6}] \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) \delta(\tau) dt = f(t)$$

La Transformation de Fourier.

On donne pour relation de définition de la transformation de Fourier:

$$[\text{III-7}] \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

De même, on pourra retrouver $f(t)$ à partir de $F(\omega)$ par la transformation de Fourier inverse:

$$[\text{III-8}] \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Nécessairement, $f(t)$ fonction éventuellement complexe doit être continue par morceaux et sommable en valeur absolue sur $]-\infty, +\infty[$, autrement dit, doit être telle que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt \quad \text{soit finie.}$$

On note $F(\omega) = \text{TF}[f(t)]$ et $f(t) = \text{TF}^{-1}[F(\omega)]$.

Les propriétés générales de la transformation de Fourier sont largement présentées dans la littérature [7]. Parmi toutes ces propriétés, trois sont à noter plus particulièrement.

La première concerne le cas particulier de la transformation de l'impulsion de *Dirac*:

$$[\text{III-9}] \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1$$

La seconde fait intervenir les propriétés du produit de convolution de deux fonctions:

Soient $F(\omega)$ et $H(\omega)$ les transformées de Fourier de $f(t)$ et $h(t)$ respectivement, alors

$$[\text{II-10a}] \quad \text{TF}^{-1}[F(\omega).H(\omega)] = f(t) * h(t)$$

et réciproquement

$$[\text{II-10b}] \quad \text{TF}^{-1}[F(\omega) * H(\omega)] = f(t) : h(t)$$

Au produit de convolution de deux fonctions dans un domaine correspond le produit des transformées de Fourier de ces deux fonctions dans le domaine associé. Ce résultat est un des éléments importants du développement de la théorie des systèmes linéaires.

La troisième enfin est une propriété des fonctions conjuguées:

Soit $F(\omega)$ une fonction de carré sommable, continue par morceaux et $F^*(\omega)$ sa conjuguée, alors

$$[\text{III-11a}] \quad \text{TF}^{-1}[F(\omega)] = f(t) \quad \Rightarrow \quad \text{TF}^{-1}[F^*(\omega)] = f(-t)$$

et réciproquement

$$[\text{III-11b}] \quad \text{TF}[f(t)] = F(\omega) \quad \Rightarrow \quad \text{TF}[f^*(t)] = F(-\omega)$$

La transformation de Laplace.

La transformation de Laplace est une généralisation de la transformation de Fourier [7] permettant l'étude sur certains domaines de fonctions non sommables en valeur absolue. C'est un outil mathématique très efficace et fréquemment employé, en particulier par les automaticiens, mais qui nécessite de s'entourer de certaines précautions. On veillera en particulier à toujours préciser le domaine d'application de cet opérateur.

Soit donc $f(t)$ une fonction éventuellement complexe, continue par morceaux. On définit une variable complexe $s = \sigma + i\omega$ appelée variable de Laplace et on appelle transformée de Laplace de $f(t)$ la fonction notée $F(s) = \text{TL}[f(t)]$ et définie par la relation intégrale:

$$[\text{III-12}] \quad F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).e^{-st} dt$$

Il convient bien entendu de préciser pour chaque fonction $f(t)$ le domaine de convergence de l'intégrale.

Plus généralement, on trouve pour définition de la transformée de Laplace la relation:

$$[\text{III-13}] \quad F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

appelée transformation monolatère. Dans le cas où $f(t)$ représente la réponse impulsionnelle d'un système linéaire physique, on a nécessairement $f(t) = 0$ pour $t < 0$ et les relations [II-12] et [II-13] sont alors équivalentes.

On n'utilise en fait que très peu ces relations intégrales et l'on essaie le plus souvent de se ramener à des expressions constituées de fonctions dont les transformées sont connues. On peut noter en particulier:

$$[\text{III-14}] \quad \text{TL}[\delta(t)] = 1$$

$$[\text{III-15}] \quad \text{TL}[\Gamma(t)] = \frac{1}{s} \quad \text{avec } \text{Re}\{s\} > 0$$

$$[\text{III-16}] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{TL}[\Gamma(t) \cdot e^{\alpha t}] = \frac{1}{s - \alpha} \quad \text{avec } \text{Re}\{s\} > \text{Re}\{\alpha\} \\ \text{TL}[-\Gamma(-t) \cdot e^{\alpha t}] = \frac{1}{s - \alpha} \quad \text{avec } \text{Re}\{s\} < \text{Re}\{\alpha\} \end{array} \right.$$

La fonction définie par $\Gamma(t) \cdot e^{\alpha t}$ caractérise ce que l'on appelle généralement un système du premier ordre et joue un rôle important dans les méthodes d'identification telles que celles que l'on utilise ici. On voit que pour une telle fonction nulle pour les temps négatifs, on peut retrouver la transformée de Fourier directement à partir de la transformée de Laplace en imposant $\sigma = 0$. On aura alors:

$$[\text{III-17}] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{TF}[\Gamma(t) \cdot e^{\alpha t}] = \frac{1}{i\omega - \alpha} \quad \text{avec } \text{Re}\{\alpha\} < 0 \\ \text{TF}[-\Gamma(-t) \cdot e^{\alpha t}] = \frac{1}{i\omega - \alpha} \quad \text{avec } \text{Re}\{\alpha\} > 0 \end{array} \right.$$

C'est par référence à cette propriété que les fonctions de transfert, fonctions le plus souvent complexes sont notées généralement $H(i\omega)$ et non $H(\omega)$.

Il est évident que cette présentation de définitions et propriétés n'est pas exhaustive. Elle fait simplement apparaître les éléments les plus couramment utilisés dans la théorie des

systèmes linéaires développée par la suite pour déterminer une relation d'absorption en régime instationnaire et dont on va maintenant présenter les définitions générales.

Les systèmes linéaires invariants en temps.

De manière générale, un système physique peut être représenté par le schéma



indiquant qu'à tout signal imposé à l'entrée du système correspond un signal de sortie, l'opérateur de transformation entrée-sortie étant caractéristique du système. On distinguera parmi ces systèmes ceux qui possèdent les deux propriétés essentielles suivantes.

Tout d'abord, ils sont linéaires, c'est à dire que d'une part, la multiplication par un coefficient α de l'entrée entraîne une multiplication par ce même coefficient du signal de sortie et d'autre part, si à deux entrées e_1 et e_2 correspondent deux sorties, respectivement s_1 et s_2 , alors, au signal d'entrée composé de la somme $e = e_1 + e_2$ est associé le signal de sortie $s = s_1 + s_2$. Autrement dit, à toute combinaison linéaire de signaux d'entrée indépendants e_k est associée en sortie une réponse constituée de la même combinaison linéaire appliquée aux réponses s_k associées aux e_k .

De plus, ils sont invariants en temps, c'est à dire que si l'application d'une consigne à un instant t entraîne une réponse à un instant $t+dt$ (la réponse étant nécessairement en retard sur l'entrée), alors, l'application de cette même consigne à l'instant $t+\tau$ entraîne une réponse identique à l'instant $t+\tau+dt$. Cette propriété caractérise en fait la stationnarité du système.

Les systèmes physiques possédant de telles propriétés sont donc des systèmes linéaires invariants en temps, souvent appelés systèmes L.T.I. (Linear, Time Invariant) par les anglo-saxons.

On peut évidemment envisager le cas plus général de systèmes associant un nombre quelconque de sorties à un nombre quelconque d'entrées mais on ne rencontrera ici que des systèmes mono-entrée, mono-sortie.

Réponse impulsionnelle d'un système L.T.I.:

On note $e(t)$ la consigne d'entrée et $s(t)$ la réponse obtenue en sortie d'un système L.T.I., toutes deux de la forme:

$$e(t) = E(\omega).e^{i\omega t} \quad \text{et} \quad s(t) = S(\omega).e^{i\omega t}$$

La fonction déterminée par le rapport sortie sur entrée est alors représentative de l'action du système. E et S étant des fonctions éventuellement complexes de la pulsation, on a:

$$\text{[III-18]} \quad H(\omega) = \frac{S(\omega)}{E(\omega)}$$

$H(\omega)$ est généralement appelée fonction de transfert ou transmittance [4] du système.

La relation [III-18] peut encore se mettre sous la forme:

$$\text{[III-19]} \quad S(\omega) = H(\omega).E(\omega)$$

qui, en vertu des propriétés de la transformation de Fourier appliquée au produit de deux fonctions [III-11a], conduit à la relation de convolution dans le domaine du temps:

$$\text{[III-20]} \quad s(t) = h(t) * e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau).e(\tau) d\tau$$

où $h(t)$ est la transformée de Fourier inverse de la transmittance $H(\omega)$.

On démontre que $h(t)$ est en fait la réponse à une impulsion de *Dirac* $\delta(t)$ appliquée à l'instant $t=0$, c'est pourquoi on l'appelle réponse impulsionnelle du système. Réponse impulsionnelle et transmittance sont donc liées par les relations intégrales:

$$\text{[III-21]} \quad H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t).e^{-i\omega t} dt$$

$$\text{[III-22]} \quad h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega).e^{i\omega t} d\omega$$

La réponse impulsionnelle $h(t)$, caractéristique d'un système physique, est nécessairement réelle. La fonction de transfert $H(\omega)$ associée à $h(t)$ est alors complexe comme c'est le cas pour l'absorbeur (cf [II-46]).

Si $H(\omega)$ s'écrit sous la forme complexe

$$\text{[III-23]} \quad H(\omega) = H^R(\omega) + i.H^I(\omega)$$

alors:

$$\text{[III-24]} \quad h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H^R(\omega) \cdot \cos(\omega t) - H^I(\omega) \cdot \sin(\omega t) d\omega + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H^I(\omega) \cdot \cos(\omega t) - H^R(\omega) \cdot \sin(\omega t) d\omega$$

On voit donc, compte tenu des propriétés des intégrales, que pour que $h(t)$ soit réelle, la partie réelle de la transmittance doit être paire et sa partie imaginaire impaire, autrement dit, $H(\omega)$ doit être hermitienne et on aura alors:

$$\text{[III-25]} \quad h(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} H^R(\omega) \cdot \cos(\omega t) - H^I(\omega) \cdot \sin(\omega t) d\omega$$

La causalité.

Une caractéristique évidente des phénomènes physiques tient au fait qu'en aucune manière "l'effet ne saurait précéder la cause". C'est cette notion de retard de la sortie du système sur la consigne d'entrée qui définit la causalité.

La sortie d'un système linéaire invariant en temps est déterminée par le produit de convolution [III-20] de la consigne par la réponse impulsionnelle $h(t)$. Il apparaît dans cette relation que si $h(t)$ est non entièrement nulle sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, alors le calcul de la sortie à un instant t fait intervenir des valeurs de l'entrée à des instants supérieurs à t , c'est à dire à des valeurs futures non encore connues de l'entrée du système. Pour qu'un système physique soit causal et donc réalisable, sa réponse impulsionnelle doit être nécessairement nulle pour tout instant t inférieur à 0. On aura alors:

$$\text{[III-26]} \quad s(t) = \int_0^{+\infty} h(t-\tau) \cdot e(\tau) d\tau$$

On montre que les parties réelle $H^R(\omega)$ et imaginaire $H^I(\omega)$ de la fonction de transfert associée à une réponse impulsionnelle causale $h(t)$ sont transformées de Hilbert l'une de l'autre. Elles satisfont donc les relations:

$$[\text{III-27}] \quad H^I(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H^R(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

$$[\text{III-28}] \quad H^R(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H^I(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

Ces relations intégrales sont encore parfois appelées relations de Kramers-Krönig. Le problème de la divergence de ces intégrales en $\omega = \omega'$ est résolu dès lors que l'on en considère la valeur principale au sens de Cauchy.

La stabilité

On caractérise le plus souvent la stabilité d'un système à travers la notion complémentaire d'instabilité. On dit d'un système qu'il est instable lorsque à une petite perturbation imposée en entrée, il associe en sortie une réponse infiniment grande. Si la condition de stabilité ne peut être considérée ni nécessaire ni suffisante quant à l'existence d'un système physique, elle reste nécessaire à sa réalisabilité.

III-2 MODÉLISATION DES ÉCOULEMENTS DANS UN CANAL BORNÉ

Avant d'exposer le passage au domaine temporel de la relation d'absorption force-vitesse étudiée dans le domaine fréquentiel, on présente dans les paragraphes suivants le cadre et les outils utilisés pour tester différentes méthodes. Pour coller à la réalité physique, on appliquera les relations d'absorption non pas à un hypothétique canal semi-infini, mais à un canal borné, fermé à chacune de ses extrémités par un batteur "piston" (cf FIGURE 6). L'un, celui de droite (noté S^+), fonctionnera en générateur de loi de vitesse $u(t)$, connue a priori; l'autre (noté S^-) sera l'absorbeur sur lequel seront testées les différentes solutions.

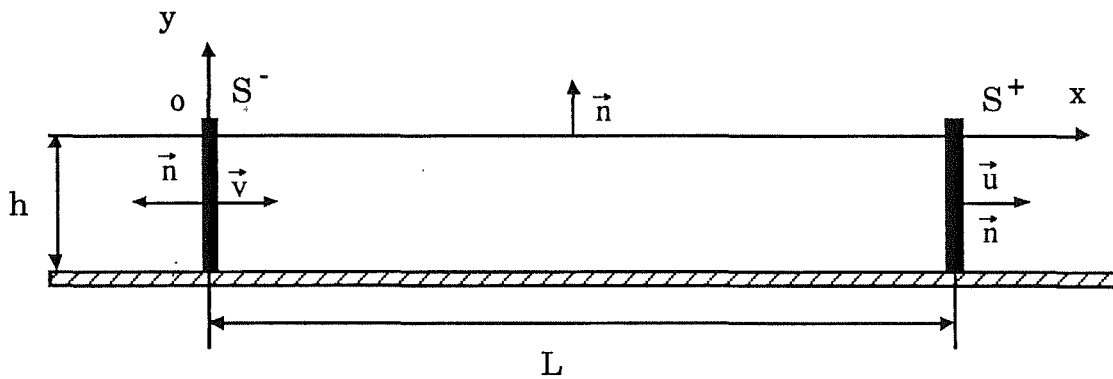


FIGURE 6

Les calculs des écoulements instationnaires au sein du canal bidimensionnel muni d'un générateur et d'un absorbeur ainsi que des grandeurs caractéristiques telles que efforts hydrodynamiques sur les parois ou déformée de surface libre, seront par la suite développés à partir de l'expression du potentiel des vitesses créé par un générateur de type piston [II-10].

III-2-1 Le potentiel total des écoulements

Le cadre théorique reste celui des écoulements de fluide parfait pesant dont le potentiel satisfait à l'équation de Laplace et aux conditions aux limites usuelles de ce type d'écoulements en profondeur finie uniforme (cf. [II-2]).

L'expression analytique du potentiel en régime instationnaire au sein d'un canal fermé de longueur L possédant à l'une de ses extrémités un générateur de vagues de type piston, est donnée par *Dommermuth & al.* [23] sous forme d'une décomposition en série de Fourier de la solution en régime instationnaire donnée par *Kennard* [45] dans le cas d'un canal semi-infini de profondeur finie muni à son origine d'un générateur de houle constitué d'une paroi mobile de loi de déplacement $S(y,t)$ quelconque.

Dans le repère associé au canal décrit par la FIGURE 6, à savoir un repère orthonormé à verticale ascendante dont l'origine est placée à l'intersection de la position de la surface libre au repos ($y=0$) et de la position d'équilibre du batteur S^- ($x=0$) et en notant pour vitesse de translation de ce dernier \vec{v} , le potentiel adimensionnalisé du canal fermé de longueur L s'écrit:

$$\begin{aligned}
 \text{[III-29]} \quad \phi(x,y,t) = & 2.v(t) \sum_{m=0}^{\infty} \sin(K_m y) \frac{\cosh(K_m(x-L))}{K_m^2 \sinh(K_m L)} \\
 & - \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (K_m^2 + k_n^2)^{-1} \right] \frac{\cosh(k_n(y+1)) \cos(k_n x)}{\omega_n \cosh(k_n)} \int_0^t v(\tau) \sin(\omega_n(t-\tau)) d\tau \\
 & - \frac{1}{L} \int_0^t \int_0^{\tau} v(\tau) d\tau d\tau'
 \end{aligned}$$

avec les notations suivantes:

$$K_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \omega_n^2 = k_n \tanh(k_n)$$

Dans cette expression, le premier terme caractérise la partie instantanée du potentiel de l'écoulement. Le second qui, dans son intégrale de convolution, fait intervenir l'histoire entière de l'écoulement depuis l'instant initial caractérise ce que l'on peut appeler l'effet de mémoire de la surface libre. Il représente une décomposition de l'écoulement sur les modes

propres du canal. Le troisième enfin n'est autre que le terme de conservation des volumes au sein du canal fermé.

On rappelle que cette expression correspond au cas où seule la surface de gauche travaille ($v(t)$), l'autre restant immobile ($u(t) = 0$).

Le potentiel total caractéristique des écoulements au sein d'un canal fermé à chacune de ses extrémité par un batteur piston est obtenu par superposition des solutions correspondant à chacun des batteurs.

Le potentiel $\phi^-(x,y,t)$, associé à la paroi S^- située en $x=0$ et se déplaçant suivant la loi de vitesse $\vec{v}(t)$ a, avec les notations de la FIGURE 6, l'expression [III-29] du potentiel $\phi(x,y,t)$ donnée précédemment.

Le potentiel $\phi^+(x,y,t)$, associé à la paroi S^+ située en $x=L$ et se déplaçant suivant la loi de vitesse $\vec{u}(t)$ se déduit de l'expression [III-29] par symétrie par rapport à l'axe vertical suivie d'une translation en $x=L$. Compte tenu de l'orientation des normales aux parois, il apparaît finalement pour expression de $\phi^+(x,y,t)$:

$$\begin{aligned}
 \text{[III-30]} \quad \phi^+(x,y,t) = & -2.u(t) \sum_{m=0}^{\infty} \sin(K_m.y) \frac{\cosh(K_m.x)}{K_m^2 \sinh(K_m.L)} \\
 & + \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (K_m^2 + k_n^2)^{-1} \right] \cdot \frac{\cosh(k_n.(y+1)).\cos(k_n.(L-x))}{\omega_n \cosh(k_n)} \int_0^t u(\tau) \cdot \sin(\omega_n(t-\tau)) d\tau \\
 & + \frac{1}{L} \int_0^t \int_0^\tau u(\tau) d\tau dt
 \end{aligned}$$

Le potentiel total dans le canal bidimensionnel fermé à chacune de ses extrémités par un batteur piston, superposition des potentiels $\phi^-(x,y,t)$ et $\phi^+(x,y,t)$, aura finalement pour expression:

$$\begin{aligned}
 \text{[III-31]} \quad \phi(x,y,t) = & 2.v(t) \sum_{m=0}^{\infty} \sin(K_m.y) \frac{\cosh(K_m.(x-L))}{K_m^2 \sinh(K_m.L)} - 2.u(t) \sum_{m=0}^{\infty} \sin(K_m.y) \frac{\cosh(K_m.x)}{K_m^2 \sinh(K_m.L)} \\
 & - \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (K_m^2 + k_n^2)^{-1} \right] \cdot \frac{\cosh(k_n.(y+1))}{\omega_n \cosh(k_n)} \int_0^t [v(\tau) \cdot \cos(k_n.x) - u(\tau) \cdot \cos(k_n.(L-x))] \cdot \sin(\omega_n(t-\tau)) d\tau \\
 & - \frac{1}{L} \int_0^t \int_0^\tau [v(\tau) - u(\tau)] d\tau dt
 \end{aligned}$$

III-2-2 La pression dynamique au sein du fluide

En conservant les hypothèses de linéarité d'une part et d'équilibre hydrostatique d'autre part (cf. chap. II-7-2), la pression dynamique dans le fluide est donnée par

$$[\text{III-32}] \quad p = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Soit:

$$[\text{III-33}] \quad p(x, y, t) = -2 \cdot \frac{dv(t)}{dt} \sum_{m=0}^{\infty} \sin(K_m y) \frac{\cosh(K_m(x-L))}{K_m^2 \sinh(K_m L)} + 2 \cdot \frac{du(t)}{dt} \sum_{m=0}^{\infty} \sin(K_m y) \frac{\cosh(K_m x)}{K_m^2 \sinh(K_m L)}$$

$$+ \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (K_m^2 + k_n^2)^{-1} \right] \cdot \frac{\cosh(k_n(y+1))}{\cosh(k_n)} \cdot \int_0^t [v(\tau) \cdot \cos(k_n x) - u(\tau) \cdot \cos(k_n(L-x))] \cdot \cos(\omega_n(t-\tau)) d\tau$$

$$+ \frac{1}{L} \int_0^t [v(\tau) - u(\tau)] d\tau$$

III-2-3 Les efforts hydrodynamiques sur l'absorbeur

Les efforts hydrodynamiques exercés par le fluide en mouvement sur une frontière verticale sont obtenus par simple intégration de la pression sur cette paroi.

Dans le cas présent, on s'intéresse plus particulièrement aux efforts exercés par le fluide sur la paroi de l'absorbeur ($x = 0$). Compte tenu des notations, on obtient l'expression:

$$[\text{III-34}] \quad f(t) = -2 \cdot \frac{dv(t)}{dt} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{K_m^3 \tanh(K_m L)} + 2 \cdot \frac{du(t)}{dt} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{K_m^3 \sinh(K_m L)}$$

$$- \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (K_m^2 + k_n^2)^{-1} \right] \cdot \frac{\omega_n^2}{k_n^2} \cdot \int_0^t [v(\tau) - (-1)^n u(\tau)] \cdot \cos(\omega_n(t-\tau)) d\tau - \frac{1}{L} \int_0^t [v(\tau) - u(\tau)] d\tau$$

Note: Le développement complet des calculs menant à ces expressions est donné en annexe.

Ces efforts s'expriment donc directement en fonction des vitesses des deux batteurs à l'origine des écoulements dans le canal. La vitesse $u(t)$ du générateur est supposée connue a priori puisque l'on se fixe le champ de vagues que l'on veut obtenir dans le bassin. La vitesse $v(t)$ de l'absorbeur quant à elle doit être calculée à chaque instant de façon à satisfaire la relation d'absorption efforts-vitesse, c'est l'inconnue du système.

L'expression des efforts hydrodynamiques est une fonction explicite de la vitesse. Elle fait appel, en particulier du fait de la présence de l'intégrale de convolution en $\cos(\omega_n(t-\tau))$ à la connaissance de toutes les valeurs, passées et présentes, de $u(t)$ et $v(t)$. Les efforts et vitesses déterminés aux temps antérieurs à l'instant t considéré sont des données connues. La vitesse instantanée de l'absorbeur doit être déterminée à l'aide d'une expression implicite de la relation d'absorption qui sera obtenue dans le domaine temporel par transformation de Fourier inverse de la relation fréquentielle [II-46] de manière à permettre l'évaluation des termes de conservation des volumes et de l'historique de l'écoulement. Il est encore nécessaire pour connaître les efforts, de déterminer les termes caractéristiques de la dynamique des écoulements, c'est à dire les termes dépendants des accélérations $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$.

L'accélération du générateur est connue puisqu'elle est l'une des seules données accessibles du système. Il apparaît de plus que le coefficient

$$[III-35] \quad SP = 2 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{K_m^3 \sinh(K_m \cdot L)}$$

prend des valeurs très faibles dès que le bassin est assez long pour les décompositions sur les modes considérées. Ce terme d'inertie n'a donc que peu de poids et pourrait à la limite être négligé.

Un problème se pose par contre pour ce qui est de la connaissance de la dynamique de l'absorbeur. En effet, si la vitesse $v(t)$ peut être appréhendée par la relation d'absorption, il n'en n'est pas de même pour sa dérivée qui, caractérisant la dynamique de l'absorbeur, fait par nature intervenir une connaissance du futur du système. On retrouve ici le problème de la causalité de la réponse impulsionnelle du système. Il est à ce propos intéressant de remarquer que si l'on note

$$[III-36] \quad SM = 2 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{K_m^3 \tanh(K_m \cdot L)}$$

alors

$$[III-37] \quad \lim_{L \rightarrow \infty} SM = \frac{1}{H_{\infty}^I}$$

Ce coefficient SM (tout comme le coefficient SP) n'est fonction que de la longueur L du canal et tend vers une valeur limite connue lorsque L devient infinie.

On rappelle que H_{∞}^I est le coefficient de la relation d'absorption asymptotique hautes fréquences [II-49] liant dans le domaine fréquentiel les efforts sur le batteur à l'accélération de ce dernier. Cette relation étant linéaire, on aura dans le domaine temporel une relation équivalente de la forme:

$$\text{[III-38]} \quad \frac{dv(t)}{dt} = -H_{\infty}^I f(t)$$

qui ne peut être appliquée que dans le cas d'ondes de haute fréquence ($\omega > 4$).

On retrouve donc ici dans l'expression des efforts hydrodynamiques la composante dynamique apparaissant de manière prépondérante dans l'absorption des ondes de haute fréquence, terme d'inertie ou masse ajoutée du système dynamique.

III-3 PRÉSENTATION DE LA MISE EN ŒUVRE NUMÉRIQUE

La validation des différentes relations d'absorption en régime instationnaire est réalisée par simulation numérique des équations déduites de [III-31] et [III-34] donnant le potentiel des vitesses et les grandeurs cinématiques et dynamiques qui en découlent dès lors que sont connues $u(t)$ et $v(t)$, vitesses instantanées des parois verticales. Dans ces expressions ainsi que dans les relations d'absorption instationnaires étudiées interviennent des intégrales de convolution, coûteuses en temps de calcul. Pour éviter ces longs calculs, on a dans tous les cas déduit de ces expressions des jeux d'équations différentielles ordinaires (O.D.E.) équivalents que l'on a ensuite intégré dans une procédure numérique globale de type Runge-Kutta d'ordre 4 (voir § III-6-2-4). Les performances en absorption ont été calculées par "mesure" directe sur les courbes d'évolution des énergies dans le bassin et des élévations de surface libre. Ces grandeurs sont directement déduites des résultats en temps établis par cette procédure Runge-Kutta en temps à l'intérieur de laquelle l'écoulement est connu par des expressions analytiques des variables d'espace (séries sur les modes propres).

Les simulations dans le domaine du temps sont toutes effectuées suivant le même principe de façon à bien mettre en évidence l'évolution du comportement de l'absorbeur et des écoulements avec la fréquence, paramètre significatif pour caractériser l'absorption dynamique.

On génère pour chaque simulation un paquet d'ondes en imposant au générateur une loi de vitesse sinusoïdale de pulsation ω donnée. Pour obtenir les paquets d'ondes, on impose une rampe linéaire de croissance de la vitesse sur trois périodes puis on garde l'amplitude de la sinusoïde constante sur un nombre de périodes fixé, N , (typiquement $N=4$) avant de la faire décroître sur trois périodes (cf. FIGURE 9). L'intérêt essentiel de ces rampes est de limiter la génération d'ondes secondaires de différentes fréquences apparaissant en réponse à une trop brusque variation de la vitesse. Il est par ailleurs plus aisé de visualiser l'évolution d'un groupe d'ondes généré sur une durée limitée, en particulier lorsque l'on étudie les phénomènes de réflexion.

L'amplitude maximale de la vitesse est imposée égale à 2.5% de la longueur d'onde λ du mode principal généré de telle façon que le déplacement des batteurs garde des proportions raisonnables par rapport à la longueur L du bassin, fixée égale à un multiple de la longueur d'onde (généralement $L = 4.\lambda$). Il est à noter que l'amplitude des mouvements du générateur est imposée alors que la linéarisation sur laquelle repose la théorie est faite en fonction de la cambrure $\frac{2.a}{\lambda}$ que l'on suppose petite devant l'unité (a , amplitude de la houle). Ceci permet en fait de contrôler un second paramètre, $\frac{a}{L}$, indépendant du premier, et qui doit lui aussi rester petit pour que les expressions analytiques utilisées gardent un sens.

La durée totale de la simulation est elle aussi fixée en fonction des caractéristiques de la houle générée. On lui impose d'être égale à huit fois le temps nécessaire au groupe d'ondes pour parcourir la longueur L du canal. Le pas de temps dt quant à lui est fixé en fonction de la période du mouvement du générateur.

On donne ci-dessous les différents paramètres intervenant dans les simulations.

Longueur d'onde:

$$\lambda = \frac{2\pi}{m_0} \quad \text{où } m_0 \text{ est le nombre d'onde solution de la relation de dispersion [II-9a]}$$

Période:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

vitesse du générateur:

$$u(t) = A \cdot R(t) \cdot \sin(\omega t)$$

avec

$$A = 0.025 \lambda \quad \text{et} \quad R(t) = \begin{cases} \frac{t}{3.T} \\ 1 \\ \frac{(6+N).T - t}{3.T} \end{cases}$$

Longueur du bassin:

$$L = N \cdot \lambda \quad (N: \text{nombre fixé de longueurs d'onde})$$

Vitesse de Groupe:

$$c_g = \frac{\omega}{m_0} \left[\frac{1}{2} + \frac{m_0}{\sinh(2 \cdot m_0)} \right]$$

Vitesse de phase:

$$C_p = \frac{\omega}{m_0}$$

Durée totale de la simulation:

$$T_{\max} = \frac{8.L}{c_g}$$

Ces relations de dimensionnement en espace et en temps permettent d'obtenir des résultats correspondant à des écoulements semblables indépendamment de la fréquence de l'onde considérée.

La mise en évidence du comportement de l'absorbeur se fait essentiellement par l'étude de l'évolution de sa vitesse en réponse aux efforts hydrodynamiques pour une onde incidente donnée. Son efficacité quant à elle est appréhendée par l'étude des différentes caractéristiques de l'écoulement dans le canal (déformée de surface libre, énergies) et est évaluée quantitativement par le calcul d'un coefficient d'absorption en amplitude.

La mise en œuvre numérique du calcul de la vitesse de l'absorbeur est toujours basée sur le même principe, quel que soit le modèle d'absorption pris en compte. Il est toujours possible en effet, compte tenu des relations d'absorption présentées ultérieurement et de l'expression analytique des efforts hydrodynamiques [III-34], de se ramener à une équation différentielle de la forme

$$[\text{III-39}] \quad \frac{\partial v(t)}{\partial t} = \zeta(v(t), u(t))$$

dans laquelle l'accélération de l'absorbeur n'est fonction que des vitesses. De telles relations différentielles sont intégrées par de classiques schémas de type Runge-Kutta d'ordre 4, choisis en particulier pour leur robustesse. Cette procédure ne peut être utilisée qu'après identification des différentes fonctions de transfert par des modèles stationnaires paramétriques. Suivant une méthode proposée par *Clément* [16], l'identification est elle même ramenée à un lissage des réponses impulsionnelles par des séries d'exponentielles [20].

III-4 PRÉSENTATION DES GRANDEURS CARACTÉRISTIQUES

Les grandeurs caractéristiques des écoulements permettant une description tant qualitative que quantitative de l'absorption sont calculées à partir de l'expression du potentiel [III-29].

III-4-1 Les énergies dans le canal

L'estimation quantitative de l'efficacité de l'absorbeur ne peut se faire directement et de façon précise à partir de la loi de vitesse de l'absorbeur bien que celle-ci puisse donner des informations intéressantes quant à l'évolution des groupes d'ondes dans le canal. On ne peut quantifier l'absorption que par l'intermédiaire de grandeurs moyennes caractéristiques de l'écoulement global au sein du bassin. On va donc considérer l'énergie totale dans le bassin, superposition des énergies potentielle et cinétique du fluide. On pourra aussi calculer l'énergie apportée par le générateur et celle soustraite par l'absorbeur.

Le système complet fluide plus batteurs est initialement au repos. L'énergie totale initiale est donc égale à la seule énergie potentielle du fluide au repos.

On montre que (cf ANNEXE 2) l'énergie potentielle instantanée $E_p(t)$ du fluide est directement calculée en fonction des vitesses des deux batteurs, elle est caractéristique de la conservation des volumes au cours du temps.

$$[\text{III-40}] \quad E_p(t) = \frac{1}{2} \cdot [u(t) + v(t)]$$

L'énergie cinétique au sein du fluide est égale à chaque instant à l'énergie apportée par les deux batteurs, c'est à dire à l'intégrale en temps du travail fourni par les deux pistons. En notant $f_a(0,t)$ l'effort exercé par le fluide sur l'absorbeur et $f_g(L,t)$ celle exercée sur le générateur, il vient pour expression de l'énergie totale instantanée $E_c(t)$:

$$[\text{III-41}] \quad E_c(t) = - \int_0^t v(\tau) \cdot f_a(0, \tau) + u(\tau) \cdot f_g(L, \tau) d\tau$$

L'énergie totale du fluide est la somme de l'énergie potentielle $E_p(t)$ et de l'énergie

cinétique $E_c(t)$ du fluide. On l'obtient donc à chaque instant par la relation:

$$[III-42] \quad E_t(t) = E_c(t) + E_p(t)$$

III-4-2 La déformée de surface libre

La déformée de surface libre permet de visualiser l'évolution de l'écoulement dans le canal en fonction du temps, en particulier par l'intermédiaire de tracés de "waterfalls". Elle n'apporte pas d'information quantitative directe quant à l'absorption puisqu'elle représente une grandeur locale des variables d'espaces. Il est possible cependant d'obtenir des informations d'ordre quantitatif par comparaison de la surface libre calculée dans le cas du canal fermé par un absorbeur dynamique avec celle calculée sur une longueur équivalente dans le cas d'un canal semi-infini.

L'expression analytique de la déformée de surface libre en régime instationnaire est obtenue dans le cas du canal fermé par un générateur S^+ et un absorbeur S^- à partir de l'expression [III-31] du potentiel.

$$[III-43] \quad \eta(x,0,t) = - \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{y=0}$$

$$[III-44] \quad \eta(x,0,t) = \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (k_n^2 + K_m^2)^{-1} \right] \int_0^t [v(\tau) \cos(k_n x) - u(\tau) \cos(k_n(L-x))] \cos(\omega_n(t-\tau)) d\tau + \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) - u(\tau) d\tau$$

L'intérêt de l'étude de la surface libre est de permettre la comparaison avec celle d'un canal semi-infini, solution vers laquelle on tend lorsque l'absorption est totale. Pour ce faire, on utilise l'expression analytique η_{∞} calculée à partir du potentiel $\phi^+(x,y,t)$ pour un canal fermé possédant un générateur piston animé d'une vitesse $u(t)$ en $x=L_{\infty}$. L_{∞} étant une longueur choisie suffisamment importante pour que le front d'onde n'ait eu le temps de se réfléchir sur la paroi opposée et que le canal puisse être assimilé, du point de vue de la simulation à un canal semi-infini.

$$[III-45] \quad \eta_{\infty} = - \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (k_n^2 + K_m^2)^{-1} \right] \cos(k_n(L-x)) \int_0^t u(\tau) \cos(\omega_n(t-\tau)) d\tau - \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau$$

Après avoir brièvement présenté les méthodes de simulation et après avoir rappelé quelques notions utiles pour la suite, on peut maintenant aborder l'étude des relations d'absorption force-vitesse dans le domaine du temps

III-5 SOLUTION AVEC FRONTIÈRE À UN DEGRÉ DE LIBERTÉ

L'étude en régime harmonique monochromatique de l'absorption dynamique d'ondes de gravité par un batteur de type piston a permis de mettre en évidence une fonction de transfert liant les efforts hydrodynamiques exercés par le fluide sur le batteur à la vitesse de translation de celui-ci lorsqu'il fonctionne en mode d'absorption totale.

Le choix de ce couple de données entrée-sortie n'est pas a priori arbitraire, mais est en fait essentiellement lié à la volonté de prolonger cette étude théorique par une application physique expérimentale.

Des différentes grandeurs caractérisant l'écoulement au sein d'un canal fermé, les efforts hydrodynamiques exercés par le fluide sur l'une des parois sont parmi les plus accessibles à la mesure. Il aurait été en pratique envisageable de prendre comme donnée d'entrée la dénivelée de surface libre au voisinage de la paroi mais celle-ci est plus facilement bruitée par des perturbations locales telles que les phénomènes d'ondes transverses. Les efforts sur la paroi, qui sont déjà par nature moyennés, sont certainement moins sensibles à ce genre de perturbations.

Cette donnée d'entrée étant choisie, il était alors assez naturel de considérer comme grandeur de sortie la vitesse de translation du batteur afin d'établir un parallèle avec la condition de radiation locale d'*Orlansky*. On rappelle que cette condition fait apparaître une relation différentielle d'ordre zéro à coefficient variable (vitesse de phase instantanée), donc instationnaire, entre les pressions dynamiques et vitesses de déplacement locales.

La condition d'absorption que l'on cherche à développer ici se caractérise au contraire par un modèle à coefficients constants d'ordre supérieur, c'est à dire faisant intervenir les dérivées successives des données d'entrée et de sortie, qui sont autant de degrés de liberté supplémentaires sur la connaissance du système et de sa dynamique.

Il est important de noter que dans tous les cas, les grandeurs mesurables, caractéristiques de l'écoulement dans le canal, ne peuvent être représentatives que des mouvements d'ensemble du fluide et qu'il est impossible, par la mesure, de dissocier les phénomènes instantanés de radiation ou de diffraction. On ne pourra donc pas considérer l'absorbeur comme un simple système fonctionnant en boucle fermée comme un régulateur annulant les effets de la perturbation que serait l'onde incidente venant se réfléchir sur sa paroi. C'est la raison pour laquelle on s'est fixé ce modèle mono-entrée mono-sortie, fonctionnant en quelque sorte comme un filtre.

III-5-1 La réponse impulsionnelle de l'absorbeur

La relation entrée-sortie dans le domaine temporel, du système linéaire invariant en temps que constitue l'absorbeur dynamique tel qu'on l'a défini est obtenue par transformation de Fourier inverse de la relation fréquentielle:

$$[\text{III-46}] \quad V(i\omega) = H(i\omega).F(i\omega)$$

et s'exprime donc, compte tenu de la relation [II-10a], sous forme du produit de convolution:

$$[\text{III-47}] \quad v(t) = h(t) * f(t)$$

dont l'expression intégrale est:

$$[\text{III-48}] \quad v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau).f(\tau) d\tau$$

Dans cette relation, $h(t)$ est la transformée de Fourier inverse de la transmittance $H(i\omega)$, c'est donc la réponse impulsionnelle du système.

La définition de la transformation de Fourier impose pour calculer $h(t)$ une intégration dans le domaine des fréquences sur le domaine $]-\infty, +\infty[$. La fonction $h(t)$ étant réelle, la relation de définition [III-8] impose que $H(i\omega)$ soit une fonction hermitienne. La réponse impulsionnelle $h(t)$ ainsi calculée est représentée par la courbe de la FIGURE 7.

On voit apparaître sur cette courbe le problème essentiel de cette modélisation de l'absorbeur dynamique, à savoir que la réponse impulsionnelle n'est pas causale, autrement dit que le système qui lui est associé n'est pas physiquement réalisable.

On peut même dire de $h(t)$ qu'elle est purement "anticausale", en ce sens qu'elle est entièrement nulle pour les instants positifs et non nulle pour les instants négatifs. Le produit de convolution [III-48] appliqué à un instant t quelconque fait uniquement appel à des valeurs futures et donc inconnues des efforts sur l'absorbeur.

Le caractère particulier de cette forme "anticausale" amène de nombreuses questions et en particulier celle de savoir si le problème est à la base réellement bien posé. Pour s'assurer du bien fondé des choix initiaux, on va s'intéresser à la relation entre les phénomènes de radiation et d'absorption tout en se rappelant que le principe général de l'absorption consiste en une annihilation à une certaine distance du batteur de l'onde réfléchie par ce dernier, par superposi-

tion d'une onde de radiation d'amplitude et de phase adéquates.

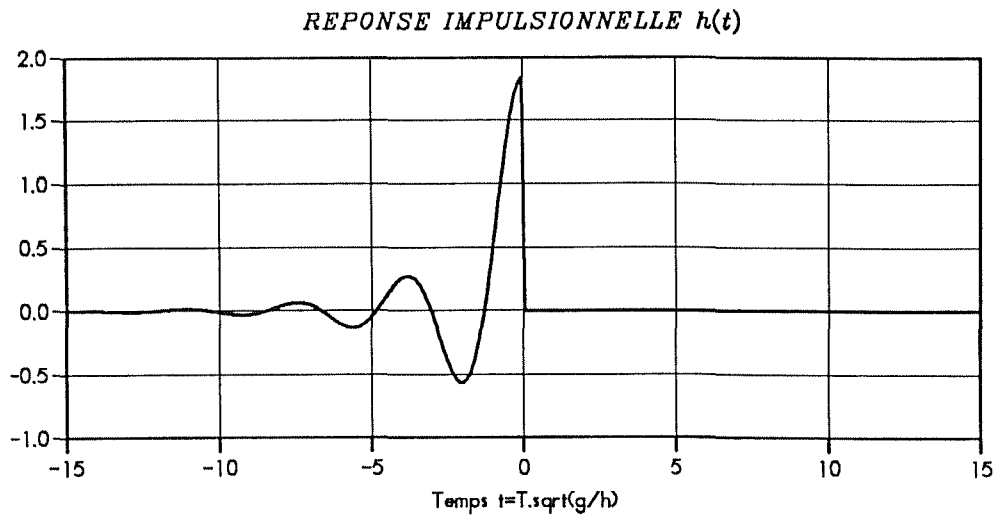


FIGURE 7

III-5-2 *La réponse impulsionnelle de radiation d'un batteur piston*

Le calcul des efforts hydrodynamiques totaux exercés par le fluide sur le batteur [II-44] et des efforts de radiation dûs aux mouvements de ce dernier [II-45] a permis de mettre en évidence le fait que ces deux termes formaient au signe près une paire d'éléments conjugués. On définit alors la fonction de transfert $G_b(i\omega)$ liant la vitesse de translation d'un piston aux efforts de radiation de ce dernier.

$$[\text{III-49}] \quad G_b(i\omega) = \frac{V(i\omega)}{F_b(i\omega)}$$

En remplaçant $V(i\omega)$ et $F_b(i\omega)$ par leurs expressions, [II-42] et [II-45] respectivement, on obtient l'expression de $G_b(i\omega)$:

$$[\text{III-50}] \quad G_b(i\omega) = \frac{-1}{4 \cdot \omega \left[\frac{\text{sh}^2(m_0)}{m_0^2 \cdot (2 \cdot m_0 + \text{sh}(2 \cdot m_0))} + i \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin^2(m_k)}{m_k^2 \cdot (2 \cdot m_k + \sin(2 \cdot m_k))} \right]}$$

Les fonctions de transfert d'absorption totale $H(i\omega)$ et de radiation $G_b(i\omega)$ sont donc au signe près, conjuguées l'une de l'autre.

Pour revenir dans le domaine temporel, on applique alors simplement la propriété

[III-11a] des transformées de Fourier de fonctions conjuguées et l'on obtient ainsi la relation sur les réponses impulsionnelles d'absorption et de radiation:

$$[III-51] \quad h(t) = -g_b(-t)$$

La réponse impulsionnelle d'absorption est donc équivalente à l'opposée de la réponse impulsionnelle de radiation lorsque celle-ci est appliquée en remontant le temps. Pour se représenter le phénomène temporel, indépendamment du coefficient (-1) apparaissant dans la relation, imaginons que l'on filme dans un canal un processus de génération de vagues par un batteur piston. Ceci correspond à l'application de $-g_b(t)$. Faire fonctionner le batteur en absorbeur, c'est à dire appliquer la fonction $h(t)$, reviendrait alors en quelque sorte à repasser le film à l'envers. On comprend bien alors qu'il est naturel que la réponse impulsionnelle en absorption soit "anticausale".

On peut encore faire à propos de ces réponses impulsionnelles une remarque inspirée par les relations de transformations de Fourier de fonctions conjuguées [III-11a]. En effet, soit $h^*(t)$ la réponse impulsionnelle associée à la fonction de transfert conjuguée de $H(i\omega)$, $H^*(i\omega)$, alors, en vertu de cette propriété [III-11a], on aura $h^*(t) = h(-t)$ soit encore, compte tenu de la relation [III-51], $h^*(t) = -g_b(t)$. La réponse impulsionnelle de radiation est égale et opposée à la réponse impulsionnelle conjuguée $h^*(t)$ de $h(t)$.

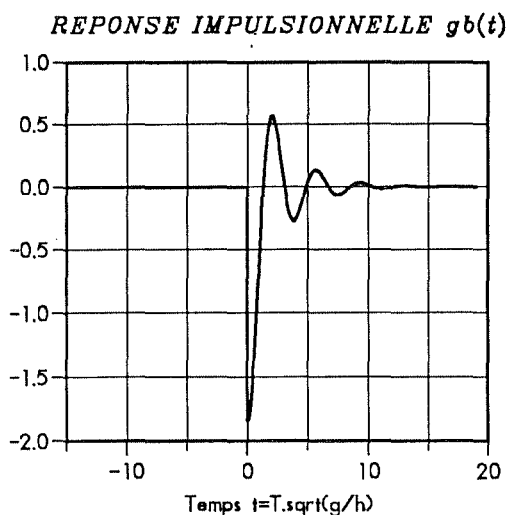


FIGURE 8a

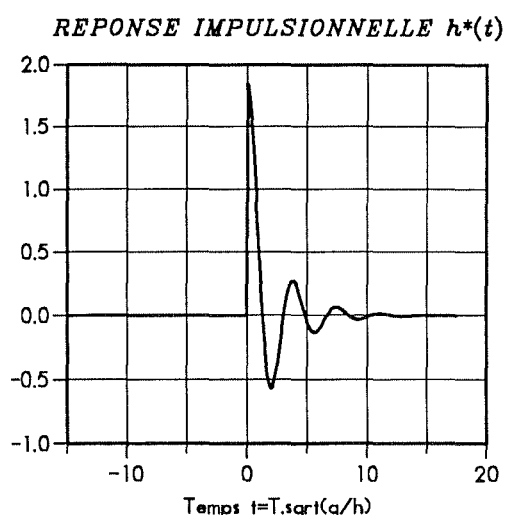


FIGURE 8b

L'étude des fonctions de transfert de radiation $G_b(i\omega)$ et d'absorption $H(i\omega)$ calculées pour des batteurs de type piston ainsi que de leurs développements asymptotiques permet une description précise du comportement à imposer à un tel batteur pour qu'il se comporte en absorbeur dynamique. On voit en effet par comparaison des deux relations [II-46] et [III-50], que l'absorbeur doit se comporter de telle façon que l'onde de radiation soit toujours en phase mais d'amplitude opposée par rapport à l'onde réfléchie. La génération d'ondes par un piston fait apparaître, lorsque la vitesse augmente, un retard de phase entre l'onde de radiation et le

mouvement du batteur lui même, ce du fait essentiellement du caractère prédominant alors pris par le terme de masse ajoutée $-\frac{1}{H_{\infty}^I} \dot{v}(t)$. Ceci signifie que l'absorbeur doit "anticiper" sur l'onde

incidente de façon à compenser ce retard, de sorte que l'onde qu'il génère soit bien égale et opposée à l'onde réfléchie (On rappelle à ce propos que dans le cadre de la théorie linéaire la réflexion totale est un phénomène instantané et qu'il n'y a donc pas, comme le montrent les expressions [II-14a] et [II-14b] des potentiels, de retard entre les ondes incidente et réfléchie.). Cette anticipation de l'absorbeur est mise en évidence dans le domaine fréquentiel par le caractère conjugué des fonctions de transfert et se traduit dans le domaine temporel par la non causalité de la réponse impulsionnelle $h(t)$ de l'absorbeur.

