

P502/1

Découvrez plus de documents
accessibles gratuitement dans [Archimer](#)

1^{er} JUIN 1982
**PUBLICATIONS DU
CENTRE NATIONAL
POUR L'EXPLOITATION
DES OCÉANS**

**RAPPORTS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES - N° 49 - 1982**

**RUPTURE FRAGILE
DES PIÈCES MINCES
ET
MÉTHODES
DES ÉQUATIONS
INTÉGRALES**

BND0/DOCUMENTATION

BIBLIOTHÈQUE
C.O.B.

B-P 287 2073 BRIST CEDEX

Pierre CHAUCHOT

Jacques LABEYRIE

Cette étude a été réalisée avec l'appui financier du

MINISTÈRE DE L'INDUSTRIE

Fonds de Soutien aux Hydrocarbures

des

**BUREAU VERITAS
COMPAGNIE FRANÇAISE DES PÉTROLES — TOTAL
INSTITUT DE SOUDURE**

et du

**CENTRE NATIONAL POUR L'EXPLOITATION
DES OCÉANS**

ISSN 0339-2899

© CENTRE NATIONAL POUR L'EXPLOITATION DES OCÉANS, 1982

PUBLICATIONS DU
CENTRE NATIONAL POUR L'EXPLOITATION DES OCÉANS
(C N E X O)

RAPPORTS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES - N° 49

**RUPTURE FRAGILE
DES PIÈCES MINCES
ET
MÉTHODES
DES ÉQUATIONS INTÉGRALES**

par

Pierre CHAUCHOT et Jacques LABEYRIE

Département Technologie et Développement Industriel

CNEXO — CENTRE OCÉANOLOGIQUE DE BRETAGNE
DOCUMENTATION
B.P. 337 — 29273 BREST CEDEX
Tél. (98) 45.80.55 - Télex : OCEANEX 940627 F

1982

RÉSUMÉ

Une étude des différentes théories de la mécanique de la rupture montre que la tenacité du matériau prise comme valeur critique du facteur d'intensité de contrainte (FIC), est un critère admissible du risque de rupture fragile d'une pièce mince sous tension.

Des différentes méthodes numériques utilisables pour calculer les FIC, celles basées sur une formulation par équations intégrales de frontière semblent les mieux adaptées.

Les formulations directes et indirecte sont détaillées. En particulier le traitement numérique réalisé par le CETIM * pour rendre performante la méthode directe de CRUSE est présenté.

Enfin, les développements relatifs au traitement des singularités et à la méthode du super-élément sont étudiés.

SUMMARY

The study of the different theories of brittle fracture mechanics shows that the tenacity of a material can be used as a maximum value of the stress intensity factor of the opening mode of a crack to determine the risk of brittle fracture of a thin piece of a structure submitted to a tensile load.

Among the different practical methods of determination of the stress intensity factor which are presented : iterative methods, finite element method (FEM), boundary integral equation methods (BIEM), the last one seems to be the most convenient in a general three dimensional case. Their different formulations are developed.

A special emphasis is put on the numerical treatment performed by CETIM for FREDHOLM's direct approach.

For a three dimensional case, a comparison between FEM and BIEM shows that the second one leads to a simpler surface meshing with far less nodal points which is easier for a practical use.

For a structure made of thin plates and shells it seems to be suitable to use the FEM except for the volume in the vicinity of the crack. This one is studied by the BIEM which derives a super-element the stiffness matrix of which is assembled with the finite elements used for the rest of the structure.

* Centre Technique des Industries Mécaniques.

TABLE DES MATIÈRES

I. THÉORIES DE LA RUPTURE FRAGILE	9
1.1. <i>Approche énergétique de GRIFFITH</i>	9
1.2. <i>Approche cinématique d'IRWIN</i>	10
1.2.1. Modes de rupture	10
1.2.2. Critère de rupture fragile K_{IC}	12
1.3. <i>Forces de cohésion. Théorie de BARENBLATT</i>	12
1.4. <i>Limites de la théorie linéaire</i>	13
1.4.1. Ouverture en fond de fissure ou C.O.D.	13
1.4.2. Intégrale J	16
1.5. <i>Relations entre les différents critères de rupture et domaine d'utilisation</i>	17
II. MÉTHODES PRATIQUES DE CALCUL DES FACTEURS D'INTENSITÉ DE CONTRAINTES	19
II.1. <i>Méthodes itératives</i>	20
II.2. <i>Méthode des éléments finis</i>	22
II.2.1. Méthodes adaptant la finesse du maillage	23
II.2.2. Programme APES	24
II.2.3. « Quarter-point method »	26
a) Présentation de la méthode	27
b) Développement	29
II.3. <i>Méthode des équations intégrales</i>	29
II.3.1. Différentes formulations	29
II.3.1.1. Formulation indirecte	29
II.3.1.2. Formulations directes	30
II.3.1.3. Méthode de FREDHOLM	32
II.3.2. Traitement numérique de l'équation intégrale	35
II.3.2.1. Méthode du CETIM (1975)	35
a) Sous-régionnement	36
b) Discrétisation de l'équation intégrale	36
c) Traitement numérique	38
II.3.2.2. Méthode de CRUSE (1969)	42
II.3.2.3. Méthode de BANERJEE (1976)	42
II.3.2.4. Comparaison des méthodes	43
II.3.3. Constitution du système linéaire et résolution	44
II.3.4. Détermination des déplacements et contraintes	44
II.3.5. Traitement numérique des singularités	45
II.3.6. Organigramme de la méthode	46
II.3.7. Détermination des facteurs d'intensité de contrainte	47
II.4. <i>Méthode du super-élément</i>	48
CONCLUSION	51
BIBLIOGRAPHIE	53
ANNEXE	57

NOTATIONS

x_i	coordonnées cartésiennes d'un point
r, θ	coordonnées polaires
ξ_i, η_i	coordonnées intrinsèques (quadrilatère)
L_i	coordonnées intrinsèques (triangle)
n_i	normale
m_i	tangente
u_i	déplacement
ε_{ij}	déformation
σ_{ij}	contrainte
t_i	vecteur traction surfacique
S_t	surface à force imposée
S_u	surface à déplacement imposé
\bar{u}_i	déplacement imposé sur S_u
t_i	force imposée sur S_t
E, ν	module d'YOUNG, coefficient de POISSON
μ	module de cisaillement
λ, μ	coefficients de LAME
k	nature du problème plan : $k = 3 - 4\nu \text{ en déformation plane}$ $k = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \text{ en contrainte plane}$
a, l	dimension de la fissure
K_I, K_{II}, K_{III}	facteur d'intensité de contrainte en mode I, II, III
G	taux de restitution d'énergie
J	intégrale de RICE
σ_0, R_e	limite d'élasticité en traction
K_{IC}	ténacité
γ	énergie superficielle, énergie de séparation
r_e	correction de zone plastique
δ	ouverture de fond de fissure.

Nous utiliserons la notation indicielle et la convention d'EINSTEIN

Δ	Laplacien
Δ^*	opérateur de NAVIER : $\Delta^* = \mu \Delta + (\lambda + \mu) \text{ grad div}$
T^n	$T^n = 2 \mu \frac{\partial}{\partial n} + \lambda n \text{ div} + \mu n \wedge \text{rot}$ où n est le vecteur normal dans un repère de FRENET
\int^*	intégrale singulière.

Une pièce construite avec des aciers à haute limite élastique, qui est soumise à de fortes tractions, peut périr par rupture fragile pour des états de contraintes admissibles selon les critères réglementaires basés sur les critères de TRESCA ou de VON MISES. Il peut en résulter des accidents graves puisqu'ils surviennent sans qu'aucune déformation anormale n'ait pu être détectée. Les réservoirs sous pression et les pipelines sont des exemples typiques. Un défaut, trou ou fissure, est souvent à l'origine d'une telle rupture. Il est donc important de pouvoir déterminer la répartition des contraintes autour du défaut pour en déduire le risque d'éclatement de la pièce. La même démarche peut conduire à deux objectifs différents :

- pour un défaut donné, rechercher la charge maximale admissible dans la pièce ;
- pour une charge donnée de la pièce, rechercher la dimension minimale du défaut dangereux.

Une telle étude appartient donc au domaine de la mécanique de la rupture. LABBENS [40] * présente l'historique et l'évolution des méthodes développées. « Vers 1920, GRIFFITH avait résolu certains problèmes simples en exprimant le principe général de la physique qui admet que tout système évolue pour rendre son énergie potentielle minimale. Il avait écrit que l'instabilité se produisait lorsque l'énergie potentielle mécanique libérée par l'extension d'une fissure dépassait l'énergie absorbée par cette extension. En 1956, IRWIN, qui pendant vingt ans avait étudié la rupture des blindages et d'autres matériaux, donna la forme du premier terme singulier du développement limité de contraintes au voisinage d'un front de fissure. Il montra que ces champs singuliers de contrainte étaient limités à trois types ou modes, que tous les champs d'un même mode étaient définis par un paramètre unique faisant la synthèse de la géométrie et du chargement, qu'il appela « facteur d'intensité de contrainte ».

