

# Une formulation parabolique pour la propagation en profondeur finie des ondes de gravité en surface

Soumia MORDANE<sup>a\*</sup>, Kamal L. MAROIH<sup>a</sup>, Abdellatif ORBI<sup>b</sup>, Mohamed CHAGDALI<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire de calcul scientifique en mécanique (LCSM), Faculté des sciences Ben M'Sik, avenue du Commandant D.-El-Harti, BP 6621, Casablanca, Maroc

<sup>b</sup> Institut national de recherche halieutique (INRH), 2, rue Tiznit, Casablanca, Maroc

Reçu le 3 octobre 2000 ; révisé le 1<sup>er</sup> février 2001 ; accepté le 19 février 2001

**Résumé** – Cet article présente une formulation parabolique des équations de propagation, en profondeur finie, des ondes de gravité en surface en terme de capacité angulaire par rapport à la direction de propagation privilégiée. Cette formulation est obtenue par factorisation de l'opérateur de l'équation de Berkhoff en deux opérateurs représentant les ondes progressives et régressives. L'utilisation des approximants de Padé permet d'accéder simultanément à des équations paraboliques pour les ondes transmises et pour les ondes réfléchies. Deux exemples de propagation de la houle en présence d'une bosse circulaire et d'une bosse elliptique sont étudiés numériquement. La comparaison des résultats avec ceux de la littérature prouve la supériorité de cette équation parabolique vis-à-vis de celle de Radder. © 2001 Ifremer/CNRS/IRD/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**approximants de Padé / diffraction-réfraction / factorisation / houle / méthode parabolique**

**Abstract** – A parabolic formulation for surface gravity wave propagation in intermediate depth. This paper deals with the parabolic formulation of propagation equations of gravity waves in surface in terms of angular capability with respect to the privileged propagation direction. This parabolic formulation is obtained by splitting the Berkhoff equation operator into two parabolic operators representing progressive and regressive wave propagation. The use of Padé approximants permits to derive simultaneously parabolic equations for the transmitted waves and the reflected waves. Two well-known reference examples, which represent the propagation of the wave when a caustic occur, are studied numerically and the results are compared with those of the literature. © 2001 Ifremer/CNRS/IRD/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**Padé approximants / diffraction-réfraction / splitting / waves / parabolic method**

## 1. INTRODUCTION

Les premières méthodes de calcul de la propagation de la houle du large vers la côte étaient basées sur la théorie des

rayons, qui s'appuie sur les lois de la réfraction pure. Dans ces méthodes, la hauteur de houle est déterminée au fur et à mesure du tracé de chaque rayon, en utilisant la loi de conservation de l'énergie. Les calculs sont alors indépendants pour chaque rayon, et très peu coûteux en place mémoire. Cette méthode montre rapidement ses limites lorsque se présentent des îles, des caps ou des hauts fonds, vers lesquels tous les rayons convergent. Les calculs font alors apparaître un point de convergence où

\*Correspondance et tirés à part: fax: +212 22 704 670.  
Adresses e-mail : mordanesoumia@hotmail.com (S. MORDANE),  
orbi@inrh.org.ma (A. ORBI).

l'énergie est infinie, appelé communément caustique. Ces méthodes sont également prises en défaut lorsque les effets combinés de la réfraction et de la diffraction deviennent importants.

Berkhoff (1973) a proposé, dans le cadre d'une analyse des ondes linéaires harmoniques, une équation qui prend en compte les effets combinés de la réfraction et de la diffraction, valable pour des fonds de pente faible. Cette équation étant de type elliptique, sa résolution pose les difficultés suivantes. D'une part, il faut écrire les conditions aux limites sur toutes les frontières du domaine d'étude, ce qui est difficile lorsqu'on ne connaît pas de manière précise la direction de propagation de la houle (Lajoie, 1996). D'autre part, il faut procéder à la formulation discrétisée sur tout le domaine, ce qui conduit à des matrices de grande taille qui peuvent poser des problèmes de capacité mémoire. Dans les travaux de Lajoie (1996), la résolution numérique de l'équation de Berkhoff est faite par la méthode des sous-domaines, ce qui permet de réduire le stockage du maillage. Cette approche se justifie surtout dans les zones où la bathymétrie présente des variations importantes.