En 1969, dans un article consacré à l'absorption active de la houle, *Milgram* [64] avait déjà souligné ce problème de la causalité.

Considérant un canal semi-infini dans lequel se propage une onde de gravité, il détermine la fonction de transfert d'un système d'absorption dynamique constitué d'un volet articulé autour d'un axe, en prenant en entrée la dénivelée de surface libre à une distance d en amont du batteur et en sortie le déplacement d'un point de celui-ci. Ayant mis en évidence la nécessité pour un tel système de ne faire appel qu'à des valeurs connues c'est à dire passées ou présentes de la grandeur d'entrée, autrement dit de respecter les critères de causalité, il contourne le problème du calcul analytique conduisant à l'expression de la réponse impulsionnelle en créant un modèle approché de sa fonction de transfert uniquement à partir de résultats expérimentaux. Il détermine par la mesure les coefficients d'un modèle approché de la fonction de transfert entraînant, pour chaque fréquence de l'onde incidente, la meilleure absorption de celle-ci. Cette méthode ne lui permet pas d'obtenir un résultat satisfaisant sur l'étendue du spectre et n'apporte malheureusement pas de solution au problème de la causalité. De plus, se pose dans cette démarche empirique le même problème que dans le cas du modèle théorique de l'absorption par une frontière infiniment souple, à savoir que l'on ne peut s'affranchir totalement de la connaissance du contenu fréquentiel de l'écoulement arrivant sur le batteur.

III-6 RECHERCHE ET PRÉSENTATION DES SOLUTIONS

L'étude précédemment développée tant dans le domaine fréquentiel que dans le domaine temporel a permis de mettre en évidence la difficulté qu'il y a à mettre en œuvre une relation d'absorption en régime instationnaire ne faisant intervenir comme donnée caractéristique des écoulements dans le canal que les efforts exercés par le fluide sur le système d'absorption et comme donnée de sortie la seule vitesse de déplacement de ce dernier.

Cette difficulté qui dans le domaine temporel apparaît à travers le caractère "anti-causal" de la réponse impulsionnelle du système, traduit le fait que la simple relation efforts-vitesse n'est pas suffisante pour décrire l'évolution du système en particulier parce qu'elle n'en fait pas intervenir la dynamique de manière suffisamment explicite.

Ce problème de dynamique est surtout sensible dans le domaine des ondes de haute fréquence où, comme on l'a vu à travers l'étude de la radiation par un batteur piston, il apparaît un déphasage entre la vitesse de la paroi et l'onde radiée par son mouvement. Ce déphasage est lié à l'influence, augmentant avec la fréquence, du terme de masse ajoutée apparaissant dans les expressions des écoulements de radiation.

On va donc s'attacher dans ce qui suit à rechercher des approximations réalisables de cette relation d'absorption dynamique de manière à pouvoir la mettre en œuvre pratiquement. Il s'agit essentiellement de déterminer une méthode permettant de compenser le manque d'information sur la dynamique de l'onde incidente et de corriger ainsi le retard pris par l'onde radiée sur l'onde réfléchie.

L'étude du comportement asymptotique basses et hautes fréquences a fait apparaître des relations d'absorption linéaires entre la vitesse et les efforts d'une part et l'accélération et les efforts d'autre part.

Il est intéressant d'utiliser dans un premier temps la relation asymptotique basses fréquences dont la mise en œuvre est assez simple afin d'avoir une première idée des performances que l'on peut attendre d'un tel système d'absorption et de le comparer aux modèles déjà éventuellement existants.

III-6-1 *L'absorption en mode basses fréquences*

La relation [II-51] établie dans le domaine fréquentiel met en évidence le caractère purement proportionnel de la condition d'absorption dynamique lorsque l'on se limite au domaine $\omega \in [0,1]$. Ecrite sous cette forme, cette expression ne permet pas de déterminer dans le domaine temporel une relation purement instationnaire entre les efforts et la vitesse. On voit en effet que le coefficient de proportionnalité qui n'est autre que $\text{Re}\{H(\omega)\}$ est une fonction explicite de la pulsation ω . On a ici, exprimée en fonction des grandeurs globales que sont la vitesse du piston et les efforts exercés par le fluide sur sa paroi, l'intégrale de la condition de *Sommerfeld* pour les vitesses et pressions locales.

Le passage au domaine temporel fait apparaître le même problème d'estimation du coefficient de proportionnalité que dans le cas de la frontière souple où celui-ci était assimilé à une vitesse de phase instantanée [71].

$$[\text{III-52}] \quad v(t) = \text{Re}\{H(i\omega)\}.f(t)$$

On remarque cependant que sur le domaine des fréquences considéré, la partie réelle de la fonction de transfert n'évolue que faiblement. On peut donc faire l'approximation que, pour $\omega \in [0,1]$, la fonction de transfert reste constante et égale à son gain statique $H(0)$. On a donc $\text{Re}\{H(i\omega)\}=1$ et la relation fréquentielle se ramène à l'égalité [II-52] qui conduit par transformation de Fourier à la condition d'absorption basses fréquences dans le domaine du temps:

$$[\text{III-53}] \quad v(t) = f(t)$$

On prend pour les efforts hydrodynamiques l'expression analytique [III-34] calculée dans le cas d'un canal fermé à chacune de ses extrémités par les parois mobiles S^- et S^+ de vitesses de translation respectives $v(t)$ et $u(t)$. En considérant pour absorbeur la frontière S^- , on fait alors apparaître une expression de l'accélération fonction implicite des seules vitesses, $\dot{v}(t) = F(v(t),u(t))$, qu'il est possible d'intégrer numériquement par un schéma classique de type Runge-Kutta de façon à obtenir la vitesse instantanée de l'absorbeur.

$$[\text{III-54}] \quad \frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{SM} \left[\begin{array}{l} -v(t) + SP \cdot \frac{du(t)}{dt} - \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (K_m^2 + k_n^2)^{-1} \right] \cdot \frac{\omega_n^2}{k_n^2} \int_0^t [v(\tau) - (-1)^m u(\tau)] \cdot \cos(\omega_n(t-\tau)) d\tau \\ - \frac{1}{L} \int_0^t [v(\tau) - u(\tau)] d\tau \end{array} \right]$$

III-6-1-1 Résultats et limites du modèle asymptotique basses fréquences

Les courbes de la FIGURE 9 représentent l'évolution de la vitesse de l'absorbeur calculée dans le mode asymptotique basses fréquences pour des paquets d'ondes générés à des pulsations allant de $\omega=0.2$ à $\omega=2$.

On constate que pour les fréquences les plus basses ($\omega \leq 1$), le profil de la vitesse de l'absorbeur est identique à celui du générateur (même amplitude de crête et même durée). Le temps de latence avant la mise en mouvement de l'absorbeur correspond à la durée nécessaire au front d'onde pour parcourir le canal et atteindre le batteur initialement au repos. Le fait que, pour ces basses fréquences, l'absorbeur redevienne quasiment immobile après que le paquet d'ondes soit entièrement arrivé est une bonne indication quant à son efficacité puisque cela montre qu'il n'y a pas de retour de vagues et donc pas de réflexion.

Le profil de la vitesse d'absorption donné dans le cas $\omega=1.2$ commence à différer quelque peu de celui du générateur. On constate tout d'abord un phénomène lié à la propagation des ondes proprement dite, à savoir l'étalement du paquet d'ondes se propageant dans le canal. Les ondes de grande longueur, de célérité supérieure, arrivant les premières sur l'absorbeur, et les plus hautes fréquences en fin de groupe.

Mais il est surtout important de constater que l'absorbeur se remet en mouvement après le passage de ce premier paquet, avec une vitesse beaucoup plus faible certes mais montrant que l'absorption n'a pas été totale et que les ondes reviennent, après avoir été totalement réfléchies par le générateur alors redevenu immobile, sur la paroi de l'absorbeur qui se remet fait en mouvement. On peut noter que ce phénomène était déjà légèrement sensible dans le cas $\omega=1$ et l'on voit que l'on se situe là aux limites de ce modèle proportionnel de gain unité.

Les courbes correspondant aux fréquences supérieures (ici $\omega=2$) confirment ce phénomène avec l'apparition non pas d'une seule bouffée secondaire mais de plusieurs dont l'amplitude de crête décroît cependant progressivement, laissant supposer que le système agit malgré tout en absorbeur à chaque fois que le groupe d'ondes revient sur sa paroi. Le cas $\omega=2$ montre clairement que le modèle n'est pas adapté au hautes fréquences, l'amplitude de la vitesse en réponse au premier passage du paquet d'ondes reste inférieure de moitié à celle du générateur alors que celle des bouffées suivantes ne décroît que faiblement.

Les courbes des FIGURES 10a et 10b montrent l'évolution des énergies dans le canal correspondant aux simulations précédentes. Les courbes de la FIGURE 10a donnent les énergies potentielle, cinétique et totale du fluide dans le canal pour les différentes fréquences. L'origine des énergies ayant été choisie nulle lorsque le fluide est au repos, on s'attend à ce que l'énergie totale tende vers 0 lorsque le paquet d'ondes a été entièrement absorbé.

Le générateur étant dans un premier temps seul en mouvement comme on a pu le constater sur les courbes de vitesse, l'énergie totale croît. L'absorbeur recevant le groupe d'ondes se met en mouvement et l'énergie atteint sa valeur maximale lorsque le travail fourni par l'absorbeur devient supérieur à celui fourni par le générateur. Ce phénomène se voit clairement sur les courbes de la FIGURE 10b montrant les énergies fournies par les deux batteurs. L'énergie associée au mouvement de l'absorbeur est présentée virtuellement négative puisque soustraite à celle du fluide (travail négatif), sa croissance est bien toujours en retard sur celle du générateur.

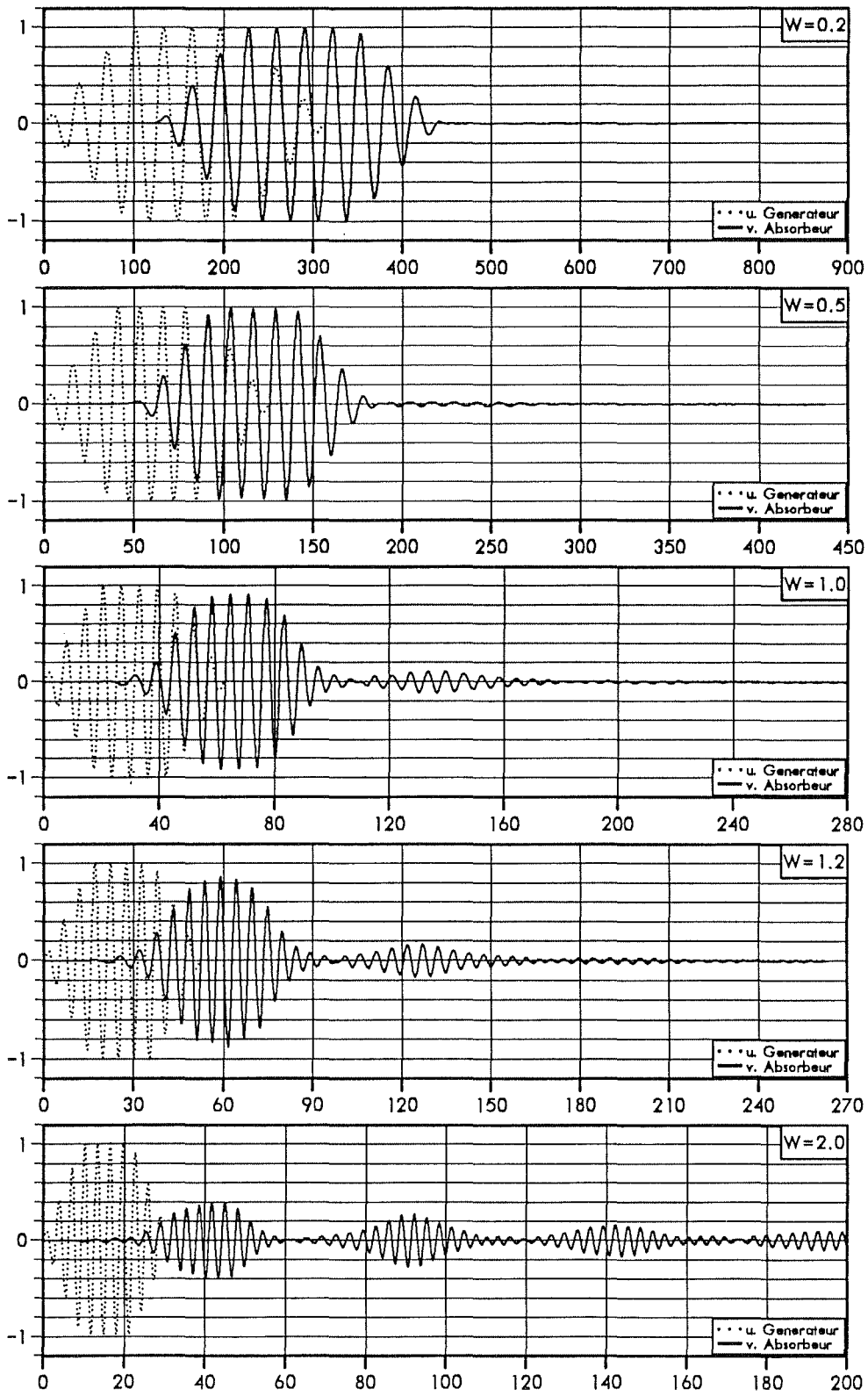
A basse fréquence, l'énergie totale du fluide après être passée par son maximum, décroît avec une pente constante vers une valeur très proche de zéro indiquant que le groupe d'ondes a été quasiment entièrement absorbé et que le fluide est à nouveau au repos. Pour les fréquences plus élevées, on voit apparaître une décroissance en paliers qui indique que seule une partie de l'énergie a été absorbée au premier passage. Ces paliers correspondent aux périodes où la composante réfléchie de l'onde incidente repart vers le générateur sur lequel elle se réfléchit totalement avant de revenir sur l'absorbeur. Si pour $\omega=1.2$ on peut considérer que 95% de l'énergie du groupe d'ondes est absorbée au premier passage et que les 5% restants le sont au second, on voit que quatre passages ne sont pas suffisant pour obtenir un tel résultat dans le cas d'une onde de pulsation $\omega=2$.

Ces courbes en paliers, mettent en évidence le phénomène d'absorption associé au mouvement de la paroi S^- et permettent d'en mesurer l'efficacité. On constate en effet que les intervalles de temps sur lesquels varie l'énergie sont ceux pour lesquelles apparaît une bouffée d'énergie potentielle. L'énergie potentielle du fluide est comme le montre la relation [III-40] directement associée au terme de conservation du volume dans le canal. La première bouffée de $E_p(t)$ correspond donc à la mise en mouvement du générateur suivie de celle de l'absorbeur. La ou les suivantes, lorsqu'elles existent sont, elles, caractéristiques du mouvement de l'absorbeur seul puisque le générateur est alors au repos. On constate donc que c'est bien le mouvement de la paroi S^- qui entraîne la décroissance de l'énergie au sein du fluide.

Ces remarques qualitatives quant à l'efficacité de l'absorbeur dynamique en mode asymptotique basses fréquences étant faites, il devient important de quantifier le phénomène. Pour ce faire, on détermine un coefficient d'absorption fonction d'une grandeur moyenne quantifiable de l'écoulement dans le bassin.

Compte tenu des définitions des différentes énergies; cinétique, potentielle et totale, cette dernière apparaît comme oscillant avec une amplitude égale à celle de l'énergie potentielle autour d'une valeur moyenne égale à l'énergie cinétique. On va donc pour définir un coefficient d'absorption permettant une quantification précise de l'absorption s'intéresser plus particulièrement à l'énergie cinétique.

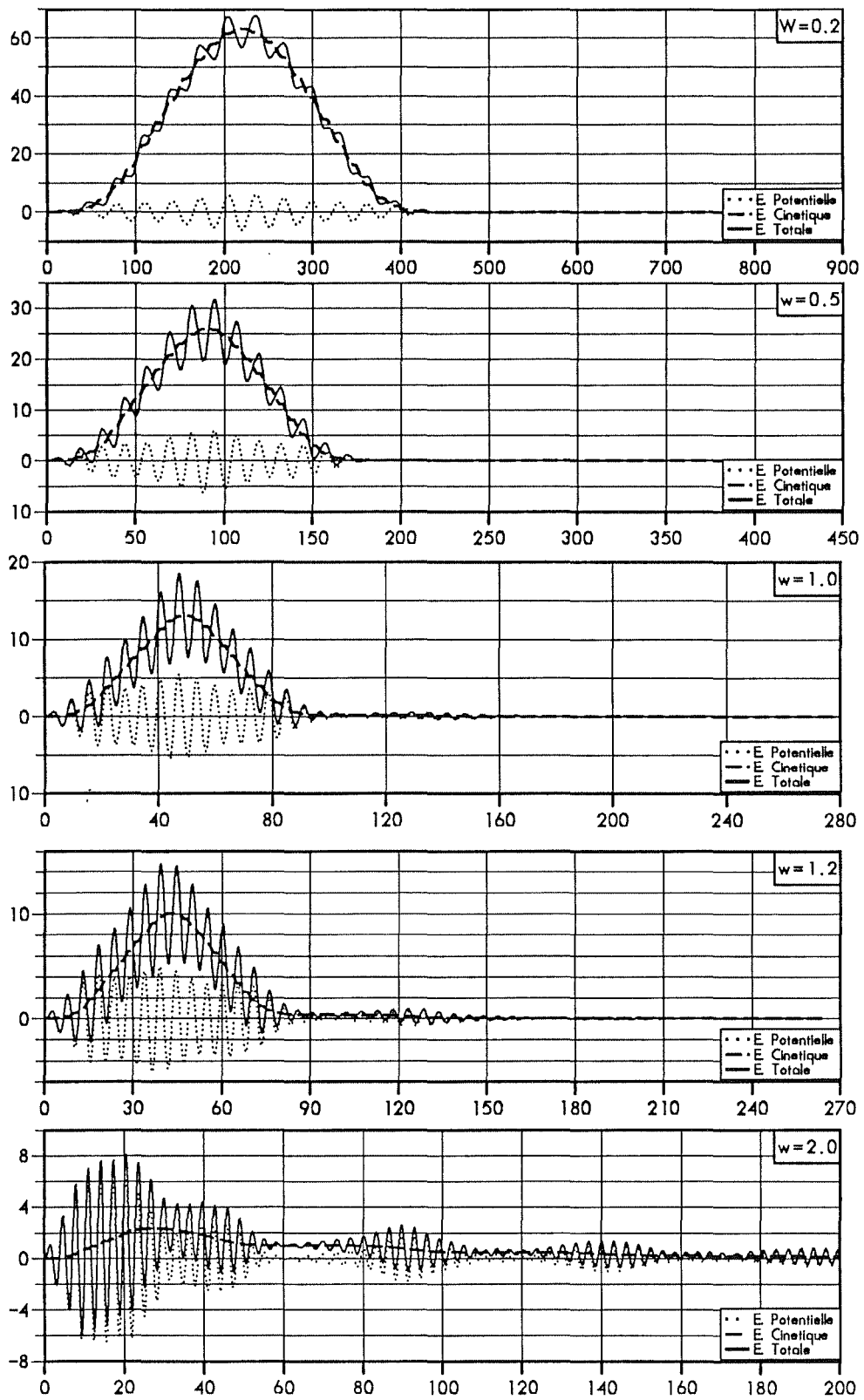
VITESSE DE L'ABSORBEUR Mode Asymptotique Basses Fréquences



temps $t = T \cdot \sqrt{g/h}$

FIGURE 9

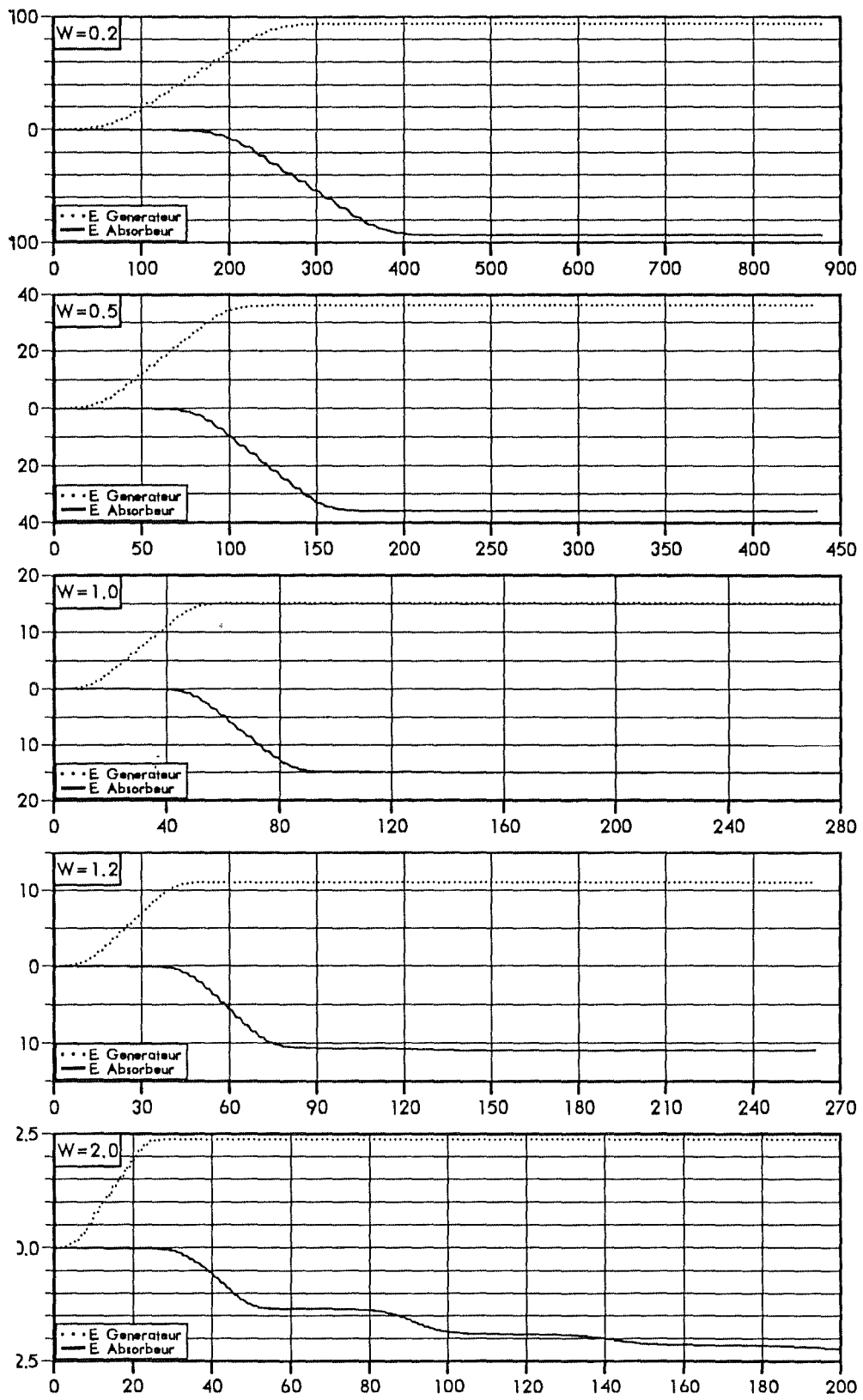
ENERGIES DU FLUIDE DANS LE CANAL MUNI D'UN ABSORBEUR Mode Asymptotique Basses Fréquences



temps $t = T \cdot \sqrt{g/h}$

FIGURE 10a

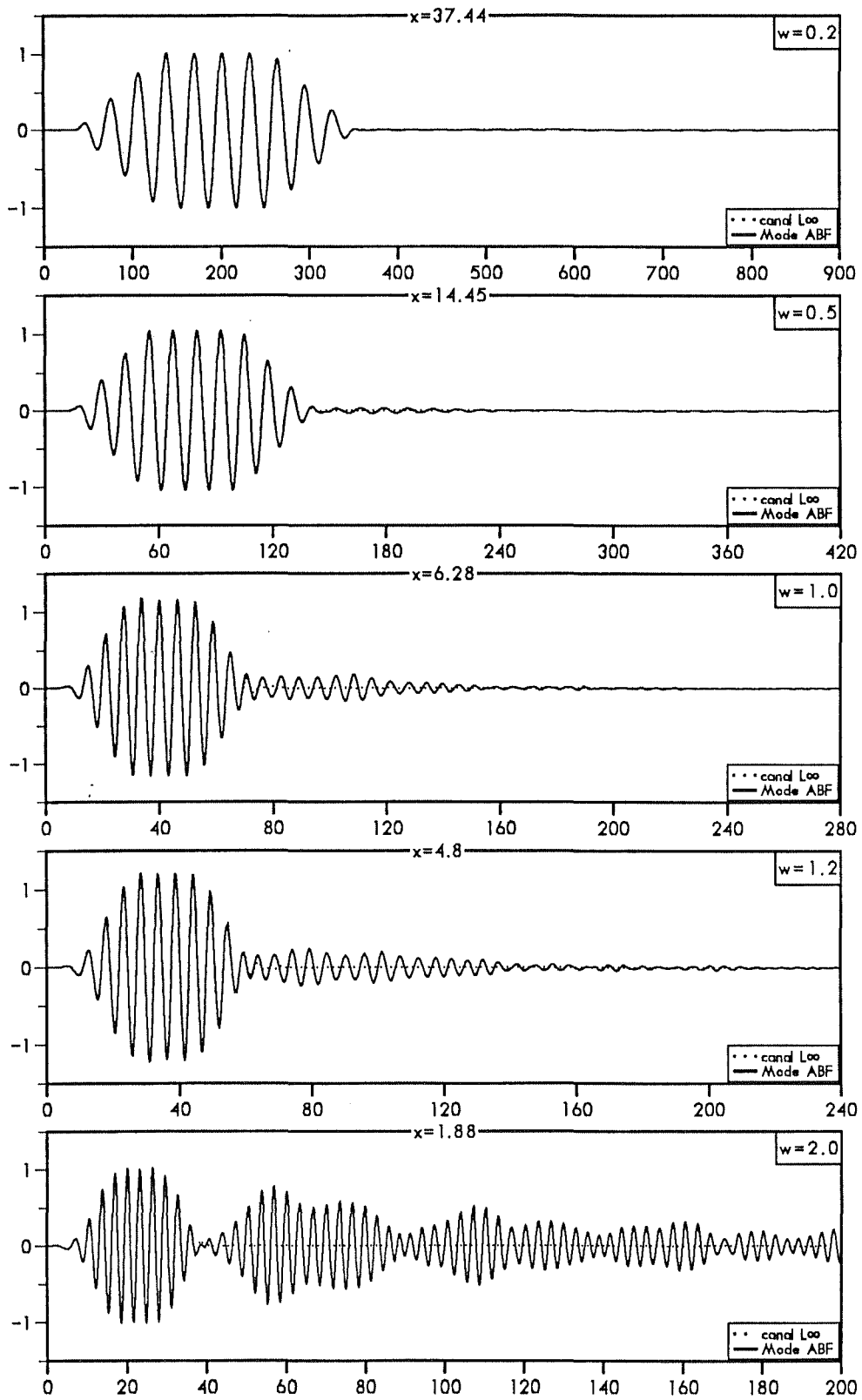
ENERGIE APPOURTEE PAR CHACUN DES BATTEURS Mode Asymptotique Basses Fréquences



temps $t=T.\text{sqrt}(g/h)$

FIGURE 10b

DEFORMEE DE SURFACE LIBRE AU POINT $x=0.3L$
Mode Asymptotique Basses Fréquences



temps $t=T \cdot \sqrt{g/h}$

FIGURE 11

Soit E_0 , l'énergie cinétique maximale acquise par le fluide, c'est à dire l'énergie calculée au premier sommet des courbes de la FIGURE 10a, et E_1 l'énergie cinétique calculée au niveau du premier palier. E_1 représente donc l'énergie restant au fluide après que le groupe d'onde soit entièrement arrivé sur l'absorbeur. L'énergie étant une grandeur proportionnelle au carré de l'amplitude, on définit alors le coefficient d'absorption en amplitude:

$$[III-55] \quad \mathcal{A} = 1 - \sqrt{\frac{E_1}{E_0}}$$

En calculant \mathcal{A} pour différentes valeurs de la pulsation dans le domaine d'étude, on obtient la courbe d'absorption en amplitude de l'absorbeur dynamique dans le mode asymptotique basses fréquences (FIGURE 12).

Il apparaît nettement sur cette courbe que l'approximation faite dans ce cas donne des résultats satisfaisants sur le domaine $[0, 1.2]$ où l'on absorbe de 97 à 79% de l'onde incidente en amplitude (respectivement de 99 à 95% en énergie). En dehors de cet intervalle, l'efficacité de l'absorbeur décroît rapidement avec la fréquence pour n'atteindre plus que 15,5% en amplitude (resp. 28,6% en énergie) lorsque $\omega=2,5$.

Des calculs identiques ont été menés sur le même domaine en prenant cette fois pour condition d'absorption la relation proportionnelle [III-52] faisant intervenir le coefficient $K = \text{Re}\{H(i\omega)\}$.

On a déjà mis en évidence le fait que cette relation faisant intervenir la pulsation de manière explicite ne pouvait, en aucun cas, être considérée comme une relation purement instationnaire. En d'autres termes, elle ne peut être utilisée que dans le cas où l'onde incidente est monochromatique ou possède un spectre à bande très étroite autour d'une fréquence connue a priori. Il est cependant important de contrôler l'erreur introduite en prenant dans le mode asymptotique basses fréquences l'hypothèse simplificatrice conduisant à l'égalité $v(t) = f(t)$.

Les courbes de la FIGURE 13, donnant le coefficient d'absorption \mathcal{A} calculé pour les deux modèles montrent, comme on pouvait s'y attendre que la relation [III-52] qui correspond à la solution exacte sur le domaine $[0, 1]$ donne de meilleurs résultats (jusqu'à 17%

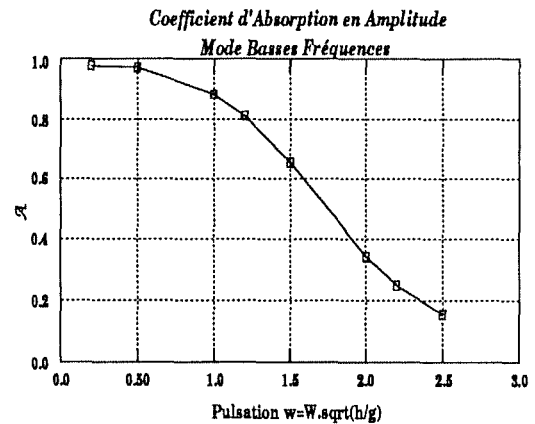


FIGURE 12

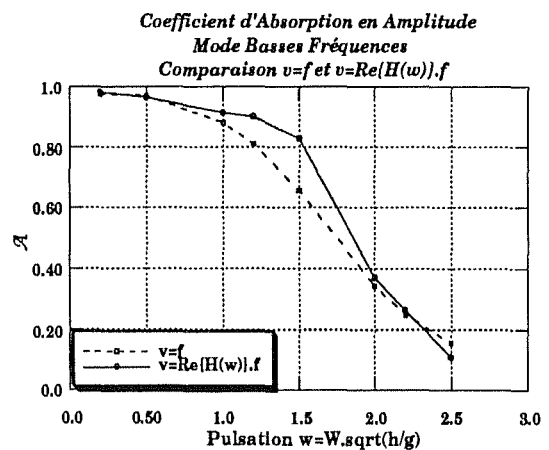


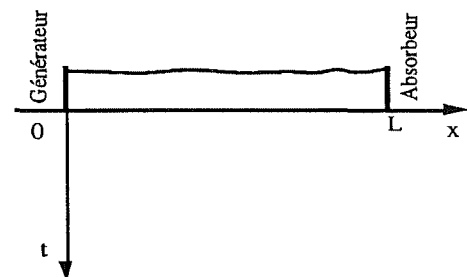
FIGURE 13

d'écart en amplitude) mais décroît ensuite plus rapidement lorsque la fréquence augmente pour rattraper le mode basses fréquences, confirmant ainsi les limites des modèles proportionnels purs.

Ces résultats portent essentiellement sur la réponse de l'absorbeur à l'excitation de l'onde incidente. Il faut encore s'assurer du bon comportement des écoulements dans le canal. A cet effet, les courbes de la FIGURE 11 permettent de comparer la déformée de surface libre calculée dans le canal de longueur L muni d'un absorbeur, à η_∞ , solution approchée [III-45] de la déformée de surface libre dans un canal semi-infini qui est celle vers laquelle on tend lorsque l'absorption est totale.

Sur ces courbes, la déformée de surface libre est calculée à chaque instant en un point d'abscisse x égale à 30% de la longueur L du canal à partir de l'absorbeur (la valeur de x est précisée sur chaque courbe), pour différentes fréquences de l'onde incidente. Ces résultats confirment les précédents, à savoir que le paquet d'ondes est quasiment intégralement absorbé aux basses fréquences mais que dès que l'on sort du domaine $[0, 1]$, l'hypothèse de simple proportionnalité n'est plus suffisante et le groupe d'ondes est alors en partie réfléchi. La décroissance progressive de l'amplitude des paquets d'ondes résiduels constatée dans ce cas après chaque passage sur le batteur confirme que celui-ci fonctionne bien en absorbeur même si son efficacité n'est pas totale. Le système peut être considéré stable en ce sens qu'au bout d'un temps suffisamment long, le paquet d'ondes est entièrement absorbé et la surface libre est à nouveau au repos.

L'évolution globale de la surface libre au sein du canal peut être encore mieux appréhendée qualitativement par les courbes en "waterfalls" présentées dans les pages suivantes. Ces vues sont constituées d'une superposition des surfaces libres calculées à chaque instant et translatées verticalement de haut en bas. Il faut donc les voir non pas comme des images de la surface libre à un instant donné, mais comme des représentations de l'évolution de l'écoulement instationnaire dans le canal. L'origine du repère associé à ces figures est située en haut à gauche. En abscisse est donnée la longueur du bassin (contrairement au schéma de la FIGURE 6 et pour faciliter la lecture, le générateur est placé à l'origine et l'absorbeur à droite de la feuille), et en ordonnée est donné le temps suivant la verticale descendante.

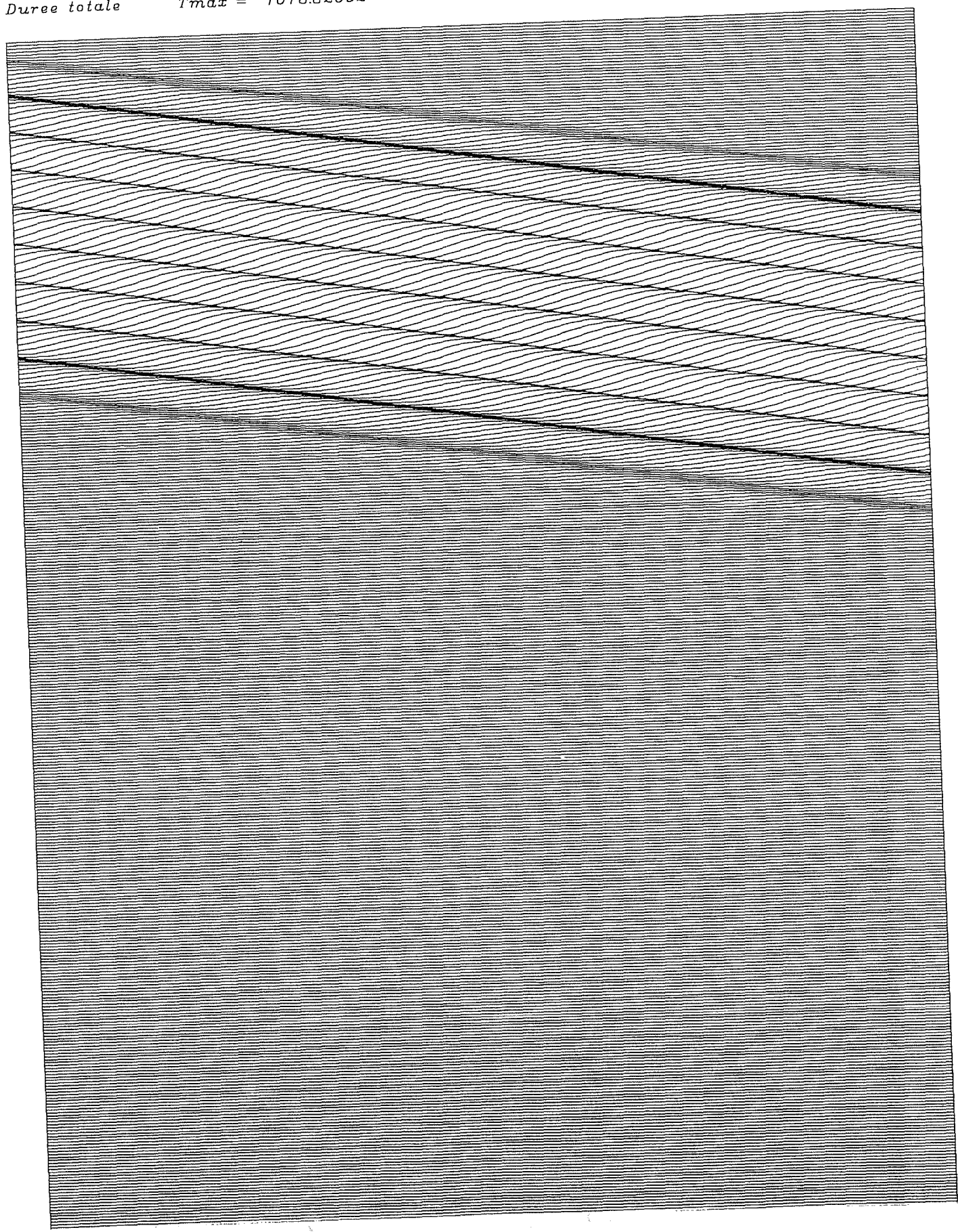


Les "waterfalls" présentés ci-après permettent de comparer les écoulements obtenus dans le canal muni d'un absorbeur avec ceux du canal infiniment long. Ils mettent en évidence la propagation du paquet d'ondes au long du canal, l'absorption totale aux basses fréquences puis, aux fréquences élevées, l'évolution du groupe d'ondes résiduel, partiellement absorbé à chaque passage sur l'absorbeur et totalement réfléchi par le générateur au repos.

CANAL AVEC ABSORBEUR
MODE BASSES FREQUENCES

Pulsation $\omega = 0.20000$
Longueur d'onde $\omega l = 31.20635$
Vitesse de Groupe $C_g = 0.98016$
Durée totale $T_{max} = 1018.82092$

Période $T = 31.41593$
Longueur du bassin $L = 124.82541$
Vitesse de Phase $C_p = 0.99333$
Pas de temps $dt = 0.20944$

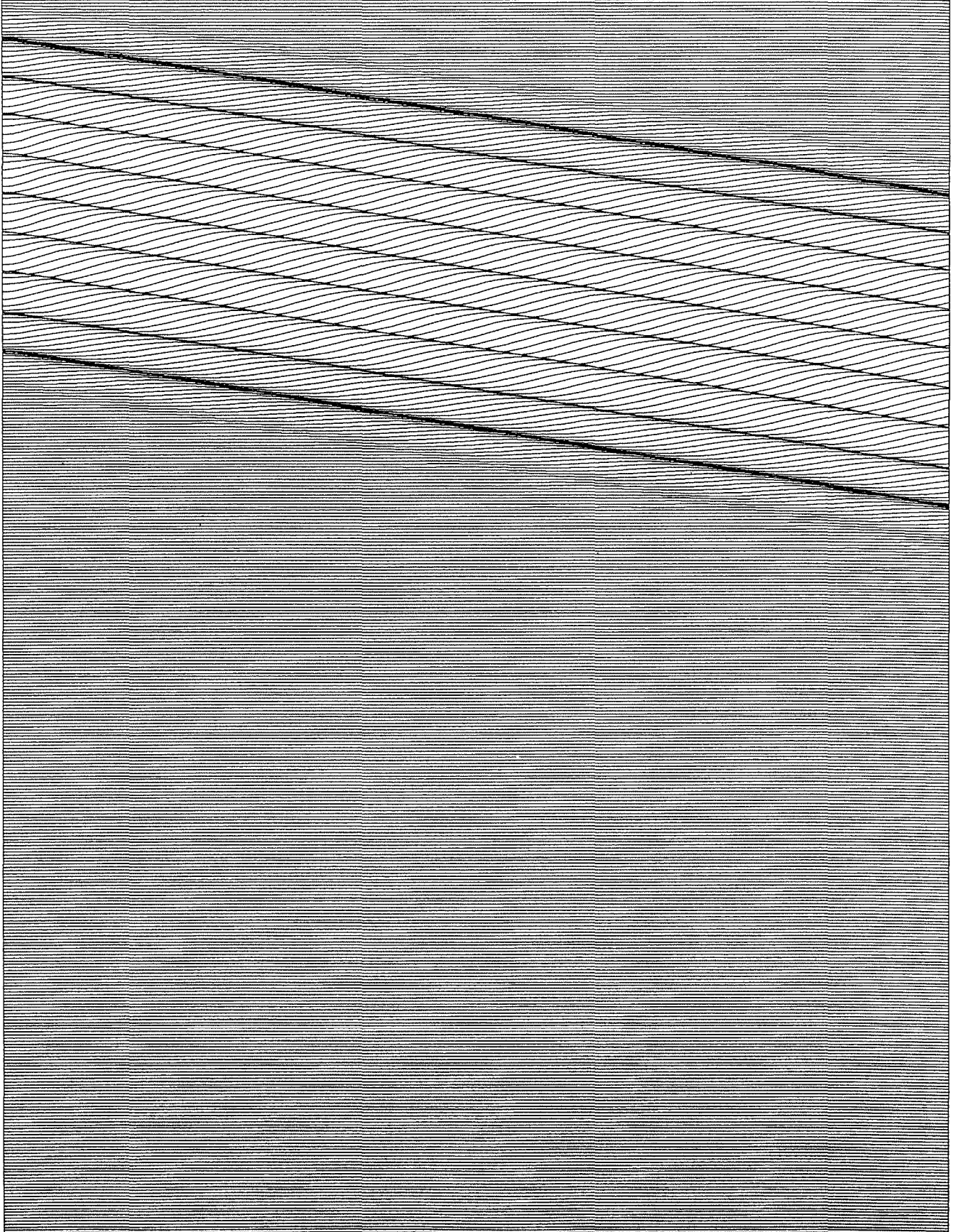


CANAL DE GRANDE LONGUEUR

Approximation du Canal Semi-Infini.

pulsation $w = 0.20000$
Longueur d'onde $wl = 31.41593$
Vitesse de Groupe $Cg = 0.98016$
Duree totale $T_{max} = 1018.82092$

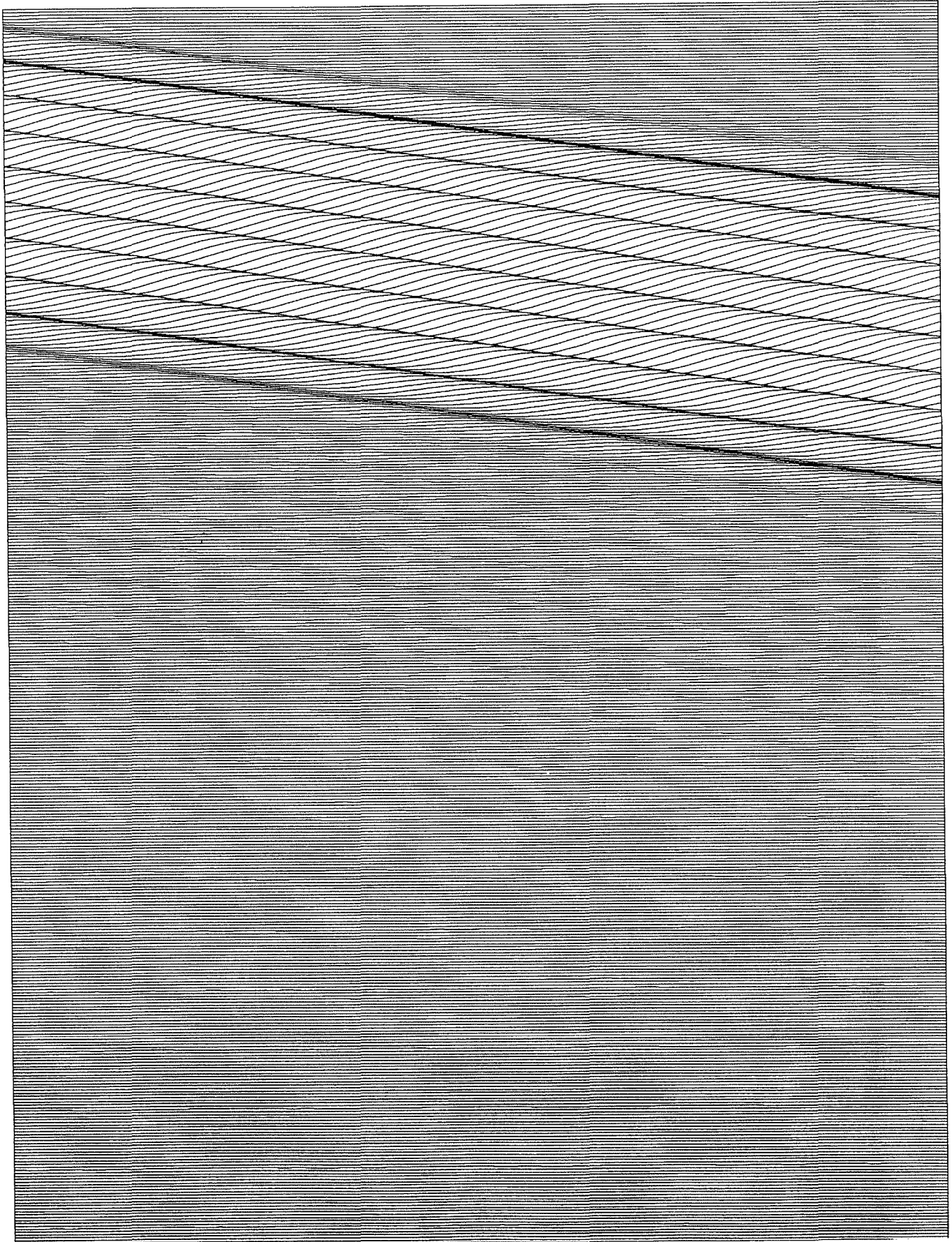
Periode $T = 31.20635$
Longueur du bassin $L = 1497.90491$
Vitesse de Phase $Cp = 0.99333$
Pas de temps $dt = 0.20944$



CANAL AVEC ABSORBEUR
MODE BASSES FREQUENCES

Pulsation $\omega = 0.50000$
Longueur d'onde $\omega l = 12.04106$
Vitesse de Groupe $C_g = 0.88114$
Duree totale $T_{max} = 437.29147$

Periode $T = 12.56637$
Longueur du bassin $L = 48.16423$
Vitesse de Phase $C_p = 0.95820$
Pas de temps $dt = 0.10472$