Il put généraliser le calcul énergétique de GRIFFITH. Admettant l'existence d'une valeur critique du facteur d'intensité de contrainte, propriété mécanique du matériau, il ouvrit la porte à un calcul mécanique du seuil d'instabilité d'une fissure ».

Actuellement, les développements de la mécanique de la rupture ont dépassé le domaine de l'élasticité linéaire et s'orientent vers les critères de propagation de fissure en plasticité ou en fatigue (I.C.F. 5 : Cinquième Conférence Internationale sur la Rupture, 1981). Cependant pour les pièces minces (plaques et coques) sous tension, les calculs tridimensionnels n'ont pas abouti à une méthode facilement utilisable : les calculs faits par la méthode des éléments finis sont très coûteux et limités par les possibilités des ordinateurs. En utilisant des méthodes numériques variées (éléments finis, itération, équations intégrales) plusieurs auteurs [54, 59, 66, 68] ont publié des valeurs de facteur d'intensité de contrainte pour des positions variées de fissures dans divers cas de forme et de profondeur de fissuration, sous forme

* Les chiffres entre [] renvoient à la bibliographie.

d'abaques. L'hypothèse souvent faite d'une forme semi-elliptique de la fissure est justifiée par les observations. Cependant pour les applications concrètes, l'utilisation d'abaques est difficile car le cas à étudier n'est pas toujours traité, du fait de la complexité des chargements ou des géométries, ce qui peut conduire à des approximations hardies, parfois lourdes de conséquences : surdimensionnement donc coût exagéré ou, inversement, risque d'accident.

Cette étude a pour objet de présenter les différentes théories de la mécanique de la rupture fragile et les méthodes pratiques de calcul de facteurs d'intensité de contrainte pour permettre de déterminer le risque de rupture fragile d'une pièce mince sous tension présentant un défaut.

Il a paru nécessaire, devant l'abondance, l'hétérogénéité et parfois les contradictions de la littérature consultée, de faire une synthèse des résultats et des méthodes effectivement utilisables.

Dans une première partie, on présente donc l'approche énergétique de GRIFFITH puis l'approche cinématique d'IRWIN et les forces de cohésion introduites par BARENBLATT. Après l'étude de l'ouverture en fond de fissure (ou COD, « Crack Opening Displacement ») et de l'intégrale J de RICE, adaptées aux problèmes bi-dimensionnels, les différents critères de rupture utilisables sont discutés.

Une deuxième partie est consacrée aux méthodes pratiques de calcul des facteurs d'intensité de contrainte pour les problèmes tridimensionnels : méthodes itératives, méthode des éléments finis avec le principe du « quarter-point », méthode des équations intégrales avec les formulations directes et indirecte et méthode du super-élément.

I. THÉORIES DE LA RUPTURE FRAGILE

I.1. APPROCHE ÉNERGÉTIQUE DE GRIFFITH

Pour un solide élastique possédant une fissure S , la propagation de celle-ci entraîne une modification de son aire. GRIFFITH exprime la conservation de l'énergie totale du système [17] :

$$dW_{\text{tot}} = dW_{\text{elast}} + dW_{\text{ext}} + dW_S + dW_{\text{cin}} = 0$$

avec :

- dW_{elast} : variation de l'énergie élastique
- dW_{ext} : variation de l'énergie potentielle des forces extérieures ou travail de ces forces (données) changé de signe
- dW_S : énergie dissipée dans la séparation $dW_S = 2 \gamma dS$, γ étant l'**énergie superficielle** caractéristique du matériau, dS l'accroissement d'aire de la fissure, 2 étant dû aux deux faces de la fissure
- dW_{cin} : variation d'énergie cinétique.

La fissure se propagera de façon instable si $dW_{\text{cin}} > 0$, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial S} (W_{\text{elast}} + W_{\text{ext}}) + 2 \gamma < 0 ;$$

Par définition, le **taux de restitution d'énergie** G est :

$$G = - \frac{\partial}{\partial S} (W_{\text{elast}} + W_{\text{ext}}) .$$

Le critère de propagation de GRIFFITH se traduit par :

$$G > 2 \gamma .$$

L'initiation de la propagation à partir de la configuration S est possible lorsque :

$$G = 2 \gamma .$$

Dès que G est supérieur à 2γ , une partie de l'énergie disponible sert précisément à rompre les liaisons : c'est l'**énergie de séparation**. L'excès d'énergie $(G - 2 \gamma) dS$ est transformé en énergie cinétique, qui pourrait à son tour, s'il n'y avait pas d'autre apport d'énergie extérieure, se dissiper dans la séparation de surface nouvelle. Ce processus peut mener à la propagation instable.

Si les sollicitations extérieures sont telles que l'égalité

$$G = 2 \gamma$$

soit vérifiée à tout moment, alors il n'y a pas d'accroissement d'énergie cinétique : la rupture est contrôlée et la croissance de la fissure est stable.

Diverses expressions de G sont présentées par BUI [17]. Considérons un problème plan en élasticité linéaire : un solide est soumis sur la partie S_t de sa frontière à une traction surfacique \bar{t}_i dont on connaît certaines composantes et sur la partie S_u le déplacement \bar{u}_i est imposé (par ses composantes complémentaires à \bar{t}_i), (cf. fig. 1).

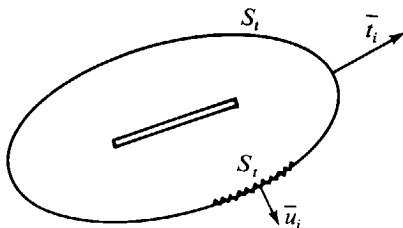


fig. 1. — Conditions aux limites.

En négligeant l'énergie cinétique, le taux de restitution d'énergie s'exprime alors par :

$$G = \frac{1}{2} \int_S \left(t_i \frac{du_i}{dl} - u_i \frac{dt_i}{dl} \right) dS$$

c'est-à-dire :

$$G = \frac{1}{2} \int_{S_t} t_i \frac{du_i}{dl} dS - \frac{1}{2} \int_{S_u} u_i \frac{dt_i}{dl} dS .$$

Si la fissure de surface S s'accroît de dS , le produit $G dS$ s'interprète comme le travail nécessaire pour fermer la fissure de surface dS .

G est aussi considéré comme le **taux d'énergie de fermeture**.

I.2. APPROCHE CINÉMATIQUE D'IRWIN

I.2.1. Modes de rupture

IRWIN considère les fissures comme des surfaces de discontinuité des déplacements. Puisque chacune des trois composantes du vecteur déplacement peut être affectée, il a observé et défini trois modes indépendants possibles pour les mouvements respectifs des deux surfaces d'une fissure (fig. 2) :

— mode I : les surfaces de la fissure tendent à s'écarter symétriquement par rapport au plan initial de la fissure ;

— mode II : les surfaces de la fissure glissent l'une par rapport à l'autre dans deux sens opposés perpendiculaires au front de fissure en restant dans le même plan ;

— mode III : les surfaces de la fissure glissent l'une par rapport à l'autre dans deux sens opposés perpendiculaires à ceux du mode II.

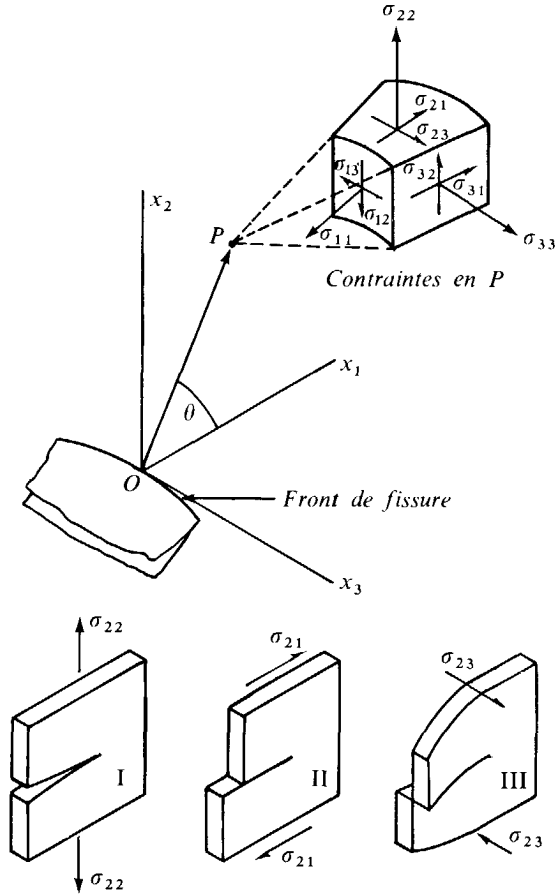


fig. 2. — Modes de rupture (d'après ROOKE et CARTWRIGHT [58]).

