

Mémoires Société Royale des Sciences de Liège, 6^e série, tome VI, pp. 141-151 (1973)

ÉQUATIONS DES RESSAUTS INTERNES DANS UN SYSTÈME A DEUX COUCHES ET LEURS SOLUTIONS

ALAIN G. CAVANIE (*)

INTRODUCTION

— Différents écoulements océanographiques, météorologiques ou industriels peuvent être décrits par des modèles théoriques ou expérimentaux formés de deux couches fluides superposées. Dans les cas où l'hypothèse des ondes longues est justifiée (hypothèse de pression hydrostatique), ces écoulements sont décrits par un système hyperbolique d'équations aux dérivées partielles non linéaires, sous réserve que les grandeurs caractérisant les écoulements ainsi que leurs dérivées premières satisfassent à un certain nombre de conditions de continuité. De même que pour les écoulements de surface où de la dynamique des gaz, il est intéressant d'étudier les relations qui relient de part et d'autre des surfaces de discontinuités, les grandeurs physiques qui caractérisent les écoulements à deux couches. Ces discontinuités sont appelées ressauts internes par analogie avec les écoulements de surface. —

La difficulté majeure rencontrée dans cette étude vient du fait que, étant données les conditions d'un côté du ressaut interne et sa vitesse par rapport au fond, les trois équations spécifiant la conservation de la masse dans chaque couche et la conservation de la quantité de mouvement globale ne suffisent pas à déterminer de façon unique les conditions de l'autre côté du ressaut. Cette difficulté a conduit YIH et GUHA (1955) et LONG (1970) à faire l'hypothèse complémentaire que la pression moyenne à l'interface entre les deux couches fluides est égale à la moyenne des pressions à l'interface de part et d'autre du ressaut. YIH et GUHA ont traité des écoulements à surface libre, LONG des écoulements ayant pour limite supérieure un plafond horizontal rigide et imperméable. Une étude détaillée de leurs résultats montre que l'hypothèse qu'ils ont faite concernant la répartition de la pression à l'interface ne peut pas s'appliquer aux écoulements océanographiques; pour que la charge n'augmente pas dans chacune des deux couches en traversant le ressaut, il faut nécessairement que les écoulements considérés soient tels que les deux couches fluides se déplacent en sens inverse pour un observateur lié au ressaut. Cette condition n'est pratiquement jamais rencontrée dans les écoulements océanographiques où les vitesses du ressaut par rapport au fond sont beaucoup plus grandes que les vitesses des particules fluides.

Dans le travail présenté ici, l'hypothèse concernant la répartition de la pression à l'interface est remplacée par une hypothèse, applicable aux écoulements océaniques, exprimant que les pertes de charges sont négligeables dans la couche inférieure.

(*) Contribution n° 163 du Département Scientifique du Centre Océanologique Bretagne.

Cette hypothèse fournit la quatrième équation permettant de décrire de façon unique les conditions d'un côté du ressaut interne, celles de l'autre côté étant données.

I. DESCRIPTION DES ÉCOULEMENTS CONSIDÉRÉS ET MISE EN ÉQUATIONS

Les écoulements unidimensionnels stationnaires que nous allons considérer, sont décrits schématiquement dans la figure 1. Deux couches superposées de fluides homogènes incompressibles de masses spécifiques ρ_1 et ρ_2 s'écoulent entre un fond et un plafond horizontaux, distants d'une profondeur D . Les forces de frottement sont considérées comme négligeables tant au fond qu'au plafond et à l'interface entre les deux fluides. D'un côté du ressaut interne les valeurs de l'épaisseur de la couche supérieure, des vitesses relatives au ressaut dans la couche supérieure et inférieure et de la pression au plafond sont respectivement notées h_0, u_{10}, u_{20}, p_0 ; ces grandeurs prennent les valeurs h, u, u_2, p de l'autre côté du ressaut.