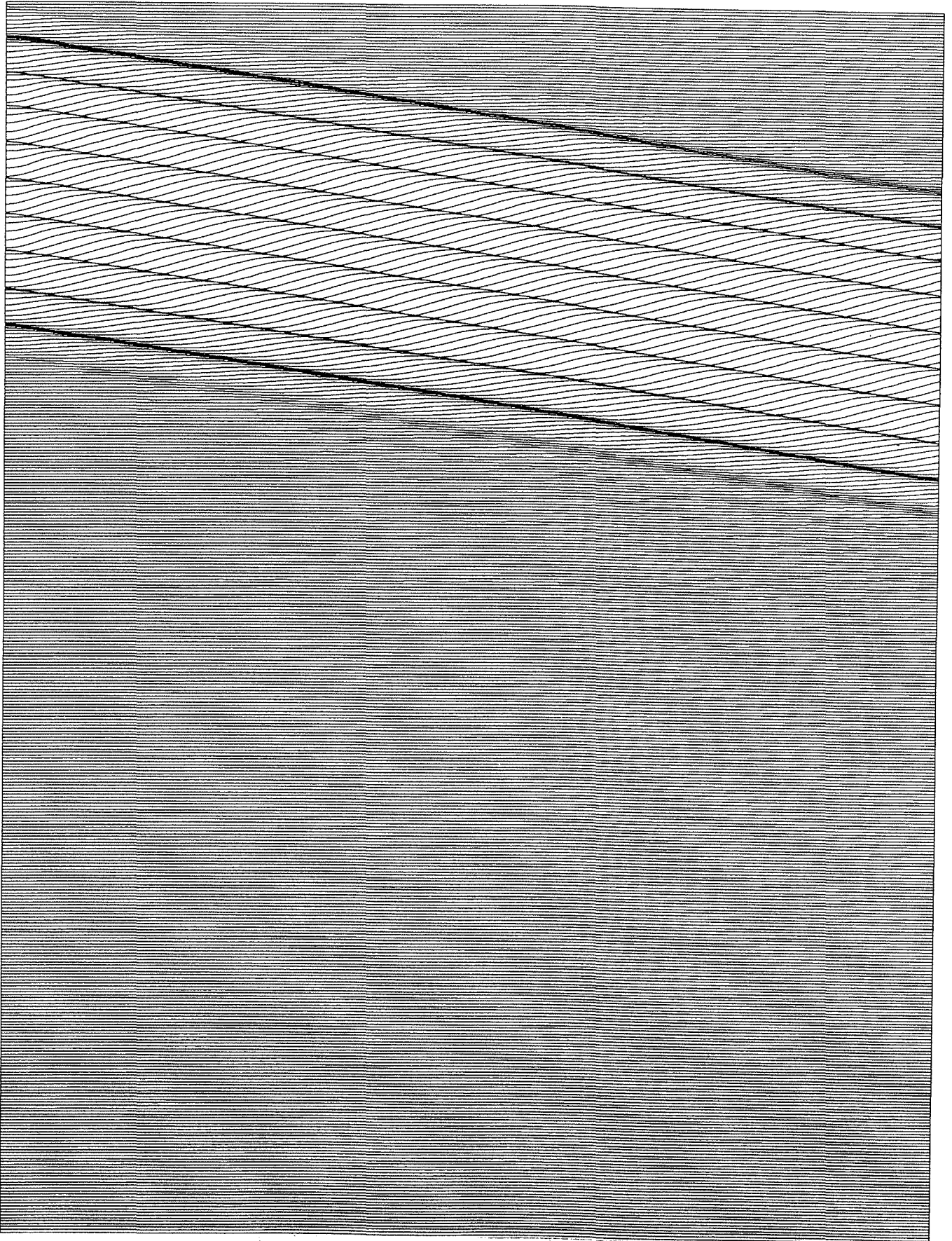


CANAL DE GRANDE LONGUEUR

Approximation du Canal Semi-Infini.

pulsation $\omega = 0.50000$
Longueur d'onde $\omega l = 12.56637$
Vitesse de Groupe $C_g = 0.88114$
Duree totale $T_{max} = 437.29147$

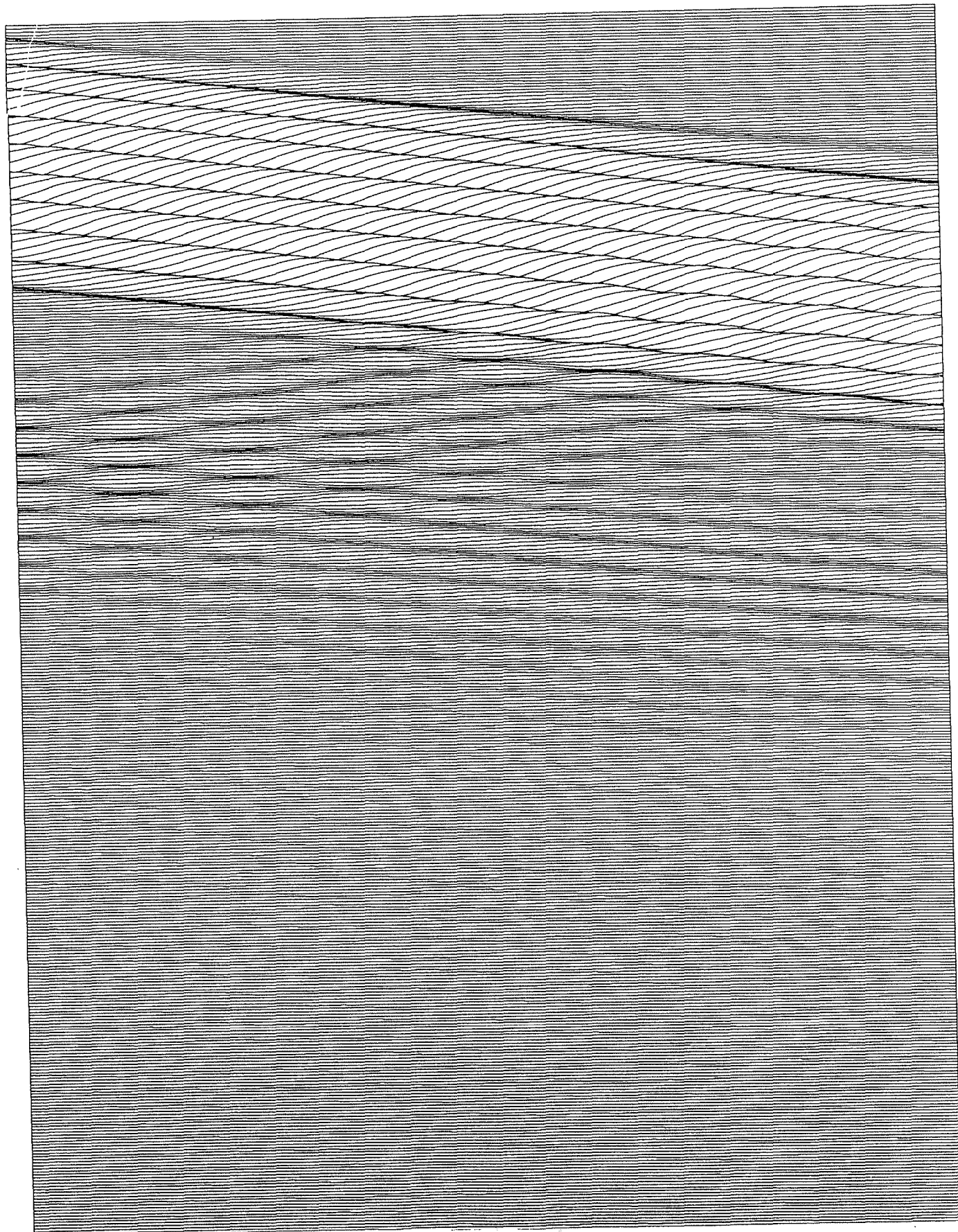
Periode $T = 12.04106$
Longueur du bassin $L = 577.97070$
Vitesse de Phase $C_p = 0.95820$
Pas de temps $dt = 0.10472$



CANAL AVEC ABSORBEUR
MODE BASSES FREQUENCES

Pulsation $\omega = 1.00000$
Longueur d'onde $\omega l = 5.23739$
Vitesse de Groupe $C_g = 0.59984$
Duree totale $T_{max} = 279.40231$

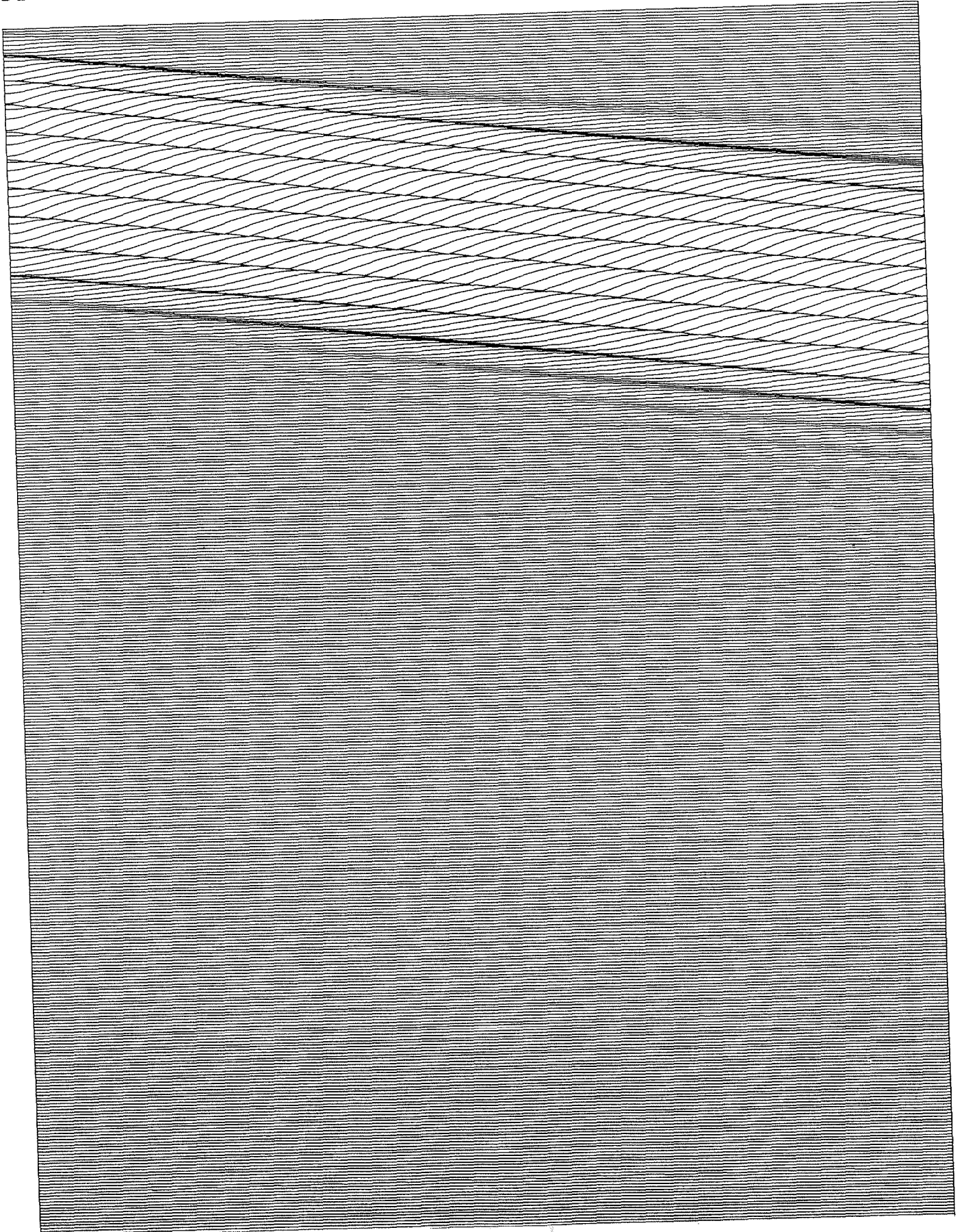
Periode $T = 6.28319$
Longueur du bassin $L = 20.94956$
Vitesse de Phase $C_p = 0.83356$
Pas de temps $dt = 0.05712$



CANAL DE GRANDE LONGUEUR
Approximation du Canal Semi-Infini.

pulsation $\omega = 1.00000$
Longueur d'onde $\omega l = 6.28319$
Vitesse de Groupe $C_g = 0.59984$
Duree totale $T_{max} = 279.40231$

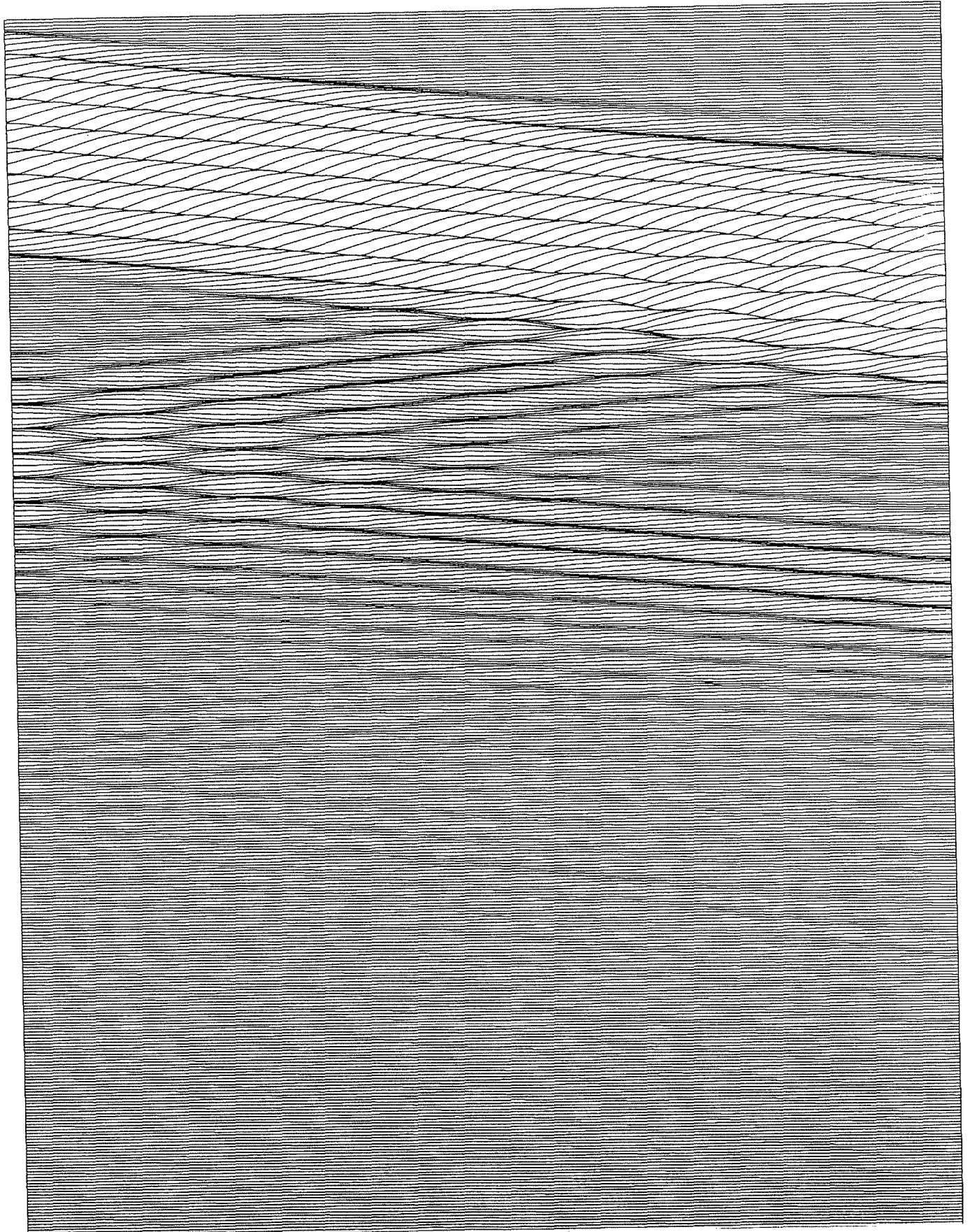
Periode $T = 5.23739$
Longueur du bassin $L = 251.39473$
Vitesse de Phase $C_p = 0.83356$
Pas de temps $dt = 0.05712$



CANAL AVEC ABSORBEUR
MODE BASSES FREQUENCES

Pulsation $w = 1.20000$
Longueur d'onde $wl = 4.00144$
Vitesse de Groupe $Cg = 0.48613$
Duree totale $Tmax = 263.39624$

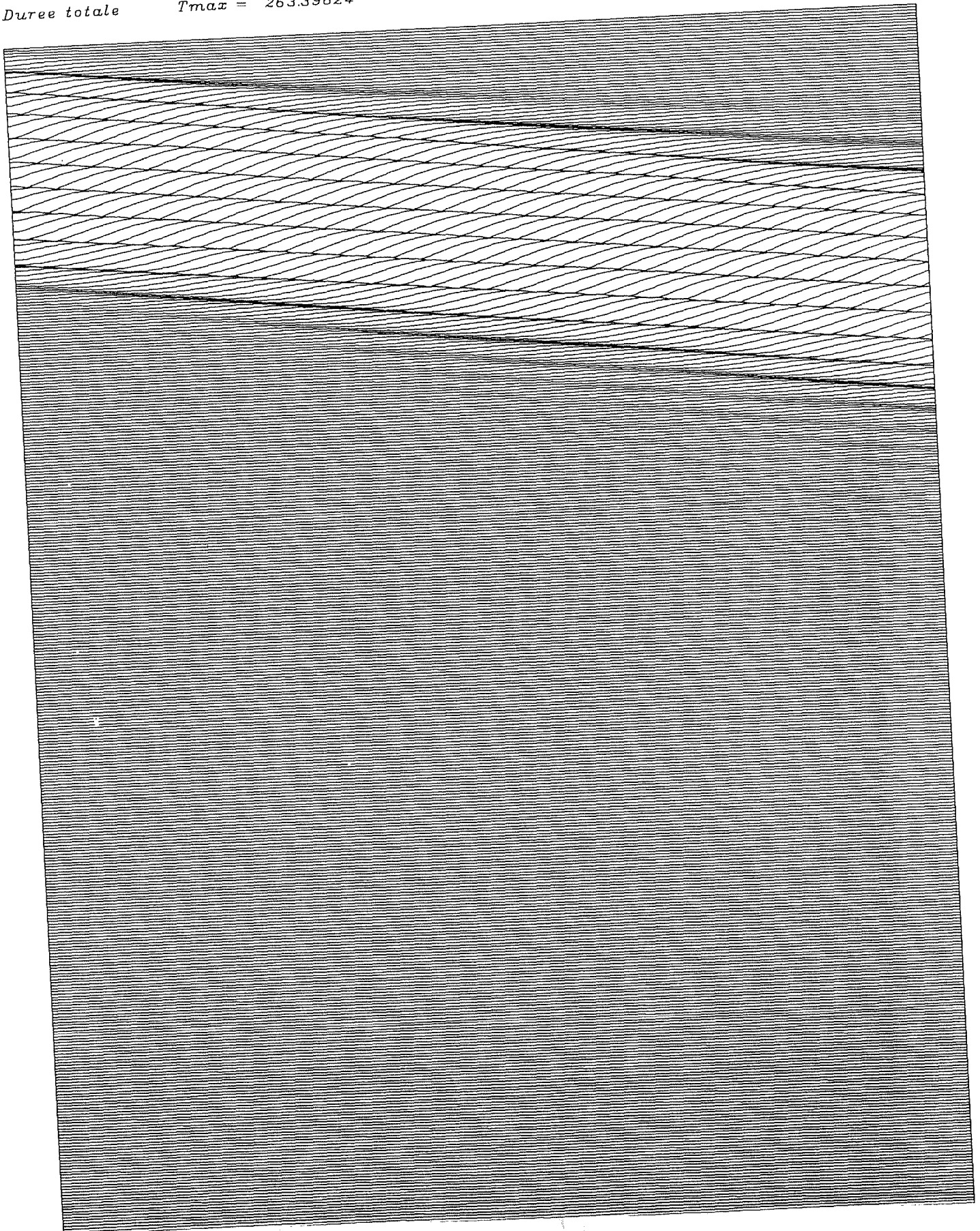
Periode $T = 5.23599$
Longueur du bassin $L = 16.00576$
Vitesse de Phase $Cp = 0.76422$
Pas de temps $dt = 0.05236$



CANAL DE GRANDE LONGUEUR
Approximation du Canal Semi-infini

pulsation $w = 1.20000$
Longueur d'onde $wl = 5.23599$
Vitesse de Groupe $Cg = 0.48613$
Duree totale $Tmax = 263.39624$

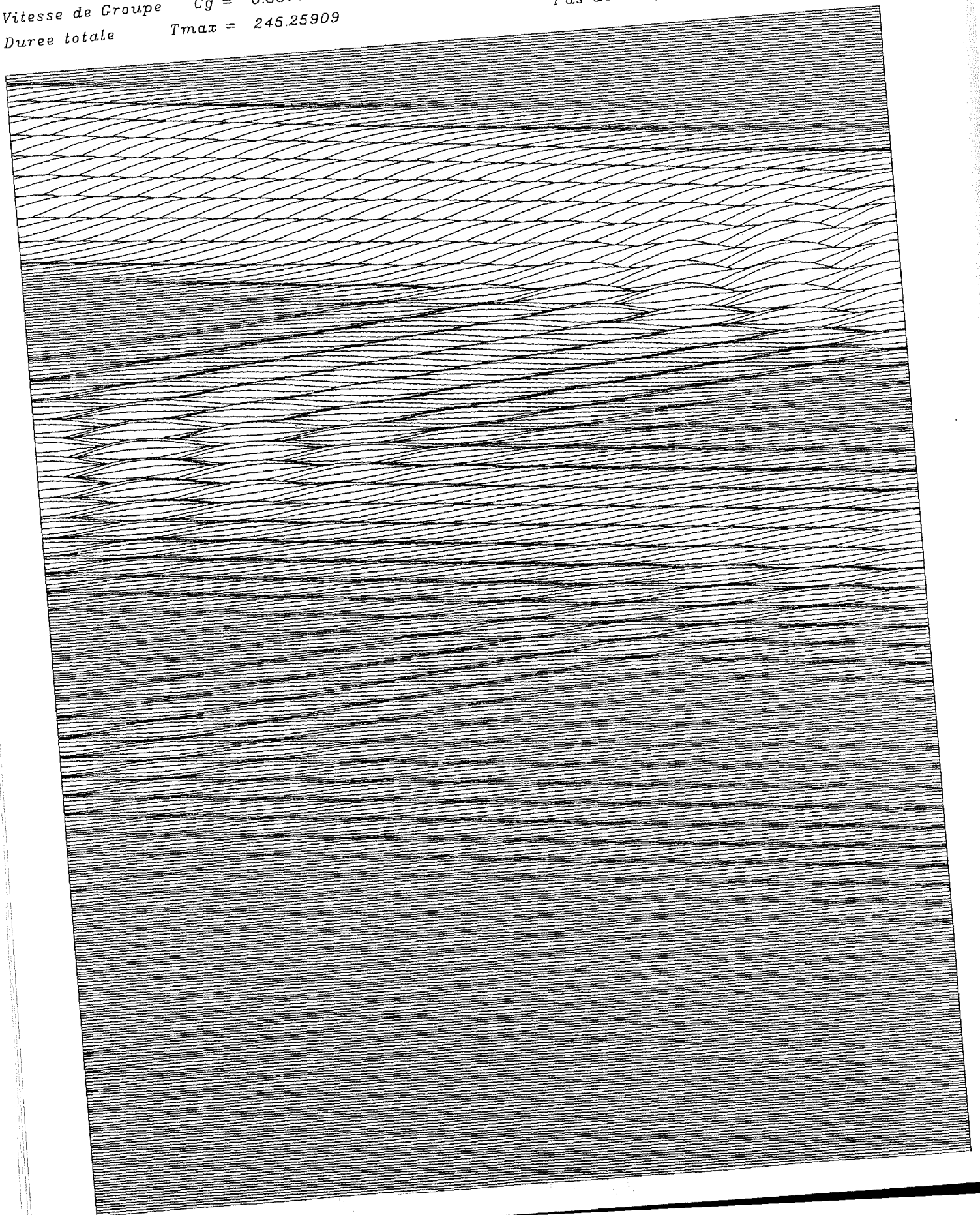
Periode $T = 4.00144$
Longueur du bassin $L = 96.03456$
Vitesse de Phase $Cp = 0.76422$
Pas de temps $dt = 0.05236$



CANAL AVEC ABSORBEUR
MODE BASSES FREQUENCES

Pulsation $\omega = 1.50000$
Longueur d'onde $\omega l = 2.73651$
Vitesse de Groupe $C_g = 0.35704$
Duree totale $T_{max} = 245.25909$

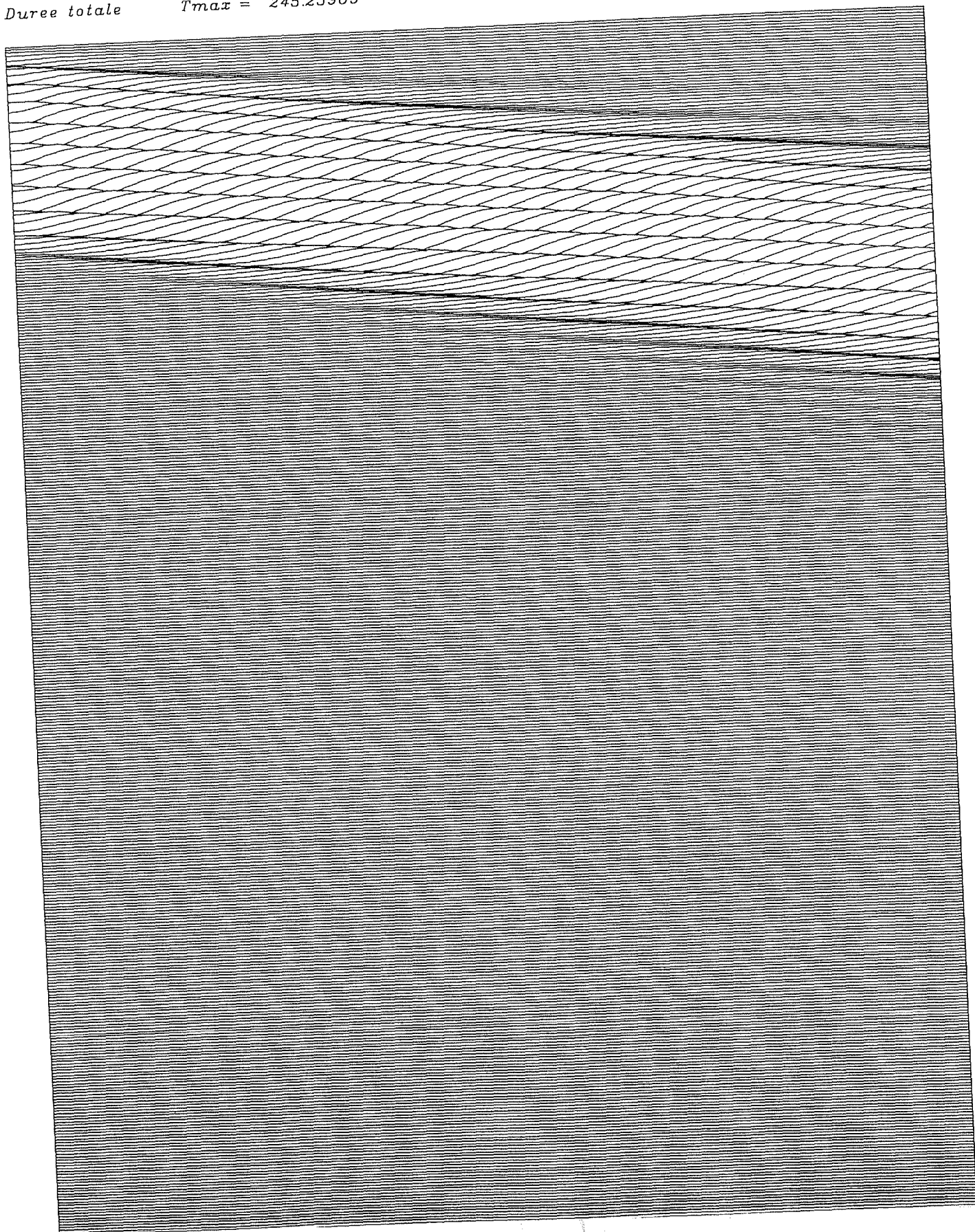
Periode $T = 4.18879$
Longueur du bassin $L = 10.94604$
Vitesse de Phase $C_p = 0.65329$
Pas de temps $dt = 0.04189$



CANAL DE GRANDE LONGUEUR
Approximation du Canal Semi-Infini.

pulsation $w = 1.50000$
 Longueur d'onde $wl = 4.18879$
 Vitesse de Groupe $Cg = 0.35704$
 Duree totale $T_{max} = 245.25909$

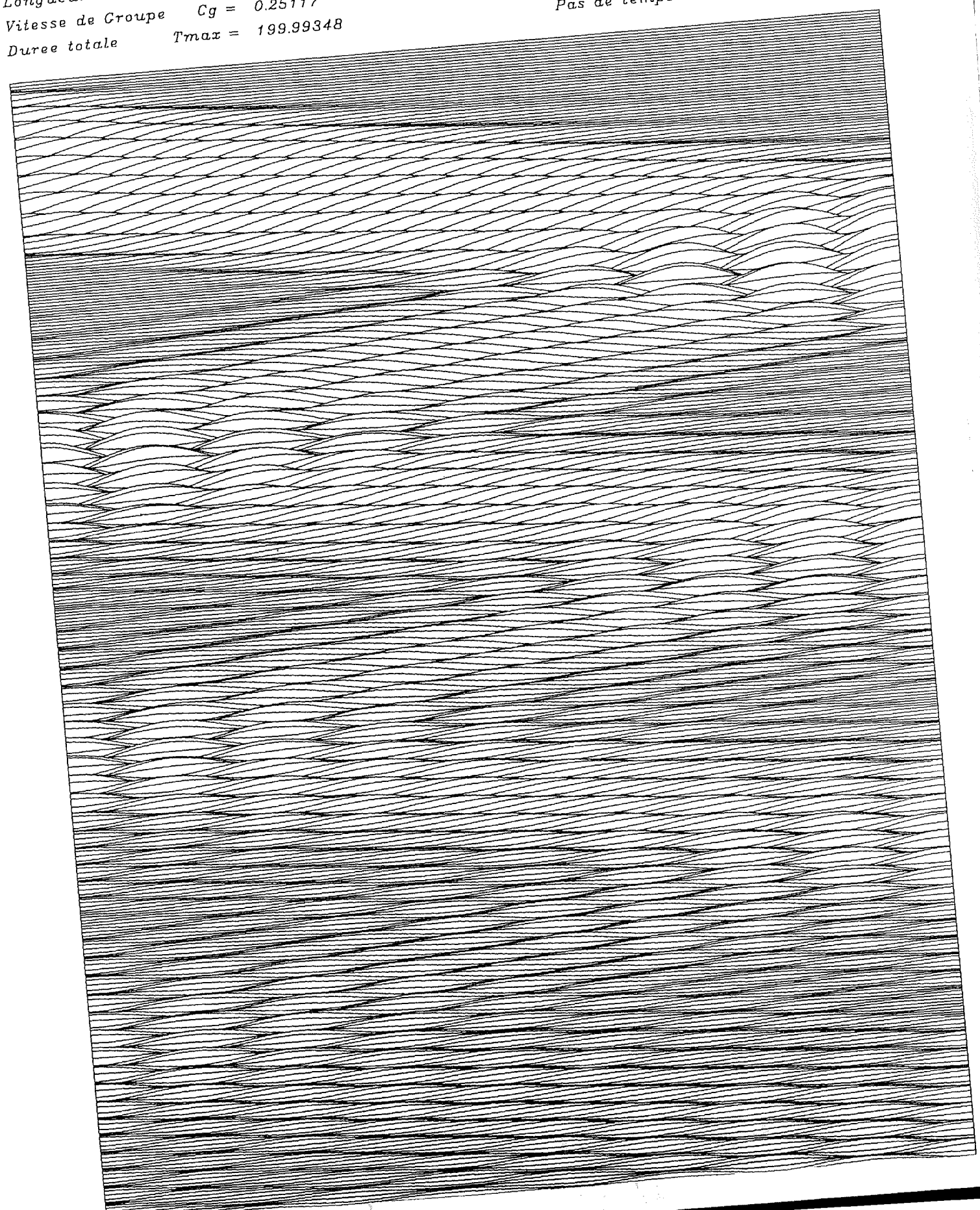
Periode $T = 2.73651$
 Longueur du bassin $L = 131.35248$
 Vitesse de Phase $Cp = 0.65329$
 Pas de temps $dt = 0.04189$



CANAL AVEC ABSORBEUR
MODE BASSES FREQUENCES

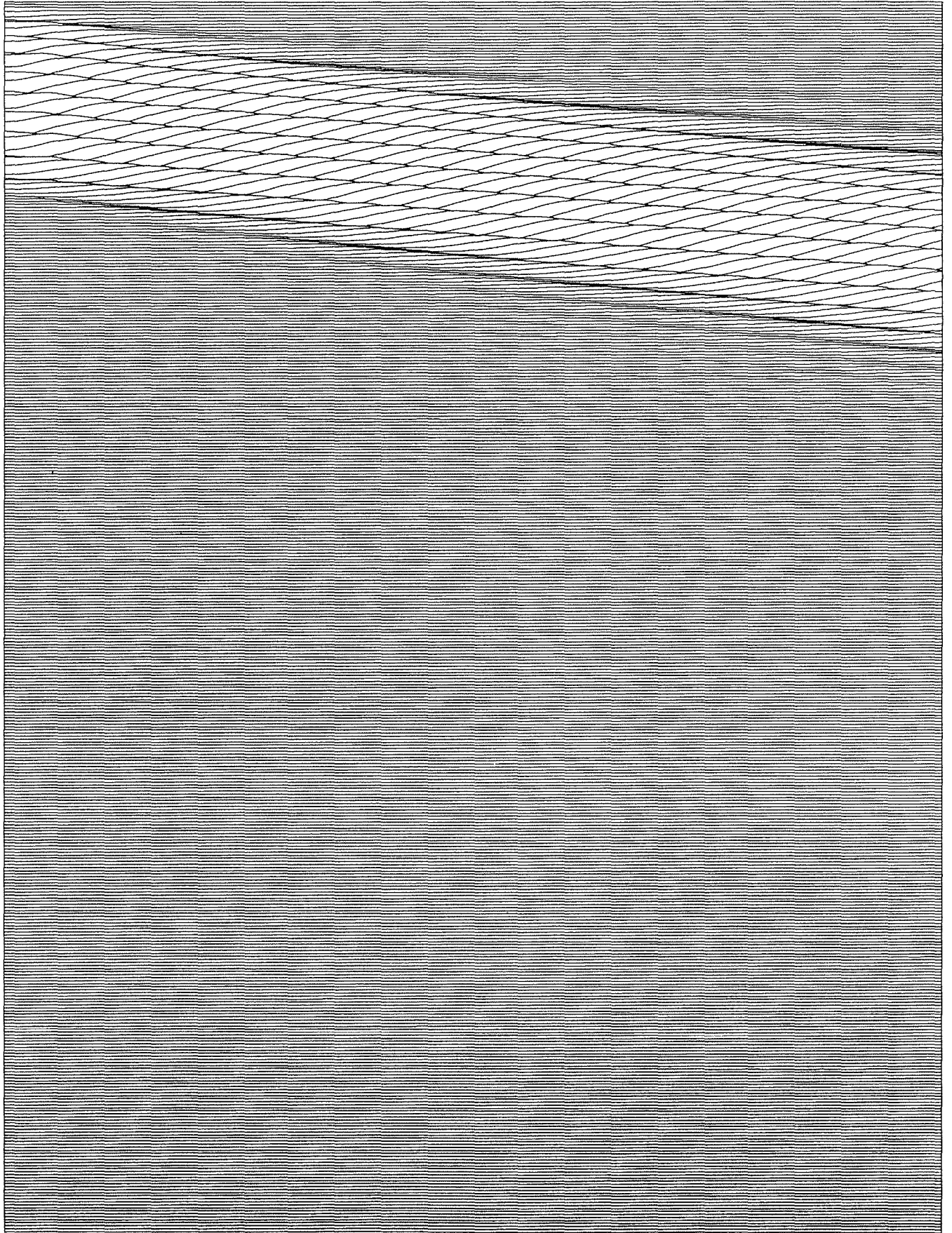
Pulsation $\omega = 2.00000$
Longueur d'onde $\omega l = 1.56975$
Vitesse de Groupe $C_g = 0.25117$
Durée totale $T_{max} = 199.99348$

Période $T = 3.14159$
Longueur du bassin $L = 6.27899$
Vitesse de Phase $C_p = 0.49967$
Pas de temps $dt = 0.03491$



CANAL DE GRANDE LONGUEUR
Approximation du Canal Semi-Infini.

pulsation	$\omega = 2.00000$	Periode	$T = 1.56975$
Longueur d'onde	$\omega l = 3.14159$	Longueur du bassin	$L = 75.34792$
Vitesse de Groupe	$C_g = 0.25117$	Vitesse de Phase	$C_p = 0.49967$
Duree totale	$T_{max} = 199.99348$	Pas de temps	$dt = 0.03491$



III-6-2 Recherche d'un modèle causal

L'étude du modèle basses fréquences ayant fait apparaître les limites des systèmes purement proportionnels, on va chercher à établir de nouvelles relations permettant de définir un modèle d'absorption applicable sur toute l'étendue du spectre utile des fréquences. L'analyse de la fonction de transfert $H(i\omega)$ ayant montré que les relations d'absorption faisaient intervenir non seulement la vitesse de l'absorbeur mais aussi son accélération, on va chercher à introduire ce degré de liberté supplémentaire dans ce que l'on appellera le modèle causal.

On rappelle que les difficultés rencontrées lors du développement d'un modèle d'absorption instationnaire basé sur l'utilisation d'un batteur piston sont de deux ordres. Tout d'abord, et ceci est indépendant du type de frontière choisi, il est impossible de connaître instantanément dans les écoulements au sein du fluide les termes incident, réfléchi ou de radiation indépendamment les uns des autres. On ne peut, du point de vue de l'approche physique, de la mesure, considérer qu'un écoulement global, superposition de ces différents termes. De plus, dans le cas d'un batteur piston, il apparaît un déphasage entre l'onde générée et le mouvement de la paroi elle-même, déphasage rendant le modèle associé à la relation de définition [II-46] non réalisable.

III-6-2-1 Démonstration préliminaire

On se propose, avant de poursuivre la recherche d'un système causal d'absorption de démontrer la proposition suivante:

"-Soit $L(i\omega)$ une fonction hermitienne possédant une transformée de Fourier inverse $l(t)$ "anticausale" et soient $E(i\omega)$ et $S(i\omega)$ deux fonctions complexes quelconques de la pulsation, alors, la relation

$$[\text{III-56}] \quad S(i\omega) = L(i\omega).E(i\omega)$$

peut toujours s'écrire sous la forme

$$[\text{III-57}] \quad S(i\omega) = M(i\omega).S(i\omega) + N(i\omega).S(i\omega) - L^*(i\omega).E(i\omega)$$

où $L^*(i\omega)$ est la conjuguée de $L(i\omega)$ et possède donc une transformée de Fourier inverse $l^*(t)$ causale, $M(i\omega)$ est une fonction hermitienne possédant une transformée de Fourier inverse $m(t)$ causale et $N(i\omega)$ est une fonction réelle paire possédant une transformée de Fourier inverse $n(t)$ paire en temps."

Démonstration:

En introduisant $L^*(i\omega)$ dans la relation [III-56], il vient:

$$[\text{III-58}] \quad S(i\omega) \cdot \frac{L^*(i\omega)}{L(i\omega)} = L^*(i\omega) \cdot E(i\omega)$$

En ajoutant et en retranchant 1 au membre de gauche de cette égalité:

$$[\text{III-59}] \quad S(i\omega) \cdot \left[\frac{L^*(i\omega)}{L(i\omega)} + 1 - 1 \right] = L^*(i\omega) \cdot E(i\omega)$$

il vient une expression de $S(i\omega)$ fonction implicite de $S(i\omega)$ elle-même et de $E(i\omega)$:

$$[\text{III-60}] \quad S(i\omega) = S(i\omega) \cdot K(i\omega) - L^*(i\omega) \cdot E(i\omega)$$

avec

$$[\text{III-61}] \quad K(i\omega) = \frac{L^*(i\omega)}{L(i\omega)} + 1$$

La fonction $K(i\omega)$ ainsi déterminée est quelconque et sa transformée de Fourier inverse n'est pas nulle a priori pour les instants t négatifs. $K(i\omega)$ étant hermitienne, on va l'écrire sous forme d'une somme de deux fonctions $M(i\omega)$ et $N(i\omega)$ elles aussi hermitiennes.

$$[\text{III-62}] \quad K(i\omega) = M(i\omega) + N(i\omega)$$

On impose alors à la fonction $M(i\omega)$ d'être telle que sa transformée de Fourier inverse $m(t)$ soit causale. Les parties réelle $M^R(\omega)$ et imaginaire $M^I(\omega)$ de $M(i\omega)$ vérifient compte tenu de cette hypothèse les relations de Kramers-Krönig [III-27] et [III-28].

On impose alors l'égalité suivante sur les parties imaginaires:

$$[\text{III-63}] \quad M^I(\omega) = K^I(\omega)$$

La fonction $M(i\omega)$ est alors entièrement connue par application de la relation de Kramers-Krönig:

$$[\text{III-64}] \quad M^R(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{M^I(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K^I(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

L'introduction de la condition [III-63] dans la relation [III-62] conduit alors directement à:

$$[\text{II-65}] \quad \left\{ \begin{array}{l} N^I(\omega) = 0 \\ N^R(\omega) = K^R(\omega) - M^R(\omega) \end{array} \right.$$

La fonction $N(i\omega)$ ainsi définie est donc strictement réelle. Sa transformée de Fourier étant nécessairement réelle puisque $N(i\omega)$ est hermitienne, $N^R(\omega)$ est paire par prolongement hermitien. La transformée de Fourier d'une fonction réelle et paire étant aussi une fonction réelle et paire, $n(t)$ est donc réelle et paire et la proposition est ainsi démontrée.

On retrouve bien en introduisant dans l'expression [III-60], $M(i\omega)$ et $N(i\omega)$ ainsi définies, la relation [III-57] de la proposition.

L'écriture dans le domaine temporel des relations de convolution associées par transformation de Fourier inverse aux relations fréquentielles [III-56] et [III-57] introduites dans cette proposition montre que l'on peut passer d'une relation de la forme:

$$[\text{III-66}] \quad s(t) = l(t) * e(t)$$

faisant intervenir la fonction anticausale $l(t)$, à une relation de la forme

$$[\text{III-67}] \quad s(t) = m(t) * s(t) + n(t) * s(t) - l^*(t) * e(t)$$

faisant intervenir deux fonctions causales $l^*(t)$ et $m(t)$ et une fonction paire en temps, $n(t)$.

Cette proposition étant démontrée, on va maintenant l'appliquer au cas de la fonction de transfert d'absorption $H(i\omega)$.

III-6-2-2 Application au cas de la fonction de transfert d'absorption

L'étude de la fonction de transfert d'absorption $H(i\omega)$ ayant montré que la réponse impulsionnelle qui lui est associée est "anticausale" (cf FIGURE 7), on lui applique la proposition précédente. La relation de définition [II-40] s'écrit:

$$[\text{III-68}] \quad V(i\omega) = H(i\omega) \cdot F(i\omega)$$

En introduisant alors

$$[\text{III-69}] \quad K(i\omega) = \frac{H^*(i\omega)}{H(i\omega)} + 1 = M(i\omega) + N(i\omega)$$

et en imposant aux fonctions $M(i\omega)$ et $N(i\omega)$ de posséder les propriétés de la proposition, on obtient la relation fréquentielle:

$$[\text{III-70}] \quad V(i\omega) = M(i\omega) \cdot V(i\omega) + N(i\omega) \cdot V(i\omega) - H^*(i\omega) \cdot F(i\omega)$$

à laquelle correspond dans le domaine temporel la relation de convolution:

$$[\text{III-71}] \quad v(t) = m(t) * v(t) + n(t) * v(t) - h^*(t) * f(t)$$

dont l'expression intégrale est:

$$[\text{III-72}] \quad v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t-\tau) \cdot v(\tau) \, d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} n(t-\tau) \cdot v(\tau) \, d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} h^*(t-\tau) \cdot f(\tau) \, d\tau$$

La fonction $K(i\omega)$ est obtenue en fonction du rapport $\frac{H^*(i\omega)}{H(i\omega)}$ qui est, on peut le remarquer, un déphaseur pur d'argument double de celui de $H^*(i\omega)$. Elle peut donc elle-même être considérée comme une fonction de transfert. Le calcul donne pour expression de $K(i\omega)$:

$$[\text{III-73}] \quad K(i\omega) = \frac{2 \cdot \frac{\sinh^2(m_0)}{m_0^2 \cdot (2 \cdot m_0 + \sinh(2 \cdot m_0))}}{\frac{\sinh^2(m_0)}{m_0^2 \cdot (2 \cdot m_0 + \sinh(2 \cdot m_0))} + i \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin^2(m_k)}{m_k^2 \cdot (2 \cdot m_k + \sin(2 \cdot m_k))}}$$

Cette écriture n'est autre, si l'on reprend les expressions [II-38a] et [II-38c] des efforts incidents et de radiation, que le rapport:

$$[III-74] \quad K(i\omega) = \frac{-2 \cdot F_i}{F_b}$$

$K(i\omega)$ peut donc être considérée comme la fonction de transfert liant les efforts incidents aux efforts de radiation en régime d'absorption totale. Les fonctions $M(i\omega)$ et $N(i\omega)$ peuvent elles aussi être considérées comme des transmittances et par suite, leurs transformées de Fourier inverses comme des réponses impulsionnelles.

Les courbes représentatives des fonctions $K(i\omega)$, $M(i\omega)$, $N(i\omega)$ et de leurs transformées de Fourier $k(t)$, $m(t)$ et $n(t)$ sont données sur les FIGURES 14a, 14b et 15.