En élasticité linéaire, la distribution des contraintes au voisinage du fond de fissure s'exprime en coordonnées polaires suivant :

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K_{ij}(r)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + O(L).$$

Pour chaque mode, le facteur d'intensité de contrainte est défini quand r tend vers zéro le long de l'axe x_1 ($\theta = 0$) en fonction des composantes du tenseur des contraintes par :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \sigma_{22}(r, 0))$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \sigma_{21}(r, 0))$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \sigma_{23}(r, 0)).$$

Ces constantes sont indépendantes de r et de θ et ne sont fonction que de la géométrie de la fissure et de la répartition des contraintes.

Comme les contraintes ne peuvent physiquement devenir infinies, une zone de plasticité se situe en fond de fissure. L'hypothèse de base de la mécanique de la rupture en élasticité linéaire est que son étendue est limitée en comparaison de la zone où le terme en $r^{-1/2}$ domine le champ de contraintes. Le comportement de la fissure est déterminé par le facteur d'intensité de contrainte.

I.2.2. Critère de rupture fragile K_{IC}

On suppose que l'extension de la fissure se fait dans son plan. Actuellement des recherches s'orientent vers les problèmes de bifurcation [1] mais n'ont pas encore abouti à des résultats pratiques. D'après LABBENS [37], on peut négliger l'influence des modes II et III pour les aciers, car les aspérités qui existent au voisinage du front de fissure gênent les glissements.

Donc, en utilisant la notion de seuil critique, non pas pour la contrainte qui est infinie au front de fissure, mais pour le facteur K_I , on aboutit au critère de rupture fragile suivant :

$$K_I = K_{IC}$$

K_{IC} est une caractéristique physique du matériau appelée **ténacité**. Elle est déterminée expérimentalement et, dans certaines conditions, est indépendante des géométries de l'entaille et de l'éprouvette.

Ce critère est rigoureux en mode d'ouverture symétrique lorsque K_I est constant le long de la fissure et approché en chargement mixte. D'ailleurs, on ne connaît pas de K_{IIC} et K_{IIIC} . Si K est variable le long de la fissure on admet comme critère pessimiste (conservatif) :

$$K_{\max} = K_{IC} .$$

La validité de ce critère est limitée par la présence d'une zone plastique à la pointe de la fissure et par la nature tridimensionnelle du problème à étudier. Pour des pièces minces en acier à haute limite élastique, la zone plastique est confinée au voisinage du front de fissure.

I.3. FORCES DE COHÉSION. THÉORIE DE BARENBLATT

Pour éviter d'envisager des contraintes et des déformations infinies au front de fissure, BARENBLATT [11] suppose la présence de forces de cohésion agissant dans une zone limitée (fig. 3).

Ces forces de cohésion vont entraîner des contraintes de compression singulières au front de fissure qui, en se superposant aux contraintes de traction dues au chargement appliqué, vont annuler la singularité du champ de contraintes au front de fissure. Il en résulte que les bords des extrémités de la fissure, supposée elliptique initialement, se resserrent en forme de pointe. La force F est une fonction non linéaire de l'écartement $V(x_1)$ des faces de la fissure.

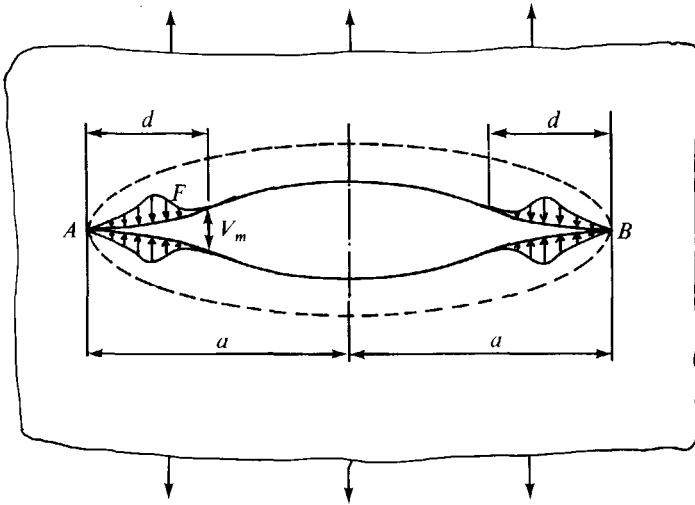


fig. 3. — Forces de cohésion.

La régularisation du champ de contraintes s'obtient par la présence d'un nouveau facteur d'intensité de contrainte K' résultant des forces de cohésion qui compense le facteur K_I prévu par la théorie classique :

$$K'(A) - K_I(A) = 0 .$$

Pour déterminer K' , BUI [17] utilise la fonction de poids de BUECKNER [13, 16], notée $K(x_1, A)$, qui représente le facteur d'intensité de contrainte en mode I à la pointe A correspondant à deux forces unités concentrées appliquées normalement au point d'abscisse x_1 aux deux faces de la fissure :

$$K'(A) = \int_0^d K(x_1, A) F(V(x_1)) dx_1 .$$

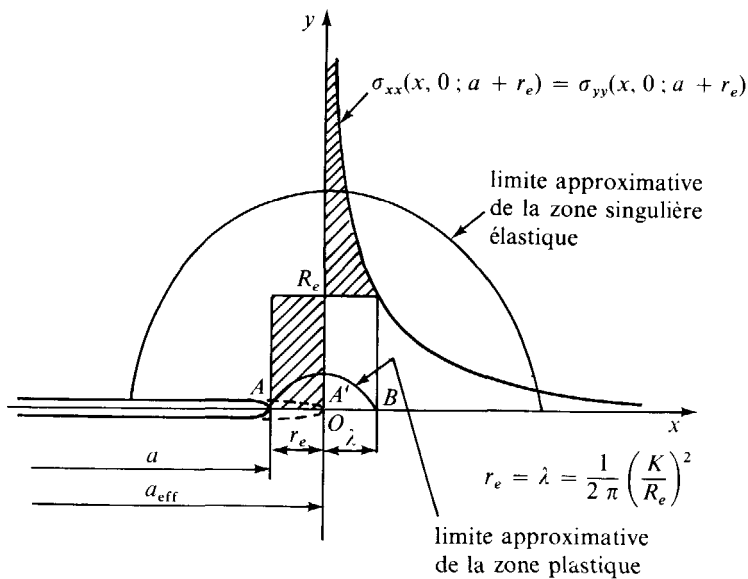
BARENBLATT suppose aussi que la forme de l'ouverture de la fissure dans la petite zone de largeur d est toujours la même, d'où la détermination de la force de cohésion F_c en fonction de x_1 . La valeur critique K_{IC} est alors déterminée par :

$$K_{IC} = \int_0^d K(x_1, A) F_c(x_1) dx_1 .$$

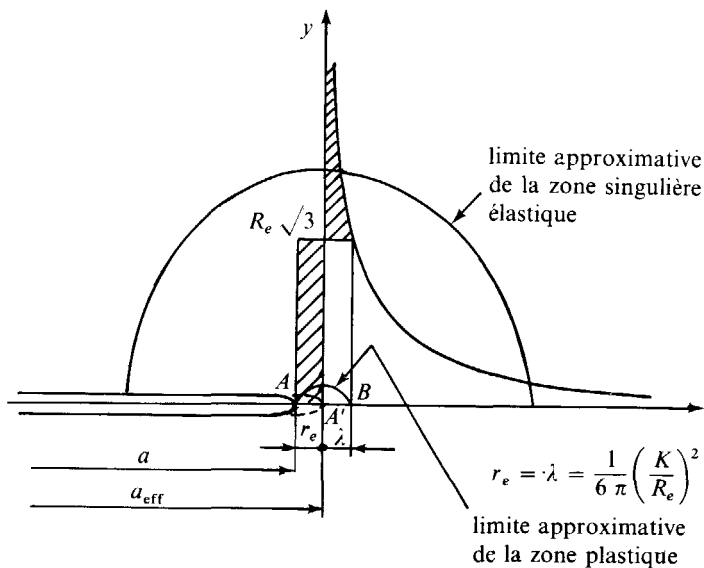
I.4. LIMITES DE LA THÉORIE LINÉAIRE

I.4.1. Ouverture en fond de fissure ou C.O.D. (« Crack Opening Displacement »)

Du fait de la singularité du champ de contrainte en $r^{-1/2}$ au voisinage du front de fissure, IRWIN considère une correction de zone plastique près du front de fissure.



Zone plastique en contrainte plane



Zone plastique en déformation plane

fig. 4. — (D'après LABBENS [40].)

Les calculs sont donc faits en théorie élastique pour une fissure de longueur effective :

$$a_{\text{eff}} = a + r_e$$

r_e étant la correction de zone plastique.

Ainsi le front de fissure est émoussé et les contraintes restent limitées.

Pour une déformation plastique peu étendue, IRWIN [40] admet que la zone plastique est plus petite que la zone singulière dans laquelle le terme singulier est dominant. Les longueurs r_e et $r_e + \lambda$ sont calculées en écrivant que, à la limite des zones plastiques et élastiques, R_e étant la limite élastique, sur l'axe Ox_1 pour $x = \lambda$ (fig. 4) :

$$\sigma_{yy}^{(el)}(\lambda, a + r_e) = \sigma_{yy}^{(p)} = R_e$$

et que la traction R_e imposée sur le prolongement de longueur r_e de la fissure équilibre la contrainte fictive :

$$\sigma_{yy}^{(el)}(\lambda, a + r_e) - R_e$$

retranchée sur la longueur λ .