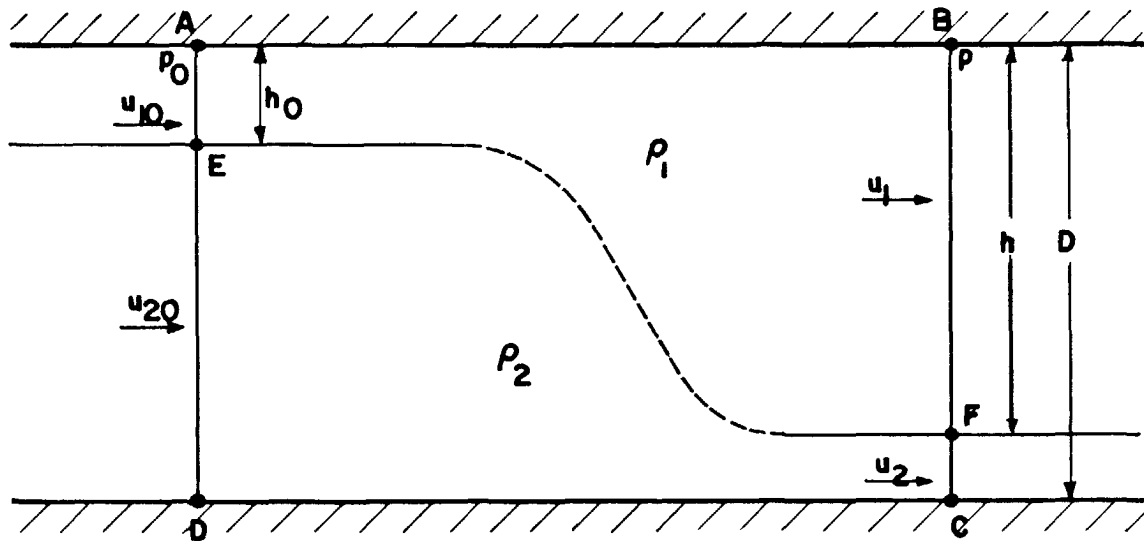


Fig. 1

L'écoulement étant stationnaire, les parois imperméables et les fluides incompressibles, la condition de conservation de la masse appliquée à chaque couche fournit deux équations :

$$(1) \quad u_1 h = u_{10} h_0$$

$$(2) \quad u_2 (D - h) = u_{20} (D - h_0)$$

Le théorème d'EULER appliqué à la surface de largeur unité décrite dans la figure 1 par le rectangle ABCD fournit une troisième équation :

$$(3) \quad pD + 0.5(\rho_2 - \rho_1)g(D - h)^2 + \rho_1 u_1^2 h + \rho_2 u_2^2 (D - h) = p_0 D + 0.5(\rho_2 - \rho_1)g(D - h_0) + \rho_1 u_{10}^2 h_0 + \rho_2 u_{20}^2 (D - h_0)$$

Manifestement les équations (1), (2) et (3) ne suffisent pas pour déterminer les valeurs des quatre variables h, u_1, u_2, p , étant données les valeurs de h_0, u_{10}, u_{20} et p_0 . Il est donc nécessaire suivant le modèle particulier étudié de trouver une quatrième condition imposée par la physique du problème considéré.

II. ÉTUDE DES ÉCOULEMENTS POSSIBLES AVEC L'HYPOTHÈSE DE LONG

L'hypothèse de LONG est que la pression moyenne à l'interface entre les deux couches fluides égale la moyenne des pressions aux points E et F de la figure 1. Exprimé sous forme mathématique cela veut dire que l'équation :

$$(4) \quad \int_{h_0}^h p dz = 0.5(p_E + p_F)(h - h_0)$$

est satisfaite, l'intégrale étant prise en suivant l'interface. Cette hypothèse est assez arbitraire et, comme nous allons le montrer, ne peut être satisfaite en même temps que les conditions de perte de charge à travers le ressaut que si les deux fluides s'écoulent en sens inverse à travers le ressaut.

Dans l'étude qui suit, pour fixer le problème, la vitesse dans la couche supérieure u_{10} est prise comme positive et dirigée vers le ressaut (Fig. 1). L'équation d'EULER appliquée à cette couche sur la surface de largeur unité EABF comprenant l'interface fournit l'équation :

$$(5) \quad p - p_0 = -2 \rho_1(hu_1^2 - h_0u_{10}^2)(h + h_0)^{-1}$$

La condition exprimant qu'il y a perte de charge à travers le ressaut s'écrit :

$$(6) \quad p - p_0 < 0.5 \rho_1(u_{10}^2 - u_1^2)$$

puisque l'écoulement se fait de A vers B. En substituant dans l'inégalité (6) l'expression de $p - p_0$ donnée par l'équation (5) et en tenant compte de l'équation (1) on trouve l'inégalité suivante :

$$(7) \quad (h - h_0) \leq (h + h_0)^2 (4hh_0)^{-1} (h - h_0)$$

L'épaisseur de la couche supérieure ne pouvant être négative, cette inégalité ne sera satisfaite que si :

$$(8) \quad h \geq h_0$$

Considérons maintenant la couche inférieure. L'équation d'EULER appliquée à la composante horizontale de la quantité de mouvement sur la surface EFCD fournit l'équation :

$$(9) \quad p - p_0 = (\rho_2 - \rho_1)g(h - h_0) + \rho_2[u_{20}^2(D - h_0) - u_2^2(D - h)] [D - 0.5(h + h_0)]^{-1}$$