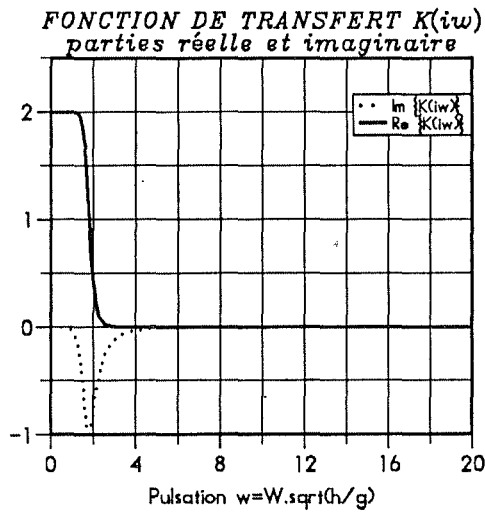


FIGURE 14a

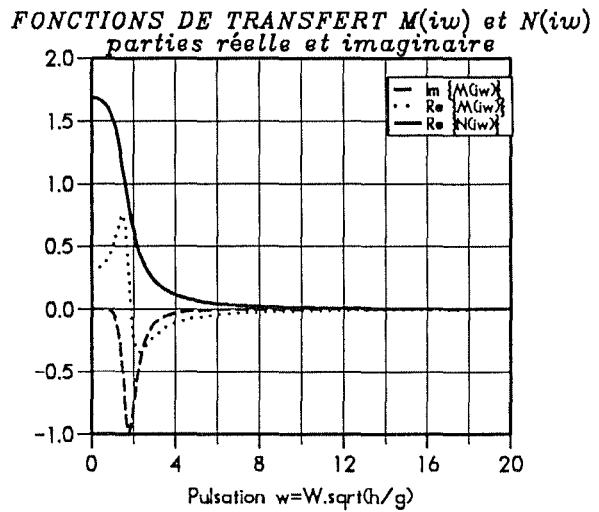


FIGURE 14b

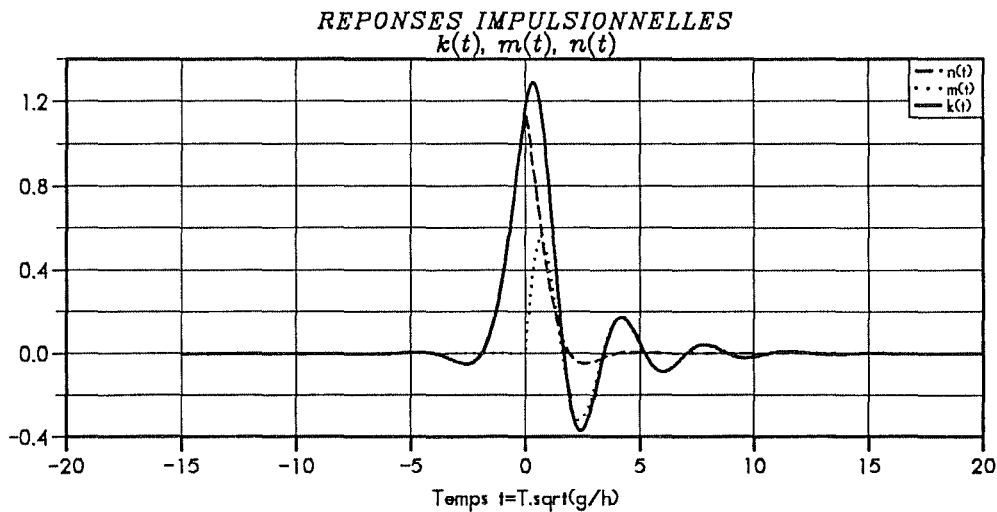


FIGURE 15

III-6-2-3 Le modèle causal approché

En faisant l'hypothèse que le fluide est initialement au repos, les efforts sur l'absorbeur sont initialement nuls, de même, par suite, que la vitesse de ce dernier. La relation de convolution [III-67] peut donc s'écrire:

$$[\text{III-75}] \quad v(t) = \int_0^t m(t-\tau).v(\tau) d\tau + \int_0^{+\infty} n(t-\tau).v(\tau) d\tau - \int_0^t h^*(t-\tau).f(\tau) d\tau$$

Les réponses impulsionnelles $m(t)$ et $h^*(t)$ étant causales, leurs convolutions avec respectivement la vitesse et les efforts ne font appel qu'à des valeurs connues du passé et du présent de ces deux grandeurs. Ces convolutions correspondent donc à des systèmes réalisables et ne posent plus de problème. La réponse impulsionnelle $n(t)$ quant à elle n'a été définie que réelle et paire. Elle n'est de fait pas causale et sa convolution avec la vitesse fait appel à des données futures donc inconnues de cette dernière. Le système n'est pas réalisable sous cette forme.

On va donc en chercher au prix d'une hypothèse d'approximation une forme approchée strictement causale et donc réalisable.

La courbe de $n(t)$ donnée FIGURE 15 montre que l'on a affaire à une fonction à décroissance rapide faiblement oscillante. Cette forme suggère l'idée que l'on peut ramener $n(t)$ à une fonction impulsionnelle à l'origine, c'est à dire telle que:

$$[\text{III-76}] \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} n(t) dt = \alpha \\ n(t) = 0 \quad \text{pour } t \neq 0 \\ n(t) = \infty \quad \text{pour } t = 0 \end{array} \right.$$

En d'autres termes, cette approximation revient à approcher $n(t)$ par une impulsion de Dirac dont l'amplitude α reste à déterminer.

$$[\text{III-77}] \quad n(t) = \alpha.\delta(t)$$

La relation de convolution [III-75] devient:

$$[III-78] \quad v(t) = \int_0^t m(t-\tau).v(\tau) d\tau + \alpha \int_0^{+\infty} \delta(t-\tau).v(\tau) d\tau - \int_0^t h^*(t-\tau).f(\tau) d\tau$$

En appliquant alors la propriété [III-6] de la convolution par une impulsion de *Dirac*, on obtient la relation strictement causale du modèle dit 'causal approché':

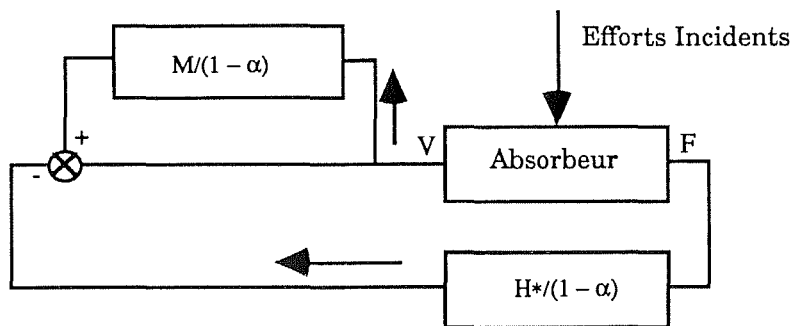
$$[III-79] \quad v(t) = \frac{1}{1-\alpha} \left[\int_0^t m(t-\tau).v(\tau) d\tau - \int_0^t h^*(t-\tau).f(\tau) d\tau \right]$$

Que l'on écrit encore:

$$[III-80] \quad v(t) = \frac{1}{1-\alpha} [m(t) * v(t) - h^*(t) * f(t)]$$

On a donc, à partir de la relation caractéristique d'un système non réalisable et en considérant une hypothèse d'approximation, déterminé une nouvelle relation décrivant le même système mais uniquement cette fois à l'aide de fonctions causales c'est à dire sous une forme réalisable.

Le système caractérisé par cette nouvelle relation peut être représenté par le schéma suivant:



L'hypothèse d'approximation de la réponse impulsionnelle $n(t)$ par une impulsion de *Dirac* impose la pondération de cette dernière par un coefficient α . La réponse impulsionnelle $n(t)$ étant continue et sommable sur $]-\infty, +\infty[$, on montre que:

$$[III-82] \quad \alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} n(t) dt = N(0)$$

Le calcul de $N(i\omega)$ conduit à la valeur $\alpha = 1.687176$

Le modèle causal approché étant ainsi entièrement défini par [III-79] et [III-82], on peut faire quelques remarques permettant d'en améliorer la mise en œuvre numérique.

Il apparaît tout d'abord que la fonction $m(t)$ est nulle à l'origine par construction. Cette propriété est importante puisqu'elle fait de la relation de convolution par $m(t)$ une relation intégrale explicite de la vitesse et non plus implicite.

De plus, les expressions intégrales des convolutions sont assez lourdes et leur calcul sous cette forme présente deux difficultés.

On note premièrement que les deux réponses impulsionnelles $m(t)$ et $h^*(t)$ ne sont connues que par le calcul des transformations de Fourier inverses des fonctions de transfert $M(i\omega)$ et $H^*(i\omega)$ et que l'on n'en connaît pas de fait d'expression analytique simple.

Deuxièmement, si l'on ne perd pas de vue que l'une des idées directrices de cette étude impose de déterminer un modèle transposable à une application expérimentale, ces intégrales présentent l'inconvénient de ne pas pouvoir être introduites dans un système physique de contrôle en temps réel. En effet, la convolution est une opération qui par nature fait appel à l'histoire entière du système depuis l'instant initial jusqu'à l'instant t considéré. Le nombre d'opérations intervenant dans le calcul de ces intégrales augmente donc à chaque itération en temps jusqu'à avoir atteint un délai de troncature des réponses impulsionnelles qui peut être très long dans le cas de systèmes faiblement amortis. La durée du calcul peut donc être variable, ce qui complique singulièrement le contrôle en temps réel.

On est en fait en présence ici d'un problème d'identification tel que ceux régulièrement rencontrés en automatique ou en traitement du signal. Il s'agit, connaissant la fonction de transfert ou la réponse impulsionnelle d'un processus donné, ou des jeux de données d'entrée-sortie, ou encore toute fonction caractéristique généralement déterminée par la mesure, de trouver un modèle paramétrique équivalent qui permette de remplacer le calcul des intégrales de convolution par la résolution d'un système d'équations différentielles à coefficients constants dont la mise en œuvre numérique est plus aisée. Dans la pratique, la connaissance de la fonction de transfert du système, autrement dit de son action sur un signal donné, n'est pas toujours directement accessible. On peut en particulier dans le cas de signaux bruités n'avoir pas directement accès à la réponse du système. Un grand nombre de méthodes d'identification ont été développées en traitement du signal [6], qui font appel à un traitement statistique des données, pour obtenir les modèles de tels systèmes. En automatique, l'identification des systèmes simples se ramène généralement à la détermination des caractéristiques (constantes de temps, gain statique...) d'éléments dont l'action est connue et décrite par des expressions analytiques simples: Proportionnel, Intégrateurs ou Dérivateurs, que l'on associe suivant différentes combinaisons. Pour les systèmes dont la structure est plus complexe, on utilise des modèles faisant par exemple appel à des fonctions polynômiales (polynômes de *Graham et Lathrop*, polynômes de *Naslin* [65]).

III-6-2-4 Identification des réponses impulsionnelles

Dans le cas favorable, comme ici, où la réponse impulsionnelle $h(t)$ et la fonction de transfert du système sont connues aussi précisément que possible, l'identification se ramène à la détermination d'une fonction approchée obtenue par le calcul d'une série tronquée de la forme

$$[\text{III-83}] \quad h(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \zeta_k(t) + \varepsilon$$

où les $\zeta_k(t)$ sont des fonctions choisies pour être aisément intégrables analytiquement et ε est l'erreur introduite par la troncature.

La forme pseudo-sinusoïdale amortie des fonctions $h^*(t)$ et $m(t)$ (cf FIGURES 8b et 33) laisse supposer que ces fonctions peuvent être assez bien décrites par des sommes d'exponentielles. Cette remarque conduit à utiliser pour identifier ces deux réponses impulsionnelles un code de lissage par sommes d'exponentielles développé au Laboratoire d'informatique de l'École Centrale de Nantes par *J.C. Daubisse* [20]. Cette méthode a déjà été utilisée dans le domaine de l'hydrodynamique navale où elle permet en particulier l'identification de fonctions de Green avec seulement un petit nombre d'exponentielles [16].

Présentation générale de la méthode:

Considérant une fonction du temps $f(t)$, connue sous forme discrète en N instants t_i équirépartis, cette méthode permet de déterminer une approximation \tilde{f} de $f(t)$ sous forme d'une combinaison linéaire d'exponentielles :

$$[\text{III-84}] \quad \tilde{f} = \sum_{k=1}^m a_k e^{\lambda_k t}$$

où les a_k et les λ_k , coefficients complexes, sont les inconnues. Leur détermination fait appel à la méthode de Prony qui permet, en introduisant une fonction polynômiale, de se ramener à deux systèmes linéaires surdéterminés qu'il est alors possible de résoudre par une méthode classique de type Householder ou S.V.D. (cf. ANNEXE 3).

L'application de cette méthode de lissage par sommes d'exponentielles aux deux fonctions $m(t)$ et $h^*(t)$ intervenant dans la relation de convolution [III-79] du modèle causal approché permet d'en déterminer une expression analytique avec seulement trois exponentielles pour chacune d'entre elles:

$$[III-85] \quad \tilde{h}^*(t) = \sum_{k=1}^3 \alpha_k^* \cdot e^{\lambda_k^* t}$$

$$[III-86] \quad \tilde{m}(t) = \sum_{k=1}^3 \beta_k \cdot e^{\mu_k t}$$

Les courbes des FIGURES 16a et 16b montrent que les deux fonctions sont très bien reconstituées bien qu'elles n'aient été décrites qu'à l'aide de 24 points d'appui chacune. Les valeurs des coefficients α_k^* et λ_k^* associés à la fonction $\tilde{h}^*(t)$ et β_k et μ_k respectivement associés à $\tilde{m}(t)$ sont données dans les tableaux de la FIGURE 17.

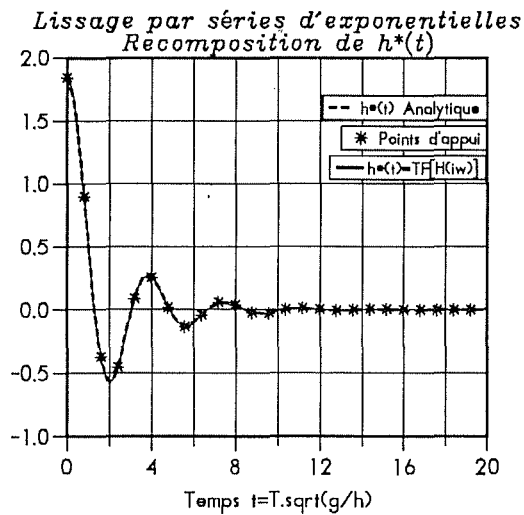


FIGURE 16a

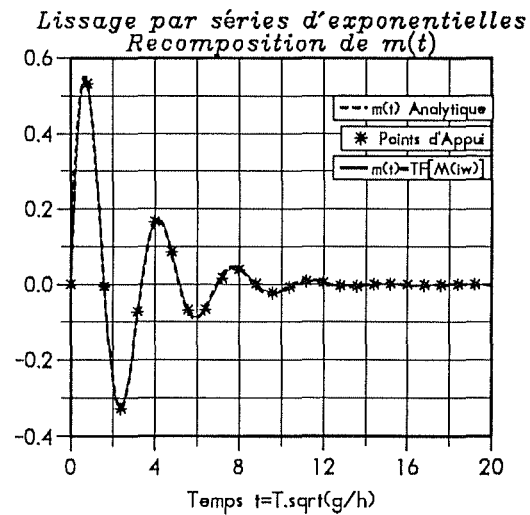


FIGURE 16b

$\tilde{h}^*(t)$	
α_k^*	λ_k^*
0.6026554288 - i 0.4041778382	-0.4299818963 + i 1.735793722
0.6026554288 + i 0.4041778382	-0.4299818963 - i 1.735793722
0.6371151614	-1.577667003

$\tilde{m}(t)$	
β_k	μ_k
0.1174024932 - i 0.3686622296	-0.3582278541 + i 1.765550926
0.1174024932 + i 0.3686622296	-0.3582278541 - i 1.765550926
-0.2347951867	-2.141805617

FIGURE 17

Les deux fonctions étant réelles, on retrouve dans les deux cas une paire de coefficients d'amplitude complexes conjugués auxquels sont associés des exposants complexes conjugués eux aussi et un troisième coefficient réel auquel est associé un exposant réel.

On remarque par ailleurs que les exposants λ_k^* et μ_k sont tous à partie réelle négative. Cette propriété est comme on le verra plus tard une garantie de stabilité pour le système.

Les réponses impulsionnelles $h^*(t)$ et $m(t)$ étant assez finement décrites par leurs expressions analytiques, il est dès lors possible de calculer la vitesse instantanée de l'absorbeur par la relation [III-79].

En notant $E(t)$ la relation de convolution des efforts par la réponse impulsionnelle $h^*(t)$:

$$[III-87] \quad E(t) = h^*(t) * f(t) = \int_0^t h^*(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

et en remplaçant dans cette expression $h^*(t)$ par la fonction approchée $\tilde{h}^*(t)$ obtenue par lissage par somme d'exponentielles, il vient:

$$[III-88] \quad E(t) \equiv \int_0^t \sum_{k=1}^{k=3} \alpha_k \cdot e^{\lambda_k(t-\tau)} \cdot f(\tau) d\tau$$

Que l'on peut encore écrire sous la forme:

$$[III-89] \quad E(t) \equiv \sum_{k=1}^{k=3} \alpha_k \int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau)} \cdot f(\tau) d\tau = \sum_{k=1}^{k=3} E_k$$

avec

$$[III-90] \quad E_k = \alpha_k \int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

La dérivée par rapport au temps de ces termes E_k s'écrit simplement:

$$[III-91] \quad \frac{d E_k}{dt} = \alpha_k \cdot \lambda_k \int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau)} f(\tau) d\tau + \alpha_k \cdot f(t) = \lambda_k \cdot E_k + \alpha_k \cdot f(t)$$

On fait apparaître ainsi une équation différentielle dont l'intégration numérique peut être menée à bien au moyen d'un schéma classique, type Runge-Kutta. L'intégrale de convolution [III-88] sera donc avantageusement remplacée dans les développements numériques par la relation différentielle:

$$[III-92] \quad \frac{d E(t)}{dt} \equiv \sum_{k=1}^{k=3} \lambda_k \cdot E_k + \alpha_k \cdot f(t)$$

En appliquant la même démarche à la convolution de la vitesse par la réponse impulsionnelle $m(t)$, il vient en introduisant la fonction approchée $\tilde{m}(t)$ un second système d'équations différentielles:

$$[III-93] \quad \frac{d G(t)}{dt} \equiv \sum_{k=1}^{k=3} \mu_k \cdot G_k + \beta_k \cdot v(t)$$

avec

$$[III-94] \quad G(t) \equiv \int_0^t \sum_{k=1}^{k=3} \beta_k \cdot e^{\mu_k(t-\tau)} v(\tau) d\tau$$

et

$$[III-95] \quad G_k = \beta_k \int_0^t e^{\mu_k(t-\tau)} v(\tau) d\tau$$

Avec ces jeux d'équations différentielles, le calcul de la relation de convolution d'absorption [III-79] du système se ramène à l'intégration de l'équation:

$$[III-96] \quad \frac{dv(t)}{dt} \equiv \frac{1}{1 - \alpha} \left[\sum_{k=1}^{k=3} (\mu_k \cdot G_k + \beta_k \cdot v(t) - \lambda_k \cdot E_k - \alpha_k \cdot f(t)) \right]$$

Les efforts hydrodynamiques exercés par le fluide sur l'absorbeur, donnés par la relation [III-34], sont fonction à la fois des vitesses et des accélérations des deux batteurs, ce qui fait de l'équation différentielle [III-96] une relation de la forme:

$$[III-97] \quad \dot{v}(t) = \mathcal{F}(v, u, \dot{v}, \dot{u}, t)$$

L'équation est donc une fonction implicite de l'accélération de l'absorbeur, $\dot{v}(t)$, pour laquelle un schéma numérique d'intégration de type Runge-Kutta n'est ni stable ni suffisamment précis. En écrivant alors les efforts hydrodynamiques sous la forme:

$$[III-98] \quad f(t) = -SM \frac{dv(t)}{dt} + f(v, u, \dot{u}, t)$$

avec les notations de la relation [III-36], on se ramène directement à l'équation différentielle:

$$[III-99] \quad \frac{dv(t)}{dt} \equiv \frac{1}{1 - \alpha - SM \sum_{k=1}^{k=3} \alpha_k} \left[\sum_{k=1}^{k=3} (\mu_k \cdot G_k + \beta_k \cdot v(t) - \lambda_k \cdot E_k - \alpha_k \cdot f(v, u, \dot{u}, t)) \right]$$

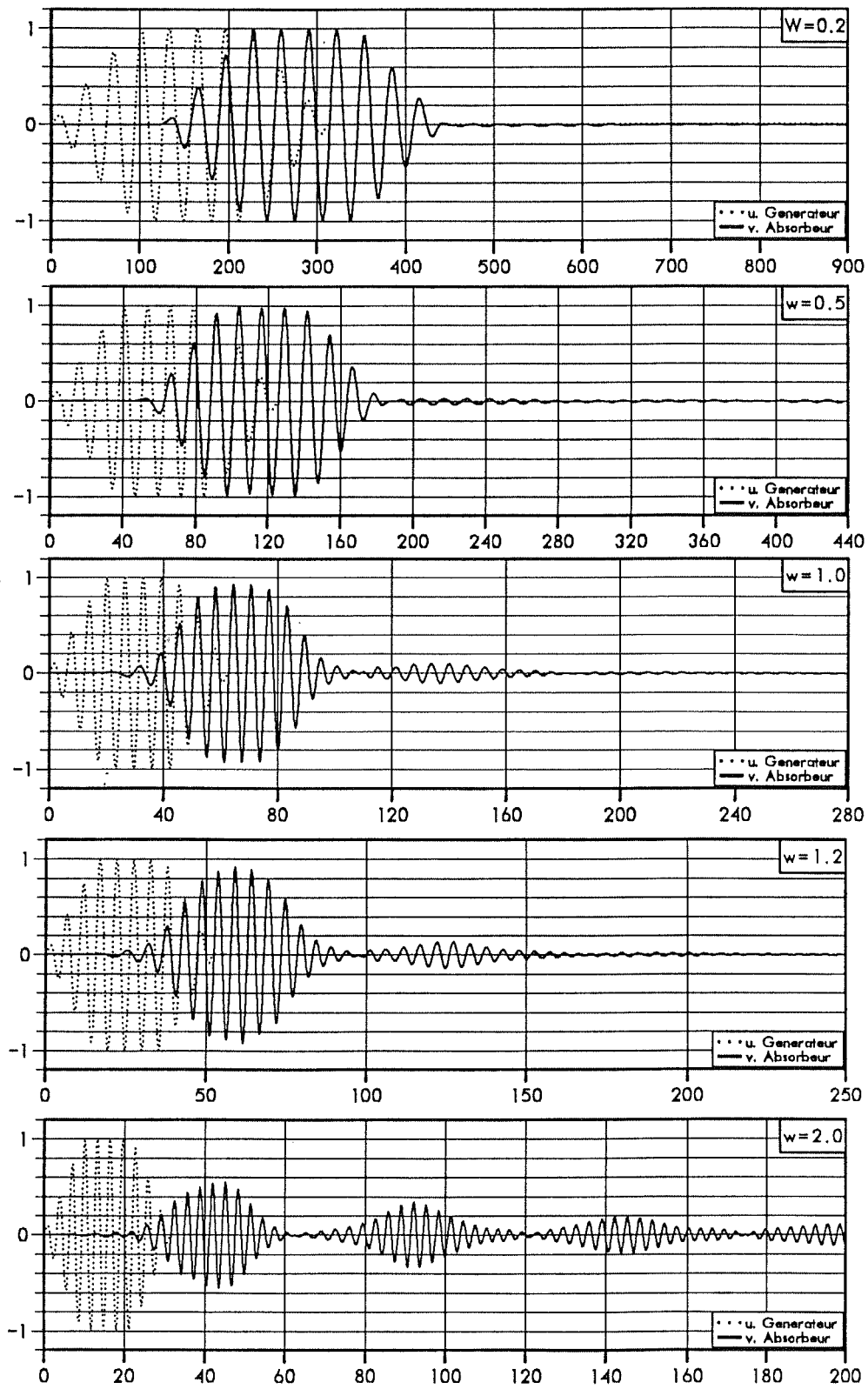
qui, elle est une expression explicite de l'accélération de l'absorbeur et est numériquement intégrable.

On peut noter que la présence du terme d'accélération du générateur dans la relation [III-99] ne pose pas de problème pour l'intégration numérique. La loi de vitesse de ce batteur étant supposée connue a priori, sa dérivée l'est aussi quel que soit l'instant considéré.

III-6-2-5 Résultats du modèle causal approché

Les résultats présentés dans les pages suivantes correspondent à des conditions de simulation identiques à celles décrites dans le paragraphe de présentation de la mise en œuvre numérique. Les courbes de la FIGURE 19 donnant la vitesse de l'absorbeur sont à rapprocher de celle de la FIGURE 9 correspondant au mode basses fréquences. Le phénomène le plus marquant apparaissant sur ces courbes est l'avance de phase prise par la vitesse sur les efforts hydrodynamiques lorsque la fréquence de l'onde incidente augmente. Cette avance est conforme à ce que l'on souhaitait obtenir après étude de la fonction de transfert d'absorption et montre que le modèle prend bien en compte tous les efforts hydrodynamiques et est à même de compenser le terme associé aux vagues proches.

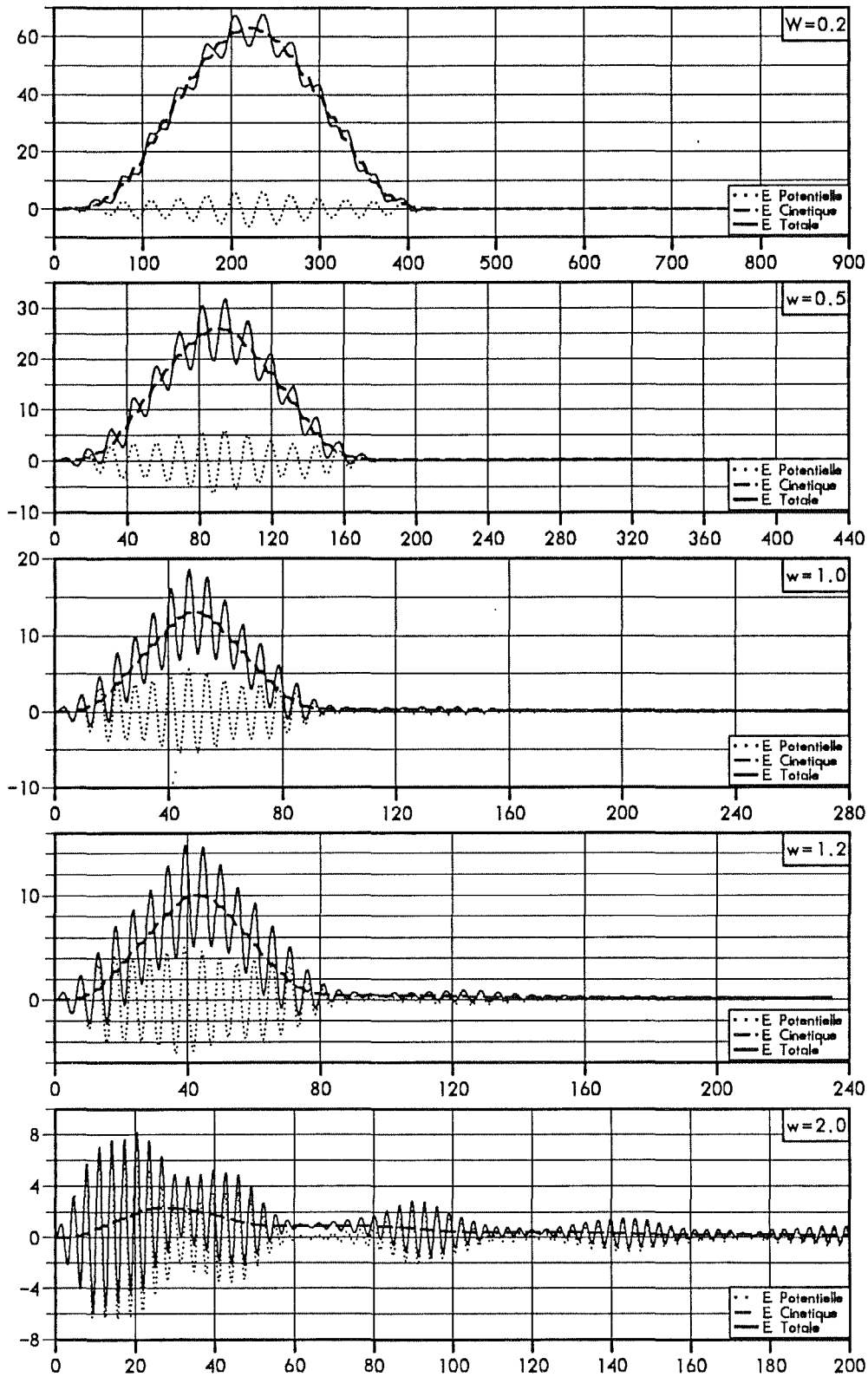
VITESSE DE L'ABSORBEUR Mode Causal Approché



temps $t=T \cdot \sqrt{g/h}$

FIGURE 18

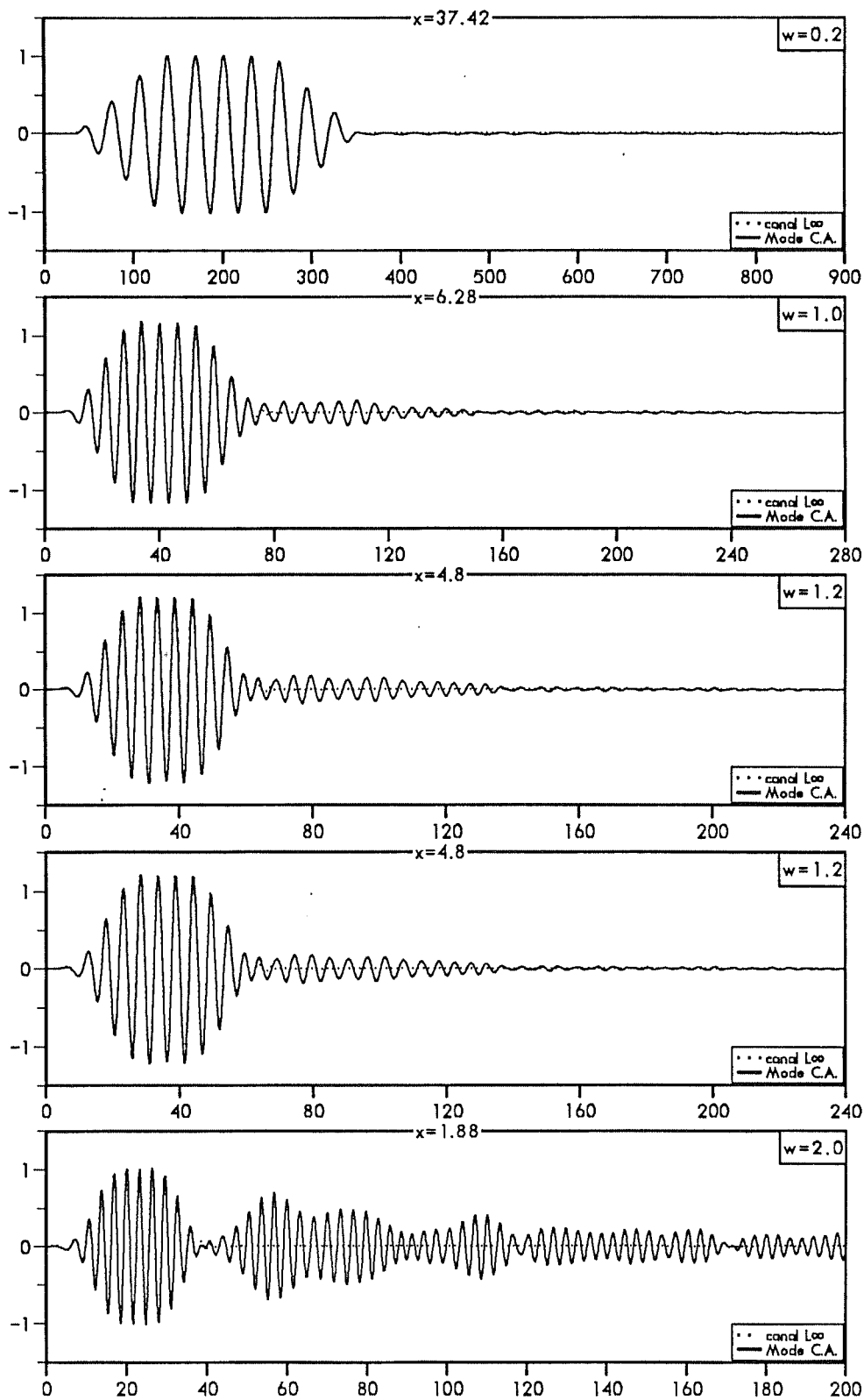
ENERGIES DU FLUIDE DANS LE CANAL MUNI D'UN ABSORBEUR
Mode Causal Approché



temps $t=T.\text{sqrt}(g/h)$

FIGURE 19

DEFORMEE DE SURFACE LIBRE AU POINT $x=0.3L$
Mode Causal Approché



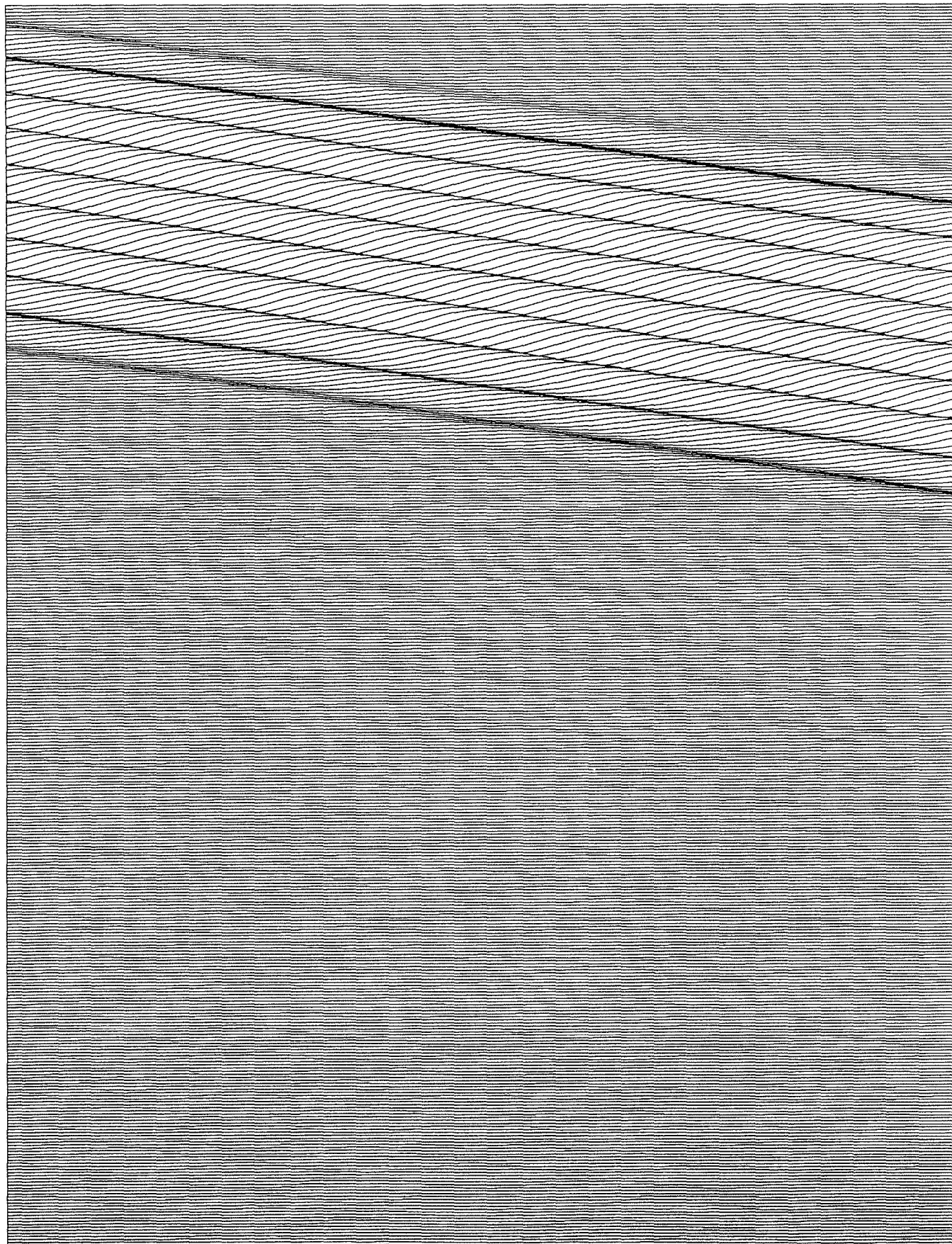
temps $t=T \cdot \sqrt{g/h}$

FIGURE 20

CANAL AVEC ABSORBEUR
MODE CAUSAL APPROCHE

Pulsation $\omega = 0.50000$
Longueur d'onde $\omega l = 12.04106$
Vitesse de Groupe $C_g = 0.88114$
Duree totale $T_{max} = 437.29147$

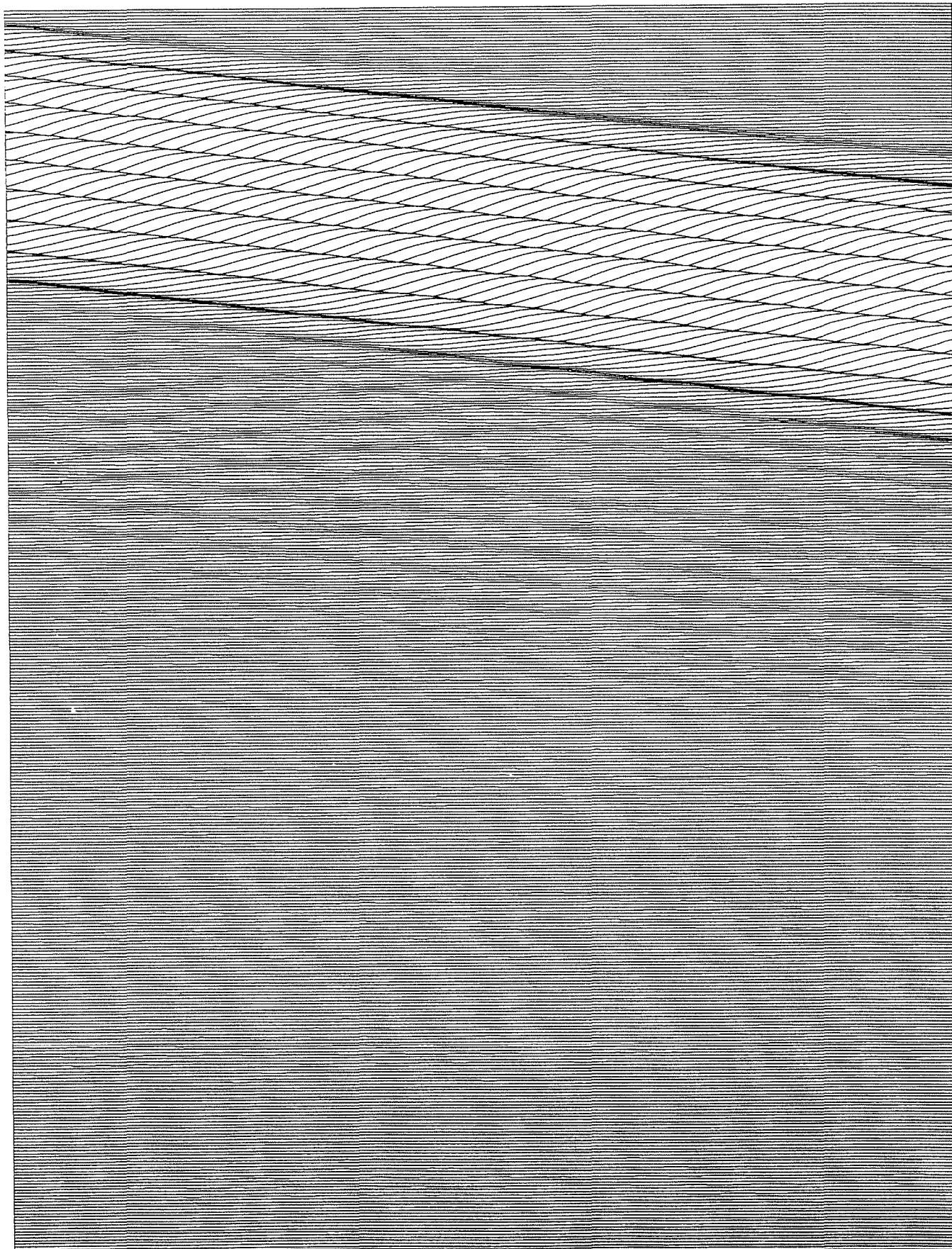
Periode $T = 12.56637$
Longueur du bassin $L = 48.16423$
Vitesse de Phase $C_p = 0.95820$
Pas de temps $dt = 0.06283$



CANAL AVEC ABSORBEUR
MODE CAUSAL APPROCHE

Pulsation $\omega = 1.00000$
Longueur d'onde $\omega l = 5.23739$
Vitesse de Groupe $C_g = 0.59984$
Duree totale $T_{max} = 279.40231$

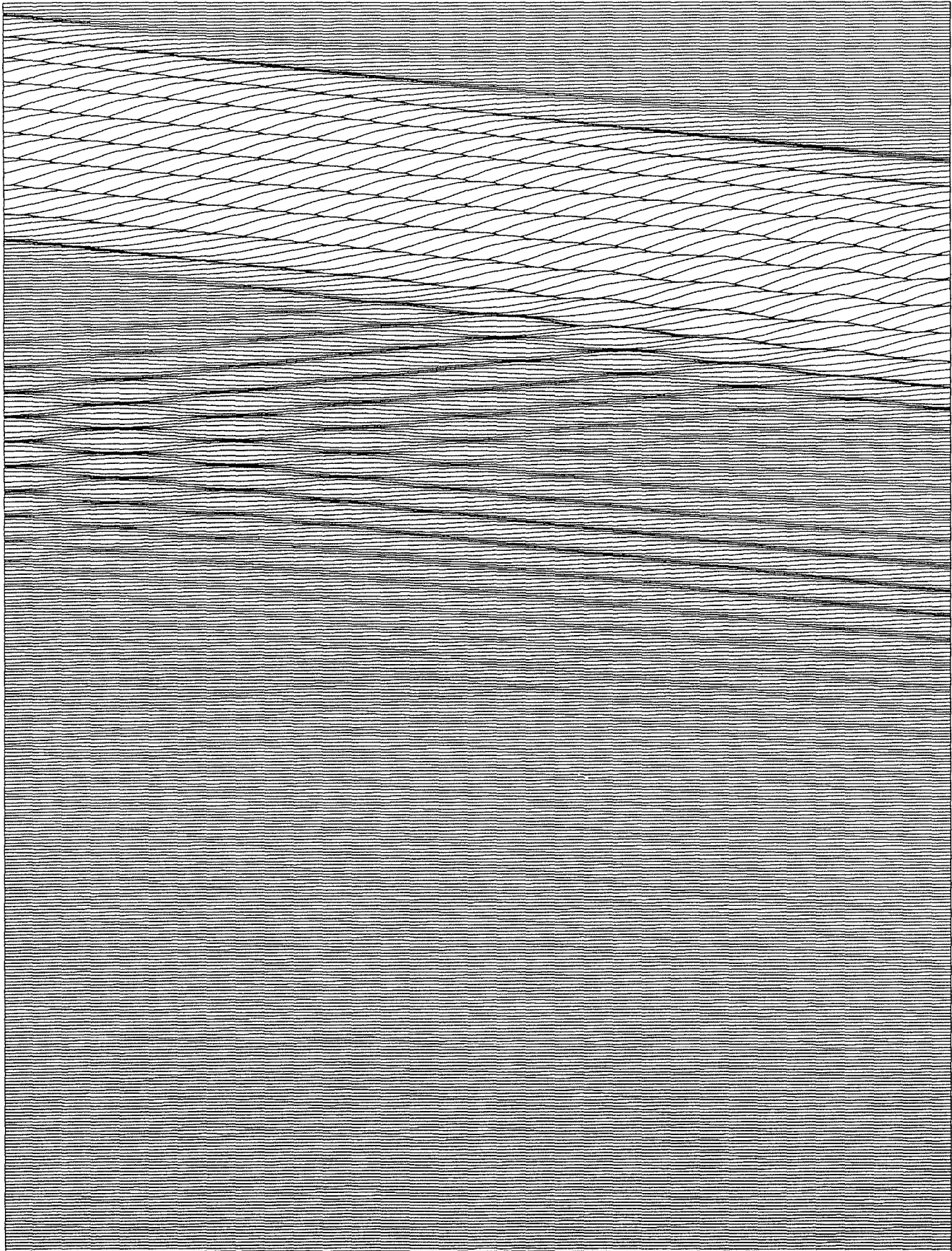
Periode $T = 6.28319$
Longueur du bassin $L = 20.94956$
Vitesse de Phase $C_p = 0.83356$
Pas de temps $dt = 0.04189$



CANAL AVEC ABSORBEUR
MODE CAUSAL APPROCHE

Pulsation $\omega = 1.20000$
Longueur d'onde $\omega l = 4.00144$
Vitesse de Groupe $C_g = 0.48613$
Duree totale $T_{max} = 263.39624$

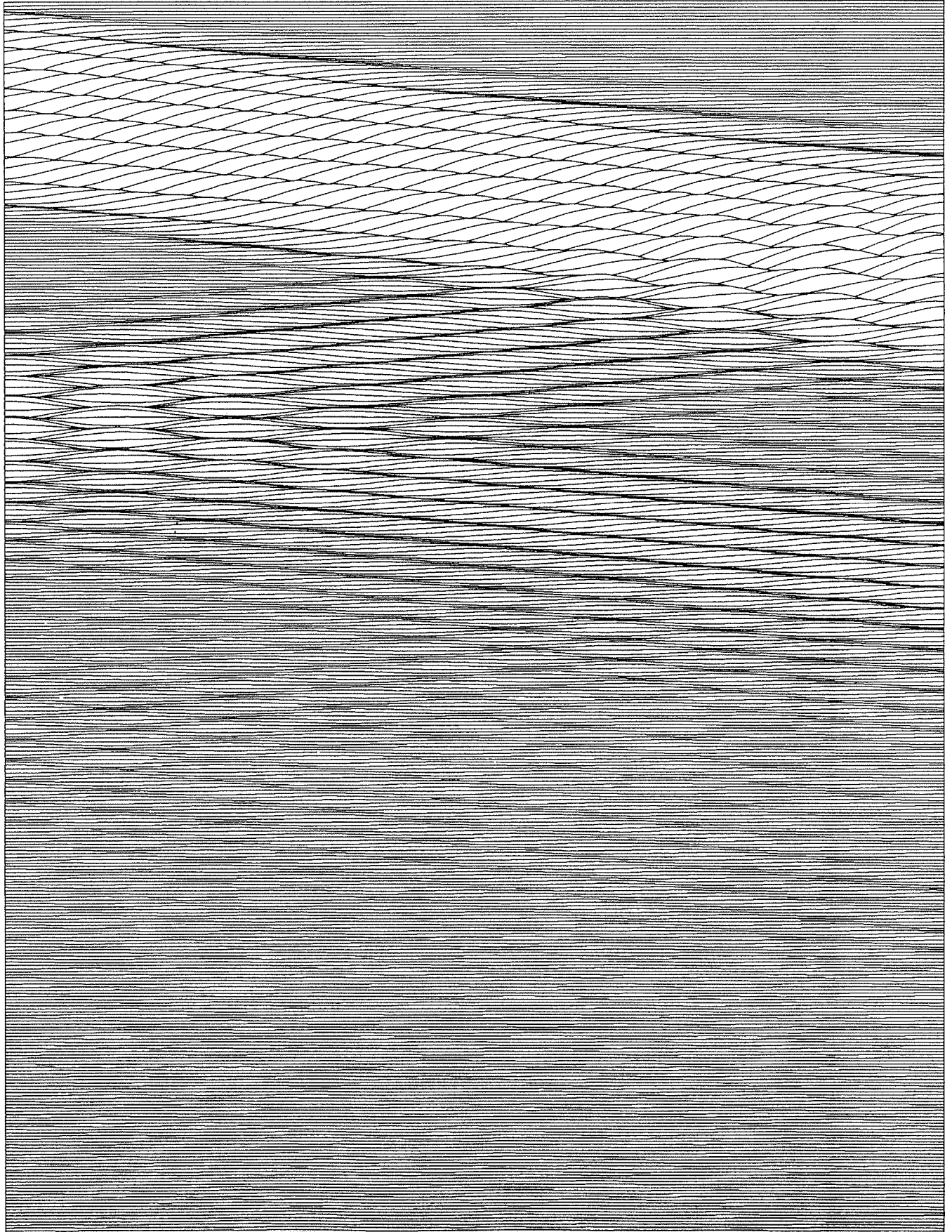
Periode $T = 5.23599$
Longueur du bassin $L = 16.00576$
Vitesse de Phase $C_p = 0.76422$
Pas de temps $dt = 0.04363$



CANAL AVEC ABSORBEUR
MODE CAUSAL APPROCHE

Pulsation $\omega = 1.50000$
Longueur d'onde $\omega l = 2.73651$
Vitesse de Groupe $C_g = 0.35704$
Duree totale $T_{max} = 245.25909$

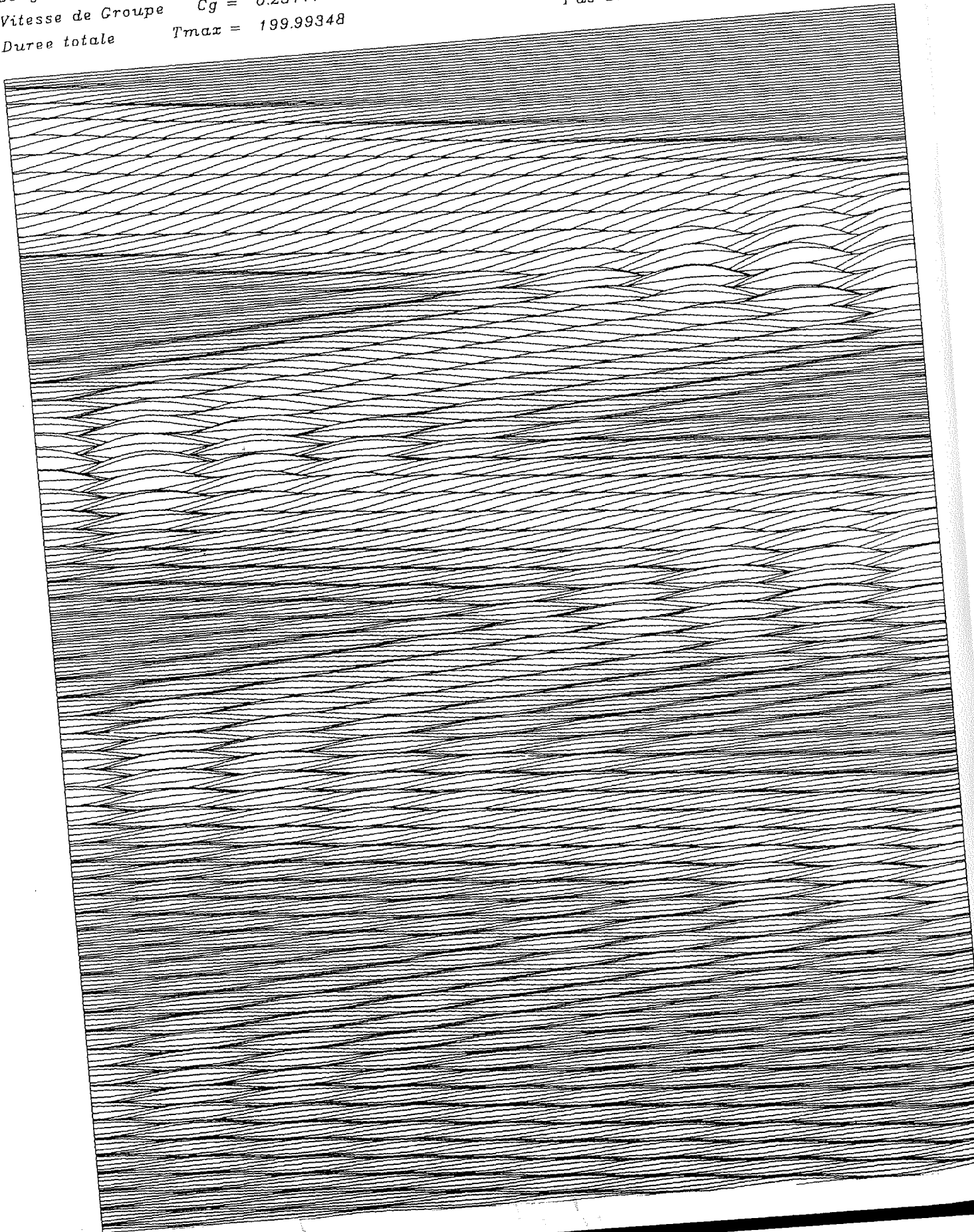
Periode $T = 4.18879$
Longueur du bassin $L = 10.94604$
Vitesse de Phase $C_p = 0.65329$
Pas de temps $dt = 0.03808$



CANAL AVEC ABSORBEUR
MODE CAUSAL APPROCHE

Pulsation $w = 2.00000$
Longueur d'onde $wl = 1.56975$
Vitesse de Groupe $Cg = 0.25117$
Duree totale $Tmax = 199.99348$

Periode $T = 3.14159$
Longueur du bassin $L = 6.27899$
Vitesse de Phase $Cp = 0.49967$
Pas de temps $dt = 0.03142$



Les courbes de la FIGURE 19 montrent l'évolution des énergies au sein du fluide pour différentes fréquences de l'onde incidente. Il apparaît au vu de ces courbes d'énergie que cette solution apporte des résultats supérieurs au modèle basses fréquences. Il ne sont cependant pas encore satisfaisant puisque, comme on le voit sur la courbe de la FIGURE 21 montrant l'évolution du coefficient d'absorption en amplitude α avec la fréquence, la valeur de celui-ci n'est que de 38,4% pour une pulsation $\omega=2$. Il semble donc que l'hypothèse d'approximation de la fonction non causale $n(t)$ par une impulsion de *Dirac* d'amplitude α constante donnée ne soit pas suffisante pour obtenir des résultats convenables.