Cette solution approchée, statiquement admissible, ne vérifie pas les conditions cinématiques.

On admet que la valeur du facteur d'intensité de contrainte après correction est égale à sa valeur avant correction :

$$K(a) = K(a + r_e).$$

L'ouverture en fond de fissure est :

$$\delta = 2 u_y(r_e).$$

On obtient donc selon les états de déformation :

— en contrainte plane

$$r_e = \lambda = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K}{R_e} \right)^2$$

$$\delta = \frac{4}{\pi} \frac{1}{E} \frac{K^2}{R_e}$$

— en déformation plane

$$r_e = \lambda = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{K}{R_e} \right)^2$$

$$\delta = \frac{4}{\pi} \frac{1 - \nu^2}{\sqrt{3} E} \frac{K^2}{R_e}.$$

La valeur critique de l'ouverture en fond de fissure, δ_c , traduit le fait que le matériau n'est plus capable d'absorber des déformations locales avant l'initiation

d'une rupture fragile brutale. δ_c peut être considéré comme la résistance à la rupture d'un matériau élasto-plastique [72]. Le critère de rupture qui lui est attaché semble adapté à l'étude de la rupture fragile quand les déformations plastiques sont importantes. Cependant la valeur de δ dépend du modèle adopté [33].

En conséquence, le critère de rupture fragile déduit des mesures de C.O.D. ne paraît pas utilisable pour le problème considéré.

1.4.2. Intégrale J

Pour un corps homogène élastique qui est soumis, en l'absence de forces de volume, à un champ de déformation bidimensionnel, RICE [56] définit l'intégrale J par :

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - t \cdot \frac{\partial u}{\partial x} ds \right)$$

où Γ est une courbe entourant le fond de fissure, l'intégrale étant évaluée dans le sens trigonométrique positif du bord inférieur vers le bord supérieur ; W est la densité d'énergie de déformation,

$$W = \int_0^{\epsilon} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$$

t est le vecteur traction défini suivant la normale extérieure au contour Γ , $t_i = \sigma_{ij} n_j$, u est le vecteur déplacement et ds est un élément d'arc de Γ .

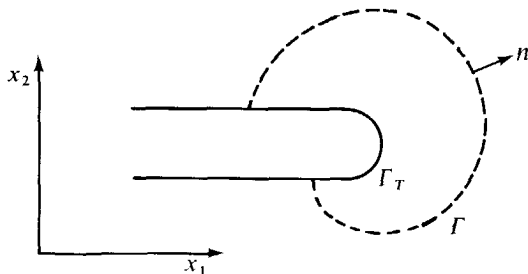


fig. 5. — Contour d'évaluation de J .

RICE a montré que l'intégrale J est indépendante du contour d'intégration pourvu qu'il délimite un domaine simplement connexe. Il suppose seulement le matériau homogène élastique. On peut donc considérer des matériaux élastiques non linéaires (pour la relation contrainte-déformation) ce qui permet une analyse approchée des milieux élasto-plastiques. Ceci sort du domaine de notre étude.

Dans un problème plan l'intégrale J peut servir de critère de rupture car une translation de la fissure équivaut à une extension. On montre d'ailleurs que :

$$J = G$$

en déformation ou contrainte plane.

I.5. RELATIONS ENTRE LES DIFFÉRENTS CRITÈRES DE RUPTURE ET DOMAINE D'UTILISATION

• Nous avons vu au § 1.2.2 comment la ténacité caractérisait la résistance d'un matériau à la propagation brutale d'une fissure en mode I.

• La formule d'IRWIN pour le mode I [17] relie la ténacité K_{IC} au taux de restitution d'énergie G défini par GRIFFITH (§ 1.1)

$$G = \frac{k + 1}{8 \mu} K_I^2$$

k traduit la nature du problème plan :

$$\text{en déformation plane} \quad k = 3 - 4 \nu$$

$$\text{en contrainte plane} \quad k = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$$

μ étant le module de cisaillement
et ν le coefficient de Poisson.

Le critère d'amorçage $G = 2 \gamma$ est équivalent à $K = K_{IC}$. Les valeurs critiques sont liées par :

$$K_{IC} = \sqrt{\frac{16 \mu \gamma}{k + 1}}$$

Cependant une valeur critique G_c indépendante du mode de rupture, n'a pas encore été mise en évidence, car l'énergie de dissipation ne serait pas d'origine strictement superficielle.

• Des intégrales de contour ont été définies par ESHELBY [21, 23] et RICE [57] pour exprimer des variations d'énergie potentielle. Leur signification énergétique a conduit à les utiliser comme critère de croissance ou de rupture, mais leur application est limitée au cas où la fissure se propage dans son plan initial. Aussi, seule l'intégrale J , relative à un problème plan, a abouti à un critère.

Une valeur critique J_{IC} a pu être déterminée et liée à la croissance de la fissure en domaine plastique non confiné. Cependant, les expériences menées pour la détermination d'une relation entre K_{IC} et J_{IC} utilisé comme critère de rupture brutale en déformation plane n'ont pu aboutir. En effet, J_{IC} correspond au début de croissance stable de la fissure.

A partir de J_{IC} , on peut calculer une valeur fictive de K_{IC} qu'on appelle K_J [40] :

$$K_J = \sqrt{\frac{E J_{IC}}{1 - \nu^2}}$$

qui peut être une estimation par défaut de K_{IC} en l'absence de mesure valide.

• L'utilisation de K_{IC} suppose l'absence d'une grande zone de plasticité. Cette restriction peut être évitée avec le concept d'ouverture en fond de fissure [36]. Comme il est possible de relier δ à K_I [17] par :

$$\delta = \frac{K_I^2}{E\sigma_0}$$

σ_0 étant la limite d'élasticité en traction, une équivalence est possible entre la théorie de K_{IC} et une théorie de la rupture basée sur l'ouverture critique de la fissure δ_c . Cependant, il est maintenant certain que δ_c ne peut, comme J_{IC} , servir de critère de rupture brutale.

Pour certains problèmes de coques minces, δ est la grandeur la plus facilement accessible mais, d'après LABBENS [40], J_{IC} est souvent un critère de début de croissance stable plus sûr que δ_c .

II. MÉTHODES PRATIQUES DE CALCUL DES FACTEURS D'INTENSITÉ DE CONTRAINTES

Par le principe de superposition, présenté par LABBENS [37], « on montre que, pour le calcul du champ singulier, tout chargement peut être remplacé par le chargement équivalent, obtenu en appliquant aux faces de la fissure des pressions opposées aux contraintes qui régneraient à l'emplacement de la fissure dans le corps non fissuré soumis au chargement extérieur.

BUECKNER [13] en a donné une démonstration rigoureuse par les théorèmes sur le travail virtuel.

Le calcul du champ singulier se ramène donc à un problème théoriquement simple ».

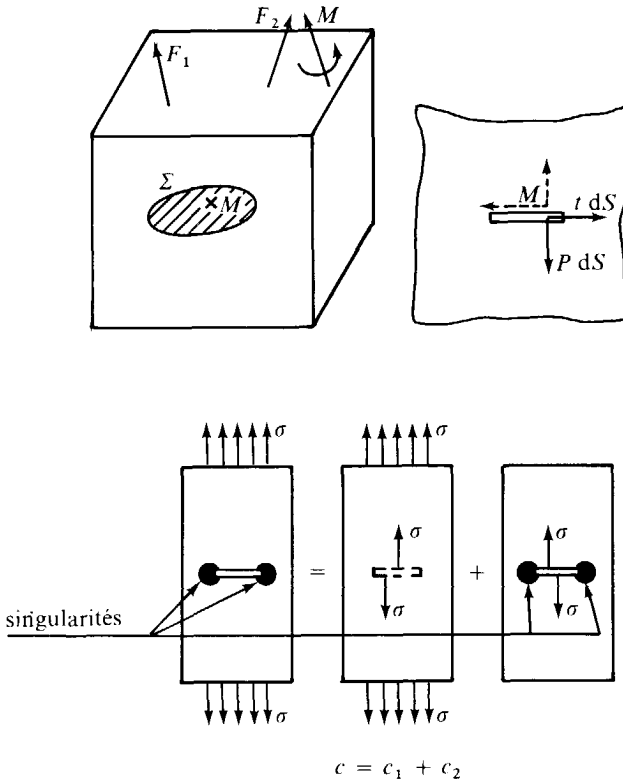


fig. 6. — (D'après LABBENS, PELISSIER-TANON et HELIOT [37].)

Différentes méthodes ont été développées pour déterminer le facteur d'intensité de contrainte K_I , puisque le critère de rupture fragile $K_I = K_{IC}$ est le plus facilement applicable.

Nous présentons :

- les **méthodes itératives** permettant d'approximer ou bien le chargement appliqué aux faces de la fissure, ou bien les conditions aux limites du problème ;
- la **méthode des éléments finis**, largement utilisée en mécanique de la rupture pour les problèmes bidimensionnels ;
- la **méthode des équations intégrales**, mieux adaptée que la précédente pour certains problèmes tridimensionnels.