Supposons d'abord que l'écoulement dans la couche inférieure se fait dans le même sens que dans la couche supérieure. Alors la condition de perte de charge impose l'inégalité :

$$(10) \quad p - p_0 < (\rho_2 - \rho_1)g(h - h_0) + 0.5 \rho_2(u_{20}^2 - u_2^2)$$

Substituant dans cette inégalité l'expression de $p - p_0$ donnée par l'équation (9) et en utilisant l'équation (2), on trouve finalement l'inégalité :

$$(11) \quad h_0 \geq h$$

Les inégalités (8) et (11) ne peuvent être satisfaites simultanément que dans le cas trivial où $h = h_0$. L'hypothèse que l'écoulement dans les deux couches puisse se faire dans le même sens dans l'hypothèse de LONG n'est pas compatible avec les conditions imposées par la physique que la charge dans chaque couche fluide n'augmente pas en traversant le ressaut. Au mieux, cette hypothèse ne serait applicable qu'à des écoulements des deux couches en sens opposés.

III. ÉTUDE GÉNÉRALE DES RESSAITS INTERNES AVEC L'HYPOTHÈSE
D'UNE PERTE DE CHARGE NÉGLIGEABLE DANS LA COUCHE INFÉRIEURE

Parmi les écoulements océaniques qui peuvent être décrits par un modèle à deux couches, ceux que l'on rencontre le plus souvent satisfont les conditions suivantes : la couche supérieure a une épaisseur beaucoup plus faible et un niveau de turbulence beaucoup plus élevé que la couche inférieure; ces conditions sont remplies en période estivale, la houle et le vent fournissant l'énergie nécessaire à un niveau de turbulence élevé dans la couche au-dessus de la thermocline, thermocline qui joue le rôle d'interface entre les deux couches fluides. La vitesse des ondes internes calculée par la méthode des petites perturbations montre que ces vitesses sont bien supérieures aux vitesses moyennes des particules fluides; les ressauts, ondes non-linéaires, se propageront encore plus vite que les ondes de petite amplitude et l'hypothèse de LONG ne sera jamais satisfaisante puisque l'écoulement dans les deux couches se fera dans le même sens à travers le ressaut.

Ces considérations conduisent à faire l'hypothèse que les pertes énergétiques ne sont sensibles que dans la couche supérieure; cette hypothèse est justifiée physiquement par le fait que les gradients de vitesse sont beaucoup plus forts dans cette couche que dans la couche inférieure et que le niveau de turbulence y est plus élevé. Les pertes de charges étant négligées dans la couche inférieure, l'équation de BERNOULLI appliquée à cette couche, qui s'écrit :

$$(12) \quad p - (\rho_2 - \rho_1)g h + 0.5 \rho_2 u_2^2 = p_0 - (2\rho - \rho_1)g h_0 + 0.5 \rho_2 u_{20}^2$$

fournit avec les équations (1), (2) et (3) et l'inégalité (6), les conditions nécessaires pour déterminer h , u_1 , u_2 , p , étant donnés h_0 , u_{10} , u_{20} , p_0 .

Il est commode d'introduire les changements de variables suivants pour écrire ces équations sous une forme sans dimensions :

$$V^2 = gD(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2 \quad (p - p_0) = \rho_2 V^2 P \quad R = \rho_1/\rho_2$$

$$H_0 = h_0/D \quad H = h/D$$

$$v_{10} = u_{10}/V \quad v_{20} = u_{20}/V$$

$$v_1 = u_1/V \quad v_2 = u_2/V$$

Les équations (1), (2), (3), (12) et l'inégalité (6) s'écrivent alors respectivement :

$$(13) \quad v_1 H = v_{10} H_0$$

$$(14) \quad v_2(1 - H) = v_{20}(1 - H_0)$$

$$(15) \quad P + 0.5(1 - H)^2 + Rv_1^2 H + v_2^2(1 - H) = 0.5(1 - H_0)^2 + Rv_{10}^2 + v_{20}^2(1 - H_0)$$

$$(16) \quad P - H + 0.5 v_2^2 = -H_0 + 0.5 v_{20}^2$$

$$(17) \quad P < 0.5 R(v_{10}^2 - v_1^2)$$

Éliminons P , v_1 et v_2 en utilisant les équations (13) à (16); on obtient l'équation reliant H aux valeurs de H_0 , v_{10} et v_{20} sous la forme suivante :

$$(18) \quad (H - H_0) Q(R, H, H_0, v_{10}, v_{20}) = 0$$

où le polynôme Q d'ordre quatre en H s'écrit explicitement sous la forme :

$$(19) \quad Q(R, H, H_0, v_{10}, v_{20}) = H^4 + [H_0 - 2] H^3 + [1 - v_{20}^2 - 2H_0(1 + Rv_{10}^2 - v_{20}^2)] H^2 \\ + [1 + 4Rv_{10}^2 - v_{20}^2] H_0 H - 2Rv_{10}^2 H_0$$