Dans le cadre de la théorie linéaire pour des fonds de pente faible, d'autres approches ont porté en particulier sur les approximations paraboliques de l'équation de Berkhoff, dont l'idée de base est de projeter cette équation sur une direction moyenne proche de la direction de propagation privilégiée. Le problème, qui était elliptique au départ, se ramène à un problème parabolique plus simple à traiter, que l'on résout comme un problème à valeurs au départ. La résolution numérique s'effectue donc, front d'onde par front d'onde, par la méthode des différences finies. Ainsi, la parabolisation de l'équation de Berkhoff suscite un intérêt particulier, étant donné son avantage en terme de modélisation numérique pour les problèmes de propagation sur des domaines relativement importants, comme, par exemple, pour la propagation du large vers la côte. Dans la littérature, les modèles paraboliques linéaires ont été comparés à des résultats numériques et des mesures expérimentales (Radder, 1979; Kirby, 1986). Cependant, ces équations présentent un point faible car elles sont seulement des approximations de l'équation elliptique de Berkhoff : elles sont valables seulement sur un intervalle d'angles restreint de part et d'autre de la direction de propagation privilégiée, communément appelé capacité angulaire. L'importance des écarts observés par Radder (1979) et Kirby (1986) a été attribuée au problème de la capacité angulaire.

L'équation parabolique de Radder (1979) a été extraite de l'équation de Berkhoff en admettant que la houle se propageait dans une direction privilégiée. La démarche consiste à séparer le potentiel sur la surface libre suivant deux composantes représentant les potentiels des ondes progressives et des ondes réfléchies. En terme de capacité angulaire, Doikas (1990) a montré que cette équation est valable tant que la rotation des crêtes de la houle n'excède pas 30° de part et d'autre de la direction de propagation privilégiée. Quant à Kirby (1986), celui-ci est parvenu à une équation permettant d'aller jusqu'à un écart angulaire de 50°.

Dans ce travail, un modèle parabolique est développé dans le cadre des hypothèses associées à l'équation de Berkhoff. L'effort est axé sur l'amélioration de la capacité angulaire par rapport à l'axe privilégié de propagation. Comme dans les travaux de Radder (1979), l'écriture de l'équation de Berkhoff est simplifiée en la transformant sous forme d'une équation d'Helmoltz. En tenant compte de l'approximation de la pente douce, cette équation est factorisée en un produit de deux opérateurs paraboliques; le premier pour les ondes transmises et le second associé aux ondes réfléchies. L'opérateur des ondes progressives, contenant un opérateur racine carrée approché par les approximants de Padé, est conservé. L'équation parabolique obtenue est résolue par la méthode des différences finies. La validité de cette formulation parabolique est discutée en comparant avec deux exemples de propagation de la houle, en présence d'une bosse circulaire et d'une bosse elliptique, proposés dans la littérature.

## 2. MATÉRIEL ET MÉTHODE

### 2.1. Formulation théorique

Dans le cadre de la théorie linéaire harmonique, le problème de propagation de la houle en surface sur un fond avec une variation douce de la pente, peut être formulé par l'équation de Berkhoff :

$$\vec{\nabla} \cdot (CC_g \vec{\nabla} \phi) + \frac{\omega^2 C_g}{C} \phi = 0 \quad (1)$$

$\phi(x, y)$  est le potentiel des vitesses bidimensionnel et complexe,  $\nabla \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  est l'opérateur gradient horizontal,  $\omega$  est la fréquence angulaire.  $C$  et  $C_g$  représentent respectivement la célérité et la vitesse de groupe.

Il est plus commode de traiter l'équation (1) sous une forme réduite obtenue avec le changement de variable suivant (Radder, 1979) :

$$\varphi = \sqrt{CCg} \phi \quad (2)$$

En effet si la relation (2) est remplacée dans l'équation (1), une équation de type Helmholtz est obtenue :