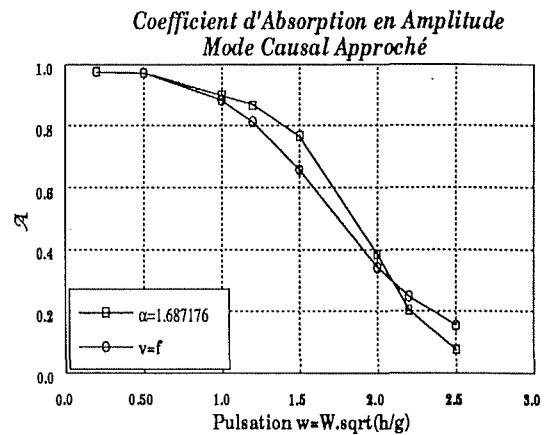


FIGURE 21

Si l'on étudie le comportement de $N(i\omega)$ sur le domaine spectral considéré (cf. FIGURE 14b), on s'aperçoit qu'elle évolue de manière non négligeable et en tout cas suffisamment pour que l'approximation de sa transformée de Fourier inverse $n(t)$ par une fonction impulsionnelle puisse être à l'origine de tels résultats. Reste encore dans ce modèle causal approché le choix du coefficient α . En effet, si la valeur de $\alpha = N(0)$ n'est pas arbitraire et répond à un soucis de conservation de l'énergie, elle n'est peut être pas la mieux adaptée compte tenu de l'approximation faite dans l'écriture du modèle. Les bons résultats constatés pour les fréquences les plus basses laissent supposer que ce choix n'est cependant pas trop mauvais et qu'il existe peut-être une valeur proche et mieux adaptée au domaine spectral étudié.

L'étude de la réponse de l'absorbeur à des ondes incidentes de différentes fréquences, calculée pour différents α montre que la valeur de ce dernier pour laquelle le modèle causal approché entraîne le meilleur comportement de l'absorbeur est $\alpha = N(\omega)$ où ω est la pulsation de l'onde incidente.

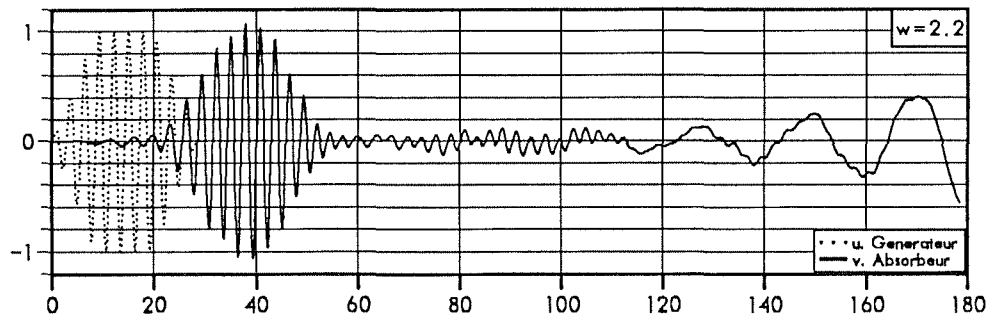
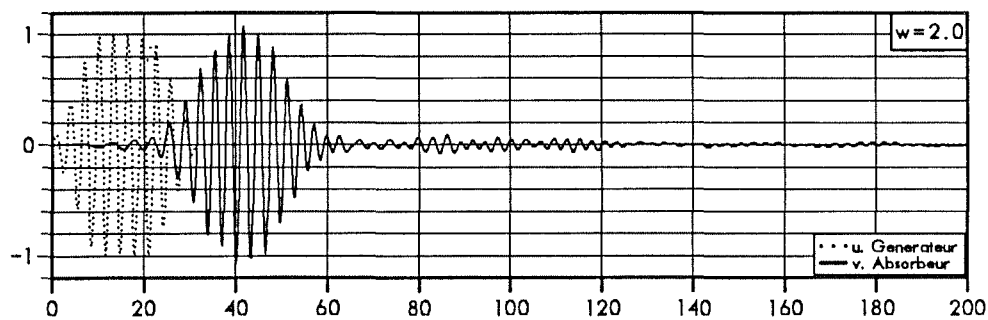
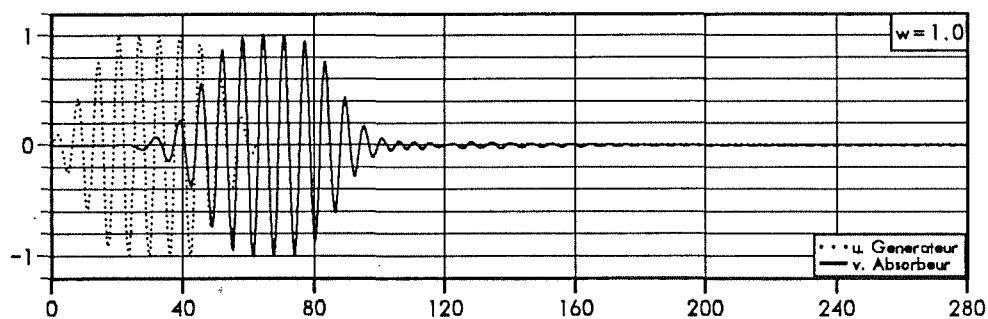
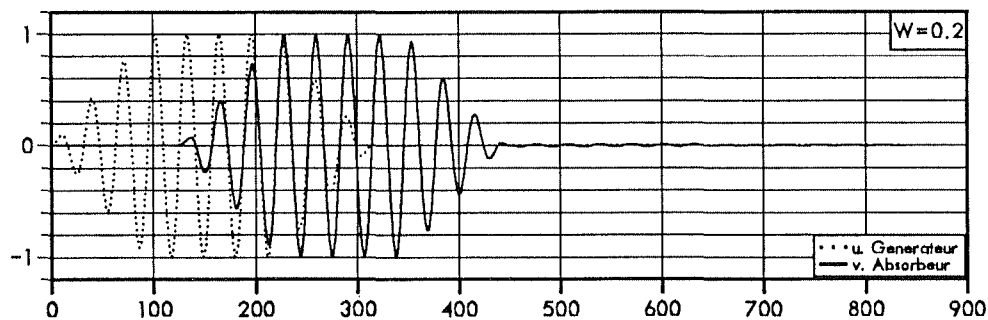
Les courbes de la FIGURE 22 mettent en évidence le comportement de l'absorbeur lorsque l'on remplace, dans la relation [III-79] définissant le modèle causal approché, α par $N(\omega)$.

Le phénomène le plus remarquable est encore ici sans aucun doute le déphasage apparaissant entre la vitesse de l'absorbeur et les efforts hydrodynamiques totaux exercés par le fluide sur ce dernier.

On voit en effet la vitesse prendre une certaine avance de phase sur les efforts lorsque la fréquence augmente pour finalement avoir une quadrature d'avance pour les fréquences les plus hautes, ce qui est une condition nécessaire pour obtenir l'absorption à haute fréquence.

VITESSE DE L'ABSORBEUR

Mode Causal Approché - Coefficient dépendant de la fréquence

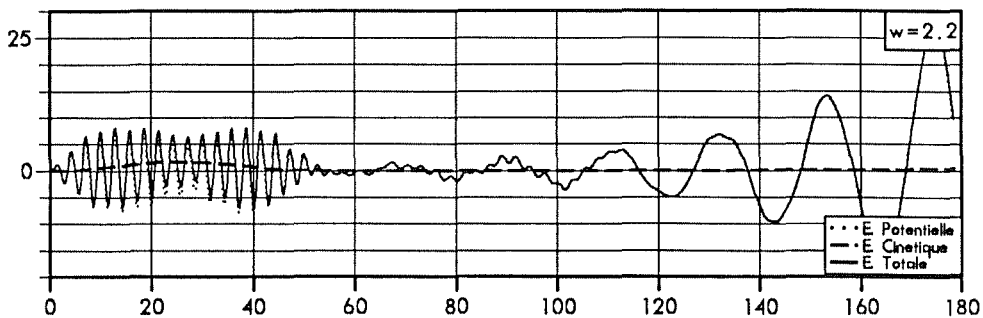
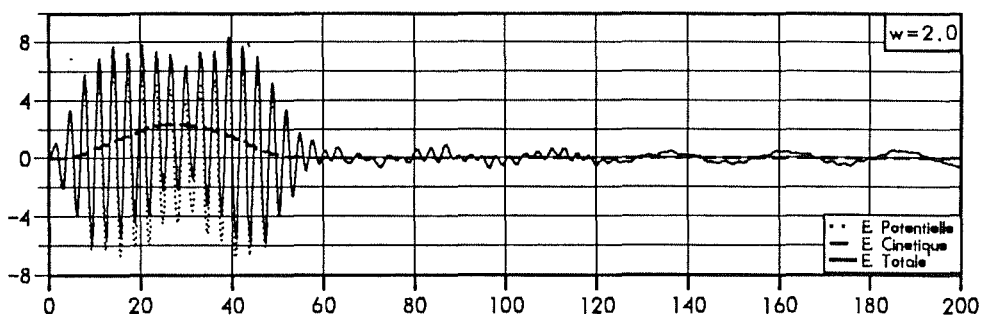
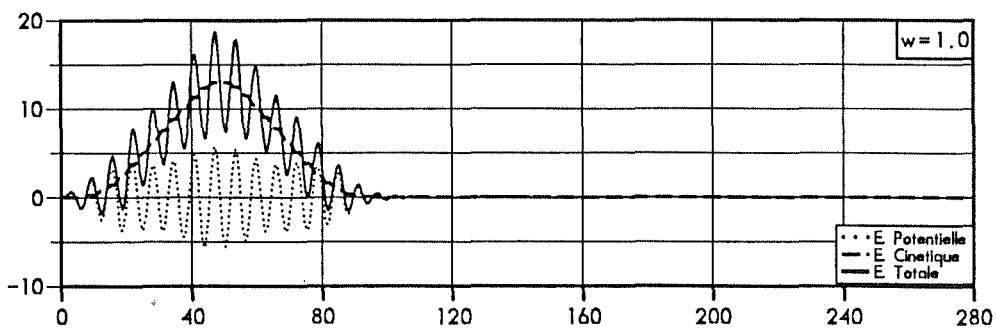
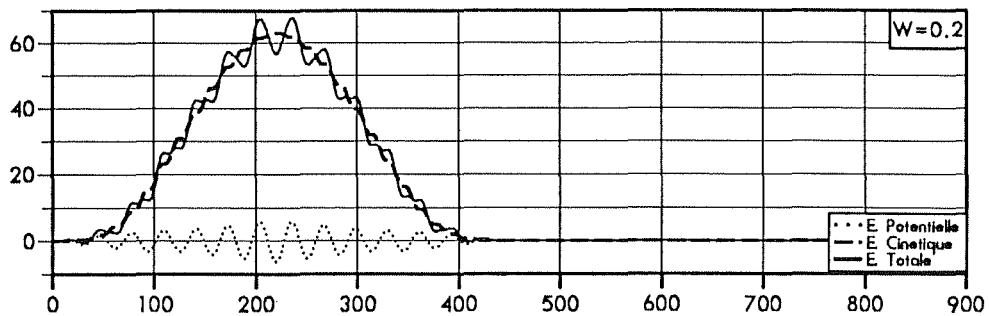


temps $t=T.\sqrt{g/h}$

FIGURE 22

ENERGIES DU FLUIDE DANS LE CANAL MUNI D'UN ABSORBEUR

Mode Causal Approché - Coefficient dépendant de la fréquence

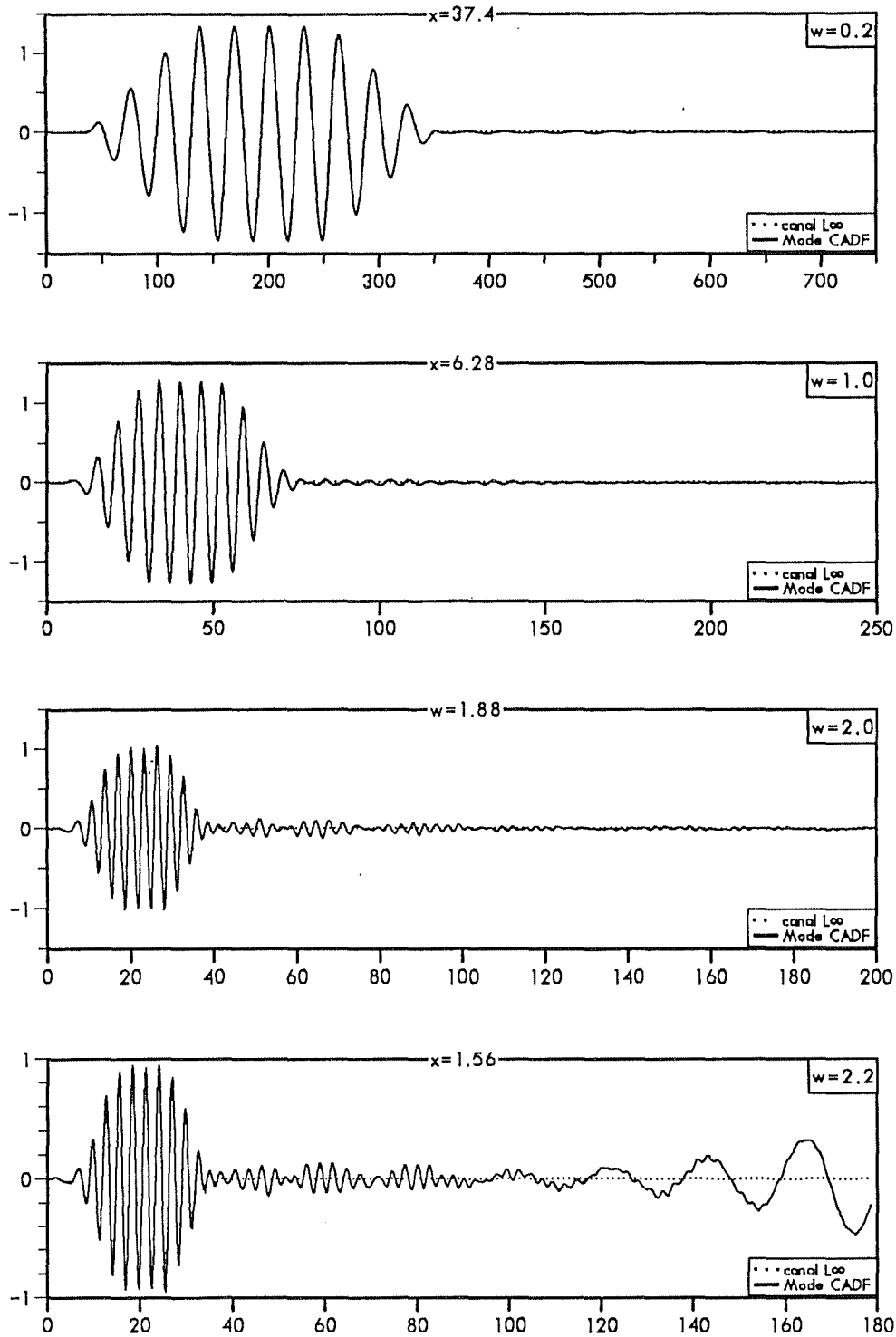


temps $t=T.\text{sqrt}(g/h)$

FIGURE 23

DEFORMEE DE SURFACE LIBRE AU POINT $x=0.3L$

Mode Causal Approché - Coefficient dépendant de la fréquence



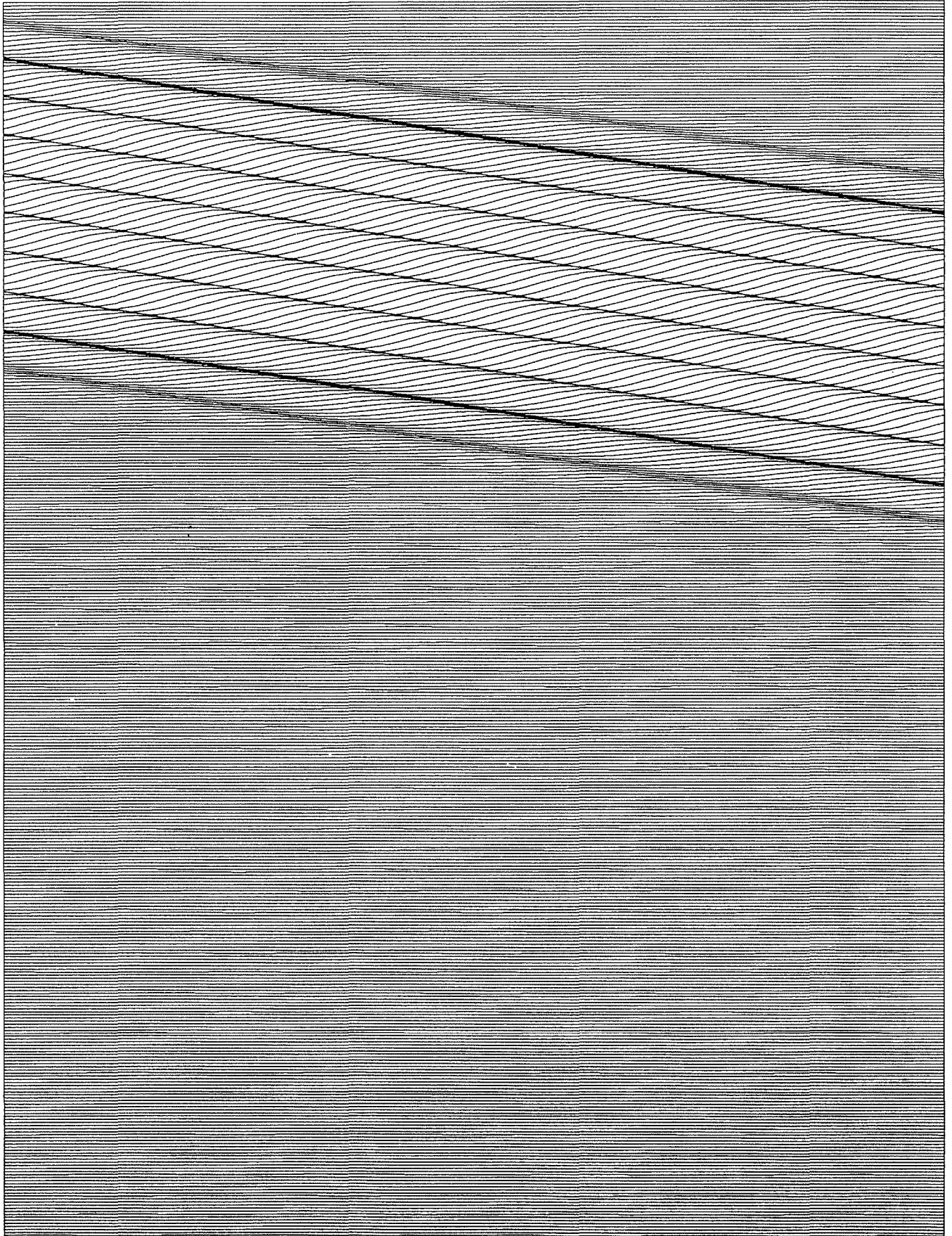
temps $t=T \cdot \sqrt{g/h}$

FIGURE 24

CANAL AVEC ABSORBEUR

Mode C. A. dépendant de la fréquence

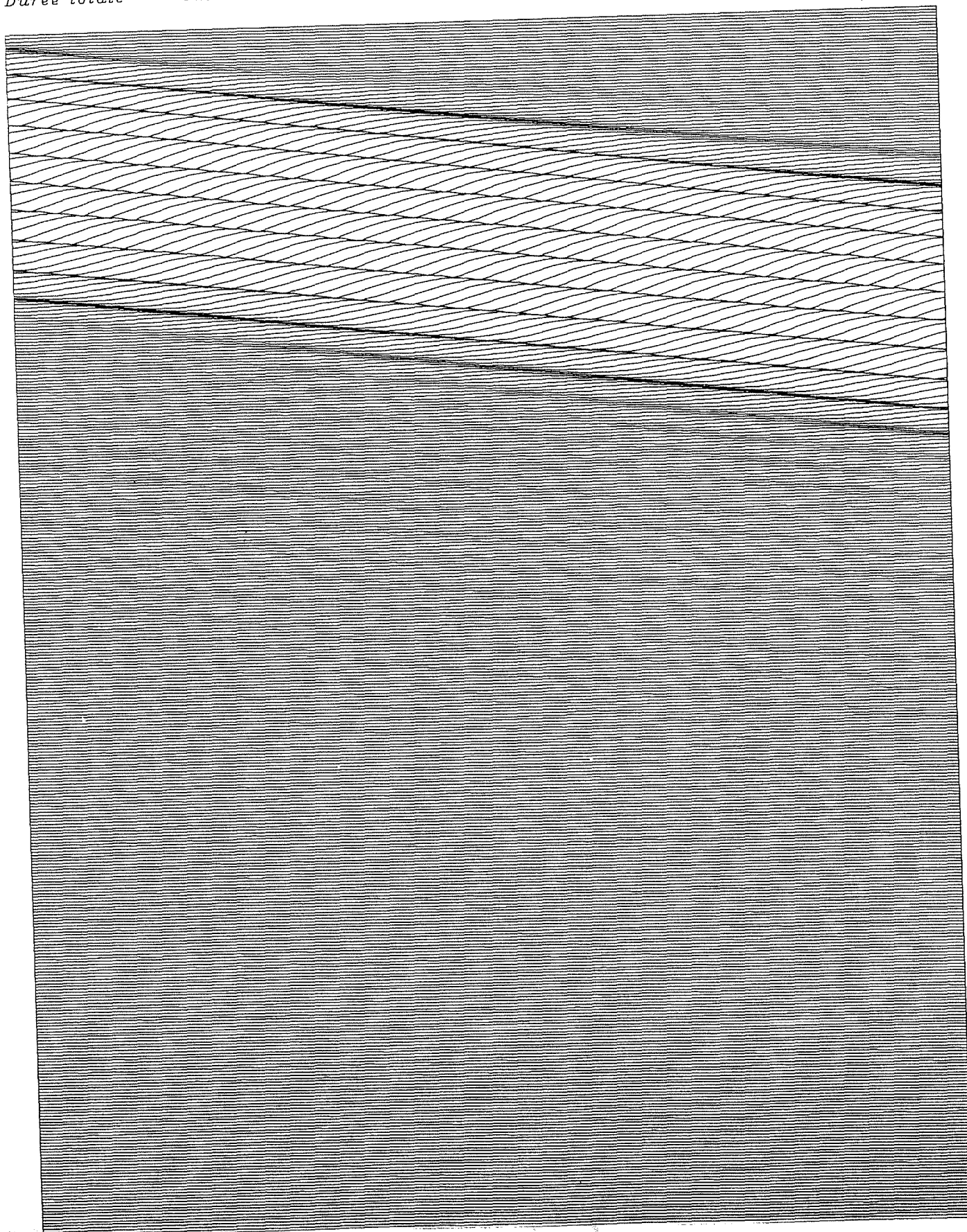
Pulsation	$\omega = 0.20000$	Période	$T = 31.41593$
Longueur d'onde	$\omega l = 31.20635$	Longueur du bassin	$L = 124.82541$
Vitesse de Groupe	$C_g = 0.98016$	Vitesse de Phase	$C_p = 0.99333$
Durée totale	$T_{max} = 1018.82092$	Pas de temps	$dt = 0.15708$



CANAL AVEC ABSORBEUR
Mode C. A. dépendant de la fréquence

Pulsation $\omega = 1.00000$
Longueur d'onde $\omega l = 5.23739$
Vitesse de Groupe $C_g = 0.59984$
Durée totale $T_{max} = 279.40231$

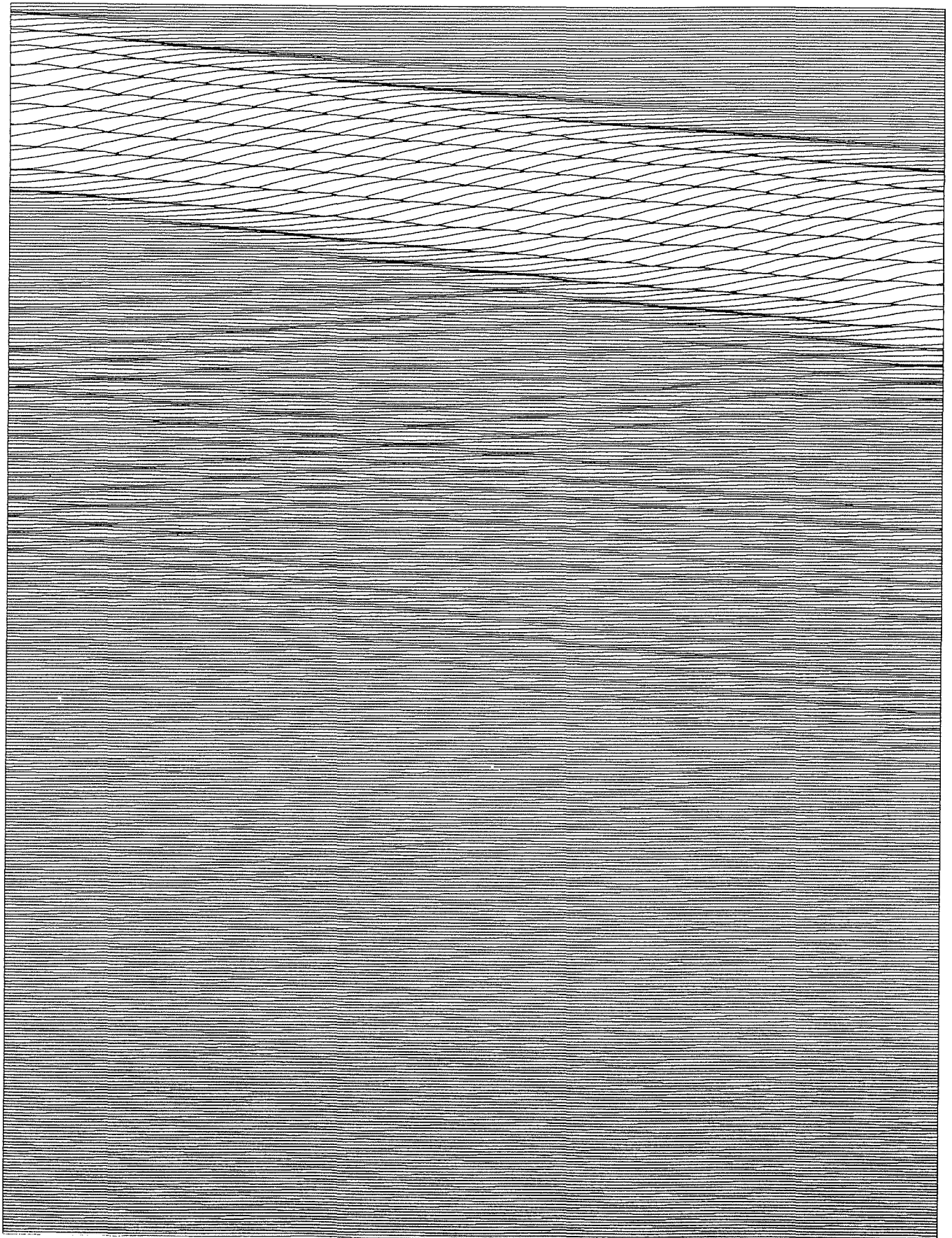
Période $T = 6.28319$
Longueur du bassin $L = 20.94956$
Vitesse de Phase $C_p = 0.83356$
Pas de temps $dt = 0.05236$



CANAL AVEC ABSORBEUR

Mode C. A. dépendant de la fréquence

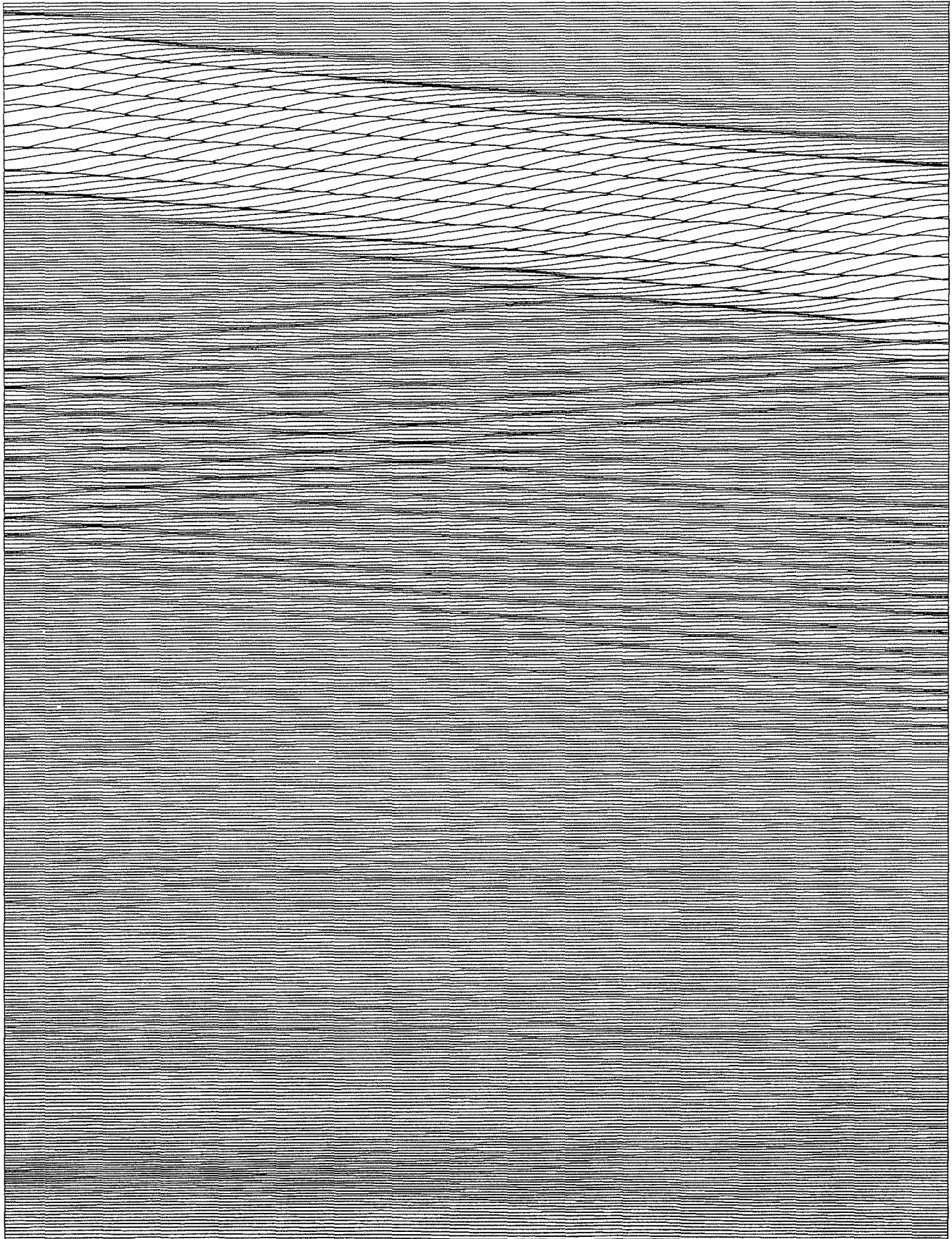
<i>Pulsation</i>	$\omega = 2.00000$	<i>Période</i>	$T = 3.14159$
<i>Longueur d'onde</i>	$\omega l = 1.56975$	<i>Longueur du bassin</i>	$L = 6.27899$
<i>Vitesse de Groupe</i>	$C_g = 0.25117$	<i>Vitesse de Phase</i>	$C_p = 0.49967$
<i>Durée totale</i>	$T_{max} = 199.99348$	<i>Pas de temps</i>	$dt = 0.03927$



CANAL AVEC ABSORBEUR

Mode C. A. dépendant de la fréquence

Pulsation	$\omega = 2.20000$	Periode	$T = 2.85599$
Longueur d'onde	$\omega l = 1.29802$	Longueur du bassin	$L = 5.19207$
Vitesse de Groupe	$C_g = 0.22752$	Vitesse de Phase	$C_p = 0.45449$
Duree totale	$T_{max} = 182.56284$	Pas de temps	$dt = 0.03570$

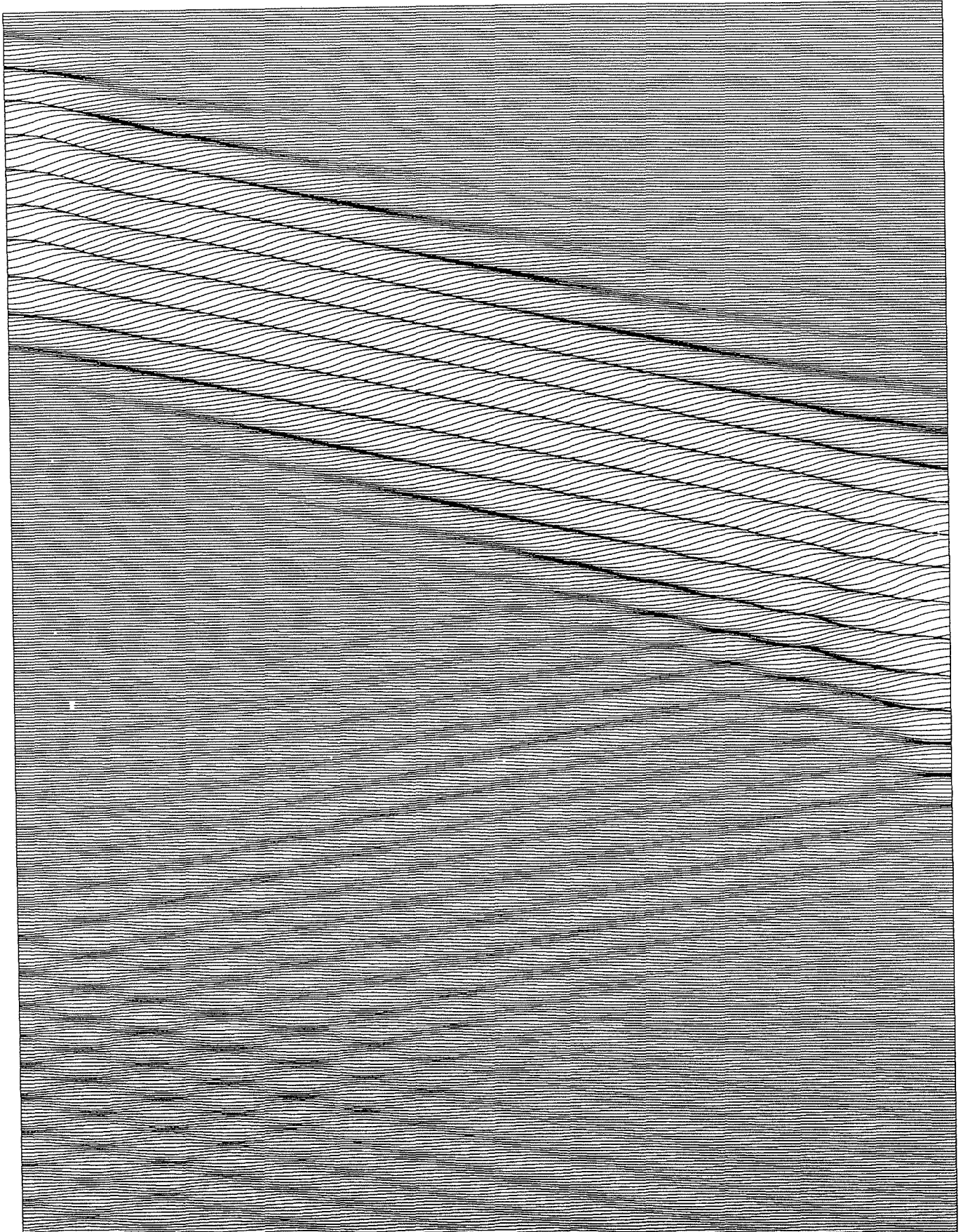


CANAL AVEC ABSORBEUR

Mode C. A. dépendant de la fréquence

Pulsation $\omega = 2.50000$
Longueur d'onde $\omega l = 1.00530$
Vitesse de Groupe $C_g = 0.20002$
Duree totale $T_{max} = 90.46944$

Periode $T = 2.51327$
Longueur du bassin $L = 6.03181$
Vitesse de Phase $C_p = 0.40000$
Pas de temps $dt = 0.02513$

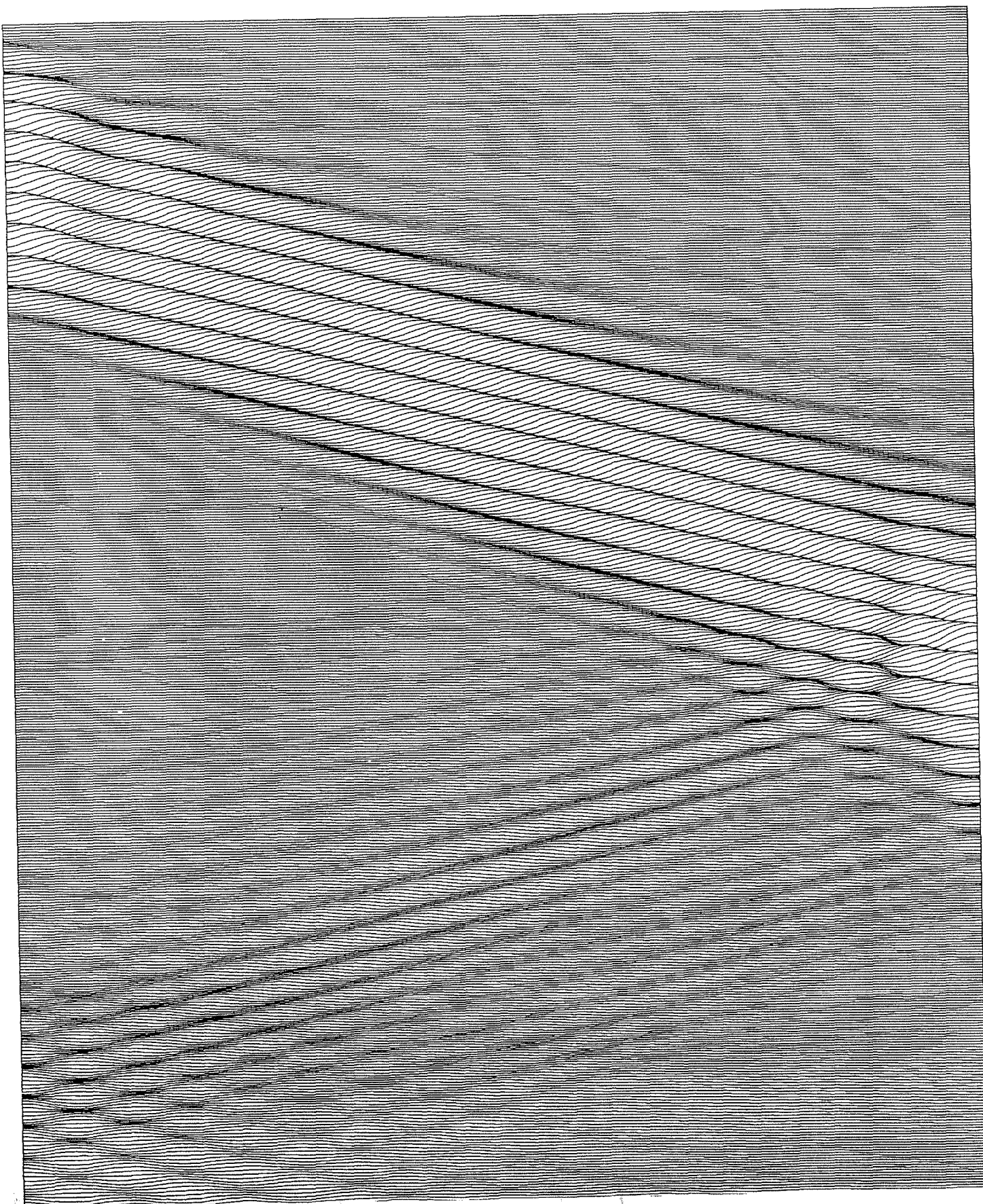


CANAL AVEC ABSORBEUR

Mode C. A. dépendant de la fréquence

pulsation $\omega = 3.00000$
Longueur d'onde $\omega l = 0.69813$
Vitesse de Groupe $C_g = 0.16667$
Duree totale $T_{max} = 83.77576$

Periode $T = 2.09440$
Longueur du bassin $L = 5.58505$
Vitesse de Phase $C_p = 0.33333$
Pas de temps $dt = 0.02992$