Lorsque H tend vers $\pm \infty$, Q tend vers $+\infty$, et prend des valeurs négatives aux limites du domaine d'intérêt physique, $0 < H < 1$.

$$Q(R, 0, H_0, v_{10}, v_{20}) = -2R v_{10}^2 H_0$$

$$Q(R, 1, H_0, v_{10}, v_{20}) = -v_{20}^2(1 - H_0)$$

En dehors de la solution triviale $H = H_0$, il y a donc, au plus, deux valeurs de H solutions de l'équation (18) dans le domaine $0 \leq H \leq 1$.

Dans le cas particulier où v_{20} est identiquement nul, l'équation (18) prend la forme :

$$(20) \quad (H - H_0)(H - 1)^2 [H + 0.5H_0 + 0.5(H_0^2 + 8v_{10}^2 R H_0)^{1/2}] \\ [H + 0.5H_0 - 0.5(H_0^2 + 8v_{10}^2 R H_0)^{1/2}] = 0$$

La solution étrangère $H = 1$ introduite par le calcul n'apparaîtrait pas en partant des équations (13) à (16) en posant $v_{20} = 0$ dès le départ. La profondeur H ne pouvant être négative, la seule solution physiquement possible en dehors de la solution triviale est :

$$(21) \quad H = -0.5 H_0 + 0.5(H_0^2 + 8v_{10}^2 R H_0)^{1/2}$$

Malheureusement, ce cas simple ne correspond pas aux conditions dans l'océan où les vitesses des particules fluides par rapport au fond sont toujours faibles en comparaison des vitesses des ressauts internes. Il faut donc, dans le cas général, rechercher les solutions possibles de l'équation (18) par le calcul numérique.

IV. CONDITIONS D'EXISTENCE DES RESSAUTS INTERNES

En dynamique des gaz, la condition que l'entropie d'une particule fluide traversant les chocs croisse, fournit une inégalité qui permet de restreindre les chocs possibles. De même, pour les ressauts de surface, on applique la condition que la charge d'une particule diminue en traversant le ressaut. Il est possible de montrer que ces conditions sont équivalentes à celles que l'on trouve en imposant que ces écoulements soient stables par rapport à de petites perturbations.

Dans le travail qui suit, la condition que la charge diminue lorsqu'une particule fluide de la couche supérieure passe le ressaut interne, va être d'abord appliquée. Cette condition va se révéler moins restrictive que la condition de stabilité par rapport à de petites perturbations étudiée ensuite.

Pour faciliter cette étude, il est commode de fixer les valeurs de R , H et H_0 ce qui permet d'étudier les ressauts possibles dans le plan (v_{10}, v_{20}) . En éliminant le cas trivial où $H = H_0$, l'équation (18) s'écrit sous la forme :

$$(22) \quad Q = (v_{10}/a_1)^2 + (v_{20}/a_2)^2 - 1 = 0$$

où :

$$(23) \quad a_1^2 = H(H + H_0)/(2RH_0)$$

$$(24) \quad a_2^2 = (H + H_0)(1 - H)^2/(H + H_0 - 2HH_0)$$

Le lieu des points représentant des ressauts possibles est donc une ellipse dans le plan (v_{10}, v_{20}) représentée par la courbe en trait plein de la figure 2.

V. RESTRICTION DES RESSAUTS POSSIBLES PAR
LA CONDITION DE PERTE DE CHARGE

La condition qu'il y ait perte de charge dans la couche supérieure lorsqu'une particule fluide passe le ressaut se traduit par l'inégalité (17) qui s'écrit, une fois v_1 et p éliminés à l'aide des équations (13) et (16), sous la forme :

$$(25) \quad (H - H_0) I > 0$$

où :

$$(26) \quad I = (v_{10}/b_1)^2 + (v_{20}/b_2)^2 - 1$$

et

$$(27) \quad b_1^2 = 2H^2 (H + H_0)^{-1} R^{-1}$$

$$(28) \quad b_2^2 = 2(1 - H)^2 / (2 - H - H_0)$$

Les ressauts possibles, compte-tenu de la condition (25), se trouvent nécessairement à l'intérieur de l'ellipse $I = 0$ si $H < H_0$ et à l'extérieur de cette ellipse si $H > H_0$.