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0 \quad (3)$$

où

$$k^2 = k_o^2 - \frac{\nabla^2 (CCg)^{\frac{1}{2}}}{(CCg)^{\frac{1}{2}}} \quad (4)$$

où  $k_o$  est le nombre d'onde, il vérifie localement la relation de dispersion,

$$\omega^2 = gk_o \operatorname{th}(k_o h)$$

où  $h$  est la profondeur locale et  $g$  la gravité. La célérité  $C$  et la vitesse de groupe  $Cg$  sont données respectivement par :

$$C = \frac{\omega}{k_o}; \quad Cg = \frac{\partial \omega}{\partial k_o}$$

Avec l'hypothèse de la théorie linéaire, lorsqu'une onde plane et monochromatique pénètre dans une zone où la bathymétrie varie lentement, le nombre d'onde évolue en fonction de la profondeur. Les variations étant faibles sur une distance de l'ordre de la longueur d'onde, la relation de dispersion classique est localement respectée. En admettant la commutativité des opérateurs différentiels  $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}}\right)$ , l'équation (3) peut être écrite sous la forme factorielle suivante :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + ik\sqrt{1+X}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - ik\sqrt{1+X}\right)\varphi = 0 \quad (5)$$

avec  $X = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  un opérateur lié à la direction orthogonale de la propagation. La factorisation (5) n'est pas exacte mais approchée, valable sous l'hypothèse de la pente douce associée à l'équation de Berkhoff. L'équation (5) contient deux informations : la première sur l'onde transmise et la seconde sur l'onde réfléchie.

En supposant que la houle se propage sans réflexion notable, ce qui est le cas de la propagation de la houle du large vers la côte, l'équation (5) se ramène à la forme suivante :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - ik\sqrt{1+X}\right)\varphi = 0 \quad (6)$$

Dans cette manière de faire, l'équation (6) est inexploitable sous sa forme actuelle. Il en résulte une équation contenant un opérateur racine carrée du type  $\sqrt{1+X}$ , où  $X$  est un opérateur pseudo-différentiel du second ordre.

Différentes approximations de cet opérateur peuvent être utilisées. La première est basée sur le développement en série de Taylor, et la seconde sur des approximations par une fraction rationnelle; plus précisément, l'approximant s'écrit sous la forme d'un rapport de deux polynômes : l'approximant de Padé.

Dans la première approche, l'approximation de  $\sqrt{1+X}$  pour  $\|X\| \ll 1$  par le développement en série de Taylor s'écrit :

$$\sqrt{1+X} \approx 1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + \frac{X^3}{16} \dots \quad (7)$$

Cette approximation reste relativement inefficace. En effet, certaines configurations impliquent la prise en compte de plusieurs termes de la série, ce qui rend leur implantation difficile à cause des puissances élevées de l'opérateur  $X$ .

La seconde approche est basée sur l'approximation de  $\sqrt{1+X}$  par des approximants de Padé. Dans ce travail, on a choisi un padé de polynômes linéaires qui s'écrit :

$$\sqrt{1+X} \cong \frac{p_1 + p_2 X}{q_1 + q_2 X} + o(X^3) \quad (8)$$

En remplaçant cette expression dans l'équation (6), en opérant de manière formelle avec l'opérateur  $q_1 + q_2 X$  et en utilisant l'expression explicite de  $X$ , l'équation parabolique suivante est obtenue :

$$q_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{q_2}{k^2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^2 \partial x} = ik \left( p_1 \varphi + \frac{p_2}{k^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

L'équation est de type parabolique. Elle englobe toutes les équations mentionnées précédemment sous forme de cas particulier. L'ensemble  $Pr = \{p_1 = 1, p_2 = 1/2, q_1 = 1, q_2 = 0\}$  conduit à l'équation de Radder pour un fond plat, et l'ensemble  $Pk = \{p_1 = 1, p_2 = 3/4, q_1 = 1, q_2 = 1/4\}$  conduit à l'équation de Kirby.

Il est à noter que l'ensemble des coefficients  $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$  n'admet pas de solution exacte de l'équation (8). La meilleure solution possible est alors recherchée, par exemple en minimisant l'erreur quadratique définie par la quantité suivante :

$$\sum_{ij} \left( \sqrt{1 + X_{ij}} - \frac{p_1 + p_2 X_{ij}}{q_1 + q_2 X_{ij}} \right)^2 \quad (10)$$

où  $(ij)$  définissent les nœuds du maillage de la grille associée au domaine d'étude et  $X_{ij}$  la projection de l'opérateur  $X$  sur les nœuds  $(ij)$ . C'est une solution d'ajustement des données, qu'on peut appeler meilleure approximation rationnelle au sens des moindres carrés (Baranger, 1977). Pour appliquer cette procédure qui consiste à chercher l'ensemble des coefficients  $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$  dans un domaine de variation de l'opérateur  $X$  qui minimise la relation (10), la méthode du gradient conjugué (Minoux, 1983) est utilisée. La solution obtenue par cette procédure est la suivante :