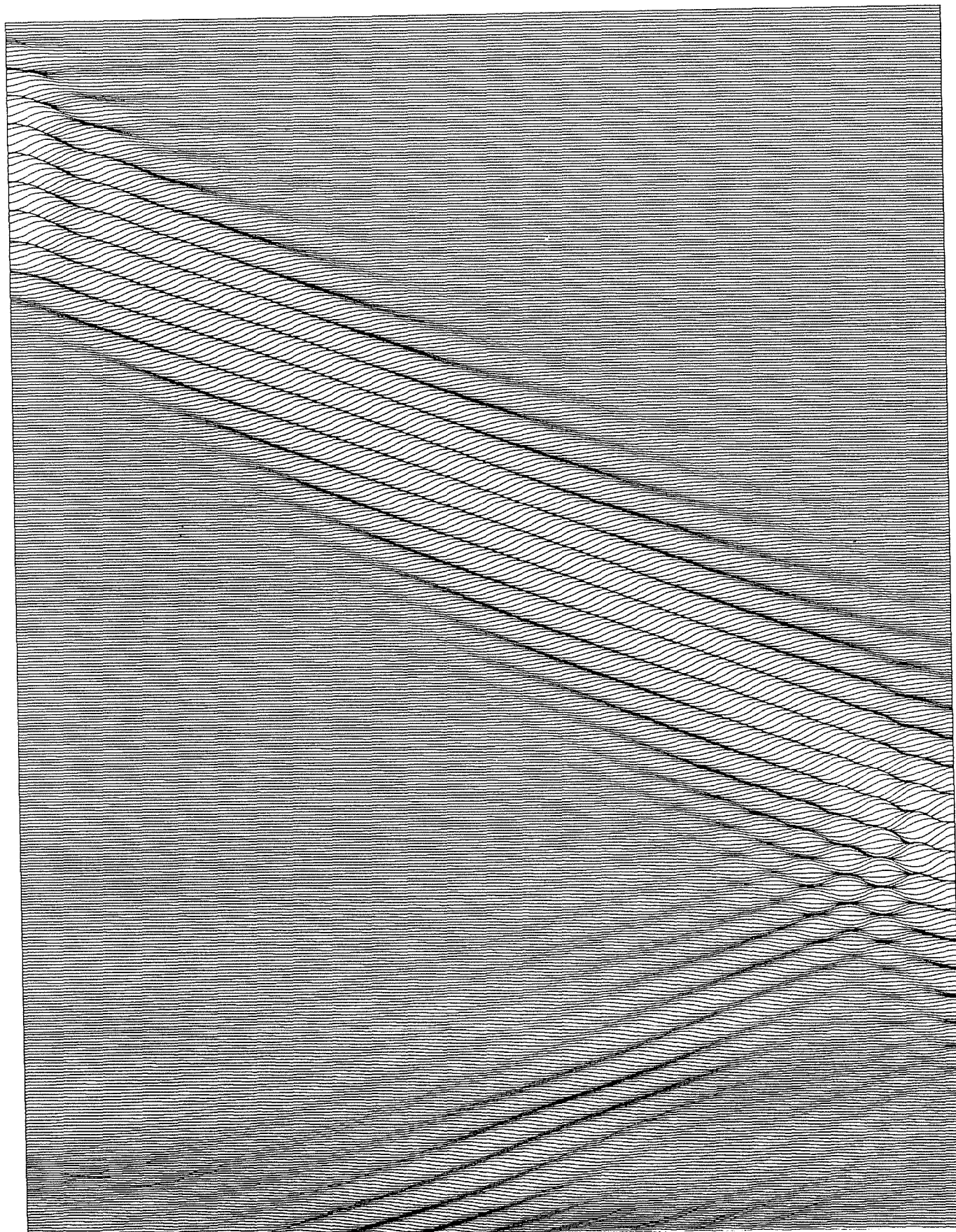


CANAL AVEC ABSORBEUR

Mode C. A. dependant de la frequence

pulsation $\omega = 3.50000$
Longueur d'onde $\omega l = 0.51291$
Vitesse de Groupe $C_g = 0.14286$
Duree totale $T_{max} = 77.55246$

Periode $T = 1.79520$
Longueur du bassin $L = 6.15496$
Vitesse de Phase $C_p = 0.28571$
Pas de temps $dt = 0.02992$

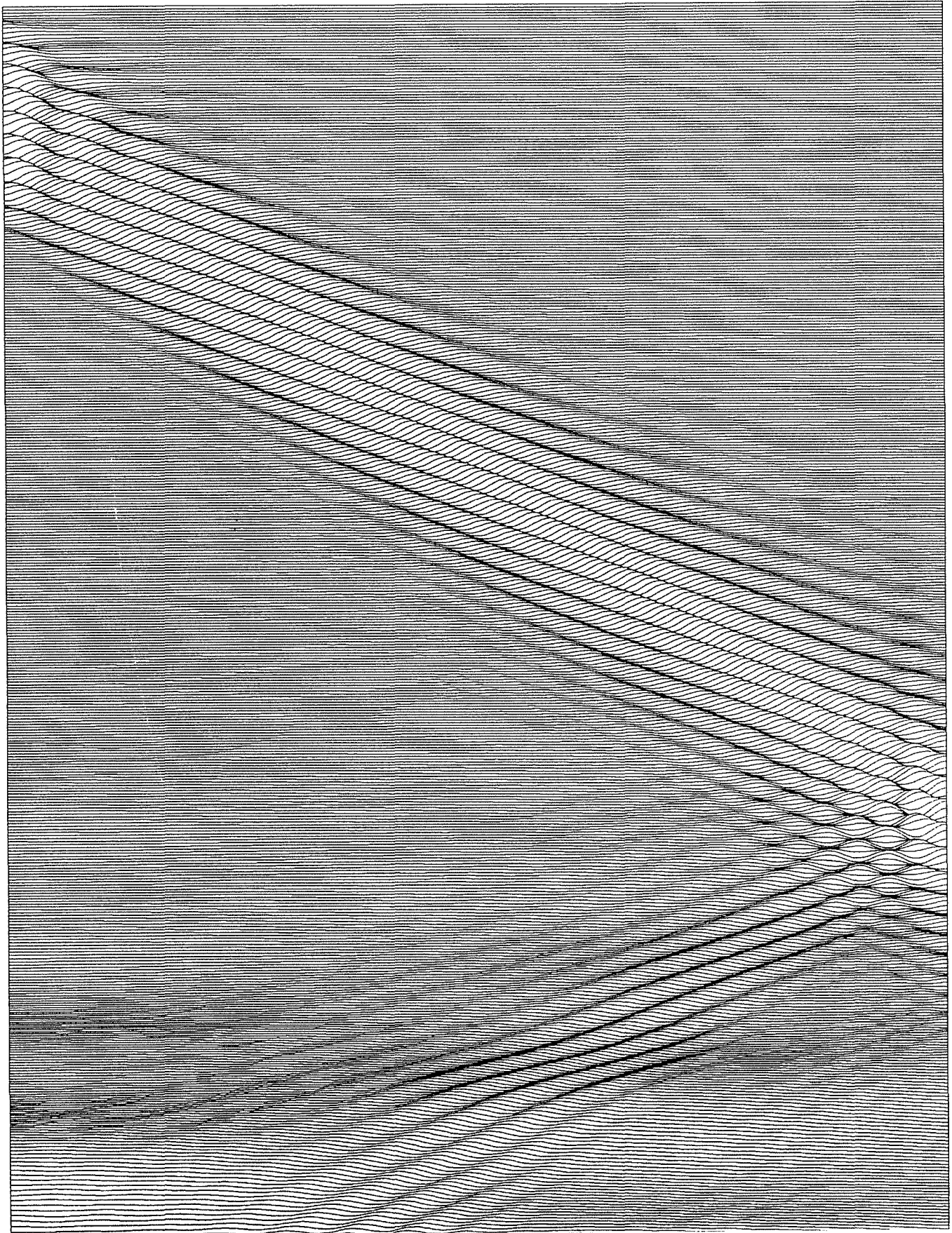


CANAL AVEC ABSORBEUR

Mode C. A. dépendant de la fréquence

pulsation $\omega = 4.00000$
Longueur d'onde $\omega l = 0.39270$
Vitesse de Groupe $C_g = 0.12500$
Duree totale $T_{max} = 84.82300$

Periode $T = 1.57080$
Longueur du bassin $L = 5.89049$
Vitesse de Phase $C_p = 0.25000$
Pas de temps $dt = 0.03142$



Le comportement en amplitude est lui aussi satisfaisant et l'on peut voir sur les courbes de la FIGURE 25a la comparaison entre le rapport d'amplitude de la vitesse sur les efforts, autrement dit le gain, mesuré pendant la simulation temporelle des séquences d'absorption et le module de la fonction de transfert idéale $H(i\omega)$ définie dans l'étude fréquentielle, et sur les courbes de la FIGURE 25b le déphasage obtenu dans les mêmes conditions, comparé à l'argument de $H(i\omega)$.

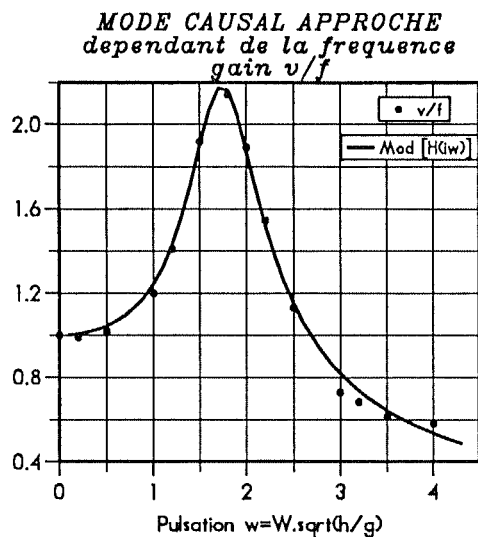


FIGURE 25a

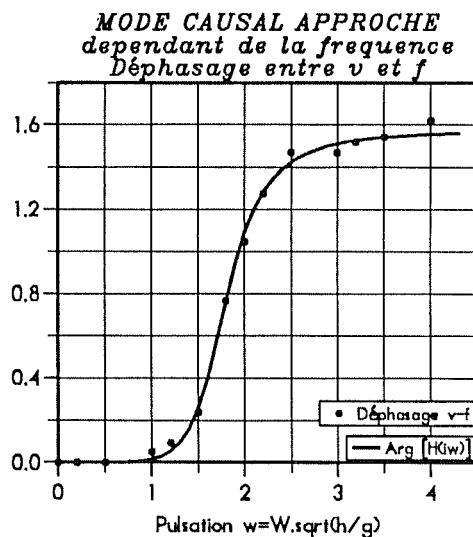


FIGURE 25b

Il faut encore noter sur ces courbes de vitesse (FIGURE 22) le phénomène apparaissant aux pulsations élevées ($\omega \geq 2$).

On constate en effet l'apparition après la bouffée principale, voire avant la fin de cette bouffée pour les fréquences les plus hautes, d'une réponse à très basse fréquence. Plusieurs simulations ont été réalisées dans ce domaine des hautes fréquences en gardant tous les paramètres identiques sauf la longueur totale L du bassin. Il semble que ce phénomène ne traduise pas l'excitation d'un mode propre du bassin, mais bien une instabilité à très basse fréquence de la bande de régulation de l'absorbeur (i.e. la loi d'absorption). Cette "respiration" du canal, variation quasi-statique de la longueur globale est confirmée (cf. FIGURE 23) par le fait que ce phénomène rejaille sur l'énergie potentielle et non l'énergie cinétique, indiquant par là qu'il s'agit bien d'une variation d'ensemble du niveau moyen et non pas d'une excitation d'un des premiers modes propres.

Les courbes d'énergie de la FIGURE 23 mettent en évidence la bonne absorption de l'onde incidente pour les fréquences basses et moyennes ($\omega \leq 2$) lorsque l'on prend pour chaque fréquence $\alpha = N(\omega)$. En effet, l'énergie est quasiment intégralement absorbée dès le premier passage et lorsqu'apparaît un palier, il est unique.

Les valeurs calculées du coefficient d'absorption \mathcal{A} permettent de quantifier ce bon comportement. On constate en particulier sur la courbe de la FIGURE 26 montrant les coefficients d'absorption en amplitude obtenus pour les différents modes, une absorption de 92% en

amplitude (96% en énergie) pour la pulsation $\omega = 2$, nettement supérieure à celle obtenue en mode basses fréquences.

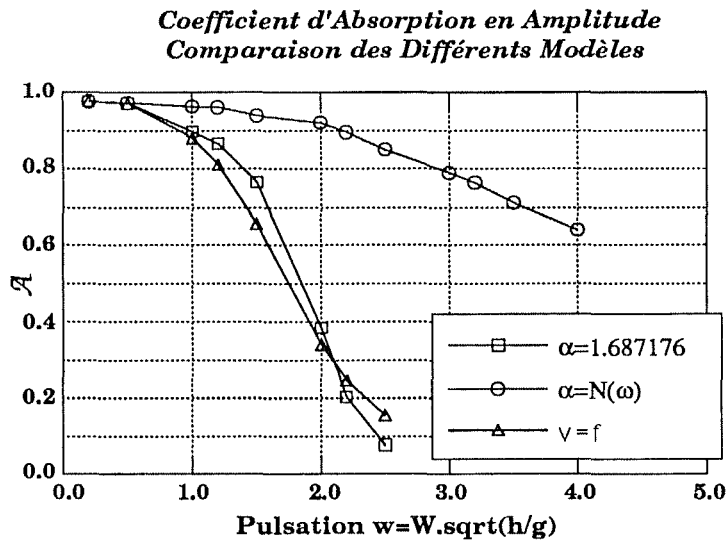


FIGURE 26

On retrouve sur la courbe d'énergie potentielle une oscillation à très basse fréquence correspondant à l'instabilité observée sur les vitesses.

Ce phénomène apparaît de plus en plus prononcé au fur et à mesure qu'augmente la pulsation de l'onde incidente. Cette instabilité fait que les courbes d'énergie ne permettent pas de déterminer de manière satisfaisante le coefficient d'absorption \mathcal{A} pour les hautes fréquences. Celui-ci est donc dans ce cas directement estimé à partir des surfaces libres calculées en deux instants, avant et après réflexion du groupe d'ondes sur l'absorbeur.

La déformée de surface libre calculée à chaque instant en un point situé à 30% de la longueur totale du bassin à partir du générateur (FIGURE 24) permet de confirmer l'excellent comportement de l'absorbeur dans ce mode dépendant de la fréquence, pour des pulsations allant jusqu'à $\omega=2$. Les déformées de surface libre du canal avec absorbeur sont en effet sur ce domaine superposables à celles calculées dans le cas du canal infiniment long. Pour les fréquences les plus élevées, le mode principal semble être toujours correctement absorbé, malgré l'instabilité basse fréquence qui se traduit par une amplification exponentielle de l'amplitude de la déformée.

Ces résultats, même s'ils sont encourageants puisqu'il montrent à l'évidence qu'il est possible d'absorber de manière efficace l'onde réfléchiée par la paroi d'un batteur piston et en particulier qu'il est possible d'obtenir une avance de phase de la vitesse du batteur sur les efforts hydrodynamiques ne sont pas encore totalement satisfaisants. En effet, il convient de se rappeler que de tels résultats ont été obtenus en remplaçant dans le modèle causal approché le coefficient α , constante indépendante, par une fonction de la pulsation ω , rendant par là même l'exploitation

de cette relation impossible dans le cadre d'une description purement instationnaire du phénomène.

[III-100] $\alpha = \alpha(\omega) = N(\omega)$

Sur la base de ces deux modèles, causal approché et causal approché dépendant de la fréquence, on peut proposer un troisième mode de fonctionnement proche de celui de l'absorbeur de *Salter*, présenté au chapitre précédent [II-9].

III-6-2-6 Relation de type *Salter*

On peut en effet envisager, au vu des résultats apportés par ces deux modèles, d'utiliser la relation instationnaire [III-80] caractéristique du modèle causal approché en prenant pour valeur de la constante α , non plus $N(0)$, mais une autre valeur de $N(\omega)$, pour une valeur ω_0 préalablement fixée. Les courbes du coefficient d'absorption \mathcal{A} données par la FIGURE 27 montrent dans ce cas l'efficacité de l'absorbeur en fonction de la pulsation ω pour différentes valeurs de ω_0 . On retrouve bien sûr le cas du mode causal approché $\alpha = N(0)$, ainsi que les courbes d'absorption pour $\alpha = N(1.2)$ et $\alpha = N(1.8)$. On constate, comme l'on pouvait s'y attendre, que l'absorption est dans tous les cas maximale pour la pulsation correspondant à la valeur avec laquelle α a été adapté et diminue de part et d'autre de cette valeur.

On remarque cependant que si la courbe correspondant à $\alpha = N(1.8)$ décroît rapidement de part et d'autre de $\omega = 1.8$, montrant que la bande spectrale sur laquelle ce mode est adapté est limitée, il n'en est pas de même pour le cas $\alpha = N(1.2)$ dont l'adaptation est plus proche de celle du modèle causal approché. On constate en effet que l'absorption reste dans ce cas très bonnes pour les pulsations inférieures à $\omega = 1.2$ alors qu'elle diminue beaucoup

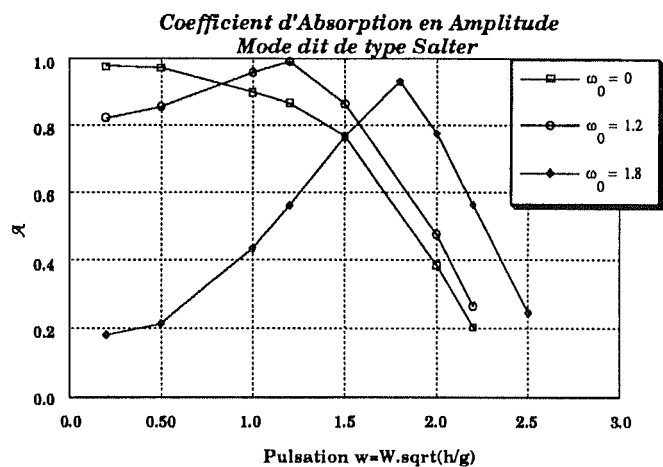


FIGURE 27

plus rapidement pour les fréquences supérieures jusqu'à tendre vers les valeurs du mode causal approché. Un tel comportement peut s'expliquer au vu de la courbe de $N(\omega)$ (cf. FIGURE 14b). On constate en effet que la courbe évolue très peu sur le domaine des basses fréquences ($N(0) = 1.687$, $N(1.2) = 1.407$), il est donc normal de retrouver une absorption globalement équivalente lorsque l'on

choisit pour α une valeur appartenant à ce domaine. On peut considérer que dans ce cas, on aura sur le domaine $[\omega = 0, \omega = 1.2]$ une absorption moyenne en amplitude de l'ordre de 90%.

Dans le cas $\alpha = N(1.8)$, au contraire, α à une valeur nettement inférieure ($\alpha = 0.802$), ce qui explique le mauvais comportement aux plus basses fréquences, de plus, on se trouve dans un domaine où la pente de $N(\omega)$ est importante, ce qui justifie la faible largeur de bande sur laquelle le modèle est alors adapté.

L'approximation du terme non causal $n(t)$ par une impulsion de *Dirac*, qui rappelons le, a permis d'écrire ces relations, n'est donc pas suffisante pour faire de l'égalité [III-80] une relation d'absorption causale instationnaire efficace. Il convient donc de rechercher d'autres relations et donc de nouvelles fonctions causales pour lesquelles une telle hypothèse d'approximation ne sera plus nécessaire et qui sauront tout de même se révéler efficaces sur toute la gamme des fréquences utiles, y compris en haute fréquence.

C'est l'objet de la fin de l'étude théorique qui va suivre. Comme on le verra, on indique des méthodes possibles de recherche de relations d'absorption qu'il n'a pas été possible, faute de temps, de mettre en œuvre de manière effective.

III-6-3 Recherche d'un modèle causal exact par identification de $H(i\omega)$

On vient de voir comment il est possible de construire une relation de contrôle de type feedback/feedforward en utilisant la conjuguée $H^*(i\omega)$ de la fonction de transfert de l'absorbeur parfait. A partir de là, deux approximations causales ont été proposées et étudiées.

Les résultats ainsi obtenus, bien que de meilleure qualité que ceux donnés par les méthodes préexistantes, peuvent sans doute être encore améliorés. On expose maintenant une méthode qui devrait permettre de développer de nouvelles relations d'absorptions causales encore plus performantes. Il s'agit en fait d'une généralisation du schéma feedback/feedforward précédent.

Rappelons que le modèle causal approché déterminé au chapitre précédent peut être représentée par le schéma suivant:

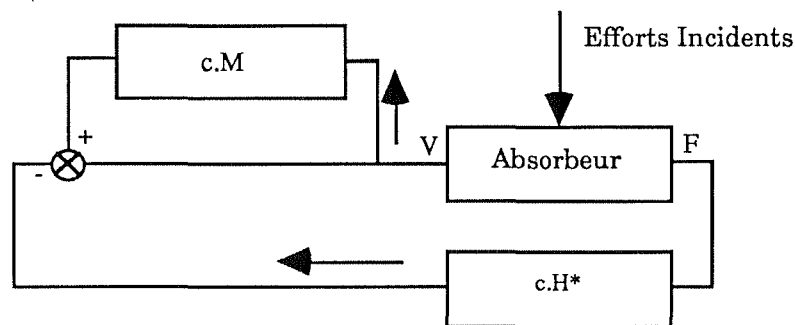


FIGURE 28

où c est le coefficient multiplicateur dépendant de l'amplitude α du *Dirac* équivalent au terme non causal $n(t)$: $c = \frac{1}{1 - \alpha}$.

H^* et M sont les deux transmittances précédemment déterminées, fonctions de la pulsation ω . La fonction de transfert $H^*(i\omega)$ permettant un contrôle a posteriori en fonction de la donnée de sortie F (feedback) et la fonction $M(i\omega)$ ayant une action par anticipation sur la donnée d'entrée V (feedforward).

Le retour par la fonction de transfert $H^*(i\omega)$ était, à l'origine, un choix arbitraire. Ce choix, qui fait apparaître le déphaseur pur $\frac{H^*(i\omega)}{H(i\omega)}$, impose l'unique fonction $K(i\omega)$ et donc ses composantes $M(i\omega)$ et $N(i\omega)$, ainsi que leurs transformées de Fourier inverses dans le domaine

temporel. On va, dans la suite, s'affranchir de cette hypothèse et se donner des degrés de liberté supplémentaires sur la dynamique des boucles feedback et feedforward. On se fixe donc ici comme but de déterminer deux nouvelles fonctions de transfert, notées $A(i\omega)$ et $B(i\omega)$, intervenant dans une relation fréquentielle de forme plus générale:

$$[\text{III-101}] \quad V(i\omega) = A(i\omega).V(i\omega) - B(i\omega).F(i\omega)$$

et ayant pour réponses impulsionnelles associées deux fonctions causales $a(t)$ et $b(t)$, de telle manière que la relation de convolution dans le domaine du temps

$$[\text{III-102}] \quad v(t) = a(t) * v(t) - b(t) * f(t)$$

soit une relation d'absorption réalisable et applicable en régime instationnaire, autrement dit, qu'elle prenne en compte toute la dynamique du système. Un tel processus pourra être représenté par le schéma suivant:

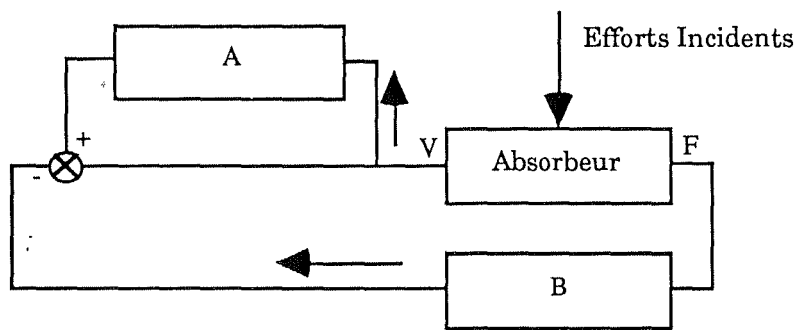


FIGURE 29

III-6-3-1 Ecriture de $H(i\omega)$ sous forme de fraction rationnelle.

La détermination des transmittances $A(i\omega)$ et $B(i\omega)$ va se faire sur la base de $H(i\omega)$. C'est pourquoi on va dans un premier temps identifier cette fonction de transfert, autrement dit l'approcher par une fraction rationnelle de la variable $i\omega$.

La méthode de lissage par somme d'exponentielles a permis d'écrire la réponse impulsionnelle $h^*(t)$ sous forme d'une combinaison linéaire de trois exponentielles [III-85]. En se rappelant alors que la transformation de Laplace est une extension de la transformation de Fourier et que les propriétés de cette dernière peuvent se déduire de celles de la première en imposant à la variable de Laplace s de posséder une partie réelle σ nulle. On se rappelle que la fonction $h^*(t)$ a

pu être représentée de façon très précise par la somme de seulement trois exponentielles complexes (cf. § III-6-2-4). $H^*(i\omega)$ sera donc approchée par la somme de trois systèmes du premier ordre:

$$[\text{III-103}] \quad H^*(i\omega) = \frac{\alpha_1^*}{i\omega - \lambda_1^*} + \frac{\alpha_2^*}{i\omega - \lambda_2^*} + \frac{\alpha_3^*}{i\omega - \lambda_3^*}$$

avec les notations prises pour les coefficients α_k^* et λ_k^* lors du lissage des fonctions par sommes d'exponentielles.

La fonction de transfert $H^*(i\omega)$ est caractéristique d'un système du troisième ordre, construit par superposition de trois systèmes du premier ordre. On voit que la relation [III-103] n'est autre que la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle complexe dont le numérateur est de degré 2 et le dénominateur de degré 3.

$$[\text{III-104}] \quad H^*(i\omega) = \frac{b_0^* + i\omega.b_1^* - \omega^2.b_2^*}{a_0^* + i\omega.a_1^* - \omega^2.a_2^* - i\omega^3.a_3^*}$$

Dans le but de normaliser l'écriture de la fraction rationnelle, on impose a_0^* unitaire ce qui conduit, le gain statique $H^*(0)$ étant lui aussi unitaire, à prendre $b_0^* = 1$. On a donc finalement:

$$[\text{III-105}] \quad H^*(i\omega) = \frac{1 + i\omega.b_1^* - \omega^2.b_2^*}{1 + i\omega.a_1^* - \omega^2.a_2^* - i\omega^3.a_3^*}$$

où les coefficients a_k^* et b_k^* sont donnés en fonction des α_k^* et des λ_k^* par les relations:

$$[\text{III-106}] \quad \left| \begin{array}{l} b_1^*(i\omega) = \frac{\alpha_1^*(\lambda_2^* + \lambda_3^*) + \alpha_2^*(\lambda_1^* + \lambda_3^*) + \alpha_3^*(\lambda_1^* + \lambda_2^*)}{\alpha_1^*.\lambda_2^*.\lambda_3^* + \alpha_2^*.\lambda_1^*.\lambda_3^* + \alpha_3^*.\lambda_1^*.\lambda_2^*} \\ b_2^*(i\omega) = - \frac{\alpha_1^* + \alpha_2^* + \alpha_3^*}{\alpha_1^*.\lambda_2^*.\lambda_3^* + \alpha_2^*.\lambda_1^*.\lambda_3^* + \alpha_3^*.\lambda_1^*.\lambda_2^*} \end{array} \right.$$

$$[\text{III-107}] \quad \left| \begin{array}{l} a_1^*(i\omega) = - \frac{\lambda_1^*.\lambda_2^* + \lambda_1^*.\lambda_3^* + \lambda_2^*.\lambda_3^*}{\lambda_1^*.\lambda_2^*.\lambda_3^*} \\ a_2^*(i\omega) = \frac{\lambda_1^* + \lambda_2^* + \lambda_3^*}{\lambda_1^*.\lambda_2^*.\lambda_3^*} \\ a_3^*(i\omega) = \frac{-1}{\lambda_1^*.\lambda_2^*.\lambda_3^*} \end{array} \right.$$

$H^*(i\omega)$ étant la conjuguée de la fonction de transfert $H(i\omega)$ à laquelle on s'intéresse, cette dernière pourra s'écrire:

$$[III-108] \quad H(i\omega) = \frac{1 + i\omega \cdot b_1 - \omega^2 \cdot b_2}{1 + i\omega \cdot a_1 - \omega^2 \cdot a_2 - i\omega^3 \cdot a_3}$$

où les coefficients a_k et b_k se déduisent des a_k^* et b_k^* , compte tenu des relations liant deux termes conjugués, par les égalités suivantes:

$$[III-109] \quad \begin{cases} b_1 = -b_1^* \\ b_2 = b_2^* \\ a_1 = -a_1^* \\ a_2 = a_2^* \\ a_3 = -a_3^* \end{cases}$$

En introduisant dans les expressions [III-106] et [III-107] les valeurs numériques données dans le tableau de la FIGURE 17 et en appliquant les égalités [III-109], il vient directement pour valeur des coefficients de la fraction rationnelle $H(i\omega)$:

$$[III-110] \quad \begin{cases} b_1 = -0.8622994 \\ b_2 = 0.3634789 \\ a_1 = -0.9027423 \\ a_2 = 0.4831550 \\ a_3 = -0.1982027 \end{cases}$$

Les courbes de la FIGURE 30 donnant le module et l'argument de $H(i\omega)$ ainsi calculée sous forme de fraction rationnelle à partir des coefficients obtenus par lissage par sommes d'exponentielles, montrent qu'elle est très bien décrite par ce modèle. La légère oscillation apparaissant à l'origine de l'argument recomposé est sans aucun doute due aux erreurs introduites par la troncature imposée lors du lissage de $h^*(t)$. Elle est cependant très faible et son influence pourra être négligée. Il est dès lors possible d'utiliser cette écriture comme base dans la détermination des nouvelles fonctions de transfert $A(i\omega)$ et $B(i\omega)$.

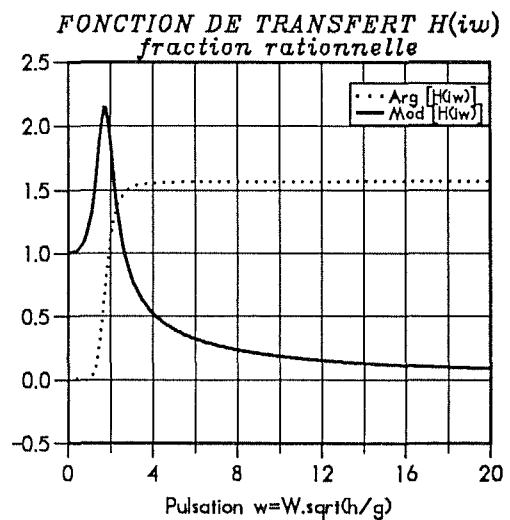


FIGURE 30

III-6-3-2 Ecriture d'une relation de la forme $V(i\omega) = A(i\omega).V(i\omega) - B(i\omega).F(i\omega)$

En introduisant les polynômes fonctions de la pulsation ω :

$$[\text{III-111}] \quad N(i\omega) = 1 + i\omega.b_1 - \omega^2.b_2$$

$$[\text{III-112}] \quad D(i\omega) = 1 + i\omega.a_1 - \omega^2.a_2 - i\omega^3.a_3$$

la relation de définition de la fonction de transfert:

$$[\text{III-113}] \quad H(i\omega) = \frac{V(i\omega)}{F(i\omega)} = \frac{N(i\omega)}{D(i\omega)}$$

conduit à la simple égalité:

$$[\text{III-114}] \quad V(i\omega).D(i\omega) = F(i\omega).N(i\omega)$$

On considère alors un polynôme $C(i\omega)$, complexe à coefficients réels de degré m :

$$[\text{III-115}] \quad C(i\omega) = \sum_{k=0}^m c_k (i\omega)^k$$

que l'on introduit dans l'égalité précédente de manière à faire apparaître la nouvelle relation:

$$[\text{III-116}] \quad V(i\omega) \frac{D(i\omega)}{C(i\omega)} = F(i\omega) \frac{N(i\omega)}{C(i\omega)}$$

Les deux fractions rationnelles ainsi construites sont notées respectivement:

$$[\text{III-117}] \quad A(i\omega) = \frac{D(i\omega)}{C(i\omega)}$$

$$[\text{III-118}] \quad B(i\omega) = \frac{N(i\omega)}{C(i\omega)}$$

Si leurs numérateurs sont connus puisque tirés de la définition de $H(i\omega)$, le polynôme $C(i\omega)$ constituant leur dénominateur commun reste pour le moment entièrement indéterminé.

En choisissant ce polynôme quelconque a priori, on s'est laissé une infinité de degrés de liberté quant à la détermination des fractions rationnelles $A'(i\omega)$ et $B(i\omega)$. On va donc s'attacher à présent à déterminer les caractéristiques de $C(i\omega)$ conduisant à une relation d'absorption causale exacte de la forme [III-102] dans le domaine du temps.

La seule contrainte imposée à ce polynôme complexe jusqu'à présent, est de posséder des coefficients c_k tous réels. On va tout d'abord fixer son degré m .

Un critère d'existence d'un système physique linéaire, éventuellement composé de la superposition d'un nombre quelconque de systèmes du premier ordre et caractérisé par une transmittance $L(i\omega)$, est que le degré du dénominateur de cette dernière, lorsqu'elle s'écrit sous forme de fraction rationnelle, soit toujours supérieur ou égal à celui de son numérateur [21].

$$[III-119] \quad d^\circ D(i\omega) \geq d^\circ N(i\omega)$$

Ce critère provient directement de la relation de transformation de Laplace [III-16] d'un système du premier ordre.

On est donc amené, compte tenu de la définition de $A'(i\omega)$ et $B(i\omega)$ à imposer à $C(i\omega)$ d'être au moins de degré trois. Par ailleurs, $H(i\omega)$ est caractéristique d'un système d'ordre trois. Il n'est donc a priori pas utile, dans la relation d'absorption causale de faire intervenir des fonctions de transfert caractéristiques de systèmes d'ordre supérieur. On choisira alors $d^\circ C(i\omega) = 3$, soit:

$$[III-120] \quad C(i\omega) = c_0 + i\omega.c_1 - \omega^2.c_2 - i\omega^3.c_3$$

En notant s_1, s_2 et s_3 les trois racines complexes de ce polynôme, on peut l'écrire sous la forme canonique:

$$[III-121] \quad C(i\omega) = (i\omega - s_1).(i\omega - s_2).(i\omega - s_3)$$

Un rapide calcul algébrique conduit à l'expression des coefficients c_k en fonctions des racines s_k :

$$[III-122] \quad \left\{ \begin{array}{l} c_0 = -s_1.s_2.s_3 \\ c_1 = s_1.s_2 + s_1.s_3 + s_2.s_3 \\ c_2 = -(s_1 + s_2 + s_3) \\ c_3 = 1 \end{array} \right.$$

Les c_k étant réels, le triplet des s_k est nécessairement constitué soit de trois réels, soit d'une paire de complexes conjugués et d'un réel.

Avec cette expression du polynôme, les fonctions $A'(i\omega)$ et $B(i\omega)$ s'écrivent sous forme de fractions rationnelles:

$$[III-123] \quad A'(i\omega) = \frac{1 + i\omega \cdot a_1 - \omega^2 a_2 - i\omega^3 a_3}{c_0 + i\omega \cdot c_1 - \omega^2 c_2 - i\omega^3}$$

$$[III-124] \quad B(i\omega) = \frac{1 + i\omega \cdot b_1 - \omega^2 b_2}{c_0 + i\omega \cdot c_1 - \omega^2 c_2 - i\omega^3}$$

Ces deux fonctions étant assimilées aux fonctions de transfert caractéristiques de deux systèmes linéaires, on doit pouvoir associer à chacune d'elles, par transformation de Fourier inverse, une fonction dans le domaine du temps qui sera alors la réponse impulsionnelle de la branche considérée. Ces deux fonctions doivent donc être sommables en valeur absolue sur le domaine $\omega \in]-\infty, +\infty[$ où elles sont continues ou au moins continues par morceaux. Si $B(i\omega)$ vérifie bien cette propriété et peut donc faire l'objet d'une transformation de Fourier inverse, le calcul de la limite de $A'(i\omega)$ lorsque la pulsation tend vers l'infini:

$$[III-125] \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} A'(i\omega) = a_3$$

montre que l'intégrale de cette fonction ne sera pas bornée et que l'on ne peut pas lui appliquer une telle transformation. Pour pallier cette difficulté, on introduit une nouvelle fonction, $A(i\omega)$, définie par:

$$[III-126] \quad A(i\omega) = A'(i\omega) - a_3$$

qui s'écrit, en tenant compte du fait que le coefficient c_3 a été défini unitaire [III-122]:

$$[III-127] \quad A(i\omega) = \frac{a_0 + i\omega \cdot a_1 - \omega^2 a_2}{c_0 + i\omega \cdot c_1 - \omega^2 c_2 - i\omega^3} = \frac{1 - c_0 a_3 + i\omega (a_1 - c_1 a_3) - \omega^2 (a_2 - c_2 a_3)}{c_0 + i\omega \cdot c_1 - \omega^2 c_2 - i\omega^3}$$

$$[III-128] \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1 - c_0 a_3 \\ a_1 = a_1 - c_1 a_3 \\ a_2 = a_2 - c_2 a_3 \end{array} \right.$$

On voit ainsi apparaître une fraction rationnelle dont la forme est celle de la transmittance d'un système du troisième ordre et dont il est possible de calculer la réponse impulsionnelle associée.

Ces développements étant établis, on rappelle que le but en est de conduire à la détermination à partir de la relation de définition de la fonction de transfert $H(i\omega)$ [II-46], à une relation d'absorption de la forme [III-101] faisant intervenir à la fois les efforts hydrodynamiques et la vitesse de l'absorbeur, et dont l'équivalent dans le domaine du temps est une relation de convolution ne mettant en jeu que des fonctions causales.

La relation [III-116] s'écrit, en fonction de $A(i\omega)$ et $B(i\omega)$:

$$[\text{III-129}] \quad A(i\omega).V(i\omega) = B(i\omega).F(i\omega)$$

En introduisant alors $A(i\omega)$ dans cette égalité, on obtient directement l'égalité:

$$[\text{III-130}] \quad V(i\omega) = \frac{-1}{a_3} [A(i\omega).V(i\omega) - B(i\omega).F(i\omega)]$$

de forme équivalente, au coefficient multiplicatif $\frac{-1}{a_3}$ près, à la relation [III-116] recherchée (Ce coefficient pourrait directement être introduit dans les expressions des fonctions de transfert.).

Les fonctions $A(i\omega)$ et $B(i\omega)$ ayant été déterminées de manière à être intégrables en valeur absolue sur le domaine $]-\infty, +\infty[$, cette relation peut faire l'objet d'une transformation de Fourier inverse. On obtient ainsi dans le domaine temporel la relation de convolution

$$[\text{III-131}] \quad v(t) = \frac{-1}{a_3} [a(t) * v(t) - b(t) * f(t)]$$

dans laquelle les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ sont les réponses impulsionnelles associées respectivement à $A(i\omega)$ et $B(i\omega)$. L'expression intégrale de cette convolution est:

$$[\text{III-132}] \quad v(t) = \frac{-1}{a_3} \int_{-\infty}^{+\infty} [a(t-\tau).v(\tau) - b(t-\tau).f(\tau)] d\tau$$

On note que cette expression fait a priori appel à l'histoire du système dans son intégralité, passée, présente et future. Ce dernier étant considéré initialement au repos, autrement dit tel que $v(t)$ et $f(t)$ soient nulles pour les instants antérieurs à $t=0$, on peut écrire:

$$[\text{III-133}] \quad v(t) = \frac{-1}{a_3} \int_0^{+\infty} [a(t-\tau).v(\tau) - b(t-\tau).f(\tau)] d\tau$$

Cette relation peut encore dépendre de valeurs futures de $v(t)$ et $f(t)$, c'est à dire déterminées à des instants supérieurs à t , nécessairement inconnues. Elle n'est donc pas a priori caractéristique d'un système réalisable. Elle ne peut l'être en fait que dans le cas où les deux réponses impulsionnelles $a(t)$ et $b(t)$ sont causales. Ces deux fonctions sont obtenues par transformation de Fourier inverse des deux transmittances $A(i\omega)$ et $B(i\omega)$ dont on ne connaît jusqu'ici que les numérateurs respectifs et dont le dénominateur commun est un polynôme du troisième degré à déterminer. On va donc s'attacher à présent à la détermination des coefficients

c_k de ce polynôme qui doivent être tels, on le rappelle, que la relation [III-132] dans le domaine du temps soit réalisable.

III-6-3-3 Détermination des réponses impulsionnelles $a(t)$ et $b(t)$.

Les transmittances $A(i\omega)$ et $B(i\omega)$ sont par construction caractéristiques de systèmes du troisième ordre. Elles peuvent donc être considérées dans le cadre de la théorie linéaire comme constituées d'une combinaison de trois systèmes du premier ordre de la forme:

$$[\text{III-134}] \quad \frac{\gamma}{i\omega - s_k}$$

où les s_k sont les racines du polynôme $C(i\omega)$ à déterminer. Ces racines apparaissant au dénominateur de $A(i\omega)$ et $B(i\omega)$ sont les pôles de ces transmittances. La transformation de Fourier inverse de telles fonctions du premier ordre, obtenue en posant $s = i\omega$ dans la relation de transformation de Laplace [III-16] ne conduit comme on l'a vu à des fonctions causales dans le domaine du temps, de la forme

$$[\text{III-135}] \quad \Gamma(t) \cdot \gamma \cdot e^{s_k t}$$

où $\Gamma(t)$ est l'échelon unité, que dans le cas où l'exposant du terme exponentiel possède une partie réelle négative.

On voit ainsi apparaître un premier critère permettant de caractériser les transmittances $A(i\omega)$ et $B(i\omega)$: *les pôles s_k , communs à ces deux fonctions, doivent être à partie réelle négative*. Ce critère, même s'il est l'élément essentiel de la détermination des fonctions de transfert en ce sens qu'il impose une relation causale dans le domaine du temps, n'en laisse pas moins une infinité de possibilités pour les s_k et donc pour la valeur des coefficients c_k du polynôme $C(i\omega)$. On doit alors imposer de nouvelles contraintes au système ou au moins définir de nouvelles applications pour les transmittances.

A ce stade de l'étude, il reste à déterminer certains coefficients des deux transmittances du troisième ordre, avec un certain nombre de contraintes issues des propriétés souhaitées pour le système global bouclé: qualité d'absorption et stabilité.

Une des méthodes dont disposent les automaticiens dans ce cas est la méthode des polynômes de *Naslin*. Cette approche n'a pu être pour l'heure menée jusqu'à son terme, on en indique néanmoins les grandes lignes ci-dessous.

Présentation de la méthode des polynômes de Naslin.

La méthode des polynômes de *Naslin* [66] fait partie des méthodes de modèle, permettant l'identification de transmittances déterminées par la mesure et dont on ne connaît pas d'expression analytique. Il ne s'agit pas ici de redévelopper la théorie des modèles, abondamment exposée dans la littérature [21], mais de brièvement décrire la méthode dans le cas particulier des systèmes du troisième ordre qui nous intéressent ici.

La méthode de *Naslin* est une extrapolation basée sur des constatations expérimentales de la méthode de *Graham et Lathrop*. Elle apporte par rapport à cette dernière la possibilité d'introduire un paramètre d'adaptation de l'amortissement du système bouclé.

Soit $L(i\omega)$ la transmittance d'un système d'ordre n supérieur ou égal à trois pouvant être décrite par une fraction rationnelle dont le numérateur est de degré deux exactement:

$$[\text{III-162}] \quad L(i\omega) = \frac{l_0 + i\omega.l_1 - \omega^2.l_2}{l_0 + i\omega.l_1 + \dots + (i\omega)^n.l_n}$$

On définit alors le terme α_i par la relation:

$$[\text{III-163}] \quad \alpha_i = \frac{l_i^2}{l_{i+1}.l_{i-1}} \quad i = 1, n-1$$

Les coefficients de la fraction rationnelle seront alors déterminés en écrivant:

$$[\text{III-164}] \quad \alpha_i = \alpha_c \quad i=1, n-1$$

avec

$$[\text{III-165}] \quad \alpha_c = 1.5 + 16. \zeta^3 \cdot \frac{\omega_0}{\omega_0} (\alpha - 1.5)$$

avec les notations suivantes:

$$\omega_0 = \frac{l_0}{l_1}, \quad \omega_0 = \frac{l_0}{l_1} \quad \text{et} \quad \zeta^2 = \frac{l_1^2}{4.l_0.l_2}$$

Le coefficient α apparaissant dans l'égalité [III-165] est un paramètre variable dont la valeur est choisie dans l'intervalle $1.8 < \alpha < 2.4$. Le choix de la valeur de ce paramètre dépend des propriétés d'amortissement que l'on veut imposer à la transmittance étudiée.

Application au calcul des transmittances $A(i\omega)$ et $B(i\omega)$

Dans le cas pratique de la relation d'absorption, l'application de cette méthode conduirait à déterminer les racines réelles positives d'une équation du 8^{ème} degré pour les coefficients c_k du polynôme $C(i\omega)$.

En ajustant alors les paramètres d'amortissement α (dans [III-165]) des deux transmittances $A(i\omega)$ et $B(i\omega)$, on en déduirait le jeu de leurs pôles s_k communs.

Comme précédemment, les réponses impulsionnelles $a(t)$ et $b(t)$ définissant entièrement la relation d'absorption [III-133] seraient alors calculées comme la somme de trois systèmes du premier ordre dépendant de ces pôles (cf. § III-6-2-4).

IV

LE MODÈLE PHYSIQUE

L'une des données essentielles ayant guidé l'étude théorique développée dans les chapitres précédents tient dans le choix des paramètres d'entrée et de sortie caractéristiques de la relation d'absorption. En imposant de ne déterminer la fonction de transfert d'absorption qu'à l'aide des grandeurs physiques accessibles à la mesure que sont les efforts hydrodynamiques et la vitesse de translation de l'absorbeur, on s'est certes imposé des contraintes sévères, mais on se réserve ainsi la possibilité d'étendre une telle relation à un processus physique et de l'introduire comme loi de commande d'un absorbeur expérimental.

Si comme on l'a vu précédemment, l'introduction de ce genre de frontières absorbantes dans les schémas numériques présente l'intérêt évident de diminuer le domaine et donc le temps de calcul, l'existence d'un tel dispositif dans un bassin expérimental permettrait de s'affranchir de deux difficultés.

Tout d'abord, et ceci est à mettre en parallèle avec l'étude des modèles numériques, la présence d'une telle frontière absorbante permet de reproduire dans le domaine limité que constituent les bassins d'essais, des écoulements identiques à ceux que l'on trouve dans un domaine infini ou semi-infini. Ceci présente l'avantage principal de permettre d'augmenter la durée des essais, généralement limitée par les phénomènes de réflexion sur les murs du bassin et, par là même, d'étendre les possibilités des études expérimentales en régime instationnaire (tenue à la mer, manœuvrabilité...). De plus, on voit l'intérêt de posséder des éléments de simulation des écoulements similaires dans les deux domaines, numérique et expérimental, lorsqu'il s'agit de valider les résultats par comparaison.

Comme on pourra le constater à la lecture de ce chapitre, cette partie expérimentale n'a pas pu être menée à son terme. L'objectif de démonstration de la validité des lois d'absorption n'a pas été atteint. La raison principale en est la défaillance des entreprises sous-traitantes du système de motorisation et de l'asservissement qui nous a obligé à consacrer énormément de temps à ces problèmes, sans pour autant en fin de compte, pouvoir y apporter de solutions convenables. A l'heure actuelle, ces deux ensembles batteurs ne sont toujours pas opérationnels

IV-1 LE CANAL EXPÉRIMENTAL

Pour mener à bien ces études expérimentales et appliquer le modèle d'absorbeur développé ici, il a été prévu d'utiliser le canal à houle "bidimensionnel" dont s'est doté le Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Ecole Centrale de Nantes. Le terme "bidimensionnel" employé pour caractériser ce bassin peut surprendre mais est en fait dû à ses dimensions particulières. Sa largeur n'est en effet que de 0,5 mètre pour une longueur totale de 40 mètres, ce qui permet de négliger les phénomènes de propagation transverses par rapport aux écoulements principaux suivant la direction longitudinale.