Les rapports a_1^2/b_1^2 et a_2^2/b_2^2 s'écrivent explicitement :

$$(29) \quad a_1^2/b_1^2 = [4HH_0 + (H - H_0)^2] / 4HH_0 > 1$$

$$(30) \quad a_2^2/b_2^2 = [2(H + H_0) - 4HH_0 - (H - H_0)^2] / [2(H + H_0) - 4HH_0] < 1$$

Ces rapports indiquent qu'en dehors du cas trivial, il y aura toujours intersection des ellipses $Q = 0$ et $I = 0$; suivant que la valeur de H_0 soit plus grande ou plus petite que celle de H , différents segments de l'ellipse $Q = 0$ représenteront des ressauts internes possibles (Fig. 2).

L'examen de la figure 2 montre que le critère employé n'est pas suffisamment restrictif. En particulier, il est surprenant de constater qu'il permet des ressauts sans perte de charge aux intersections des ellipses $Q = 0$ et $I = 0$, points qui ont pour coordonnées :

$$(31) \quad v_{10} = H R^{-0.5}, \quad v_{20} = \pm (1 - H)$$

Au paragraphe suivant, il sera possible d'exclure ces points d'intersection en utilisant un critère plus restrictif.

VI. RESTRICTION AUX RESSAUTS STABLES POUR DE PETITES PERTURBATIONS

L'étude détaillée de la stabilité des ressauts internes par rapport à de petites perturbations est relativement longue et fastidieuse. Elle implique la linéarisation des équations (13), (14), (15) et (16) qui relient les grandeurs perturbées de part et d'autre du ressaut et l'étude de la propagation des différentes perturbations possibles de part et d'autre du ressaut; sans entrer dans les détails de cette étude, il est possible d'en donner le résultat fondamental.

Les deux vitesses de propagation des ondes internes de petites amplitudes du côté gauche du ressaut $(W \pm)_0$ sont données par les équations :

$$(32) \quad (W \pm)_0 = [L_0 \pm (L_0^2 - H_0 B_0 E_0)^{1/2}] B_0^{-1}$$

où

$$(33) \quad L_0 = R v_{10} + H_0 (1 - H_0)^{-1} v_{20}$$

$$(34) \quad B_0 = R + H_0 (1 - H_0)^{-1}$$

$$(35) \quad E_0 = (v_{10}/c_{10})^2 + (v_{20}/c_{20})^2 - 1$$

où

$$c_{10}^2 = H_0 R^{-1} \quad c_{20}^2 = 1 - H_0$$

Du côté droit du ressaut, les deux vitesses de propagation W_{\pm} sont obtenues en supprimant tous les indices « 0 » dans les équations précédentes.

Les ressauts internes sont stables par rapport à de petites perturbations dans deux cas résumés dans le tableau 1 ci-dessous.

TABLEAU 1

Cas	$(W_+)_0$	$(W_-)_0$	W_+	W_-
I	> 0	> 0	> 0	< 0
II	> 0	< 0	< 0	< 0

Ces deux cas sont analogues à ceux rencontrés dans l'étude des chocs en dynamique des gaz ou des ressauts de surface.

Dans chacun des cas du tableau n° 1, le signe des fonctions L_0 , L , E_0 , E est déterminé de façon unique puisque B_0 et B sont toujours positifs. Ces résultats sont reportés dans le tableau n° 2 :

TABLEAU 2

Cas	L_0	E_0	L	E
I	> 0	> 0	≤ 0	< 0
II	≤ 0	< 0	< 0	> 0

Les valeurs de L et E peuvent être exprimées en utilisant les équations (13) et (14) sous la forme suivante :

$$(36) \quad L = Rv_{10}H_0H^{-1} + H(1 - H)^{-2}(1 - H_0)v_{20}$$

$$(37) \quad E = (v_{10}/d_1)^2 + (v_{20}/d_2)^2 - 1$$

où

$$d_1^2 = H^2H_0^{-2}R^{-1} \quad d_2^2 = (1 - H)^3(1 - H_0)^{-2}$$

Il est maintenant possible de montrer que le point sur l'ellipse $Q = 0$ qui correspond à un ressaut sans perte de charge ne peut satisfaire les critères du tableau n° 2 que dans le cas trivial où $H = H_0$. En effet, substituant les valeurs des coordonnées de ce point (équation (31)) dans les équations (35) et (37), on trouve :

$$E_0 = (H - H_0)^2 H_0^{-1} (1 - H_0)^{-1} > 0$$

$$E = (H - H_0)^2 H^{-1} (1 - H)^{-1} > 0$$

Dans le cas de ressauts internes stables pour de petites perturbations, ces deux conditions ne peuvent pas être satisfaites ensemble, comme l'indique le tableau n° 2. Il y a donc toujours une partie de l'ellipse $Q = 0$, lieu des ressauts possibles, qui est exclue par les critères de stabilité.