$$Pa = \{p_1 = 1,01526, p_2 = 1,0029, q_1 = 1, q_2 = 0,395007\} \quad (11)$$

Pour valider cette solution globale, un critère qui se base sur la relation de dispersion est utilisé. Considérons le cas d'une onde plane se propageant sur un fond plat ( $k = \text{constante}$ ). Les solutions de l'équation (3) sont dans ce cas :

$$\exp(\pm ik(k_x x + k_y y)) \quad (12)$$

où  $k_x$ , cosinus de l'angle de propagation  $\theta$  mesuré par rapport à la direction de propagation privilégiée, et  $k_y$ , son sinus, vérifient la relation de dispersion exacte :

$$\begin{aligned} k_x^2 + k_y^2 &= 1 \\ \text{ou} \\ k_x &= \pm \sqrt{1 - k_y^2} \end{aligned} \quad (13)$$

Les solutions (12) sont utilisées pour dériver la relation de dispersion approchée pour l'équation parabolique (9) qui s'écrit :

$$k_x = \pm (p_1 - p_2 k_y^2) / (q_1 - q_2 k_y^2) \quad (14)$$

L'écart entre la solution exacte (13) et celle de l'équation parabolique (14) pour les ensembles  $Pr$ ,  $Pk$  et  $Pa$  est présenté sur la figure 1.

Il est à constater que le maximum de l'erreur relative de la branche solution parabolique obtenue par l'ensemble des coefficients  $Pa$  est meilleur sur l'intervalle  $[0, \pi/2]$ .

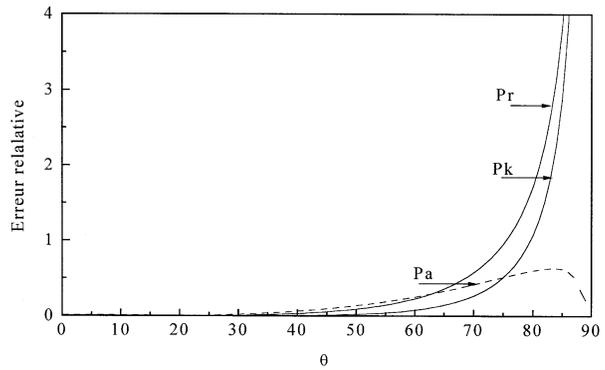


Figure 1. Différence entre la solution exacte et les solutions approchées obtenues pour différents coefficients  $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$ .

Figure 1. Difference between the exact solution and the approached solution obtained for different coefficients  $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$ .

### 2.2. Résolution numérique

L'équation parabolique (9) avec l'ensemble des coefficients  $Pa$  (11) peut être traitée numériquement par la méthode des différences finies. Les pas d'espaces  $\Delta x$  et  $\Delta y$  pour les directions  $x$  et  $y$  sont définis sur une grille rectangulaire. On pose par commodité d'écriture :

$$\varphi_{(ij)} = \varphi(x_i, y_j) = \varphi(i\Delta x, j\Delta y)$$

Le schéma classique de Crank–Nicholson est appliqué à l'équation (9) :

$$\begin{aligned} q_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{(ij)} + \frac{q_2}{k^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{(ij)} \right)_{(ij)} = \\ ik \left( 0,5 p_1 (\varphi_{(i+1,j)} + \varphi_{(i,j)}) + \frac{p_2}{k^2} 0,5 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}_{(ij)} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}_{(i+1,j)} \right) \right) \end{aligned}$$

Les opérateurs des dérivées premières et secondes peuvent être approchés, par différences finies, de manière à obtenir un système algébrique tri-diagonale, pour chaque pas d'avancement en  $x$ , qui sont résolus d'une manière classique. Cette formulation numérique présente des avantages, en terme de temps de calcul, résumé de la manière suivante :

- la procédure de calcul ne nécessite pas le maillage de tout le domaine de calcul; il n'y a que la ligne orthogonale à la direction de propagation qui est discrétisée ;
- au cours de la résolution, seules sont utilisées les conditions de départ et les conditions aux limites sur les frontières latérales, la résolution s'effectue front d'onde par front d'onde ;

– la densité de maillage dépend de la période et de la bathymétrie.