Pour obtenir les déplacements ou contraintes en fond de fissure qui permettent de déterminer K_I , le solide est maillé en deux sous-régions séparées par le plan contenant la fissure (exemple fig. 25).

II.1. MÉTHODES ITÉRATIVES

a) La méthode itérative, basée sur le principe de superposition, a été principalement développée par SHAH et KOBAYASHI [62, 63, 64] et THRESHER et SMITH [69], et utilisée par SMITH et SORENSEN [57] pour étudier une fissure semi-elliptique dans une plaque en tension.

Pour déterminer les contraintes autour d'une fissure elliptique située à la distance h de la surface de séparation d'un milieu semi-infini (fig. 7), soumis à une tension uniaxiale perpendiculaire au plan de la fissure, on décompose le problème en deux parties que l'on superpose.

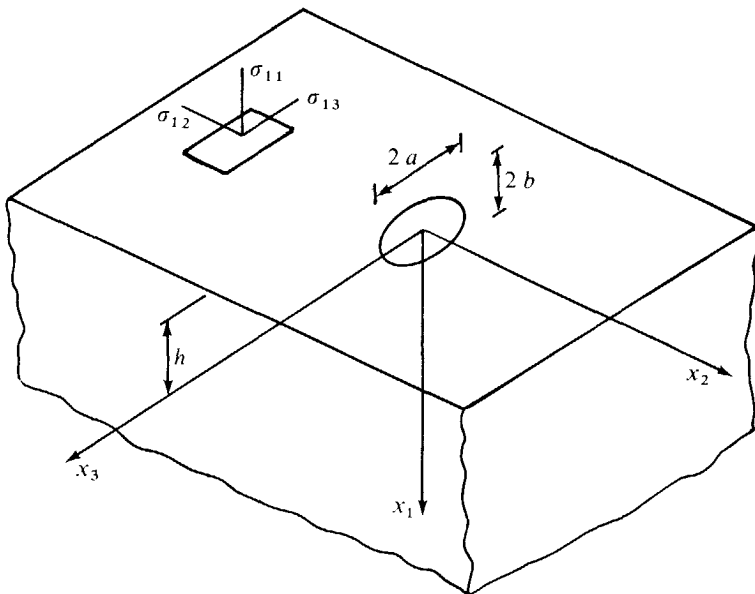


fig. 7. — Fissure elliptique dans un milieu semi-infini.

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= -\sigma & \left(\frac{x_3^2}{a^2} + \frac{x_1^2}{b^2} < 1; \quad x_2 = 0 \right) \\ u_2 &= 0 & \left(\frac{x_3^2}{a^2} + \frac{x_1^2}{b^2} > 1; \quad x_2 = 0 \right) \\ \sigma_{12} &= \sigma_{13} = 0 & (x_2 = 0) \\ \sigma_{11} &= \sigma_{13} = \sigma_{12} = 0 & (x_1 = -h). \end{aligned}$$

1. D'abord, on détermine les contraintes σ_{11} , σ_{12} et σ_{13} sur le plan $y = -h$ pour une fissure elliptique soumise à un effort constant dans un milieu infini [24, 62].

2. Ensuite, ces contraintes devant s'annuler dans le plan $z = -h$, on applique des contraintes opposées dans ce plan et on détermine, par la formulation des contraintes de LOVE [43, 44], la contrainte normale σ_{22} résultant à la surface de la fissure.

3. La contrainte résiduelle σ_{22} est alors annulée en appliquant les contraintes opposées à la surface de la fissure. Celles-ci sont approximées par la méthode des moindres carrés [62] et sont utilisées pour calculer les contraintes de traction résultant dans le plan $y = -h$.

4. On réitère les étapes 2 et 3 jusqu'à ce que les contraintes résiduelles sur la surface de la fissure deviennent négligeables devant la contrainte appliquée.

Ce processus permet d'ajuster, par la méthode des moindres carrés, une fonction polynomiale à deux variables, sur la distribution des pressions internes définies dans le plan de fissure. On obtient alors :

$$(1) \quad p(x_1, x_2) = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \leq 3}}^3 A_{ij} x_1^i x_2^j.$$

D'autre part, soit ϕ une fonction harmonique solution de l'équation d'équilibre de NAVIER ($\Delta^* \phi = 0$). On sait que ϕ s'obtient à partir de la fonction de potentiel de SEGEDIN [61] :

$$V^{(n)} = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{\omega^n(s)}{\sqrt{Q(s)}} ds$$

où

$$\omega(s) = 1 - \frac{x_3^2}{a^2 + s} - \frac{x_1^2}{b^2 + s} - \frac{x_2^2}{s} \quad (\text{ellipsoïde contenant la fissure : } x_2 = 0)$$

$$Q(s) = s(a^2 + s)(b^2 + s)$$

où n est un entier positif, et où λ est la première coordonnée elliptique du point (x_1, x_2, x_3) .

ϕ s'écrit :

$$(2) \quad \phi = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \leq 3}}^3 C_{ij} \frac{\partial^{i+j} V^{(i+j-1)}}{\partial x_1^i \partial x_3^j}.$$

On obtient alors le facteur d'intensité de contrainte sous la forme :

$$K_I = \frac{8 \mu}{ab} \sqrt{\frac{\pi}{ab}} (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{1/4} C_{00} + \frac{C_{10} \cos \theta}{a} + \frac{C_{01} \sin \theta}{b} \\ - \frac{4 C_{20} \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{C_{11} \cos \theta \sin \theta}{ab} - \frac{4 C_{02} \sin^2 \theta}{b^2} - \frac{4 C_{30} \cos^3 \theta}{a^3} \\ - \frac{4 C_{21} \cos^2 \theta \sin \theta}{a^2 b} - \frac{4 C_{12} \cos \theta \sin^2 \theta}{ab^2} - \frac{4 C_{03} \sin^3 \theta}{b^2}.$$

Pour conclure, il suffit maintenant de relier les C_{ij} aux A_{ij} . C'est pourquoi on exprime les conditions aux limites dans le plan de fissure par :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = \frac{p(x_1, x_2)}{2 \mu} \left(\frac{x_3^2}{a^2} + \frac{x_1^2}{b^2} < 1, \quad x_2 = 0 \right) \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0 \quad \left(\frac{x_3^2}{a^2} + \frac{x_1^2}{b^2} > 1, \quad x_2 = 0 \right)$$

où μ est le module de cisaillement, ce qui, en utilisant (1) et (2), se traduit par une équation matricielle entre les C_{ij} et les A_{ij} (explicitée en Annexe).

On peut noter, dans le cas tridimensionnel, une instabilité dans la convergence du processus itératif, malgré une amélioration proposée par KOBAYASHI et ENETANYA [34], ce qui limite l'utilisation de la méthode. Des facteurs d'intensité de contrainte ont été calculés [35] pour des cas particuliers de fissure dans un cylindre.

b) Une deuxième approche itérative a été envisagée par BOURAAD [13]. Au lieu de superposer différents cas de charge, il transforme le problème donné avec des conditions aux limites compliquées en une combinaison de problèmes où les conditions aux limites sont beaucoup plus simples. Les solutions obtenues sont recombinaées pour aboutir aux conditions aux limites du problème initial.

La convergence de la méthode est démontrée. Cependant pour les problèmes tridimensionnels, la recherche des solutions particulières se fait en combinant une solution analytique avec la méthode des éléments finis et cette dernière est peu adaptée pour résoudre certains problèmes de fissures tridimensionnels.

II.2. MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Pour les problèmes de mécanique de la rupture fragile traités en élasticité linéaire, la méthode des éléments finis a été abondamment utilisée dans le domaine bidimensionnel. Cependant, pour les problèmes tridimensionnels, les maillages

peuvent devenir trop importants (6 900 degrés de liberté dans l'étude [54]), et les coûts de calcul prohibitifs pour une utilisation pratique (5 000 s d'unité centrale de Cdc 7 600 pour une fissure circulaire dans un milieu infini [39]), malgré le développement de codes de calculs tridimensionnels. C'est ce qui a conduit LABBENS, PELISSIER-TANON et HELIOT, qui avaient commencé des calculs de facteurs d'intensité de contrainte [38, 39] en utilisant le code éléments finis tridimensionnels TITUS [26] de FRAMATOME, pour la résolution d'une formulation basée sur les fonctions d'influence et fonctions de poids de BUECKNER [16, 37], à rechercher une autre méthode que les éléments finis : ils ont utilisé [27] un programme « Equations Intégrales Tridimensionnelles, E.I.T.D. » du code CASTOR développé au CETIM [4, 47] et présenté au § 11.3.