Les figures 3a et 3b décrivent schématiquement le lieu des solutions possibles compte-tenu des critères de stabilité du tableau n° 2. La figure 3a concerne le cas où $H > H_0$, la figure 3b celui où $H < H_0$. Cette description schématique est basée sur le fait que les rapports suivants :

$$\begin{aligned} a_1^2/c_{10}^2 &= H(H + H_0) (2H_0^2)^{-1} \\ c_{20}^2/a_2^2 &= (1 - H_0) (H + H_0 - 2HH_0) (1 - H)^{-2} (H + H_0)^{-1} \\ d_1^2/a_1^2 &= 2H^2H_0^{-1} (H + H_0)^{-1} \\ a_2^2/d_2^2 &= (1 - H_0)^2 (1 - H)^{-1} (H + H_0) (H + H_0 - 2HH_0)^{-1} \end{aligned}$$

sont supérieurs à 1 si $H > H_0$ et inférieurs à 1 si $H < H_0$. Il est clair que suivant le cas considéré, les dimensions des ellipses varient considérablement, mais que les schémas de principe représentés restent valables.

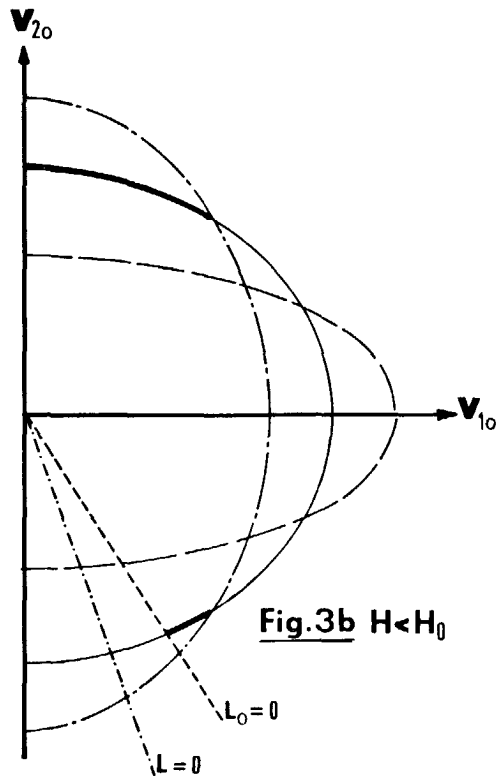
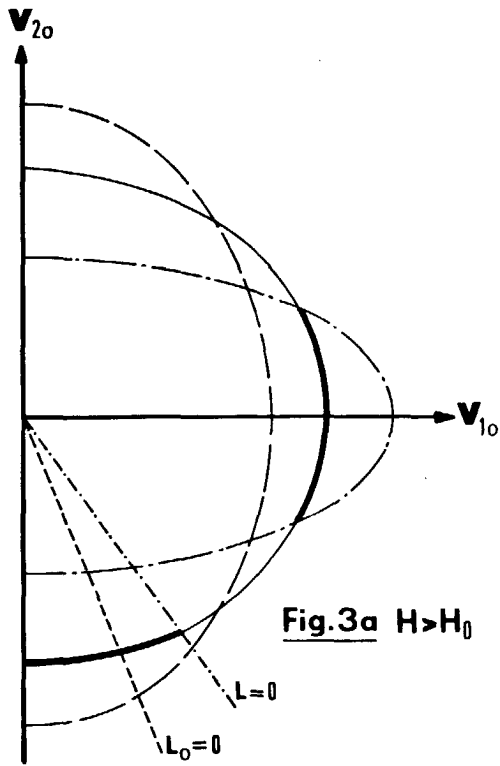
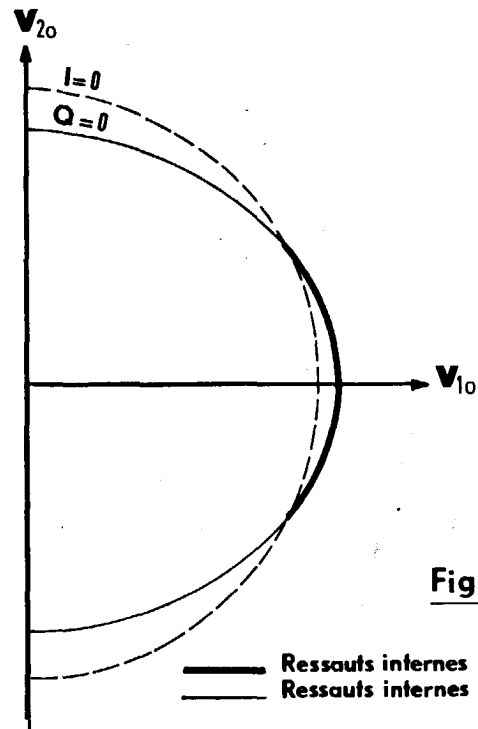
IV. APPLICATION AUX RESSAUTS INTERNES DANS LE DÉTROIT DE GIBRALTAR