Le canal est en fait constitué de deux murs de béton alignés en parallèle et dont l'un est muni en trois endroits de parois vitrées permettant la visualisation des phénomènes étudiés. Une hauteur d'eau maximale de un mètre autorise l'étude d'ondes de gravité d'amplitude raisonnable en profondeur finie sur un domaine fréquentiel [0, 2 Hz]. Le bassin est bien entendu fermé à chaque extrémité par une paroi verticale.

Dans sa configuration classique, le canal est muni à l'une de ses extrémités d'un générateur de houle de type piston, c'est à dire constitué d'un plateau vertical se déplaçant en un mouvement de translation horizontale, et à l'autre extrémité, d'une classique plage d'amortissement inclinée en gravier.

Plus particulièrement pour cette étude, le canal a été muni à cette autre extrémité d'un deuxième batteur piston, identique au précédent, mais équipé de capteurs de force en vue de son utilisation en absorbeur.

IV-1-1 *Le batteur générateur*

Le générateur de houle installé sur le canal bidimensionnel est constitué d'un batteur de type piston. Il s'agit en fait d'un paroi verticale rigide placée dans un plan perpendiculaire à la direction principale du bassin et assujettie à se déplacer suivant un mouvement de translation horizontale. Pour garantir la linéarité de cette translation, la paroi est rendue solidaire d'un châssis mobile guidé par des systèmes de chemins à billes sur des rails placés sur le sommet des parois du bassin. La course maximale du batteur est de 0,7 mètres ce qui permet de générer des houles d'amplitudes raisonnables sur toute l'étendue du spectre de fréquence et compte tenu de la faible hauteur d'eau dans le bassin.

La paroi verticale est rigidifiée par une structure en aluminium de façon à limiter les moments de flexions susceptibles d'apparaître lors des mouvements de grande amplitude. Une étanchéité parfaite sur les contours du batteur est incompatible avec son caractère mobile. Le débit d'un coté à l'autre est cependant limité par des patins de téflon montés sur structure souple permettant de gommer les irrégularités éventuelles des murs. Les deux faces du batteur sont donc immergées ce qui annule la charge hydrostatique sur la structure.

Un moteur électrique asynchrone de forte puissance assure, par l'intermédiaire d'une vis à billes, la mise en mouvement de l'ensemble mobile. Ce moteur reçoit lui-même une consigne de déplacement d'un micro-ordinateur, relayé par un variateur de puissance. Le système est en fait asservi en position. La régulation de cet asservissement nécessite la connaissance instantanée de la position exacte du batteur. Cette dernière est donnée par un capteur de déplacement magnétostrictif, choisi pour sa linéarité et son bon comportement en milieu humide.

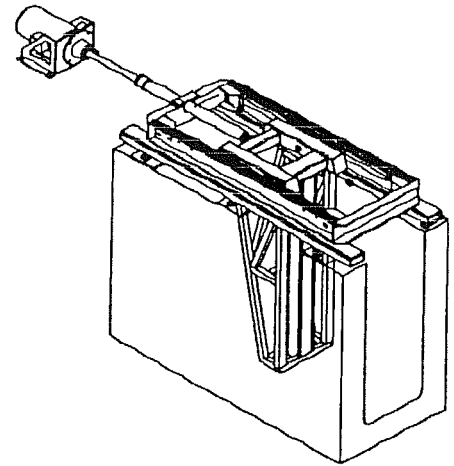


FIGURE 31

IV-1-2 Le batteur absorbeur

Dans le cadre de cette étude, le canal a été doté d'un second batteur, situé à son autre extrémité, en amont de la plage de gravier. Ce système est conçu sur le même modèle que le générateur. Une modification quant à sa structure a cependant été apportée de façon à en permettre l'utilisation en tant qu'absorbeur.

Pour mesurer les efforts hydrodynamiques directement au niveau de l'absorbeur, celui-ci a été conçu comme une balance de mesure.

La plaque verticale du piston n'est pas dans ce cas constituée d'un seul élément mais de trois. Deux panneaux latéraux sont fixés directement sur le châssis alors qu'au centre, une lame rigide verticale constituant la surface de contact de la balance n'est

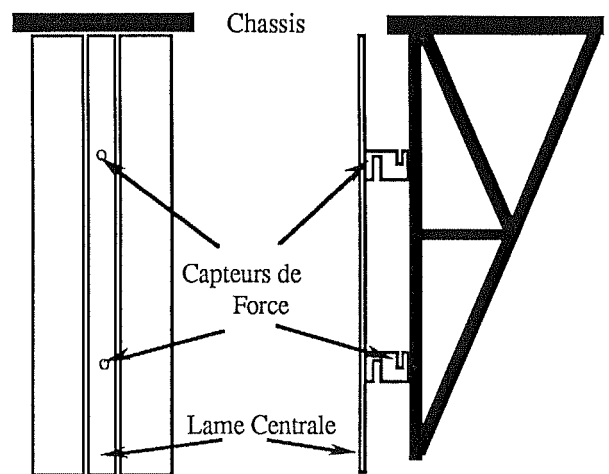


Schéma de principe de la balance

FIGURE 32

solidaire que de deux capteurs de forces eux mêmes fixés sur le châssis du batteur.

Les deux faces de cette balance sont immergées de manière à ce que ne soit pas prise en compte la charge hydrostatique. Le débit sur les contours est limité par des membranes souples de façon à garantir la plus grande indépendance possible à cette lame et ne pas introduire ainsi de raideur parasite par rapport aux capteurs. Le fait d'utiliser deux capteurs de force présente l'avantage d'avoir deux points d'appui et donc une balance plus rigide, cela permet aussi de déterminer un effort moyen sur la hauteur du batteur et de calculer le moment des efforts hydrodynamiques si cela s'avérait nécessaire.

IV-1-3 *La motorisation et l'électronique de commande*

La charge induite par le déplacement d'un batteur piston dans une hauteur d'eau de l'ordre de un mètre à des fréquences pouvant aller jusqu'à deux hertz pour des amplitudes raisonnables impose d'utiliser une motorisation de forte puissance. Les deux batteurs sont donc entraînés par des moteurs électriques asynchrones. La consigne que reçoivent ces moteurs est délivrée par un micro-ordinateur, par l'intermédiaire d'une carte de conversion numérique/analogique et relayée par un variateur de puissance.

Le caractère plus particulier de la commande d'absorption en régime instationnaire impose au mouvement du batteur d'être une reproduction exacte de la consigne calculée en fonction des efforts. Il est surtout essentiel d'avoir un bon suivi temporel autrement dit qu'il n'y ait pas de déphasage entre la consigne elle-même et le mouvement réel du batteur.

Cet asservissement de position est actuellement assuré par un régulateur analogique de type P.I.D. (Proportionnel, Intégrateur, Dérivateur). La copie de position permettant de fermer cette boucle est délivrée à chaque instant par un capteur de déplacement magnétostrictif choisi en particulier pour son comportement linéaire sur le domaine de mesure utile et pour sa fiabilité en milieu humide.

La transmission du mouvement de rotation du moteur au mouvement de translation du châssis mobile se fait par l'intermédiaire d'une vis à billes garantissant rigidité du système et linéarité du mouvement.

Les deux moteurs reçoivent donc leur consigne de deux micro-ordinateurs par l'intermédiaire de cartes de conversion, numérique/analogique (C.N.A.) pour délivrer la consigne et analogique/numérique (C.A.N.) pour la copie de position. A ces deux voies d'entrée-sortie, il faut ajouter pour l'absorbeur deux voies analogique/numérique permettant d'enregistrer la valeur des efforts hydrodynamiques délivrée à chaque instant par les deux capteurs de la balance.

Le schéma d'ensemble du canal équipé des deux batteurs et de leur système de motorisation et de contrôle est représenté sur la FIGURE 33.

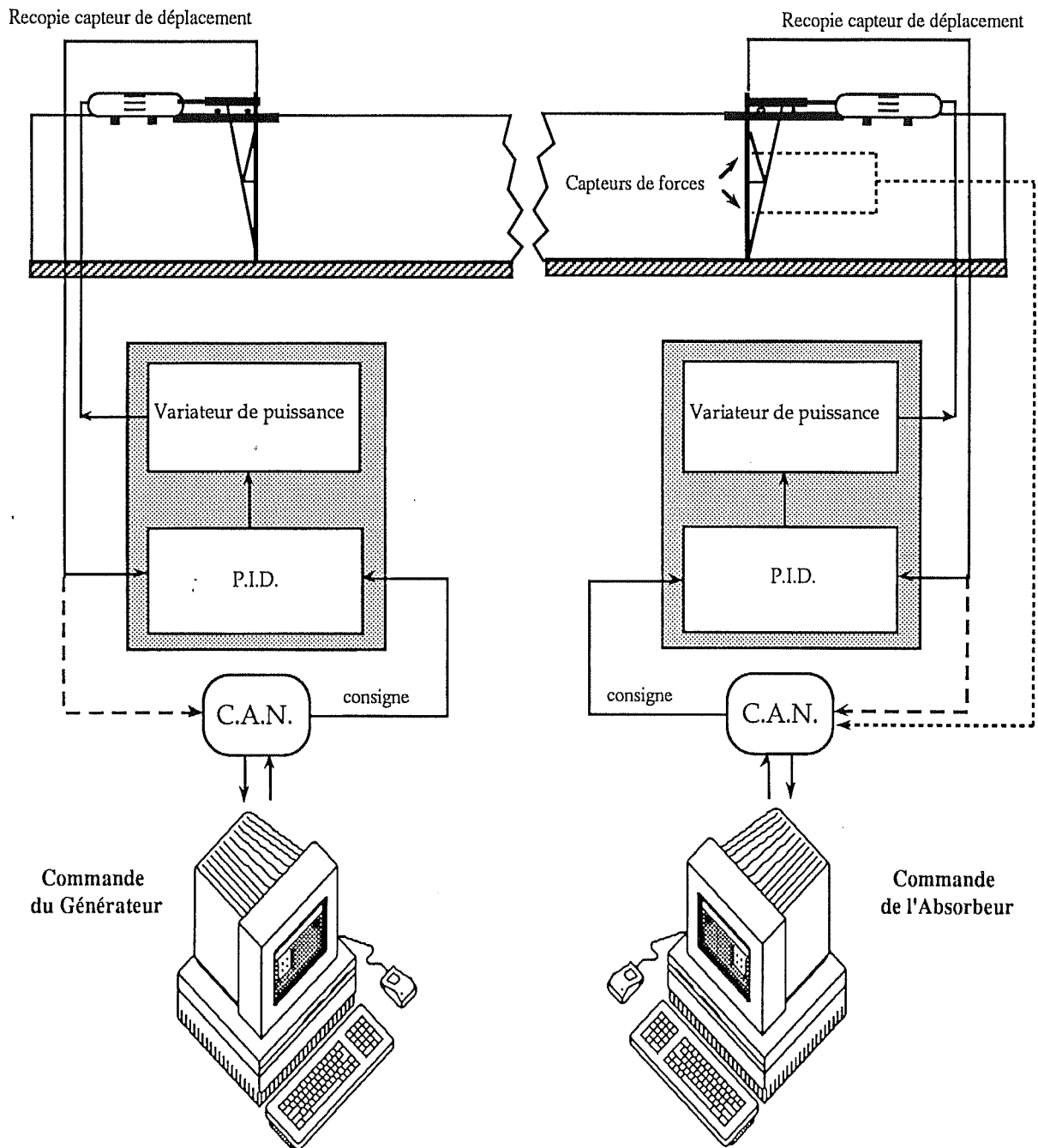


FIGURE 33

IV-2 LES FONCTIONS DE TRANSFERT DES BATTEURS

Les deux batteurs sont comme on l'a vu pilotés par des micro-ordinateurs. Ceux-ci doivent donc délivrer à chaque instant une consigne numérique, convertie par l'intermédiaire des cartes C.N.A. en une tension délivrée aux moteurs. La valeur numérique est calculée de manière à correspondre à chaque instant à une position du batteur telle que celui-ci suive la loi de mouvement désirée. Loi de génération pour le premier, ne dépendant que des caractéristiques désirées de la houle générée (amplitude, fréquence...), loi d'absorption pour le second, faisant intervenir les efforts hydrodynamiques mesurés suivant les relations précédemment établies. Les moteurs étant asservis en position, il convient de déterminer des relations ou des fonctions de transfert faisant intervenir cette grandeur caractéristique.

IV-2-1 *La fonction de transfert du générateur*

Le micro-ordinateur pilotant le générateur délivre en continu un signal discret correspondant à la position du générateur à chaque instant.

La loi de déplacement de la paroi dépend donc directement du type de houle que l'on veut générer. Il doit être possible de créer soit une houle régulière, d'amplitude et de fréquence donnée, soit une houle aléatoire, soit encore un signal quelconque comme par exemple un soliton.

Quel que soit le signal envisagé, la consigne est fonction de trois paramètres. La hauteur d'eau dans le bassin h , considérée constante sur la durée d'un essai, la fréquence f de la houle générée, qu'elle soit régulière ou irrégulière et enfin l'amplitude (demi crête-à-creux), a .

Il convient donc dans un premier temps d'établir une relation entre le déplacement x de la paroi et ces trois paramètres. On choisit pour ce faire de faire intervenir la déformée de surface libre η . Le choix de cette donnée caractéristique des écoulements est guidé par deux raisons. Tout d'abord η est la grandeur caractéristique fonction de ces trois facteurs la plus naturelle et surtout, elle a la même dimension que le déplacement x .

Les expressions calculées ici étant amenées à être utilisées dans le cadre de

l'application expérimentale, il est naturel de les exprimer en fonction des grandeurs dimensionnelles. On se place par ailleurs toujours dans le cadre de la théorie linéaire et l'on fait sur le fluide les mêmes hypothèses que celles imposées au chapitre II.

Dans ces conditions, la déformée de surface libre est donnée en tout point du bassin par la relation:

$$[IV-1] \quad H(X,T) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial T}_{y=0}$$

En régime harmonique, la position du batteur a pour expression:

$$[IV-2] \quad X = X^{\circ} \cos(WT) + X^{\infty} \sin(WT)$$

Ne considérant la déformée de surface libre qu'à une distance suffisamment éloignée du générateur pour pouvoir en négliger le terme proche, c'est à dire en ne tenant compte que du premier terme de l'expression [II-7] du potentiel de radiation par un batteur piston, on obtient pour expression de H, en introduisant le coefficient dimensionnel adéquat:

$$[IV-3] \quad H(X,T) = -\frac{W^2 h^2}{g} \cosh(M_0) \cdot [B \cos(M_0 X - WT) - A \sin(M_0 X - WT)]$$

Dans cette formule, la relation entre les coefficients A et B et les coefficients X° et X^{∞} du déplacement est obtenue comme précédemment en utilisant la méthode de décomposition sur la base des fonctions orthogonales $\cosh(M_0(y+h))$ et $\cos(M_k(y+h))$ décrite en ANNEXE 1, elle est donnée par:

$$[IV-4] \quad \begin{cases} A = -\frac{v^0}{h} X^{\circ} \\ B = \frac{v^0}{h} X^{\infty} \end{cases}$$

la valeur de v^0 étant celle donnée en [II-13a], et les nombres d'onde M_0 et M_k déterminés par les relations de dispersion suivantes:

$$[IV-5a] \quad M_0 \tanh(M_0) = \frac{W^2 h}{g} \quad \text{et} \quad [IV-5b] \quad M_k \operatorname{tg}(M_k) = -\frac{W^2 h}{g}$$

En appliquant les relations trigonométriques classiques et en remplaçant v^0 par sa valeur, il vient rapidement pour expression de H:

$$[IV-6] \quad H(X,T) = \frac{W^2 \cdot h}{g} \cdot \frac{2 \cdot \sinh(2 \cdot M_0)}{M_0 \cdot (2 \cdot M_0 + 2 \cdot \sinh(2 \cdot M_0))} \cdot X \cdot \cos(M_0 \cdot X - WT + \Psi)$$

avec

$$X = \sqrt{X^{\circ 2} + X^{\circ \circ 2}} \quad \text{et} \quad \Psi = - \frac{X^{\circ}}{X}$$

On voit donc que la déformée de surface libre s'exprime directement en fonction de l'amplitude du déplacement du batteur X.

En notant alors a l'amplitude de cette déformée, on définit une fonction de transfert Déplacement-Amplitude de houle par la relation:

$$[IV-7] \quad E = \frac{W^2 \cdot h}{g} \cdot \frac{2 \cdot \sinh(2 \cdot M_0)}{M_0 \cdot (2 \cdot M_0 + 2 \cdot \sinh(2 \cdot M_0))}$$

relation classique dans le cas d'un batteur piston, qui tend asymptotiquement vers la valeur de 2 lorsque la fréquence croît vers l'infini (FIGURE 34). En imposant alors comme données d'entrée, l'amplitude (demi-crête-à-creux) et la fréquence de la houle désirée, ainsi bien sûr que la hauteur d'eau dans le canal, la consigne délivrée par le micro-ordinateur sera facilement déterminée par implementation de la relation:

$$[IV-8] \quad X = \frac{a}{E} \cdot \cos(M_0 X - WT + \Psi)$$

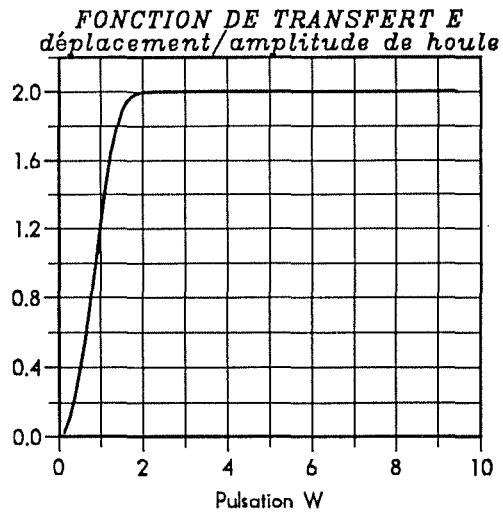


FIGURE 34

IV-2-2 La fonction de transfert de l'absorbeur

La consigne délivrée au système d'absorption par le micro-ordinateur diffère de celle du générateur par le fait que sa détermination ne fait appel à aucun paramètre fixé par l'expérimentateur (excepté bien sûr la hauteur d'eau, considérée constante). Les seules données intervenant dans le calcul de cette consigne sont les efforts hydrodynamiques mesurés par les deux capteurs de force de la balance. L'expérimentation nécessitant une loi d'absorption instationnaire, on choisit d'utiliser pour calculer la position instantanée du batteur entraînant une absorption maximale de l'onde incidente la relation [III-52], caractéristique du mode asymptotique basses fréquences.

IV-2-2-1 Mode basses fréquences

Cette relation s'écrit, en fonction des grandeurs dimensionnelles $V(T)$, vitesse de l'absorbeur et $F(T)$, efforts hydrodynamiques par unité de largeur, et, compte tenu des expressions d'adimensionnalisation données au paragraphe II-2:

$$[IV-9] \quad V(T) = \frac{\sqrt{g \cdot h}}{\rho \cdot g \cdot h^2} F(T)$$

L'écriture de la fonction de transfert d'absorption dont dérive cette expression prend en compte les efforts hydrodynamiques totaux moyens exercés par le fluide sur une unité de largeur de la paroi du batteur. Sur le modèle expérimental, ces efforts sont mesurés par l'intermédiaire de deux capteurs fixés sur la balance de largeur d . Soient $F_1(T)$ et $F_2(T)$ les valeurs instantanées des efforts délivrées par les deux capteurs, l'effort moyen sur la hauteur de la paroi est alors donné par :

$$[IV-10] \quad F_m(T) = \frac{F_1(T) + F_2(T)}{2}$$

En notant l la largeur du canal, l'effort total moyen exercé par le fluide sur le batteur s'écrit:

$$[IV-11] \quad F(T) = \frac{l}{d} \cdot F_m(T)$$

La relation d'absorption choisie fait intervenir la vitesse de translation de l'absorbeur $V(T)$ alors que, comme on l'a précisé plus haut, le système est asservi en position.

La vitesse étant obtenue par dérivation de la position, la relation d'absorption [IV-9] s'exprime nécessairement en fonction de $X(T)$ sous forme d'une équation différentielle:

$$[IV-12] \quad \frac{dX(T)}{dT} = \frac{l}{d} \cdot \frac{\sqrt{g \cdot h}}{\rho \cdot g \cdot h^2} \cdot F_m(T)$$

dont l'intégration ne présente pas de problème particulier et pourra aisément être discrétisée.

IV-2-2-2 Mode général

Le domaine d'exploitation du mode basses fréquences étant par nature limité, il est nécessaire d'introduire à terme une consigne faisant intervenir une loi d'absorption causale permettant un réel fonctionnement instationnaire, quelle que soit la houle incidente. On propose pour ce faire d'utiliser une relation d'absorption définie suivant le mode général [III-133] présenté au chapitre précédent.

Cette relation temporelle fait initialement intervenir des intégrales de convolutions dont la forme est incompatible avec le contrôle en temps réel qu'implique l'absorption dynamique. Les réponses impulsionnelles $a(t)$ et $b(t)$ qui la définissent ayant été identifiées comme caractéristiques de systèmes du troisième ordre (cf. 6 III-6-3-2) peuvent être cependant décrites analytiquement par des sommes de trois exponentielles.

En notant alors E_k les intégrales de convolutions dépendant des efforts, G_k celles dépendant de la vitesse et en introduisant les grandeurs dimensionnelles $V(T)$ et $F(T)$ [IV-11]:

$$[IV-13] \quad E_k(T) = \frac{1}{\rho \cdot g \cdot h^2} \int_0^T \alpha_k \cdot e^{\lambda_k(T-\tau)} \cdot F(\tau) d\tau$$

$$[IV-14] \quad G_k(T) = \frac{1}{\sqrt{g \cdot h}} \int_0^T \beta_k \cdot e^{\lambda_k(T-\tau)} \cdot V(\tau) d\tau$$

on obtient en reprenant la démarche décrite au paragraphe III-6-2-4, une relation différentielle de la forme:

$$[IV-15] \quad \frac{dV(T)}{dT} = -\frac{1}{a_3} \left[\sum_{k=1}^{k=3} \lambda_k \cdot G_k + \beta_k \cdot V(T) - \frac{\sqrt{g \cdot h}}{\rho \cdot g \cdot h^2} \left(\sum_{k=1}^{k=3} \lambda_k \cdot E_k + \alpha_k \cdot F(T) \right) \right]$$

Cette équation différentielle peut être discrétisée et intégrée par un schéma à pas de temps constant et ne nécessitant la mise en mémoire que d'un nombre limité de valeurs. Cette intégration conduit à une valeur instantanée de la vitesse qu'il faut encore intégrer pour obtenir la consigne de position à délivrer au système moteur.

IV-3 LA PROGRAMMATION DES CONSIGNES

Chacun des deux moteurs entraînant les batteurs montés sur le canal reçoit sous forme d'un signal de tension délivré par une carte de conversion C.N.A., la consigne de position calculée par le micro-ordinateur en fonction des différents paramètres d'entrée et à l'aide des relations [IV-8], [IV-12] et [IV-15] que l'on vient d'établir. La programmation de cette carte est réalisée par l'intermédiaire d'un logiciel d'aide à la commande et à l'analyse de signaux. Ce logiciel, compte tenu de son originalité et de sa grande souplesse d'utilisation mérite quelques lignes de présentation.

IV-3-1 *Le logiciel LabVIEW*

LabVIEW (National Instrument) est un logiciel de contrôle et d'acquisition de mesures adapté aux micro-ordinateurs Macintosh d'Apple. Son originalité vient du fait qu'il permet, couplé à une carte C.A.N./C.N.A., de créer de véritables instruments de mesure ou de commande analogiques/numériques tels que par exemple oscilloscopes, régulateurs thermiques etc..., suivant les besoins de l'expérimentateur.

Chaque programme, correspondant à un élément de contrôle ou de mesure, est appelé *instrument virtuel* et peut être vu comme un instrument de mesure fonctionnant éventuellement en boîte noire. Un *instrument virtuel* est en fait composé de deux éléments distincts: la face avant et le diagramme de programmation.

La face avant est en fait le tableau de commande interactif utilisé par l'expérimentateur. Tout comme sur un appareil de mesure classique, on peut y placer des interrupteurs (*ex: marche/arrêt*), écrans de contrôle (*ex: scopes, jauges*) ou potentiomètres (*ex: sélecteur de gamme*) suivant les besoins. Les différents états de ces éléments pouvant être modifiés au clavier ou au moyen de la souris. Tous ces objets virtuels possèdent bien sûr un élément de connexion que l'on retrouve dans la fenêtre de programmation.

Le diagramme de programmation quand à lui n'apparaît pas à l'écran en mode de fonctionnement expérimental mais uniquement lors des phases de fabrication ou de modification de l'instrument. C'est en fait l'équivalent du boîtier où sont assemblés les composants.

La programmation du pilotage de la carte et des différents algorithmes permettant de calculer la valeur de la consigne ou de traiter les données enregistrées ne se fait pas directement en ligne à l'aide d'un langage informatique classique, mais en associant des icônes correspondant aux différents opérateurs mathématiques (additions, multiplications, fonctions trigonométriques...) ou à des sous-routines plus complexes préprogrammées permettant la gestion des entrées/sorties sur la carte ou directement le traitement des données (filtrage, F.F.T.,...).

Cette interface offre donc à l'utilisateur la possibilité de créer aisément l'instrument dont il a besoin et permet surtout une bonne gestion des données d'entrées/sortie ainsi qu'une grande interactivité. Les programmes ainsi créés sont en fait compilés en langage 'C' et toutes les opérations habituellement réalisables dans ce langage (boucles d'itération, mise en tableau...) sont permises par ce logiciel. Mais l'utilisateur ne voit jamais ce niveau de langage et reste dans un environnement interactif très convivial, ce qui facilite grandement la tâche.

IV-3-2 *La commande de génération*

La commande de génération programmée à l'aide du logiciel LabVIEW est conçue pour permettre la génération d'une houle régulière ou irrégulière suivant un spectre donné, aléatoire ou non, ou encore tout type de signal particulier. Dans le cadre de cette étude, on se contente de présenter ici la génération d'une houle régulière.

Les paramètres d'entrée sont au nombre de trois et peuvent être sélectionnés par l'utilisateur directement à l'aide des curseurs et potentiomètres. La hauteur d'eau dans le bassin h , inférieure ou égale à un mètre et généralement fixée sur la durée d'un essai. La fréquence f , dans une bande passante allant de 0,1 à 2 Hertz par pas de 0,1 permettant de couvrir toute la gamme habituelle des ondes de gravité.

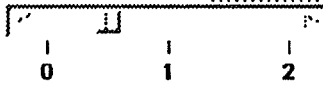
L'amplitude de houle a (demi crête-à-creux) enfin, limitée pour chaque fréquence par deux contraintes physiques; la course maximale du batteur fixée par construction à 0,7 mètre (plus ou moins 0,35 mètre de part et d'autre de la position de repos en régime sinusoïdal) et le déferlement de la houle générée. On considère de manière générale qu'il y a risque de déferlement lorsque la cambrure de la houle atteint une valeur supérieure à 12%, soit, en notant λ la longueur de l'onde générée, lorsque l'on a:

$$[IV-16] \quad \frac{2a}{\lambda} \geq 12\%$$

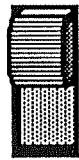
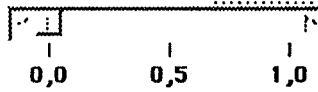
Exemples de programmation à l'aide du logiciel LabVIEW

- COMMANDE DU GENERATEUR DE HOULE -

FREQUENCE (Hz) → 0,50

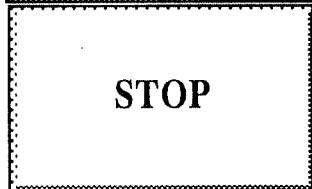
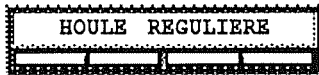


AMPLITUDE (m) → 0,00



MODE MANUEL

SIGNAL



ZERO - POSITION DU BATTEUR

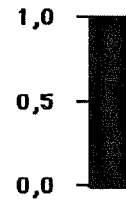


PAS DU DEPLACEMENT (cm)

0,5

HAUTEUR D'EAU

→ 1,00



PANNEAU DE CONTROLE DU GENERATEUR

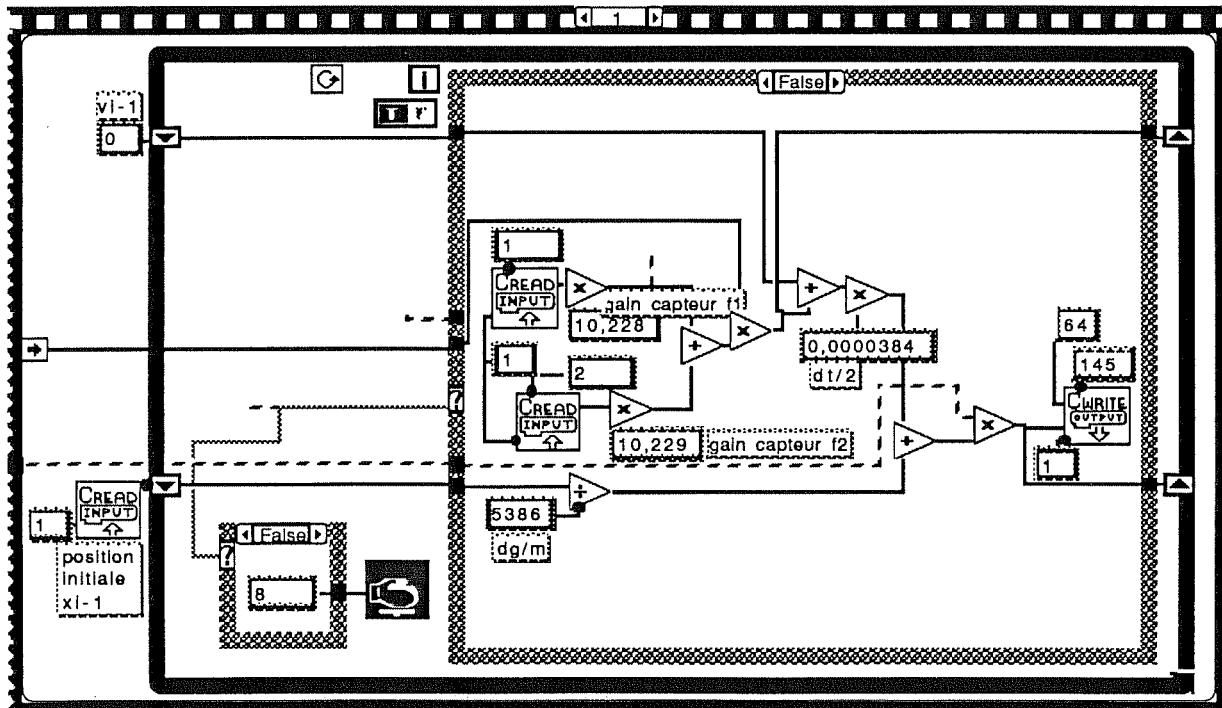


DIAGRAMME DE PROGRAMMATION DE LA CONSIGNE DE L'ABSORBEUR

La programmation du pilotage de la carte et des différents algorithmes permettant de calculer la valeur de la consigne ou de traiter les données enregistrées ne se fait pas directement en ligne à l'aide d'un langage informatique classique, mais en associant des icônes correspondant aux différents opérateurs mathématiques (additions, multiplications, fonctions trigonométriques...) ou à des sous-routines plus complexes préprogrammées permettant la gestion des entrées/sorties sur la carte ou directement le traitement des données (filtrage, F.F.T.,...).

Cette interface offre donc à l'utilisateur la possibilité de créer aisément l'instrument dont il a besoin et permet surtout une bonne gestion des données d'entrées/sortie ainsi qu'une grande interactivité. Les programmes ainsi créés sont en fait compilés en langage 'C' et toutes les opérations habituellement réalisables dans ce langage (boucles d'itération, mise en tableau...) sont permises par ce logiciel. Mais l'utilisateur ne voit jamais ce niveau de langage et reste dans un environnement interactif très convivial, ce qui facilite grandement la tâche.

IV-3-2 *La commande de génération*

La commande de génération programmée à l'aide du logiciel LabVIEW est conçue pour permettre la génération d'une houle régulière ou irrégulière suivant un spectre donné, aléatoire ou non, ou encore tout type de signal particulier. Dans le cadre de cette étude, on se contente de présenter ici la génération d'une houle régulière.

Les paramètres d'entrée sont au nombre de trois et peuvent être sélectionnés par l'utilisateur directement à l'aide des curseurs et potentiomètres. La hauteur d'eau dans le bassin h , inférieure ou égale à un mètre et généralement fixée sur la durée d'un essai. La fréquence f , dans une bande passante allant de 0,1 à 2 Hertz par pas de 0,1 permettant de couvrir toute la gamme habituelle des ondes de gravité.

L'amplitude de houle a (demi crête-à-creux) enfin, limitée pour chaque fréquence par deux contraintes physiques; la course maximale du batteur fixée par construction à 0,7 mètre (plus ou moins 0,35 mètre de part et d'autre de la position de repos en régime sinusoïdal) et le déferlement de la houle générée. On considère de manière générale qu'il y a risque de déferlement lorsque la cambrure de la houle atteint une valeur supérieure à 12%, soit, en notant λ la longueur de l'onde générée, lorsque l'on a :

$$[IV-16] \quad \frac{2a}{\lambda} \geq 12\%$$

Les courbes de la FIGURE 35 donnent l'amplitude maximale qu'il est possible de générer compte tenu de ces deux contraintes pour les différentes fréquences de la gamme.

A basse fréquence où le risque de déferlement est faible, ce sont les dimensions du système générateur qui limitent la valeur de l'amplitude maximale, mais très rapidement lorsque la fréquence augmente, le critère de déferlement devient prépondérant et limite considérablement comme on pouvait s'y attendre la génération de houle régulière.

La valeur numérique de la consigne de position est calculée à l'aide de la relation [IV-8] elle est nécessairement constituée d'une suite de valeurs discrètes. Le pas de discrétisation en temps, noté dT , est fixé légèrement supérieure à la durée de calcul d'une itération. Pour assurer un mouvement régulier au batteur, compte tenu de la gamme de fréquence dans laquelle on évolue, sa valeur maximale ne devra pas excéder 0,02 seconde.

Le micro-ordinateur délivre au moteur une tension de consigne différentielle dans une gamme ± 10 Volts qui doit correspondre avec le déplacement maximal autorisé pour le batteur, soit $\pm 0,35$ m.

Compte tenu des paramètres intervenant dans le calcul de la position X , celle-ci est exprimée en mètres, il convient donc d'introduire un gain de manière à convertir cette valeur en digits avant de la rentrer dans la carte de conversion numérique/analogique dont le gain propre est fixé à 2048 digits/volt. En notant G ce gain exprimé en digits/mètre, et k l'indice de discrétisation, la valeur numérique de la consigne délivrée à l'entrée de la carte est donnée par la relation:

$$[IV-17] \quad X(T) = X(0) + G \cdot \frac{a}{E} \cdot \cos(M_0 X - W(k \cdot dT)) \quad \text{avec } T = k \cdot dT$$

La valeur $X(0)$ correspondant à la position du batteur à l'instant initial est donnée par le capteur de déplacement magnétostrictif utilisé pour assurer l'asservissement du système.

Le nombre d'onde M_0 est calculé à partir de la relation de dispersion [IV-5a] par la méthode de Newton-Raphson. Les nombres d'ondes sont en fait calculés pour toutes les fréquences de la gamme et mis en tableau de manière à diminuer le temps de calcul. La durée d'une itération est d'ailleurs de 0,0027 s, ce qui permet de délivrer une consigne suffisamment lisse du point de vu du mouvement mécanique.

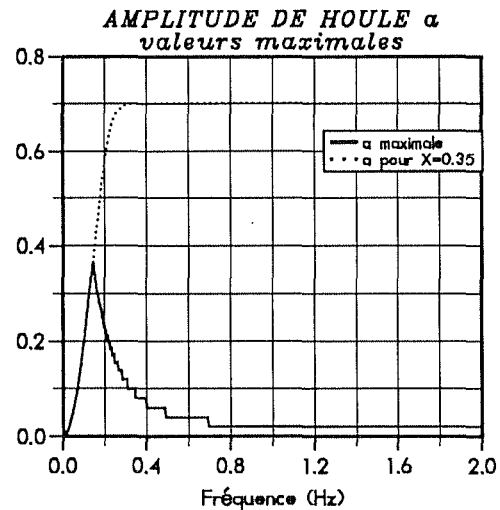


FIGURE 35

Dans le but de limiter les contraintes mécaniques lors de la mise en mouvement ou de l'arrêt du batteur, en particulier pour les mouvements de grande amplitude et de haute fréquence, on a introduit dans le calcul de la consigne une rampe linéaire permettant une mise en marche ou un arrêt progressif sur trois périodes du mouvement.

IV-3-3 La commande d'absorption

La commande de l'absorbeur est conçue dans un premier temps en faisant intervenir la relation différentielle [IV-12] déterminée suivant le mode asymptotique basses fréquences, applicable en régime instationnaire.

Dans ce cas, le panneau de commande interactif est très simplifié puisque le seul paramètre fixé par l'utilisateur est la hauteur d'eau dans le canal, constante sur la durée d'un essai.

Comme le montre la relation, la détermination de la position instantanée de l'absorbeur se ramène à l'intégration des efforts hydrodynamiques moyens exercés sur le batteur.

On note G_f le gain de conversion établi en fonction du gain propre des capteurs de force et de celui de la carte C.A.N. et permettant d'exprimer ces derniers en Newton. On a donc à chaque instant:

$$[IV-18] \quad F(T) = G_f \cdot \frac{l}{d} \cdot F_m(T)$$

où $F_m(T)$ est défini par la relation [IV-10].

L'intégration de l'équation [IV-12] est alors aisément implémentée par un classique schéma de différence finie de la forme:

$$[IV-19] \quad X(T) = X(T-dT) + \frac{dT}{2} \cdot \frac{\sqrt{g \cdot h}}{\rho \cdot g \cdot h^2} \cdot [F(T-dT) + F(T)]$$

Comme on peut le constater, ce schéma ne fait intervenir comme donnée outre les coefficients et gains de dimensionnement prédéterminés, que les efforts instantanés mesurés aux instants T et $T-dT$ et la position calculée au pas de temps précédent, $T-dT$. Ceci présente deux avantages permettant de faciliter la réalisation d'une telle commande en régime instationnaire. La durée d'implémentation, tout d'abord, est constante, propriété favorable à la

réalisation d'une boucle de contrôle en temps réel; le stockage des valeurs, par ailleurs, se limite aux deux seules valeurs de $X(T-dT)$ et $F(T-dT)$, ne limitant pas ainsi matériellement l'application de cet élément de contrôle.

Le pas d'incrémentation dT est là aussi fixé légèrement supérieur à la durée d'une implémentation. La position $X(T)$ ainsi calculée étant exprimée en mètres, il convient encore de la multiplier par le gain G précédemment défini avant de l'introduire dans le driver de la carte de conversion.

La valeur initiale $X(0)$ est là encore donnée par le capteur de déplacement utilisé pour la régulation de l'asservissement.

Un certain nombre d'éléments qui permettraient de tester expérimentalement l'efficacité des relations d'absorption développées précédemment ont été rassemblés et mis au point: partie mécanique, guidages, vis à billes, électronique de puissance, pilotage par micro-ordinateur,... Un des maillons de la chaîne étant manquant, à savoir le régulateur de l'asservissement de position, il n'a pas été possible de réaliser pratiquement la boucle complète d'absorption dynamique par un piston.

Par ailleurs, au cours d'essais préliminaires, un problème de fond est apparu qui demandera certainement une étude particulière. Il s'agit du point suivant. Cette étude ayant été entièrement menée dans le cadre de la théorie linéarisée, le bouclage sur les efforts choisis ne prend pas en compte les efforts hydrodynamiques à basse fréquence qui apparaissent naturellement du fait des non linéarités inhérentes aux termes de pression. Or, au réel, ces efforts se manifestent et induisent une réaction de recul du piston puisque, à basse fréquence, on a un mode du type $V = F$. Il en résulte que le piston va rapidement dériver jusqu'à arriver en fin de course où il est stoppé par les systèmes de sécurité. Aucune solution pratique n'a été trouvée à ce jour pour résoudre ce problème.

CONCLUSION

Cette étude aura permis de définir de nouvelles lois d'absorption des ondes de gravité par un batteur piston, fonctions des efforts hydrodynamiques instantanés mesurés sur la paroi de ce dernier. La démarche adoptée ici, qui consiste à transposer dans le domaine physique du temps les résultats obtenus dans le plan des fréquences, a permis de localiser précisément l'origine des difficultés inhérentes au problème, et en particulier de la non-causalité du transfert effort-vitesse dans la formulation de base. A partir de là, différentes approximations ont permis de contourner cet obstacle et de proposer trois lois d'absorption physiquement réalisables, dont on a pu évaluer les performances par rapport à la relation asymptotique basses fréquences: $v(t) = f(t)$.

-Un modèle dit causal approché, indépendant de la fréquence. Ce modèle qui ne requiert aucune connaissance à priori de la fréquence de l'onde incidente apporte une légère amélioration dans la gamme des ondes moyennes par rapport au mode basses fréquences.

-Un modèle causal approché dépendant de la fréquence. On montre là que, s'il existe une fréquence dominante et si celle-ci est connue, alors, on peut formuler une relation d'absorption très efficace y compris dans le domaine des hautes fréquences.

-Un modèle intermédiaire, proche de celui adopté par *Salter*, pour lequel on choisit une fréquence d'accord. Les résultats sont alors excellents pour cette fréquence et se dégradent au fur et à mesure que l'on s'en éloigne.

On a proposé à la fin de cette partie théorique une méthode qui devrait permettre d'aller encore plus loin vers l'obtention d'une relation purement instationnaire, efficace sur tout le spectre utile.

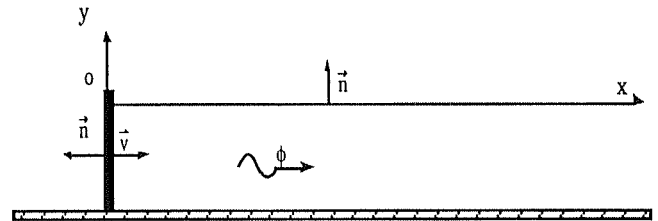
Il n'a pas été possible d'appliquer ces relations au prototype expérimental dont la réalisation pratique a pris trop de retard, indépendamment de notre volonté. Néanmoins, sur ce plan, la plus grande partie du travail a été réalisée. Reste maintenant à terminer la mise au point des asservissements de manière à pouvoir réellement imposer au système les lois de vitesse développées ici.

ANNEXES

ANNEXE 1

POTENTIEL DE RADIATION D'UN BATTEUR PISTON

On considère un canal semi-infini fermé à son extrémité par une paroi rigide verticale mobile pouvant se déplacer en un mouvement de translation horizontale. On associe au canal un repère plan orthonormé d'origine o située à



l'intersection de la surface libre au repos ($y=0$) et de la position de repos de la paroi ($x=0$). Les abscisses sont comptées positives croissantes de gauche à droite à partir de l'origine et les ordonnées positives croissantes suivant la verticale ascendante. La paroi suit une loi de vitesse \vec{v} comptée positive dans le sens des x croissants. Les normales sont orientées vers l'extérieur du domaine fluide.

On se place dans le cadre de la théorie linéaire des écoulements à potentiel de vitesse. On fait sur le fluide les trois hypothèses suivantes:

- Fluide parfait et homogène
- Fluide incompressible
- Ecoulement irrotationnel

La cinématique de l'écoulement est entièrement déterminée dès lors que l'on connaît la fonction potentiel $\phi(x, y, t)$ dont dérive le champ de vitesse des particules de fluide. Compte tenu des hypothèses précédentes, ce potentiel satisfait à l'équation de Laplace:

$$[A1-1] \quad \Delta\phi=0 \quad (0 < x < \infty, -1 < y < 0, t \geq 0)$$

Equation à laquelle il convient de rajouter les conditions aux limites et conditions initiales caractérisant le système:

[A1-2]	$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \vec{v} \cdot \vec{n}$	sur le batteur ($x=0, -1 \leq y \leq 0$)
	$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\omega^2}{g} \cdot \phi = 0$	sur la surface libre ($y=0$)
	$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$	sur le fond ($y=-1$)

Détermination du potentiel

Pour résoudre l'équation de Laplace, on utilise ici la classique méthode de séparation des variables. Dans le cas d'un régime harmonique établi, le potentiel des vitesses s'écrit:

[A1-3] $\phi(x, y, t) = \text{Re}\{\phi_0(x, y) \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}\} = \text{Re}\{F(x) \cdot G(y) \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}\}$

Le potentiel est une grandeur réelle. Dans la suite des développements, et ce dans le but d'alléger l'écriture, on omettra de préciser la notation $\text{Re}\{\}$ indiquant que l'on ne considère que la partie réelle du terme $\phi_0(x, y) \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}$ dans lequel $\phi_0(x, y)$ est réel.

Avec ces notations, l'équation de Laplace s'écrit:

[A1-4] $\ddot{F} \cdot G + F \cdot \ddot{G} = 0$

Soit encore, en introduisant la constante K^2 :

[A1-5] $\frac{\ddot{F}}{F} = -\frac{\ddot{G}}{G} = K^2$

On obtient ainsi un jeu de deux équations différentielles:

[A1-6a] $\ddot{F} - K^2 \cdot F = 0$

[A1-6b] $\ddot{G} + K^2 \cdot G = 0$

dont les solutions dépendent de la valeur de la constante K^2 .

Dans le cas où K^2 est négative, l'équation [A1-6a] a une solution de la forme:

[A1-7a] $F = a \cdot \cos(K \cdot x + \alpha) + b \cdot \sin(K \cdot x + \beta)$

et l'équation [A1-6b] a une solution de la forme:

$$[A1-7b] \quad G = c.\cosh(K.y + \gamma) + d.\sinh(K.y + \delta)$$

La condition sur le fond ($y = -1$) s'écrit alors:

$$[A1-8] \quad K.c.\sinh(-K + \gamma) + K.d.\cosh(-K + \delta) = 0$$

ce qui impose nécessairement: $d=0$ et $\gamma=K$.

On a donc finalement pour solution de l'équation [A1-7b]:

$$[A1-9] \quad G = c.\cosh(K.(y + 1))$$

La condition de surface libre ($y=0$) conduit à la relation:

$$[A1-10] \quad K.\tanh(K) = -\omega^2$$

Cette relation de dispersion possède une solution positive unique pour une pulsation ω donnée. Elle peut être résolue par une classique méthode de Newton-Raphson. On notera par la suite dans ce cas, $K = m_0$.