### 3. RÉSULTATS

L'équation parabolique (9), associée à l'ensemble des coefficients  $Pa$  (11) cité précédemment, a été résolue numériquement sur deux exemples de références cités dans la littérature où les phénomènes de réfraction–diffraction interviennent d'une manière décisive. Pour les configurations étudiées, l'amplitude  $A$  et la phase  $F$  à partir du potentiel des vitesses  $\theta$  sont définis respectivement de la manière suivante :

$$\varphi(x, y) = A(x, y) e^{iF(x,y)}$$

Cette écriture du potentiel complexe sur la surface libre en termes de produit d'amplitude et de phase permet de dissocier et d'interpréter les termes liés à la diffraction et à la réfraction.

Quant aux conditions des limites, au départ de la houle l'amplitude  $A_0$  et la phase  $F_0$  sont respectivement précisées. Sur les frontières latérales, le comportement de l'onde peut être résumé par la relation suivante :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = iak\varphi$$

où  $\alpha$  est le coefficient d'absorption, et égal à 0 pour les frontières imperméables, ou à 1 pour les frontières ouvertes.

#### 3.1. Propagation de la houle sur un fond circulaire

Le premier exemple étudié est celui de la propagation de la houle sur un fond plat en présence d'un haut fond circulaire à profil parabolique immergé, défini par la bathymétrie  $h(x, y)$  suivante :

$$h = h_m + e_0 r^2 \text{ pour } r < R ; h = h_0 \text{ pour } r \geq R ;$$

$$r^2 = (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 ; e_0 = (h_0 - h_m)/R^2$$

$R$  est le rayon de la base circulaire,  $h_0$  est la profondeur de fond plat et  $h_m$  est la profondeur au centre de la bosse. Ce cas a été étudié numériquement par Ito et Tanimoto (1972), Flokstra et Berkhoff (1977) en résolvant directe-

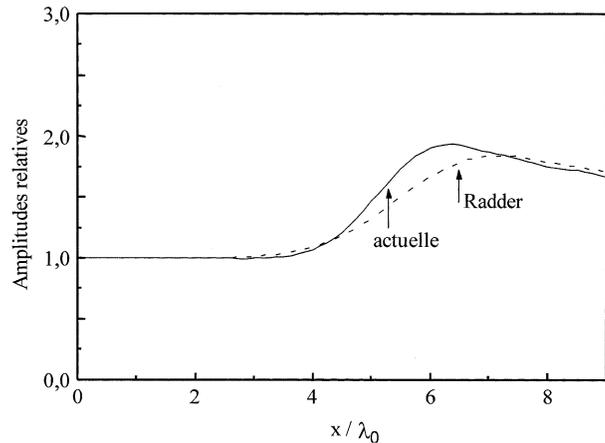


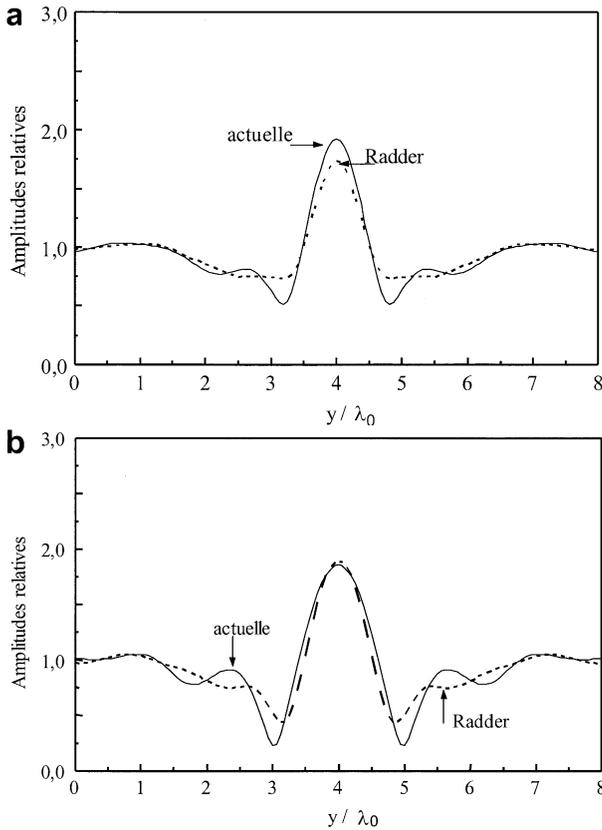
Figure 2. Comparaison des amplitudes relatives pour  $y / \lambda_0 = 4$ .