Les ressauts internes engendrés par l'action du courant de marée au seuil du détroit de Gibraltar se propagent vers l'est du détroit à l'interface entre la couche supérieure d'eau atlantique et la couche inférieure d'eau méditerranéenne. L'épaisseur de la couche d'eau atlantique en amont du ressaut ainsi que l'amplitude de ressaut varient considérablement suivant le lieu, le coefficient de marée et les conditions météorologiques agissant sur le détroit. A titre d'exemple, il est raisonnable de prendre les valeurs des paramètres observés à l'entrée orientale du détroit, par coefficients de marée moyens, soit :

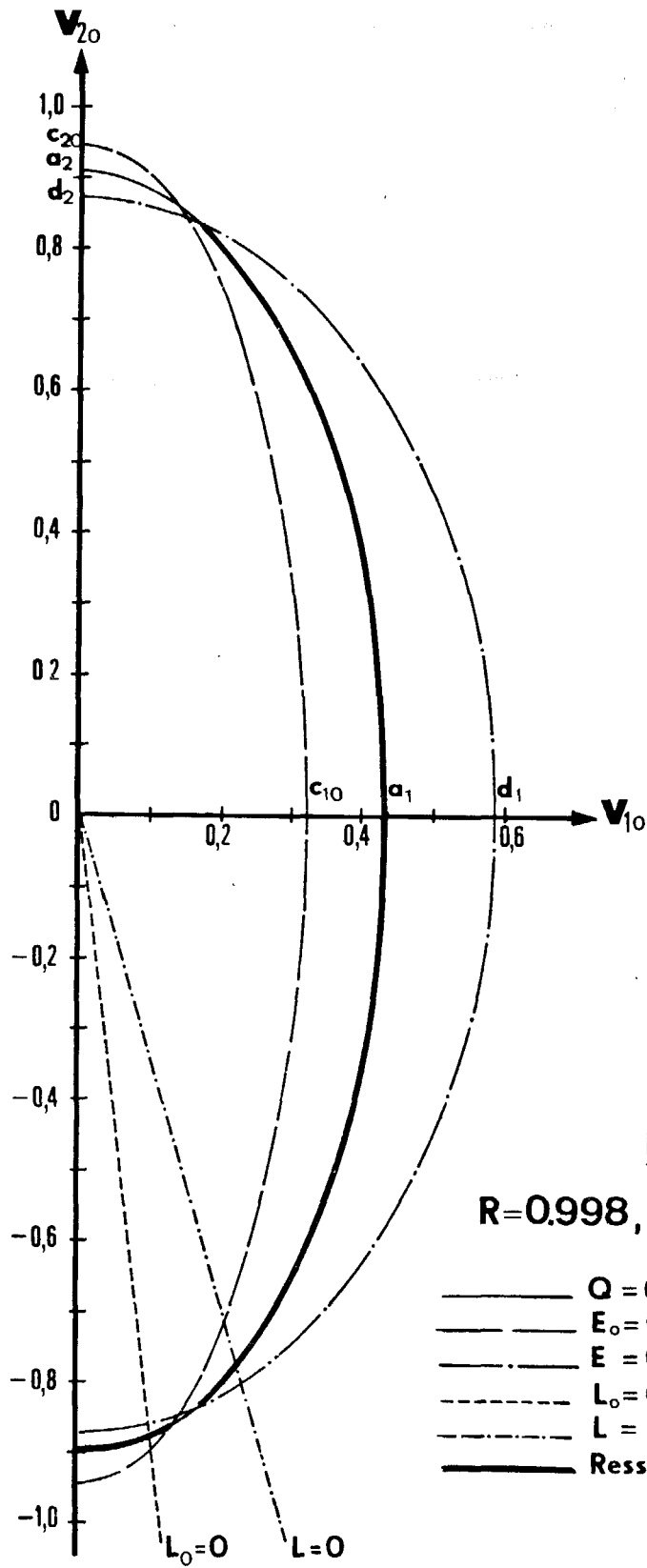
$$\begin{aligned} H_0 &= 80 \text{ m} & D &= 800 \text{ m} \\ H &= 120 \text{ m} & R &= 0,998 \end{aligned}$$

Ces données permettent de construire les différentes courbes de la figure 4 et de déterminer les segments de l'ellipse $Q = 0$ qui correspondent à des ressauts internes stables pour de petites perturbations.