La technique standard [74] utilise des fonctions de forme polynomiales qui ne peuvent rendre compte de singularités car elles ne permettent pas d'obtenir de grandes variations de la fonction et de ses dérivées au voisinage du fond de fissure. Ainsi est apparue la nécessité de rechercher des modifications de la méthode standard pour l'adapter au problème des singularités. Deux sortes de méthodes ont été proposées :

- celles qui permettent la singularité sans l'utiliser explicitement et qui sont basées sur une augmentation de la finesse du maillage,
- celles qui utilisent la forme de la singularité en modifiant soit le champ des déplacements près de la fissure (programme APES [2]), soit la position des nœuds dans des éléments isoparamétriques pour créer des macroéléments [47] ou des éléments particuliers (« méthode du point-quart » ou « **quarter-point method** » [28, 8]), au voisinage de la singularité.

II.2.1. Méthodes adaptant la finesse du maillage

Pour augmenter la précision au voisinage de la singularité, un raffinement du maillage est nécessaire dans le cas d'utilisation d'éléments classiques. Une méthode dite « **self-adaptive** », basée sur une estimation de l'erreur commise dans l'approximation, permet de générer automatiquement le maillage nécessaire. Développée

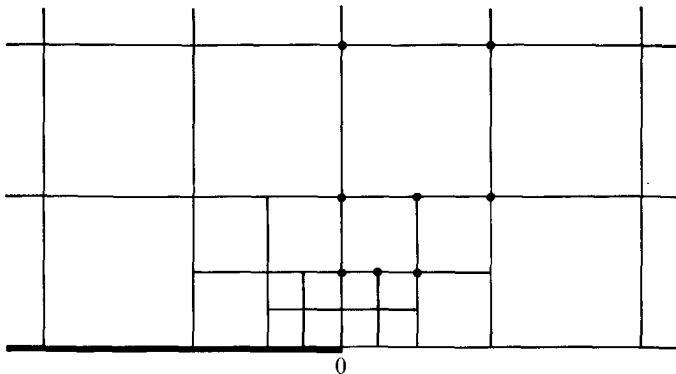


fig. 8. — Rectangles à cinq nœuds.

par BABUSKA et RHEINBOLDT [5, 7], elle a conduit au programme bidimensionnel FEARS [7].

WHITEMAN [71] signale un raffinement de maillage non automatique (« non self-adaptive ») utilisé [25] en déformation plane : pour l'approximation de la fonction d'Airy, une fonction conforme de classe C^1 est alors définie par morceau par des fonctions polynomiales générées sur un rectangle à cinq nœuds (fig. 8).

Quand le raffinement du maillage augmente, la suite des valeurs du facteur d'intensité de contraintes obtenues converge.

II.2.2. Programme APES

Le programme de calcul APES (Axisymmetric/Planar Elastic Structures [2]) a été développé pour résoudre par la méthode des éléments finis les problèmes de corps fissurés. La version actuellement disponible est bidimensionnelle élastique. Son originalité réside dans l'utilisation de deux types d'éléments particuliers :

— *Un élément singulier circulaire appelé noyau*

Dans cet élément, sont incorporés à titre d'inconnues supplémentaires, les facteurs d'intensité de contrainte et les déplacements en fond de fissure. Il n'est utilisé qu'à la pointe de la fissure. La continuité avec les éléments isoparamétriques à douze nœuds à côtés rectilignes (fig. 9) du milieu non fissuré s'effectue à l'aide d'éléments isoparamétriques à côtés courbes.

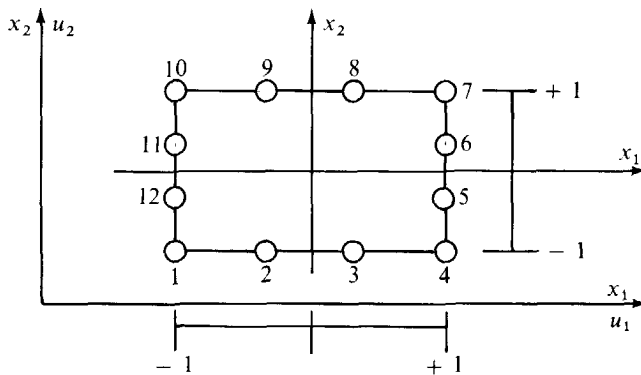


fig. 9. — *Élément isoparamétrique à douze nœuds.*

Un demi-disque est utilisé pour les problèmes symétriques de mode I (fig. 10) et un disque complet pour les problèmes de combinaison des modes I et II (fig. 11).

La formulation du champ de déplacements autour du fond de fissure pour le cas d'une fissure inclinée en problème plan (fig. 12) a été donnée par SIH et LIEBOWITZ [65] et se présente sous la forme :

$$\begin{aligned}
 (3) \quad u_1 &= u_1^0 + K_I f_1(\theta, r, \alpha, K, \mu) + K_{II} g_1(\theta, r, \alpha, K, \mu) \\
 u_2 &= u_2^0 + K_I f_2(\theta, r, \alpha, K, \mu) + K_{II} g_2(\theta, r, \alpha, K, \mu) .
 \end{aligned}$$

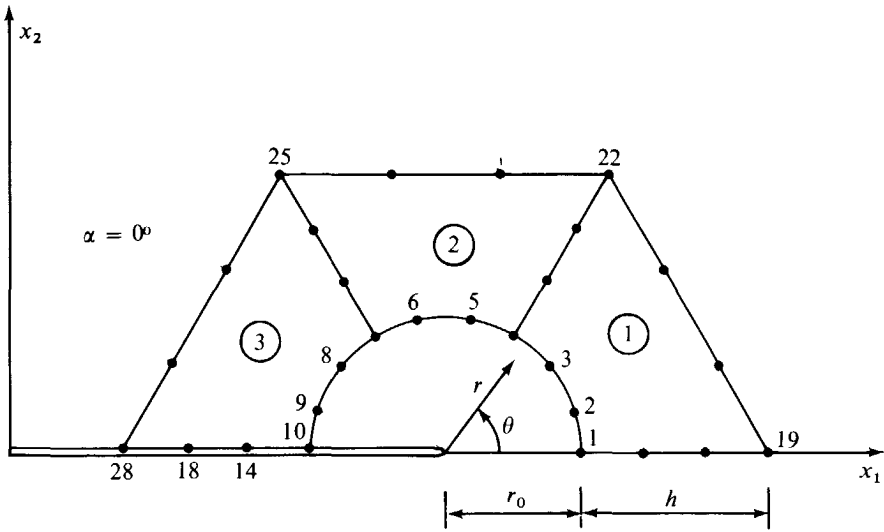


fig. 10. — *Elément singulier. Mode I* (d'après APES).

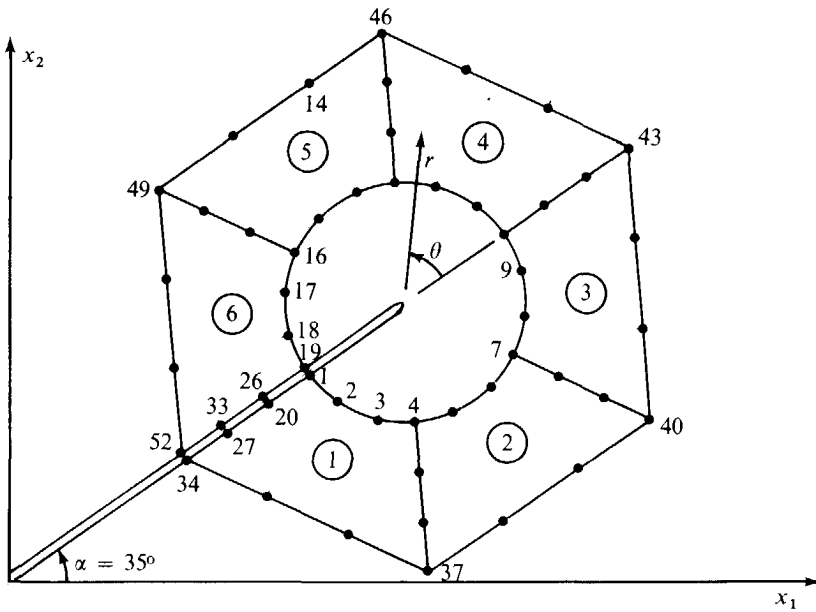


fig. 11. — *Elément singulier. Modes I + II* (d'après APES).

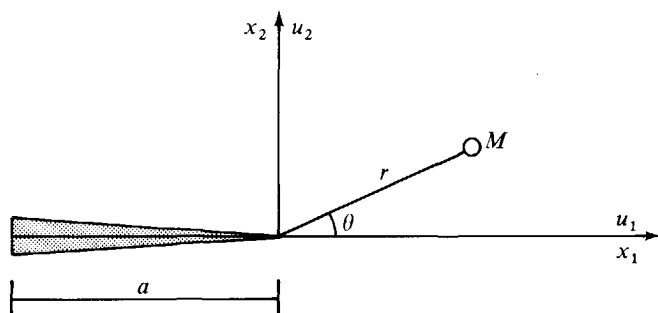


fig. 12.

où :

u_1, u_2 : composantes du déplacement au point M

u_1^0, u_2^0 : déplacements à l'extrémité de la fissure

α : angle d'inclinaison de la fissure

r, θ : coordonnées polaires du point M où l'on calcule les déplacements u_1 et u_2 .