Figure 2. Comparison of relative amplitudes for  $y / \lambda_0 = 4$

ment l'équation elliptique de Berkhoff. Radder (1979) a utilisé ces résultats pour valider son approche parabolique. La configuration choisie est définie par les paramètres suivant :  $h_m / R = 0,0625$ ,  $h_0 / R = 0,1875$ ,  $L_0 / R = 0,5$ ,  $L_0 / R = 0,5$ ,  $e_0 g / \omega^2 = 0,01$ , où  $\lambda_0$ ,  $\omega$  et  $g$  représentent respectivement la longueur d'onde incidente, la fréquence angulaire et la pesanteur.

La figure 2 compare des amplitudes relatives  $A / A_0$ ,  $A_0$  étant l'amplitude de la houle incidente, en fonction de  $x / \lambda_0$  sur la ligne de symétrie  $y / \lambda_0 = 4$ . Le fond circulaire est défini pour  $x / \lambda_0$  compris entre 2 et 6. Cette comparaison concerne les résultats obtenus par l'équation actuelle (9) associée à l'ensemble des coefficients  $Pa$  (11) et ceux obtenus par la résolution de l'équation de Radder. Pour ce résultat, la différence des deux calculs se ressent au niveau de l'abscisse où l'amplitude est maximale. Cette abscisse est localisée par Ito et Tanimoto (1972) au point  $x / \lambda_0 = 6,3$ , par Flokstra et Berkhoff (1977) au point  $x / \lambda_0 = 6,4$ , par Radder (1979) au point  $x / \lambda_0 = 7$  et par la forme actuelle au point  $x / \lambda_0 = 6,37$ . L'abscisse donnée par la forme actuelle est plus proche de celles d'Ito et Tanimoto (1972) et de Flokstra et Berkhoff (1977) que celle obtenue par Radder (1979). Cela pourrait s'expliquer par la capacité angulaire, plus étendue, de la nouvelle équation parabolique (9).

Sur les figures 3a et 3b, la comparaison porte sur les amplitudes relatives  $A / A_0$  en fonction de  $y / \lambda_0$  pour  $x / \lambda_0 = 6$  (section a) et  $x / \lambda_0 = 7$  (section b). Ces deux sections sont perpendiculaires au sillage du cylindre. Comme nous ne disposons pas de mesures expérimenta

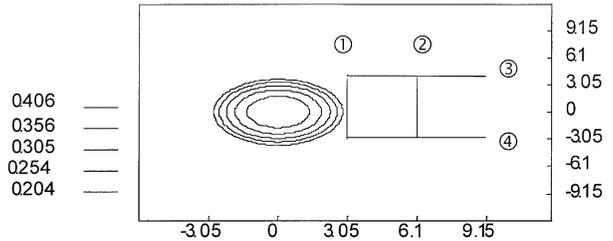


**Figure 3. a.** Comparaison des amplitudes relatives sur la section (a)  $x / \lambda_0 = 6$ . **b.** Comparaison des amplitudes relatives sur la section (b)  $x / \lambda_0 = 6$ .  
**Figure 3. a.** Comparison of relative amplitudes on section (a)  $x / \lambda_0 = 6$ . **b.** Comparison of relative amplitudes on section (b)  $x / \lambda_0 = 6$ .

les, ni de la solution complète de l'équation de Berkhoff, nous attribuons cette différence à la capacité angulaire des deux équations. Par la suite, nous testons la potentialité de cette nouvelle approche sur un exemple pour lequel nous disposons de mesures expérimentales ainsi que de la solution de l'équation de Berkhoff.

### 3.2. Propagation de la houle sur un fond elliptique

Le deuxième exemple étudié est celui d'un dispositif constitué d'une bosse de forme elliptique. Les dimensions du demi-ellipsoïde et la bathymétrie  $h(x, y)$  sont données par les équations suivantes (les grandeurs sont exprimées en mètres) :



**Figure 4.** Dispositif étudié : la comparaison est faite sur les sections ①, ②, ③ et ④.  
**Figure 4.** Studied device: the comparison is made on sections ①, ②, ③ and ④.