En appliquant alors les relations trigonométriques habituelles, et en notant:

$$A_1 = c.[a.\cos(\alpha) + b.\sin(\beta)] \quad \text{et} \quad B_1 = c.[b.\cos(\beta) - a.\sin(\alpha)]$$

la solution dépendant des variables d'espace correspondant au cas K^2 négative s'écrit:

$$[A1-11] \quad \phi_1(x, y) = [A_1.\cos(m_0.x) + B_1.\sin(m_0.x)].\cosh(m_0(y + 1))$$

Dans le cas où K^2 est positive, l'équation [A1-6a] a une solution de la forme:

$$[A1-12] \quad F = a'.e^{(K.x + \alpha')} + b'.e^{-(K.x + \beta')}$$

F étant nécessairement finie, on a $a'=0$. En notant alors $b'' = b'.e^{-\beta'}$, il vient:

$$[A1-13] \quad F = b''.e^{-K.x}$$

L'équation [A1-6b] a dans ce cas une solution de la forme:

$$[A1-14] \quad G = c' \cdot \cos(K \cdot y + \gamma') + d' \cdot \sin(K \cdot y + \delta')$$

La condition sur le fond ($y=-1$) s'écrit alors:

$$[A1-15] \quad -K \cdot c' \cdot \sin(-K + \gamma') + K \cdot d' \cdot \cos(-K + \delta') = 0$$

elle sera satisfaite en particulier dans le cas où $d'=0$ et $K=\gamma'$, ce qui conduit à:

$$[A1-16] \quad G = c' \cdot \cos(K \cdot (y + 1))$$

La condition de surface libre ($y=0$) quant à elle conduit à la relation de dispersion

$$[A1-17] \quad K \cdot \operatorname{tg}(K) = -\omega^2$$

Relation pour laquelle il existe une infinité de solutions positives que l'on notera m_k .

En notant $C_2^k = c' \cdot b''$, la solution dépendant des variables d'espace correspondant au cas K^2 positive s'écrit finalement:

$$[A1-18] \quad \phi(x, y) = \sum_{k=1}^{k=\infty} C_2^k \cdot e^{-m_k \cdot x} \cdot \cos(m_k(y + 1))$$

La solution globale dépendant des variables d'espaces sera constituée de la somme de ces deux solutions [A1-11] et [A1-18]. Avec ces expressions, le potentiel s'écrit maintenant:

$$[A1-19] \quad \phi(x, y, t) = [\phi_1(x, y) + \phi_2(x, y)] \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

En remplaçant alors $\phi_1(x, y)$ et $\phi_2(x, y)$ par leurs expressions et en ne considérant que les termes correspondant aux ondes progressives se propageant du batteur vers l'infini (suivant les x croissants), il vient, après développements trigonométriques, l'expression générale du potentiel des vitesses associé aux ondes se propageant au sein du canal semi-infini:

$$[A1-20] \quad \phi(x, y, t) = [A \cdot \cos(m_0 x - \omega t) + B \cdot \sin(m_0 x - \omega t)] \cdot \cosh(m_0(y + 1)) + \sum_{k=1}^{k=\infty} [C^k + S^k] \cdot e^{-m_k \cdot x} \cdot \cos(m_k(y + 1))$$

avec:

$$A = \frac{A_1 \cos(\varphi) + B_1 \sin(\varphi)}{2}$$

$$B = \frac{B_1 \cos(\varphi) + A_1 \sin(\varphi)}{2}$$

$$C^k = C_2^k \cdot \cos(\varphi)$$

$$S^k = - C_2^k \cdot \sin(\varphi)$$

On rappelle qu'à cette expression du potentiel sont associées les deux relations de dispersion:

$$[A1-21a] \quad m_0 \cdot \tanh(m_0) = \omega^2$$

$$[A1-21b] \quad m_k \cdot \operatorname{tg}(m_k) = - \omega^2$$

Relation entre les coefficients du potentiel et la vitesse du batteur

La vitesse de translation du batteur est donnée par

$$[A1-22] \quad \vec{v} = v \cdot \vec{x}$$

Expression dans laquelle, en régime harmonique établi, on a:

$$[A1-23] \quad v = v_0 \cdot e^{i(\omega t + \varphi)} = v^{\circ} \cos(\omega t) + v^{\circ\circ} \sin(\omega t)$$

Les fonctions $\cosh(m_0(y+1))$ et $\cos(m_k(y+1))$ forment une famille de fonctions orthogonales sur la base desquelles est développée l'expression du potentiel. Compte tenu des propriétés des fonctions orthogonales, on peut faire apparaître les identités remarquables suivantes:

$$[A1-24a] \quad \int_{-1}^0 \cosh(m_0(y+1)) \cdot \cos(m_k(y+1)) \, dy = 0 \quad \forall k$$

$$[A1-24b] \quad \int_{-1}^0 [\cosh(m_0(y+1))]^2 \, dy = \frac{2 \cdot m_0 + \sinh(2 \cdot m_0)}{4 \cdot m_0}$$

$$[A1-24c] \quad \int_{-1}^0 [\cos(m_k(y+1))]^2 \, dy = \frac{2 \cdot m_k + \sin(2 \cdot m_k)}{4 \cdot m_k} \quad \forall k$$

Compte tenu des conditions aux limites caractérisant le problème de la génération d'ondes par un batteur piston, le potentiel doit satisfaire la condition de glissement sur la paroi, soit:

$$[A1-25] \quad \left. \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial x} = \vec{v} \cdot \vec{x} \right|_{x=0}$$

La dérivée par rapport à la variable d'espace x du potentiel, calculée à l'origine, a pour expression:

$$[A1-26] \quad \frac{\partial \phi(0, y, t)}{\partial x} = m_0 [B \cdot \cos(\omega t) + A \cdot \sin(\omega t)] \cdot \cosh(m_0(y+1)) - \sum_{k=1}^{k=\infty} m_k [C^k \cdot \cos(\omega t) + S^k \cdot \sin(\omega t)] \cdot \cos(m_k(y+1))$$

Pour retrouver une relation entre potentiel et vitesse, on décompose cette dernière sur la base des fonctions orthogonales $\cosh(m_0(y+1))$ et $\cos(m_k(y+1))$:

$$[A1-27] \quad v = \vec{v} \cdot \vec{x} = u_0 \cdot \cosh(m_0(y+1)) + \sum_{k=1}^{k=\infty} u_k \cdot \cos(m_k(y+1))$$

Compte tenu des identités remarquables précédemment établies, il vient alors:

$$[A1-28] \quad \int_{-1}^0 v \cdot \cosh(m_0(y+1)) dy = u_0 \cdot \frac{2 \cdot m_0 + \sinh(2 \cdot m_0)}{4 \cdot m_0}$$

$$[A1-29] \quad \int_{-1}^0 v \cdot \cos(m_k(y+1)) dy = u_k \cdot \frac{2 \cdot m_k + \sin(2 \cdot m_k)}{4 \cdot m_k}$$

La vitesse de translation de l'absorbeur étant indépendante de la variable d'espace y, on obtient en introduisant les égalités

$$\int_{-1}^0 \cosh(m_0(y+1)) dy = \frac{\sinh(m_0)}{m_0} \quad \text{et} \quad \int_{-1}^0 \cos(m_k(y+1)) dy = \frac{\sin(m_k)}{m_k}$$

les expressions des coefficients u_0 et u_k en fonction de v:

$$[A1-30a] \quad u_0 = v \cdot \frac{4 \cdot \sinh(m_0)}{2 \cdot m_0 + \sinh(2 \cdot m_0)}$$

$$[A1-30b] \quad u_k = v \cdot \frac{4 \cdot \sin(m_k)}{2 \cdot m_k + \sin(2 \cdot m_k)}$$

En introduisant ces expressions dans l'égalité [A1-27] et en écrivant alors que la conditions de glissement sur la paroi [A1-25] est satisfaite, il vient finalement en identifiant terme à terme et compte tenu de la définition [A1-23]:

$$[A1-31a] \quad A = v^0 \cdot v^{\circ\circ}$$

$$[A1-31b] \quad B = v^0 \cdot v^{\circ}$$

$$[A1-32a] \quad C^k = v^k \cdot v^{\circ}$$

$$[A1-32b] \quad S^k = v^k \cdot v^{\circ\circ}$$

avec:

$$[A1-33] \quad v^0 = \frac{4.\sinh(m_0)}{m_0.(2.m_0 + \sinh(2.m_0))}$$

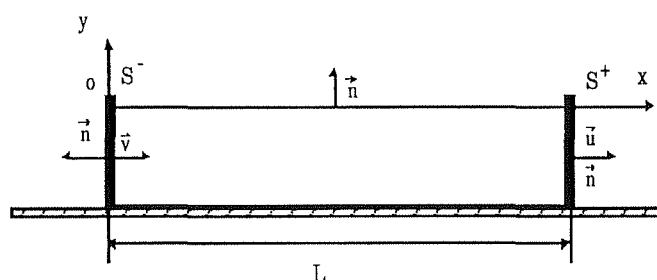
$$[A1-34] \quad v^k = - \frac{4.\sin(m_k)}{m_k.(2.m_k + \sin(2.m_k))}$$

On a ainsi établi, dans le cas du batteur piston, une relation entre les coefficients du potentiel associé à l'onde générée par le mouvement de la paroi et les coefficients de la vitesse de cette dernière.

ANNEXE 2

**GRANDEURS CARACTERISTIQUES DERIVANT DU POTENTIEL
DANS UN CANAL BORNE**

On considère ici un canal bidimensionnel borné, de longueur L , fermé à chacune de ses extrémités par une paroi rigide verticale mobile pouvant se déplacer en un mouvement de translation horizontale. On associe au canal un repère plan orthonormé d'origine o située à



l'intersection de la surface libre au repos ($y=0$) et de la position de repos de la paroi S^- ($x=0$). Les abscisses sont comptées positives croissantes de gauche à droite à partir de l'origine et les ordonnées positives croissantes suivant la verticale ascendante. La paroi S^- suit une loi de vitesse \vec{v} comptée positive dans le sens des x croissants. La paroi S^+ ($x=L$) suit une loi de vitesse \vec{u} comptée elle aussi positive dans le sens des x croissants. Les normales sont orientées vers l'extérieur du domaine fluide.

On se place dans le cadre de la théorie linéaire des écoulements à potentiel de vitesse. On fait sur le fluide les trois hypothèses suivantes:

- Fluide parfait et homogène
- Fluide incompressible
- Ecoulement irrotationnel

On utilise ici l'expression analytique adimensionnelle du potentiel des vitesses en régime instationnaire au sein d'un canal fermé de longueur L , donnée par *Dommermuth & al.* [23] sous forme d'une décomposition en série de Fourier de la solution en régime instationnaire donnée par *Kennard* [45] dans le cas d'un canal semi-infini de profondeur finie muni à son origine d'un générateur de houle constitué d'une paroi mobile de loi de déplacement $S(y, t)$ quelconque. Les longueurs étant réduites par la hauteur d'eau h et le temps par $\sqrt{\frac{h}{g}}$, ce potentiel est équivalent à $\phi(x, y, t)$, potentiel associé à l'onde générée par le mouvement de la paroi S^- . On a donc, d'après [23]:

$$\begin{aligned}
 \text{[A2-1]} \quad \phi^-(x, y, t) &= 2.v(t) \sum_{m=0}^{\infty} \sin(K_m y) \frac{\cosh(K_m(x-L))}{K_m^2 \sinh(K_m L)} \\
 &\quad - \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (K_m^2 + k_n^2)^{-1} \right] \cdot \frac{\cosh(k_n(y+1)) \cdot \cos(k_n x)}{\omega_n \cosh(k_n)} \int_0^t v(\tau) \cdot \sin(\omega_n(t-\tau)) d\tau \\
 &\quad - \frac{1}{L} \int_0^t \int_0^\tau v(\tau) d\tau dt'
 \end{aligned}$$

avec les notations:

$$K_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi \quad k_n = \frac{n \cdot \pi}{L} \quad \omega_n^2 = k_n \cdot \tanh(k_n)$$

Le potentiel $\phi^+(x, y, t)$ associé à l'onde générée par le mouvement de la paroi S^+ ($x=L$) se déduit, compte tenu des notations, de l'expression [A2-1], par une symétrie par rapport à l'axe vertical suivie d'une translation en $x=L$. La loi de vitesse étant dans ce cas $\vec{u}(t)$, on a finalement:

$$\begin{aligned}
 \text{[A2-2]} \quad \phi^+(x, y, t) &= -2.u(t) \sum_{m=0}^{\infty} \sin(K_m y) \frac{\cosh(K_m x)}{K_m^2 \sinh(K_m L)} \\
 &\quad + \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (K_m^2 + k_n^2)^{-1} \right] \cdot \frac{\cosh(k_n(y+1)) \cdot \cos(k_n(L-x))}{\omega_n \cosh(k_n)} \int_0^t u(\tau) \cdot \sin(\omega_n(t-\tau)) d\tau \\
 &\quad + \frac{1}{L} \int_0^t \int_0^\tau u(\tau) d\tau dt'
 \end{aligned}$$

Dans le cadre des hypothèses de linéarisation, le potentiel total des écoulements au sein du canal fermé sera obtenu par superposition de ces deux potentiels, soit:

$$\begin{aligned}
 \text{[A2-3]} \quad \phi(x, y, t) &= 2.v(t) \sum_{m=0}^{\infty} \sin(K_m y) \frac{\cosh(K_m(x-L))}{K_m^2 \sinh(K_m L)} - 2.u(t) \sum_{m=0}^{\infty} \sin(K_m y) \frac{\cosh(K_m x)}{K_m^2 \sinh(K_m L)} \\
 &\quad - \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (K_m^2 + k_n^2)^{-1} \right] \cdot \frac{\cosh(k_n(y+1))}{\omega_n \cosh(k_n)} \int_0^t [v(\tau) \cdot \cos(k_n x) - u(\tau) \cdot \cos(k_n(L-x))] \cdot \sin(\omega_n(t-\tau)) d\tau \\
 &\quad - \frac{1}{L} \int_0^t \int_0^\tau [v(\tau) - u(\tau)] d\tau dt'
 \end{aligned}$$

Cette expression permettant une description temporelle complète des écoulements instationnaires totaux au sein du fluide contenu dans le canal, il est possible d'en déduire les expressions de différentes grandeurs caractéristiques.

La pression dynamique

La pression dynamique au sein du fluide est donnée par

$$[A2-4] \quad p(x, y, t) = - \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t}$$

En dérivant par rapport au temps l'expression [A2-3], il vient:

$$[A2-5] \quad p(x, y, t) = - 2 \cdot \frac{dv(t)}{dt} \sum_{m=0}^{\infty} \sin(K_m \cdot y) \frac{\cosh(K_m(x-L))}{K_m^2 \sinh(K_m \cdot L)} + 2 \cdot \frac{du(t)}{dt} \sum_{m=0}^{\infty} \sin(K_m \cdot y) \frac{\cosh(K_m \cdot x)}{K_m^2 \sinh(K_m \cdot L)}$$

$$+ \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (K_m^2 + k_n^2)^{-1} \right] \cdot \frac{\cosh(k_n \cdot (y+1))}{\cosh(k_n)} \cdot \int_0^t [v(\tau) \cdot \cos(k_n \cdot x) - u(\tau) \cdot \cos(k_n \cdot (L-x))] \cdot \cos(\omega_n(t-\tau)) \, d\tau$$

$$+ \frac{1}{L} \int_0^t [v(\tau) - u(\tau)] \, d\tau$$

Les efforts hydrodynamiques exercés par le fluide sur une paroi

Les efforts hydrodynamiques exercés par le fluide sur une paroi sont obtenus par intégration de la pression totale sur cette dernière:

$$[A2-6] \quad \vec{F}(x, t) = \int_{-1}^0 P \cdot \vec{n} \, dy$$

Dans le cadre de l'hypothèse de linéarisation et en tenant compte du fait que, au premier ordre, la composante hydrostatique de la pression est une constante du temps et peut donc être ici négligée, on ne conserve pour terme de pression dans le calcul des efforts que la composante dynamique [A2-5]. Les efforts sont donc donnés par:

$$[A2-7] \quad \vec{F}(x, t) = - \int_{-1}^0 \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} \cdot \vec{n} \, dy$$

L'intégration suivant la variable d'espace y se ramène aux calculs élémentaires:

$$\int_{-1}^0 \sin(K_m \cdot y) \, dy = - \frac{1}{K_m} \qquad \int_{-1}^0 \cosh(k_n \cdot y) \, dy = \frac{\sinh(k_n)}{k_n}$$

qui conduisent à l'expression des efforts hydrodynamiques:

$$[A2-8] \quad \vec{F}(x, t) = \left[\begin{aligned} & 2 \cdot \frac{dv(t)}{dt} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cosh(K_m(x-L))}{K_m^3 \sinh(K_m L)} - 2 \cdot \frac{du(t)}{dt} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cosh(K_m x)}{K_m^3 \sinh(K_m L)} \\ & + \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (K_m^2 + k_n^2)^{-1} \right] \cdot \frac{\tanh(k_n)}{k_n} \cdot \int_0^t [v(\tau) \cdot \cos(k_n x) - u(\tau) \cdot \cos(k_n(L-x))] \cdot \cos(\omega_n(t-\tau)) \, d\tau \\ & + \frac{1}{L} \int_0^t [v(\tau) - u(\tau)] \, d\tau \end{aligned} \right] \cdot \vec{n}$$

Compte tenu des notations établies lors de la définition du repère, les efforts hydrodynamiques instantanés exercés par le fluide sur la paroi S⁻ ($\vec{n} = -\vec{x}$) sont alors donnés par la relation:

$$[A2-9] \quad F(0, t) = \int_{-1}^0 \frac{\partial \phi(0, y, t)}{\partial t} \, dy = - 2 \cdot \frac{dv(t)}{dt} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{K_m^3 \tanh(K_m L)} + 2 \cdot \frac{du(t)}{dt} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{K_m^3 \sinh(K_m L)} \\ - \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (K_m^2 + k_n^2)^{-1} \right] \cdot \frac{\omega_n^2}{k_n^2} \int_0^t [v(\tau) - (-1)^n u(\tau)] \cdot \cos(\omega_n(t-\tau)) \, d\tau - \frac{1}{L} \int_0^t [v(\tau) - u(\tau)] \, d\tau$$

et les efforts hydrodynamiques instantanés exercés par le fluide sur la paroi S⁺ ($\vec{n} = \vec{x}$), par:

$$[A2-10] \quad F^+(L, t) = - \int_{-1}^0 \frac{\partial \phi(L, y, t)}{\partial t} \, dy = 2 \cdot \frac{dv(t)}{dt} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{K_m^3 \sinh(K_m L)} - 2 \cdot \frac{du(t)}{dt} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{K_m^3 \tanh(K_m L)} \\ + \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (K_m^2 + k_n^2)^{-1} \right] \cdot \frac{\omega_n^2}{k_n^2} \int_0^t [(-1)^n v(\tau) - u(\tau)] \cdot \cos(\omega_n(t-\tau)) \, d\tau + \frac{1}{L} \int_0^t [v(\tau) - u(\tau)] \, d\tau$$

Les énergies dans le canal

On s'intéresse aux énergies instantanées au sein du fluide contenu dans le canal. La variation d'énergie totale au sein d'un élément de fluide limité par un contour fermé S est donnée par la relation :

$$[A2-11] \quad \frac{\partial E(t)}{\partial t} = \iint_S \left[\frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial n} - \left(P + \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} \right) \cdot U_n \right] dS$$

où U_n est la vitesse normale au contour [67].

Dans le cas du canal bidimensionnel fermé décrit ici, le contour est formé des segments S^- , S^+ , SL (surface libre) et SF (fond). Sur la paroi S^- , de vitesse $v(t)$, la variation d'énergie totale s'écrit compte tenu de l'orientation de la normale et en choisissant comme sens de circulation le sens trigonométrique direct:

$$[A2-12] \quad \frac{\partial E(t)}{\partial t} = \int_{-1}^0 \left[\frac{\partial \phi(0, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \phi(0, t)}{\partial x} - \left(P + \frac{\partial \phi(0, t)}{\partial t} \right) \cdot v \right] dy$$

La condition de glissement sur la paroi, $\frac{\partial \phi(0, t)}{\partial x} = v$, conduit à l'expression simplifiée:

$$[A2-13] \quad \frac{\partial E(t)}{\partial t} = - \int_{-1}^0 P \cdot v \, dy$$

Dans le cadre de la théorie linéarisée, l'équation de Bernouilli s'écrit:

$$[A2-14] \quad P(x, y, t) = - \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} - y$$

On obtient donc pour expression de la variation d'énergie:

$$[A2-15] \quad \frac{\partial E(t)}{\partial t} = \int_{-1}^0 v(t) \cdot \frac{\partial \phi(0, y, t)}{\partial t} \, dy + \int_{-1}^0 v(t) \cdot y \, dy$$

En remarquant que la première intégrale n'est autre que l'opposé du travail fourni par la paroi S^- (autrement dit le travail exercé par le fluide sur cette paroi),

$$[A2-16] \quad T^-(0, t) = - \int_{-1}^0 v(t) \cdot \frac{\partial \phi(0, y, t)}{\partial t} dy = v(t) \cdot F^-(0, t)$$

la variation d'énergie calculée sur cet élément du contour s'écrit finalement:

$$[A2-17] \quad \frac{\partial E^-(t)}{\partial t} = -T^-(0, t) - \frac{v(t)}{2}$$

En appliquant la même démarche sur la paroi S^+ , de loi de vitesse $u(t)$, la variation d'énergie totale calculée sur ce segment du contour (en tenant compte du sens de circulation le long de ce dernier)

$$[A2-18] \quad \frac{\partial E^+(t)}{\partial t} = \int_{-1}^0 \left[\frac{\partial \phi(L, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \phi(L, t)}{\partial x} - \left(P + \frac{\partial \phi(L, t)}{\partial t} \right) \cdot u \right] dy$$

a pour expression:

$$[A2-19] \quad \frac{\partial E^+(t)}{\partial t} = T^+(L, t) - \frac{u(t)}{2}$$

où $T^+(L, t)$ est le travail fourni par le mouvement de la paroi S^+ :

$$[A2-20] \quad T^+(L, t) = \int_{-1}^0 u(t) \cdot \frac{\partial \phi(L, y, t)}{\partial t} dy = - u(t) \cdot F^+(L, t)$$

La variation d'énergie totale sur le fond SF est donnée par:

$$[A2-21] \quad \frac{\partial E_{SF}(t)}{\partial t} = \int_0^L \left[\frac{\partial \phi(x, -1, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \phi(x, -1, t)}{\partial y} - \left(P + \frac{\partial \phi(x, -1, t)}{\partial t} \right) \cdot U_{SF} \right] dx$$

Compte tenu de la condition d'imperméabilité sur le fond, la vitesse verticale $U_{SF} = \frac{\partial \phi(x, -1, t)}{\partial y}$ est nulle en tout point du segment (0, L) et la variation d'énergie instantanée totale sur le fond est donc nulle.

$$[A2-22] \quad \frac{\partial E_{SF}(t)}{\partial t} = 0$$

La variation d'énergie totale sur la surface libre est donnée par:

$$[A2-23] \quad \frac{\partial E_{SL}(t)}{\partial t} = - \int_0^L \left[\frac{\partial \phi(x, 0, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \phi(x, 0, t)}{\partial y} - \left(P + \frac{\partial \phi(x, 0, t)}{\partial t} \right) \cdot U_{SL} \right] dx$$

Sur la surface libre, la pression P est nulle (en prenant la pression atmosphérique comme origine des pressions). La vitesse verticale de la surface libre étant donnée par $U_{SL} = \frac{\partial \phi(x, 0, t)}{\partial y}$, la variation instantanée d'énergie totale sur la surface libre est nulle.

$$[A2-24] \quad \frac{\partial E_{SL}(t)}{\partial t} = 0$$

La variation d'énergie totale dans le canal est égale à la somme de ces différents termes, on a donc finalement:

$$[A2-25] \quad \frac{\partial E(t)}{\partial t} = - T^-(0, t) + T^+(L, t) - \frac{1}{2} \cdot (v(t) + u(t))$$

Elle est donc égale, au terme de conservation de volume près, au travail (générateur ou récepteur) des deux parois.

L'énergie totale instantanée au sein du bassin sera alors obtenue par simple intégration de la relation [A2-25]:

$$[A2-26] \quad E(t) = - \int_0^t T^-(0, \tau) d\tau + \int_0^t T^+(L, \tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t (v(\tau) + u(\tau)) d\tau$$

L'énergie totale est constituée de la somme de l'énergie potentielle $E_p(t)$ et de l'énergie cinétique $E_c(t)$.

$$[A2-27] \quad E(t) = E_p(t) + E_c(t)$$

En considérant le fluide initialement au repos et en prenant comme origine de calcul de l'énergie potentielle la position de repos de la surface libre, l'énergie totale du fluide est initialement égale à zéro. L'énergie potentielle est donnée à chaque instant par la relation:

$$[A2-28] \quad E_p(t) = \int_0^L \int_0^{\eta(x,t)} y \cdot dy \, dx = \int_0^L \frac{\eta^2(x,t)}{2} dx$$

où $\eta(x,t) = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi(x,0,t)}{\partial t}$ est la déformée de surface libre. En reprenant l'expression [A2-3] du potentiel total et en tenant compte de l'adimensionalisation, elle a pour expression:

$$[A2-29] \quad \eta(x,t) = \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (K_m^2 + k_n^2)^{-1} \right] \cdot \int_0^t [v(\tau) \cdot \cos(k_n \cdot x) - u(\tau) \cdot \cos(k_n \cdot (L-x))] \cdot \cos(\omega_n(t-\tau)) \, d\tau$$

$$+ \frac{1}{L} \int_0^t [v(\tau) - u(\tau)] \, d\tau$$

L'énergie potentielle instantanée peut ainsi être déterminée. L'énergie cinétique se déduit alors des expressions [A2-26] et [A2-28] par la relation:

$$[A2-30] \quad E_c(t) = E(t) - E_p(t)$$

On peut aussi remarquer que l'énergie potentielle au sein du fluide est directement associée aux variations de volumes dans le canal, elle est donc égale, compte tenu de l'expression [A2-26] à:

$$[A2-31] \quad E_p(t) = -\frac{1}{2} \int_0^t (v(\tau) + u(\tau)) \, d\tau$$

L'énergie cinétique sera alors calculée par la relation:

$$[A2-32] \quad E_c(t) = - \int_0^{\tau} T^-(0, \tau) d\tau + \int_0^{\tau} T^+(L, \tau) d\tau$$

Elle ne dépend que du travail fourni par les deux parois.

ANNEXE 3

LE LISSAGE PAR SOMMES D'EXPONENTIELLES*

On considère une fonction f de la variable donnée t , connue sous forme discrète en $N+1$ points t_i équirépartis. On cherche à déterminer une approximation \tilde{f} de $f(t)$ sous forme d'une combinaison linéaire d'exponentielles :

$$[A3-1] \quad \tilde{f} = \sum_{k=1}^m a_k \cdot e^{(\lambda_k t)}$$

où les a_k et les λ_k sont des coefficients complexes. Ce sont les inconnues à déterminer.

On note ε l'erreur commise en utilisant l'approximation [A3-1], elle est telle que:

$$[A3-2] \quad f(t) = \tilde{f} + \varepsilon$$

La méthode présentée ici pour déterminer les coefficients a_k et λ_k est celle développée au Laboratoire d'Informatique de l'E.C.N. [20], basée sur la méthode dite de *Prony* permettant d'écrire un système non linéaire sous forme de deux systèmes linéaires surdéterminés pouvant être aisément résolus par des méthodes classiques type S.V.D. ou Householder.

Soit t_0 la valeur initiale de la variable t et dt le pas de la discrétisation. En notant:

$$t_i = t_0 + i \cdot dt \quad C_k = e^{(\lambda_k t_0)} \quad \text{et} \quad V_k = e^{(\lambda_k \cdot dt)}$$

le système obtenu en écrivant la sommation [A3-1] pour les $N+1$ points pris en compte s'écrit:

$$[A3-3] \quad C_1 \cdot V_1^i + \dots + C_m \cdot V_m^i = f(t_i) \quad i = 0, N$$

On introduit un polynôme P_m de degré m et dont les racines sont les V_k . Soit:

$$[A3-4] \quad P_m(v) = \prod_{k=1}^m (v - V_k) = \sum_{k=0}^m s_k \cdot v^{m-k} \quad \text{avec } s_0 = 1$$

* Daprès J. C. DAUBISSE, 'Sur quelques méthodes numériques spécifiques de l'hydrodynamique navale.' - Thèse de docteur ès sciences, 1984, Université de Nantes.

On ne considère alors que les $m+1$ premières lignes du système [A3-3] que l'on multiplie respectivement par les coefficients s_m, s_{m-1}, \dots, s_0 . En sommant on obtient:

$$[A3-5] \quad C_1.P(V_1) + \dots + C_m.P(V_m) = s_m.f(t_0) + \dots + s_0.f(t_m)$$

Les V_k étant les racines du polynôme $P(v)$, et s_0 étant unitaire, on obtient finalement la relation:

$$[A3-6] \quad s_m.f(t_0) + \dots + s_1.f(t_{m-1}) = -f(t_m)$$

La répétition de cette démarche effectuée jusqu'au rang N , après translation d'une ligne vers le bas à chaque fois, conduit au système linéaire:

$$[A3-7] \quad \left\{ \begin{array}{l} s_m.f(t_0) + \dots + s_1.f(t_{m-1}) = -f(t_m) \\ s_m.f(t_1) + \dots + s_1.f(t_m) = -f(t_{m+1}) \\ \dots \\ s_m.f(t_{N-m}) + \dots + s_1.f(t_{n-1}) = -f(t_N) \end{array} \right.$$

Ce système $((N-m+1).m)$ est surdéterminé dès que $N \geq 2.m$ et peut alors être résolu par une classique méthode de type Householder ou de décomposition de matrice en valeurs singulières (S.V.D.). On obtient ainsi les coefficients s_k du polynôme P dont les racines V_k peuvent alors être aisément déterminées. On en déduit finalement les coefficients λ_k par la relation:

$$[A3-8] \quad \lambda_k = \frac{\text{Log}(V_k)}{dt}$$

On résout alors avec ces valeurs le système linéaire [A3-3] surdéterminé, ce qui donne les C_k et permet finalement de déterminer les amplitudes a_k par la relation:

$$[A3-9] \quad a_k = C_k \cdot e^{(\lambda_k \cdot t_0)}$$

Cette méthode donne d'excellents résultats et permet d'identifier bon nombre de fonctions réelles ou complexes avec une excellente précision. On peut cependant noter qu'il ne semble pas exister de relation permettant de déterminer a priori le nombre optimal d'exponentielles, ce qui conduit à travailler par approches successives quant à l'ordre m du modèle.

BIBLIOGRAPHIE

ABSORPTION DYNAMIQUE DES ONDES DE GRAVITE BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ABRAMOWITZ & I. STEGUN, '*Handbook of Mathematical Functions.*' - Dover Editions.
- [2] M. ALDEEN & M. JAMSHIDI, '*Decentralized control of large-scale dynamical systems incorporating feedforward compensators.*' - Journal of Computers & Elect. Engineering, 1990, Vol. 16, No 2, pp.99-108.
- [3] A. BARRY & al. '*On absorbing boundary conditions for wave propagation.*' - Journal of Computational Physics, 1988, Vol. 79, pp.449-468.
- [4] BISHOP & PRICE, '*Probabilistic theory of ship dynamics.*' - Chapman & Hall Editors. ISBN 0 412 12430 0.
- [5] G. A. BLASCHAK & G. KRIEGSMANN, '*A comparative study of absorbing boundary conditions.*' - Journal of Computational Physics, 1988, No 77, pp.109-139.
- [6] G. E. BOX & G. M. JENKINS, '*Time Series Analysis.*' - Holden Day Edition.
- [7] R. BRACEWELL, '*The Fourier Transform and its Applications.*' - McGraw-Hill Book Company.
- [8] M. J. BRIGGS & al., '*Generation and analysis of directional spectral waves in a laboratory basin.*' - Proceedings of the 19th Offshore Technology Conference, (Houston, Texas, April 1987), pp.495-502.
- [9] J. BROEZE & J.E. ROMATE, '*Absorbing boundary conditions for free surface wave simulations with a panel method.*' - Journal of Computational Physics, 1992, No 99, pp.146-158.
- [10] F. M. CALLIER & C. A. DESOER, '*Open-loop unstable convolution feedback systems with dynamical feedback.*' - Automatica, 1976, Vol. 12, pp.507-518.
- [11] R. K. -C. CHAN, '*Finite difference simulation of the planar motion of a ship.*' - Proceedings of the 2nd Int. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics, (Berkeley, California, 1977), pp.39-52.
- [12] A. CLEMENT, '*Simulation et optimisation numérique du fonctionnement d'un Générateur-Absorbeur de vagues à double volets.*' - Association Internationale de Recherches Hydrauliques, comptes rendus du 22^{ème} congrès (Lausanne 1987), pp.329-340.
- [13] A. CLEMENT, '*Dynamic absorption of outgoing waves in the computation of 2D unsteady hydrodynamics.*' - Proceedings of the Int. Conf. on Computer Modelling in Ocean Engineering (Venice 1988), pp.127-134.
- [14] A. CLEMENT & L. FOULHOUX, '*One step ahead in the numerical modelling of the transient water waves: the identification of the time-domain Green function.*' - Proceedings of the Int. Conf. on Computer Modelling in Ocean Engineering. (Barcelone 1991). ISBN 90 54 10 024 9
- [15] A. CLEMENT, '*A discrete time model of the transient hydrodynamics Green function.*' - Proceedings of the Int. Workshop on Water waves and Floating Bodies. (Val de Reuil 1992).
- [16] A. CLEMENT, '*Identification de la fonction de Green de l'hydrodynamique instationnaire.*' - 1993, Rapport contrat D.R.E.T.

- [17] R. COINTE, '*Quelques aspects de la simulation numérique d'un canal à houle.*', Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1989.
- [18] B. COUNT, '*Power from Sea Waves.*' -Academic Press, 1980.
- [19] B. DAOUD, '*Génération et analyse de la houle aléatoire en bassin.*' - Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 1991.
- [20] J. C. DAUBISSE, '*Sur quelques méthodes numériques spécifiques de l'hydrodynamique navale.*' - Thèse de docteur ès sciences, 1984, Université de Nantes.
- [21] P. DE LARMINAT & Y. THOMAS, '*Automatique des Systèmes Linéaires.*' - Flammarion Sciences. ISBN 2-257-15011-2.
- [22] N. J. DOELMAN, '*A unified control strategy for the active reduction of sound and vibration.*' - Journal of Intell. Mater. Syst. and Struct., October 1991, Vol. 2, pp.558-580.
- [23] D. G. DOMMERMUTH & al., '*Deep-water plunging breakers: a comparison between potential theory and experiments*' - Journal of Fluid Mech. 1988 Vol. 189, pp.423-442.
- [24] I. DORE LANDAU, '*Identification et Commande des Systèmes.*' - Editions Hermès. ISBN 2-86601-119-8.
- [25] B. ENGQUIST & A. MAJDA, '*Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves.*' - Mathematics of Computation, July 1977, Vol. 31, No 139, pp.629-651.
- [26] D.V. EVANS & C. M. LINTON, '*Submerged floating breakwaters.*' - Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, August 1991, Vol 113, pp.205-227.
- [27] D.V. EVANS, '*Hydrodynamics of Ocean Wave-Energy Utilisation.*' - IUTAM Symposium, Lisbonne, 1985.
- [28] P. FONDANECHÉ & P. GILBERTAS, '*Filtres numériques.*' - Editions Masson, 1981, ISBN 2-225-68717-X.
- [29] D. GIVOLI, '*Non-reflecting boundary conditions.*' - Journal of Computational Physics, 1991, Vol. 94, pp.1-29.
- [30] D. GIVOLI, '*A spatially exact non-reflecting boundary condition for time dependent problems.*' - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1992, No.95, pp.97-113.
- [31] M. GREENHOW, J. H. ROSEN & M. REED, '*Control strategies for the Clam Wave Energy Device.*' - Journal of Applied Ocean Research, 1984, Vol. 6, No. 4, pp.197-206.
- [32] M. GREENHOW, '*A note on the Kramers-Krönig relations applied to a Salter's duck.*' - Proceedings of the Second international Symposium on Wave Energy Utilisation, 1982, pp.379-382.
- [33] S.T. GRILLI & I. A. SVENDSEN, '*The modelling of highly nonlinear waves: Some improvements to the numerical wave tank.*' - Proceedings of the 11th Int. Conf. on Boundary Elements, (Cambridge, Mass, 1989), pp.269-281.
- [34] P. GUEVEL & G. DELHOMMEAU, '*Théorie des ondes de gravité.*' - Polycopié, E.N.S.M., 1978
- [35] C. HAACK, P. GRAVERT, V. SCHLEGEL, '*The modelling of extreme gravity waves: An approach towards a numerical wave channel.*' -

- [36] A.J. HERMANS & E. VAN SABBEN, 'A device to extract energy from water waves.' - Journal of Applied Ocean Research, 1990, Vol. 12, No. 4, pp.175-179.
- [37] M. ISAACSON & S. QU, 'Predicted wave field in a laboratory wave basin.' - Canadian Journal of Civil Engineering, 1990, Vol. No 17, pp.1005-1014
- [38] S. JAGANNATHAN, 'Non-linear free surface flows and an application of the Orlandsky boundary condition.' - International Journal of Numerical Methods in Fluids, 1988, Vol 8 No. 9, pp.1051-1070.
- [39] S. JAGANNATHAN, 'Two open boundary conditions for nonlinear free surface flows.' - Computational modelling of free and Moving Boundary Problems, 1991, Editions Wrobel.
- [40] E.R. JEFFERYS, 'Simulation of wave power devices.' - Journal of Applied Ocean Research, 1984, Vol. 6, No. 1, pp.31-39.
- [41] H. JIANG & Y.S. WONG, 'Absorbing boundary conditions for second-order hyperbolic equations.', - Journal of Computational Physics, 1990, Vol. 88, pp.205-231.
- [42] M. JOHNSEN & al., 'Radiation boundary conditions for finite element solutions of generalized wave equations.' - Int. Journal for Numerical Methods in Fluids, 1991, Vol. 12, pp.765-783.
- [43] S. KARNI, 'To the boundary and back- A numerical study.' - Int. Journal for Numerical Methods in Fluids, 1991, Vol. 13, pp.201-216.
- [44] J. B. KELLER & D. GIVOLI, 'Exact non-reflecting boundary conditions.' - Journal of Computational Physics, 1989, Vol. 82, pp.172-192.
- [45] E.H. KENNARD, 'Generation of surface waves by a moving Partition.' - Q. Appl. Maths., Vol.7, No 3, pp.303-312.
- [46] K. Y. KIM & al. 'On an open radiational boundary condition for weakly dispersive tsunami waves.' - Journal of Computational Physics, 1988, Vol. 76, pp.327-348.
- [47] U.A. KORDE, 'A power take-off mechanism for maximizing the performance of an oscillating water column wave energy device.' - Journal of Applied Ocean Research, 1991, Vol. 13, No 2, pp.75-81.
- [48] U.A. KORDE, 'On the control of wave energy devices in multi-frequency waves.' - Journal of Applied Ocean Research, 1991, Vol. 13 No. 3, pp.132-144.
- [49] U.A. KORDE, 'Development of a reactive control apparatus for a fixed two-dimensionnal oscillating water column energy device.' - Journal of Ocean Engineering, 1991, Vol. 18, No. 5, pp.465-483.
- [50] R. KOSLOFF & D. KOSLOFF, 'Absorbing boundaries for wave propagation problems.' - Journal of Computational Physics, 1986, Vol. 63, pp.363-376.
- [51] R. L. KOSUT, 'Suboptimal control of linear time-invariant systems subject to control structure constraints.' - IEEE Transactions on Automatic control, October 1970, Vol. AC-15, No 5, pp557-563.
- [52] J. KRAVTCHENKO, 'Remarques sur le calcul des amplitudes de la houle linéaire engendrée par un batteur.' - 5th conf. on Coastal Eng., (Grenoble 1954), pp.50-61.
- [53] H. LAMB, 'Hydrodynamics' - Dover Publication, 6th Edition, 1945. ISBN 0-486-60256-7.

- [54] J. LARSEN & H. DANCY, '*Open boundaries in short wave simulations - A new Approach.*' - Journal of Coastal Engineering. 1983, Vol 7, pp.285-297
- [55] J.F. LEE & J.W. LEONARD, '*A time-dependent radiation condition for transient wave-structure interactions.*' - Journal of Ocean Engineering, 1987, Vol 14, No 6, pp.469-488.
- [56] E.L. LINDMAN, '*"Free-Space" boundary conditions for the time dependent wave equation.*' - Journal of Computational Physics, 1975, Vol.18, pp.66-78.
- [57] W. R. Mc. CREIGHT, '*Reflection coefficients due to open boundary conditions.*' - 4th International Workshop on Waterwaves and Floating Bodies (Oystese 1989).
- [58] C. MAISONDIEU & A. CLEMENT, '*Comparison of time domain control laws for a piston wave absorber.*' - European Wave Energy Symposium, (Edinburgh 1993). Soumise
- [59] C. MAISONDIEU & A. CLEMENT, '*A realizable force feedback-feedforward control loop for a piston wave absorber.*' - Workshop on Water Waves and Floating Bodies, (St John's Newfoundland, 1993). Soumise.
- [60] S. MANDAL & al, '*Reduced order ARMA spectral estimation of ocean waves*' - Journal of Applied Ocean Research, 1992, Vol. 4, pp.303-312
- [61] S.R. MASSEL, '*Hydrodynamics of Coastal Zones.*' - Elsevier Oceanography Series, 1989. ISBN 0-444-41623-4.
- [62] J. MAX, '*Méthodes et techniques de traitement du signal.*' - Editions Masson, 1985.
- [63] C.C. MEI, '*The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves.*' - Wiley-Interscience Publication, 1983. ISBN 0-471-06407-6.
- [64] J.H. MILGRAM, '*Active Water-wave absorbers.*' - Journal of Fluid Mech., 1970, Vol. 43, part 4, pp.845-859.
- [65] P. NASLIN, '*Les régimes variables dans les systèmes linéaires et non linéaires.*' - 1965, Editions Dunod.
- [66] P. NASLIN, '*Théorie de la commande et conduite optimale.*' - 1969, Editions Dunod.
- [67] J. N. NEWMAN, '*Marine Hydrodynamics.*' - M.I.T. Press. ISBN 0-262-14026 8
- [68] H. NISHIMURA & al., '*Optimal active dynamic vibration absorber for Multi-degree-of-Freedom systems. (Feedback and feedforward control using a Kalman filter.)*' - J.S.M.E. Int. Journal, 1990, Series III, Vol. 33, No 4, pp.513-521.
- [69] I. ORLANSKY, '*A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows.*' - Journal of Computational Physics. 1976, Vol. 21, pp.251-269.
- [70] W. H. PRESS & al, '*Numerical Recipes.*' - Cambridge University Press. ISBN 0-521-38330-7.
- [71] J.E. ROMATE, '*Absorbing boundary conditions for free surface waves.*' - Journal of Computational Physics, 1992, Vol.99, pp.135-145.
- [72] S. H. SALTER, '*Improvements relating to apparatus for creating surface waves in a body of liquid.*' - Patent Specification. University court of the University of EDINBURGH, September 1979.
- [73] STOKER, '*Water waves.*' - Intersciences Publishers.

- [74] G. SUSBIELLES & C. BRATU, '*Vagues et ouvrages pétroliers en mer.*' - Editions Technip. ISBN 2-7108-0366-6.
- [75] Y. TAN, 'Feedforward control of the process with unmeasured disturbances.' - Automatica, 1990, Vol.31, No 2, pp.19-23
- [76] J.V. WEHAUSEN, '*Causality and the radiation condition.*' - Journal of Engineering Mathematics, 1992, Vol. No 26, pp.153-158
- [77] K. YOSHIDA & al., '*Optimal control of random vibration by the use of an active dynamic vibration absorber. (Experimental considerations on the effect of the control with feedforward link.)*' - J.S.M.E. Int. Journal, 1988, Series III, Vol. 31, No 2, pp.387-394.
- [78] C. -W. XU, '*Analysis and feedback/feedforward control of fuzzy relational systems.*' - Journal of Fuzzy Sets and Systems, 1990, Vol. 35, pp.105-113.

ABSTRACT

The aim of this study deals with dynamic absorption of water waves. We focus here our attention on the case of a simple device, a 2D piston, in order to exploit the well known expressions of the potential as far as possible in the design of new absorption laws. We consider a semi-infinite two dimensional wave tank closed by a mobile vertical plate. An unsteady wave train generated at infinity impinges on this plate. The problem of dynamic absorption consist in finding, in real time, the velocity to be given to the plate in order that the radiated and the reflected wave train should cancel each other. We propose here to derive this velocity from the hydrodynamic forces measured on the plate. We first derive a frequency dependant transfer function between the optimal velocity of the paddle and the total force for the case of steady time harmonic incident waves. As a consequence of the linear approach we choose, the time domain velocity leading to the complete absorption of the incident wave train is obtained by convoluting the inverse Fourier transform of this transfer function by the measured hydrodynamic force. Unfortunately, the impulse response function of the ideal absorber derived that way is not causal; thus, it cannot be used just as it is as the control loop of a physical absorbing device. So, we suggest two causal non ideal approximations of the ideal non-causal controller.

RESUMÉ

On considère un bassin de houle bidimensionnel dans lequel on étudie le problème de l'absorption dynamique des ondes de gravité par la translation d'une de ses parois verticales en réponse aux efforts hydrodynamiques qu'elle subit.

On se place dans le cadre de la théorie linéaire des écoulements à surface libre des fluides parfaits pesants et on introduit les conditions aux limites classiques sur le contour du domaine fluide.

En imposant une condition dite d'absorption optimale aux potentiels réfléchis et de radiation, on obtient une relation fréquentielle d'absorption totale en boucle ouverte caractérisée par une fonction de transfert complexe entre efforts hydrodynamiques et vitesse de l'absorbeur.

Le passage au domaine temporel par transformation de Fourier inverse fait apparaître une réponse impulsionnelle non causale rendant le système irréalisable.

Plusieurs approximations causales du système sont alors étudiées.

On détermine dans un premier temps une relation asymptotique basses fréquences du type *Sommerfeld-Orlansky* pour des grandeurs locales.

On détermine ensuite une relation correspondant à un modèle de type feedback/feedforward conduisant au prix d'une hypothèse simplificatrice à une relation causale approchée purement instationnaire. L'efficacité de ce modèle n'étant que légèrement supérieure à celle du mode asymptotique, on montre qu'il est possible de l'améliorer de manière considérable en rajoutant une relation de dépendance vis à vis de la fréquence de l'onde incidente.

Toutes les relations de transfert apparaissant dans ces lois de contrôle de l'absorbeur ont été identifiées par une méthode de lissage par exponentielles avant d'être testées numériquement de manière à éviter les calculs d'intégrales de convolution.

On présente ensuite une décomposition de la relation d'absorption visant à obtenir de manière plus générale une boucle de contrôle de type feedback/feedforward ne faisant intervenir que des systèmes à réponse impulsionnelle causale.

On présente enfin un modèle expérimental de bassin de houle bidimensionnel muni d'un tel système d'absorption par batteur piston.

MOTS-CLÉS:

Hydrodynamique - Ecoulements à surface libre
Instationnaire - Absorption Dynamique - Ondes de Gravité
Causalité - Identification - Feedback/Feedforward