En prenant pour vitesse dans la couche supérieure 0.85 m/s et 0.4 m/s dans la couche inférieure, dirigées vers l'est, ce qui correspond approximativement aux conditions dans la partie orientale du détroit lorsque la marée descend (coefficient : 80) on trouve en utilisant la figure 4, des vitesses de propagation du ressaut interne de 2,4 m/s par rapport au fond. Les observations que nous avons pu faire (CAVANIE, 1972) donnent des valeurs de 2 ± 0.2 m/s; la vitesse théorique est donc de 10 à 20 % plus élevée que la vitesse observée. Cette différence est importante mais, compte-tenu des nombreuses hypothèses simplificatrices, reste raisonnable. Il apparaît donc possible, dans le cas des ressauts internes se propageant dans le détroit de Gibraltar, de négliger, au moins en première approximation, les pertes de charge dans la couche inférieure et les échanges de quantité de mouvement à travers l'interface.



—	$Q = 0$	- - -	$L_0 = 0$
- - -	$E_0 = 0$	· · ·	$L = 0$
- · - ·	$E = 0$	—	Ressauts internes stables



CONCLUSION

L'étude détaillée des ressauts internes dans un milieu à deux couches fluides montre que l'étude de la stabilité des ressauts par rapport à de petites perturbations fournit des critères d'existence plus restrictifs que ceux donnés par les conditions de perte de charge. Bien que le modèle particulier étudié soit aussi simplifié que possible, il est très probable que cette conclusion restera valable pour des modèles de ressauts internes satisfaisant d'autres hypothèses.

L'application du modèle proposé, qui suppose les pertes de charges négligeables à travers le ressaut dans la couche inférieure, aux écoulements observés dans le détroit de Gibraltar fournit des valeurs pour la vitesse de propagation des ressauts qui sont un peu plus importantes que les vitesses observées mais qui restent comparables. Il est possible que cette différence soit due en partie à la stratification continue des eaux du détroit, qu'un modèle à deux couches ne traduit pas fidèlement. Malgré tout, le modèle théorique proposé semble serrer d'assez près la réalité, ce qui montre que les hypothèses qui en forment la base sont approximativement exactes.

BIBLIOGRAPHIE

- CAVANIE, A., Sur la genèse et la propagation d'ondes internes dans un milieu à deux couches. *Cahiers Océanographiques XXI* (9), 1969, pp. 831-843.
- CAVANIE, A., Observations de fronts internes dans le détroit de Gibraltar pendant la campagne océanographique OTAN 1970 et interprétation des résultats par un modèle mathématique. *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège*, 6^e série, tome II, 1972, pp. 27-44.
- FRASSETTO, R., Short period vertical displacements of the upper layers in the Strait of Gibraltar. *Saclant ASW Research Centre Tech. Rep.*, n° 30, nov. 1964.
- GERMAIN, P., Théorie des ondes de choc en dynamique des gaz et en magnétodynamique des fluides. Cours à l'Institut Henri Poincaré, Paris, 1962-1963.
- LACOMBE, H., 1961, Année Géophysique Internationale 1957-1958. Participation française. Contribution à l'étude du Détroit de Gibraltar II. Étude hydrologique. *Cahiers Océanographiques 13* (2), février 1961, pp. 73-107.
- LACOMBE, H. et RICHEZ, C., 1961, Année Géophysique Internationale 1957-1958. Participation française. Contribution à l'étude du Détroit de Gibraltar II. Étude hydrologique. *Cahiers Océanographiques 13* (5), mai 1961, pp. 276-291.
- LACOMBE, H., TCHERNIA, P., RICHEZ, C., GAMBERONI, L., 1964, Deuxième contribution à l'étude du régime du détroit de Gibraltar (travaux de 1960). *Cahiers Océanographiques, 16* (4), avril 1964.
- LACOMBE, H., 1965, Courants de densité dans le détroit de Gibraltar. *La Houille Blanche*, 1965 (I), janvier-février, pp. 38-44.
- LONG, R., Blocking effects in flows over obstacles. *TELLUS XXII*, 1970 (5), pp. 471-480.
- YIH, C. S. et GUHA, C. R., Hydraulic jump in a fluid system of two layers. *TELLUS VII*, 1955 (3), pp. 358-366.