– équation de la base de l'ellipse :

$$\frac{x^2}{(3,96)^2} + \frac{y^2}{(3,05)^2} = 1$$

– équation de la profondeur :

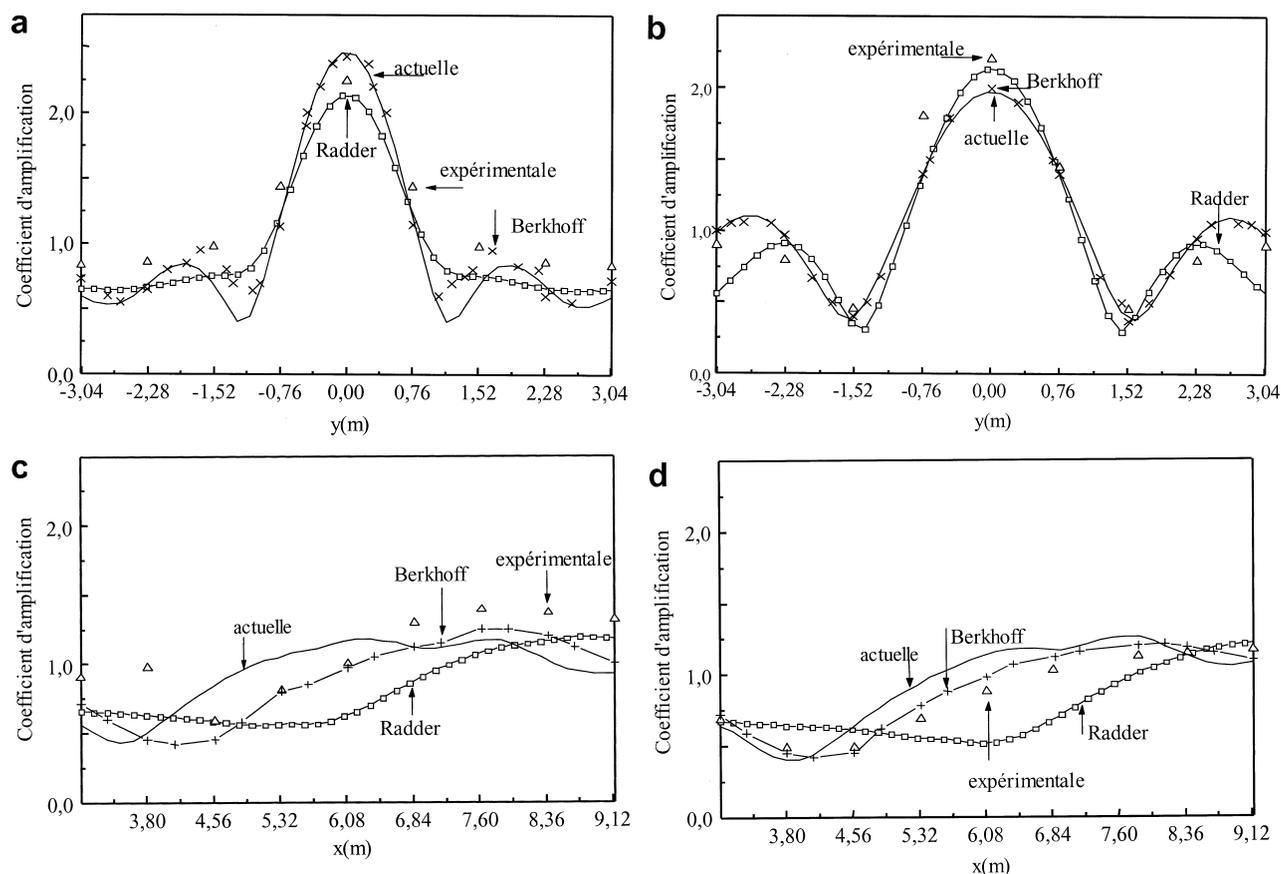
$$h = 0,9144 - 0,762 \sqrt{1 - \frac{x^2}{(4,95)^2} - \frac{y^2}{(3,81)^2}}$$

où  $(x, y)$  sont les coordonnées cartésiennes.