Les équations (3) possèdent quatre inconnues $K_I, K_{II}, u_1^0, u_2^0$ ($u_2^0 = K_{II} = 0$ en mode I) qui sont déterminées par minimisation de l'énergie potentielle de la structure calculée.

— *Un élément quadrilatéral isoparamétrique à douze nœuds (QUAD(12) enrichi*

Les facteurs d'intensité de contrainte sont aussi inclus dans le champ de déplacement. Cet élément est utilisé en pointe de fissure, le reste de la structure étant modélisé par des éléments classiques isoparamétriques à douze nœuds. Les déplacements sur l'élément enrichi s'expriment par :

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \dots + \alpha_{12} x_1 x_2^3 + K_I f_1 + K_{II} g_1$$

$$v = \alpha_{13} + \alpha_{14} x_1 + \alpha_{15} x_2 + \dots + \alpha_{24} x_1 x_2^3 + K_I f_2 + K_{II} g_2 .$$

Comme pour l'élément circulaire, les inconnues K_I et K_{II} sont calculées par minimisation de l'énergie potentielle.

L'utilisation de ces éléments très performants (un élément QUAD-12 peut remplacer 50 à 200 éléments triangulaires) permet une modélisation simple et des temps de calcul très courts. Cependant, le développement de la version tridimensionnelle d'un tel programme ne semble pas apporter une solution économique pour un bureau d'études.

II.2.3. Quarter-point method

Cette méthode introduite par HENSHELL et SHAW [28] et BARSOU [8] consiste, en utilisant des éléments quadratiques isoparamétriques à huit nœuds [75], à déplacer un nœud milieu au quart du côté près du sommet de la singularité. Ainsi, quand l'élément aux nœuds déplacés est traité comme un élément standard, le jacobien de la transformation devient singulier, ce qui permet d'obtenir une expression des déformations où figure la singularité en $r^{-1/2}$.

a) *Présentation de la méthode*

En reprenant les notations de [75] et la présentation [8], la géométrie d'un élément isoparamétrique à huit nœuds est donnée par :

$$(4) \quad \begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) x_i \\ y &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) y_i \end{aligned}$$

N_i étant la fonction de forme correspondant au nœud i , de coordonnées (x_i, y_i) dans le repère global et (ξ_i, η_i) dans le repère local (fig. 13).

$$N_i(\xi, \eta) = [(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) - (1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i) - (1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i)] \xi_i^2 \eta_i^2 / 4 + (1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)(1 - \xi_i^2) \eta_i^2 / 2 + (1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta_i^2) \xi_i^2 / 2 .$$

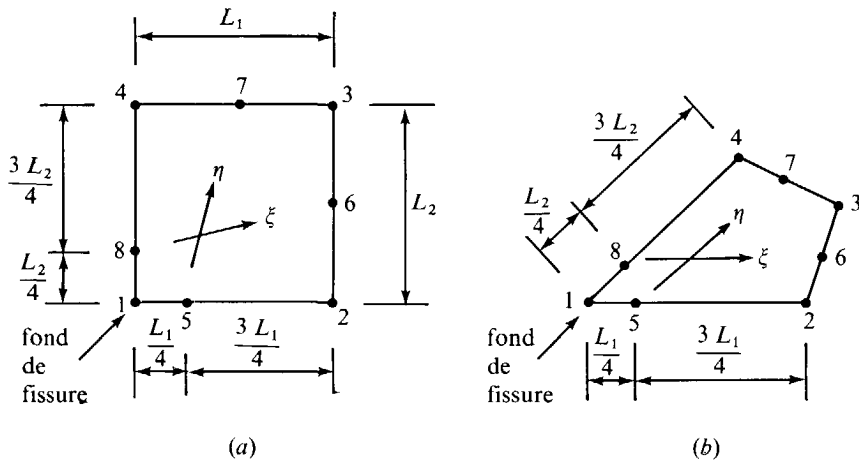


fig. 13. — *Eléments rectangulaires avec les points milieu déplacés au quart des côtés (d'après BARSOUM [8]).*

Considérons la singularité sur le côté 1-2 ($\eta = -1$) (fig. 13). Les fonctions de forme évaluées le long du côté 1-2 sont

$$\begin{cases} N_1 = -\frac{\xi}{2}(1 - \xi) \\ N_2 = \frac{\xi}{2}(1 + \xi) \\ N_3 = 1 - \xi^2 \end{cases}$$

En reportant $x_1 = 0$, $x_2 = L$ et $x_3 = L/4$ dans l'équation (4), on obtient :

$$x = \frac{\xi}{2}(1 + \xi)L + (1 - \xi^2)\frac{L}{4}$$

d'où :

$$\xi = -1 + 2\sqrt{\frac{x}{L}}$$

Dans l'expression du jacobien

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{L}{2}(1 + \xi) = \sqrt{\frac{x}{L}}$$

rend celui-ci singulier pour ($x = 0$, $\xi = -1$).

Les déplacements sont obtenus par :

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) u_i \\ v = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) v_i \end{cases}$$

En explicitant u le long du côté 1-2 en fonction de u_1, u_2, u_5 et de x , on obtient l'expression de la déformation

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{xL}} - \frac{4}{L}\right)u_1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{xL}} + \frac{4}{L}\right)u_2 + \left(\frac{2}{\sqrt{xL}} - \frac{4}{L}\right)u_5$$

qui comprend la singularité en $r^{-1/2}$.

Un élément triangulaire à six nœuds est obtenu par dégénérescence d'un côté du quadrilatère à huit nœuds (fig. 14).

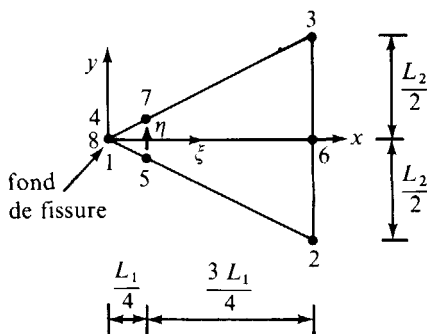


fig. 14. — Élément triangulaire (d'après BARSOU [8]).

b) Développement de la méthode

La méthode a été développée en trois dimensions par BARSOU avec un élément parallélépipédique à vingt nœuds [10] qui peut être dégénéré en un élément prismatique [9]. Il a obtenu de meilleurs résultats avec les éléments triangulaires ou prismatiques qu'avec les rectangles ou parallélépipèdes. HIBBIT [29] a proposé une explication due au fait que l'énergie de déformation est bornée dans un élément triangulaire et non bornée dans un élément quadrangulaire.

La référence [74] présente les différents éléments finis étudiés intégrant une singularité.

LYNN et INGRAFFEA [45] ont étendu la zone de prise en compte de la singularité à une deuxième couche d'éléments particuliers, ce qui améliore la précision.

PU, HUSSAIN et LORENSEN [51] ont appliqué une technique similaire à la méthode du « quarter-point » en utilisant un quadrilatère isoparamétrique à douze nœuds dans lequel ils placent les nœuds des côtés au $1/9$ et au $4/9$ du côté à partir du fond de fissure. Ils ont inséré [52] ces éléments dans le programme APES.

Récemment, INGRAFFEA et MANU [32] ont montré qu'ils pouvaient obtenir, avec des éléments tridimensionnels, des résultats comparables à ceux provenant de l'application de la méthode des équations intégrales. Cependant, d'après les exemples traités, on ne peut tirer de conclusion quant à la comparaison des deux méthodes.

II.3. MÉTHODE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES (M.E.I.)

La méthode des éléments finis conduit, pour l'étude des structures fissurées tridimensionnelles, à des maillages très importants (9 300 degrés de liberté pour une fissure de coin au bord du trou d'une plaque [55]) qui ne sont pas en rapport avec le travail d'un bureau d'études.

C'est pourquoi les problèmes de fissuration peuvent être avantageusement étudiés par une résolution basée sur les équations intégrales de surface. Ceci permet de ne mailler que la surface de la structure à étudier et non son volume. Il peut en résulter un gain important au niveau de la discrétisation. On verra que cette méthode présente l'inconvénient de conduire à la résolution d'un système linéaire dont la matrice est pleine (et donc non bande comme pour la méthode des éléments finis). C'est pourquoi on peut être amené à considérer un couplage des méthodes E.F. et E.I. pour aboutir à un outil adapté au problème.

Le principe des équations intégrales a été introduit dans les problèmes d'élasticité par FREDHOLM [58] et développé par RIZZO [58] et CRUSE [19]. Les tests comparatifs avec la méthode des éléments finis sont donnés en référence [50, 58].

Plusieurs voies (mathématiquement équivalentes) sont possibles pour l'obtention d'équations intégrales.

II.3.1. Différentes formulations

II.3.1.1. Formulation indirecte

La formulation **indirecte** consiste à distribuer de manière quelconque des **sources** s sur une surface S à priori distincte de S et à résoudre ensuite des équations

exprimant les déplacements et les tensions sous forme d'intégrales étendues au sens des **valeurs principales de CAUCHY**.