La propagation d'une onde de surface en présence de ce dispositif a été étudiée expérimentalement par Vincent et Briggs (cf. Lajoie, 1996) et numériquement en résolvant l'équation complète de Berkhoff par la méthode des différences finies par Lajoie (1996). La houle est monochromatique, normale au grand axe de l'ellipsoïde, de période 1.3 s. La cambrure ( $H / \lambda$ ) est choisie faible, comprise entre 1% et 2%. Pour les différents calculs évoqués, le maillage de l'ordre de quinze mailles par longueur d'onde est considéré comme fin. L'amplitude de la houle est mesurée sur différentes sections autour de la bosse (figure 4).

Les figures 5a–d représentent les amplitudes du champ de vagues, en terme de coefficient d'amplification de la houle pour le calcul actuel, le calcul par la résolution de l'équation de Radder, le calcul de l'équation complète de Berkhoff fait par Lajoie et les mesures expérimentales de Vincent et Briggs (cf. Lajoie, 1996).

Dans l'ensemble de ces figures, les résultats du modèle actuel approchent le mieux les mesures expérimentales et sont tout à fait comparables à la solution de l'équation elliptique de Berkhoff obtenue par Lajoie (1996). La houle calculée par le modèle actuel épouse la solution de l'équation elliptique de Berkhoff dans la zone de foca



**Figure 5.** Comparaison des calculs et des mesures sur les sections 1 (a), 2 (b), 3 (c) et 4 (d) indiquées dans la figure 4.

**Figure 5.** Comparison of computations and measures on sections 1 (a), 2 (b), 3 (c), and 4 (d) shown in figure 4.

lisation (figure 5a, b). Le fait que le modèle actuel suive de plus près l'équation elliptique de Berkhoff à l'extérieur de la zone de focalisation, montre son aptitude à représenter les ondes diffractées qui s'écartent de manière appréciable de la direction de propagation privilégiée (figure 5a-d).

#### 4. CONCLUSION

Pour la propagation des ondes de gravité en surface, une équation parabolique a été obtenue en se basant sur une technique de factorisation différente de celles de Radder (1979) et de Kirby (1986). L'utilisation des approximations de Padé a permis d'accéder simultanément à des équations paraboliques pour les ondes progressives et les ondes régressives. La nouvelle équation parabolique est obtenue en gardant les ondes progressives. La comparai-

son avec les résultats de la littérature a confirmé sa supériorité vis à vis de l'équation de Radder. En effet, l'hypothèse de la diffraction transversale supposée dans l'équation de Radder est corrigée dans ce nouveau modèle. Outre les avantages, en termes de calcul, cette formulation permet d'améliorer la capacité angulaire d'une manière globale sur un grand intervalle  $\theta \in [0, \pi/2]$ . Nous continuons nos efforts pour améliorer la capacité angulaire par l'utilisation d'approximations de Padé d'ordre supérieur.

#### RÉFÉRENCES

- Baranger, J., 1977. Introduction à l'analyse numérique. Hermann – Éditeur des sciences et arts, Paris, pp. 61–65.

- Berkhoff, J.C.W., 1973. Computation of combined refraction and diffraction. Proceedings of the 13th Coastal Engineering Conference, Vancouver. Am. Soc. Civil Eng. 1, 471–490.
- Doikas, S., 1990. Propagation de la houle au voisinage de la côte. Mise au point des codes numériques en différences finies. Thèse. Université Paris-Sud, Orsay.
- Flokstra, C., Berkhoff, J.C.W., 1977. Propagation of short waves over a circular shoal. Delft Hydraulics Laboratory. Rep. W 154-V (in Dutch).
- Ito, Y., Tanimoto, K., 1972. A method of numerical analysis of waves propagation: application to wave diffraction and refraction. Proceedings of the 13th Coastal Engineering Conference, Vancouver. Am. Soc. Civil Eng. 1, 503–522.
- Kirby, J.T., 1986. Higher approximations in the parabolic equation method for water waves. *J. Geophys. Res.* 91, 933–952.
- Lajoie, D., 1996. Modélisation de la houle en zone côtière : prévision de l'agitation à l'intérieur des ports et mise au point d'atténuateurs de houle dynamiques. Thèse. Université Aix-Marseille-II, Aix-en-Provence.
- Minoux, M., 1983. Programmation mathématique, théorie et algorithmes. Tome 1. Éditions Dunod, Paris.
- Radder, A.C., 1979. On the parabolic equation method for water wave propagating method. *J. Fluid. Mech.* 95, 159–176.