Dans tout le domaine les déplacements sont donnés par :

$$u(x) = \int_s^* U(x, y) s(y) dS(y).$$

Les tensions s'expriment en tout point intérieur au domaine par :

$$t(x) = T^n(u(x)) = \int_s^* T(x, n; y) s(y) dS(y)$$

et sur la surface par :

$$t(x) = c(x) s(x) + \int_s^* T(x, n; y) s(y) dS(y)$$

où $c(x)$ est un terme libre qui dépend de la régularité de la surface d'intégration et où U et T désignent les tenseurs définis dans § II.3.1.

La difficulté majeure de ces méthodes est de choisir une distribution de source optimale.

II.3.1.2. Formulations directes

La formulation *directe* consiste à établir une relation directe entre les déplacements et les tensions de surface. On peut distinguer principalement deux méthodes :

— la *méthode de FREDHOLM* (développée dans II.3.1.3.) qui est actuellement utilisée comme support théorique dans le programme « Equations Intégrales Tridimensionnelles, E.I.T.D. » du code CA.ST.OR. * [17];

— la *méthode des équations intégrales scalaires* [17] dont nous présentons ici les grandes lignes. Considérons une fissure de forme arbitraire S contenue dans un

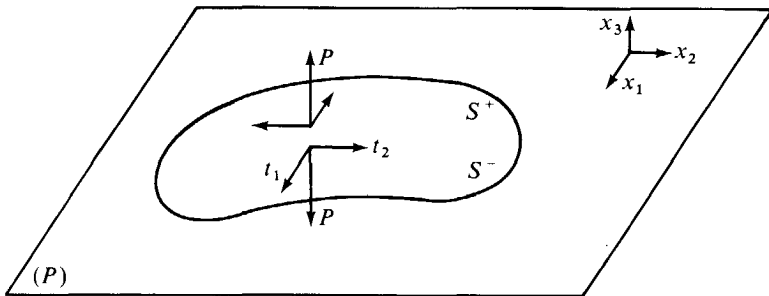


fig. 15.

* Calcul de Structures sur Ordinateur.

plan $P(O, x_1, x_2)$; on s'intéresse alors au calcul de la discontinuité du déplacement normal u_3 que l'on peut écrire :

$$2 \phi_3(x_1, x_2)$$

où ϕ_3 représente l'ouverture de la lèvres supérieure S^+ .

Ainsi pour le mode d'ouverture sous traction normale $t_3(y_1, y_2)$ l'ouverture ϕ_3 est décrite [17] par l'équation intégrale :

$$(5) \quad \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\pi(\lambda + 2\mu)} \int_S^* \frac{\delta}{\delta y_i} \left(\frac{1}{r(x, y)} \right) \frac{\delta \phi_3}{\delta x_i} dS(x) = t_3(y)$$

(l'intégrale est prise au sens d'une **valeur principale de CAUCHY**).

On ajuste alors ϕ_3 par la méthode de RAYLEIGH-RITZ de la façon suivante : la fonction inconnue ϕ_3 est approximée par

$$f(x) \sum_{0 \leq j \leq n} a_j g_j(x)$$

où $g_j(x)$ est un monôme de la forme $x_1^p x_2^q$, et où $f(x)$ est une fonction de pondération, continue sur S et nulle sur la ligne de fissure. Par exemple dans les problèmes de fissures de formes circulaire, elliptique et rectangulaire, les fonctions f sont respectivement :

$$\begin{aligned} f(x) &= (a^2 - \|x\|^2)^{1/2} \\ &= \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right)^{1/2} \\ &= (a^2 - x_1^2)^{1/2} (b^2 - x_2^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

A partir de (5) on obtient, pour tout $0 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq j \leq n} \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\pi(\lambda + 2\mu)} \left[\int_S f(y) g_i(y) \left[\int_S^* \frac{\delta}{\delta y_s} \left(\frac{1}{r(x, y)} \right) \frac{\delta}{\delta x_s} (f(x) g_j(x)) dS(x) \right] dS(y) \right] \\ = \int_S f(y) g_i(y) t_3(y) dS(y) \end{aligned}$$

que l'on écrit sous forme d'un système linéaire du type :

$$\{ A_{ij} a_j \} = \{ b_i \}.$$

Les constantes inconnues a_j au nombre de $(n + 1)(n + 2)/2$ sont alors ajustées de telle manière que les conditions aux limites sur la surface fissurée soient satisfaites.

Une illustration de cette méthode a été faite dans le cas d'un milieu semi-infini [53]. Son extension pour un milieu fini n'est malheureusement pas possible.

II.3.1.3. Méthode de FREDHOLM

Pour déterminer les déplacements u solutions « faibles » de l'équation de NAVIER :

$$\Delta^* u = -f$$

satisfaisant aux conditions aux limites (fig. 1) :

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i \quad \text{sur } S_u \\ t_i &= \bar{t}_i \quad \text{sur } S_t \end{aligned}$$

on s'intéresse tout d'abord au problème d'élasticité linéaire lié à un milieu infini ($\Delta^* u = 0$), c'est-à-dire qu'en termes de distribution on recherche le noyau fondamental de l'opérateur d'élasticité Δ^* dans l'espace des distributions tempérées S' [60].

La solution est le tenseur de KELVIN-SOMIGLIANA noté U , que l'on calcule par la transformation de FOURIER ou par la méthode d'HORMANDER [30].

En particulier, soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée de \mathbb{R}^3 , alors pour un effort ponctuel appliqué au point y et parallèle au vecteur de base e_K , le champ de déplacement en tout point x s'écrit :

$$u^K(x, y) = U e_K = U_{iK}(x, y) e_i$$

où

$$U_{iK}(x, y) = \frac{1 + \nu}{8 \pi E(1 - \nu)} \left[(3 - 4 \nu) \frac{\delta_{iK}}{r} + \frac{(x_i - y_i)(x_K - y_K)}{r^3} \right]$$

$(r(x, y))$: distance euclidienne entre x et y .

Le champ de déplacement u^K a une singularité en $1/r$ lorsque x coïncide avec y .

Le champ de tension t^K défini à partir de l'opérateur différentiel T^n , où n est la normale en y ,

$$t^K = T^n u = T_{iK} e_i$$

où

$$\begin{aligned} T_{iK}(x; y, n) &= \frac{1}{8 \pi(1 - \nu) r^2} \left\{ (1 - 2 \nu) \left[n_i(y) \frac{x_K - y_K}{r} - n_K(y) \frac{x_i - y_i}{r} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[(1 - 2 \nu) \delta_{iK} + 3 \frac{(x_i - y_i)(x_K - y_K)}{r^2} \right] n_S(y) \frac{x_S - y_S}{r} \right\} \end{aligned}$$

possède alors une singularité en $1/r^2$ lorsque x coïncide avec y .

On note T le tenseur $(T_{iK}) = T^n U$.

On peut à présent relier les déplacements en un point intérieur aux déplacements et tensions en tous points de la surface. Soient V le domaine fini étudié et V^- l'intérieur de V . Soit $x_0 \in V^-$ et soit ε un réel positif; considérons le domaine régulier $V \setminus V_\varepsilon(x_0)$ où $V_\varepsilon(x_0)$ est une boule de surface S_ε , de centre x_0 et de rayon ε (fig. 16).

On applique dans le domaine $V \setminus V_\varepsilon(x_0)$, le principe de réciprocité de BETTI [44] aux champs de déplacements u ($u = u_j e_j$) et u^i ($u^i = U_{ij} e_j$).

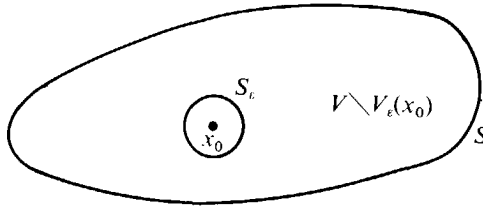


fig. 16.

Les forces de volume étant supposées nulles ; pour tout $i = 1, 2, 3$ on obtient :

$$(6) \quad \int_{S+S_\epsilon} [(T^n u^i(x_0, y))^t u(y) - (T^n u(y))^t u^i(x_0, y)] d(S + S_\epsilon)(y) = 0$$

c'est-à-dire encore :

$$\int_{S+S_\epsilon} [T_{ij}(x_0; y, n) u_j(y) - U_{ij}(x_0, y) t_j(y)] d(S + S_\epsilon)(y) = 0.$$

En recherchant des tenseurs équivalents à U et T au voisinage de l'origine on montre que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} T_{ij}(x_0; y, n) u_j(y) dS_\epsilon(y) = u_i(x_0)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_S U_{ij}(x_0, y) t_j(y) dS(y) = 0.$$

On obtient alors le déplacement en $x_0 \in V^-$ sous la forme d'une équation intégrale

$$(7) \quad u_i(x_0) = \int_S U_{ij}(x_0, y) t_j(y) dS(y) - \int_S T_{ij}(x_0; y, n) u_j(y) dS(y).$$

Maintenant écrivons l'équation intégrale de base qui lie les déplacements en un point x_0 de la surface aux déplacements et tensions en tous les points de la surface. Considérons donc un domaine régulier $V \setminus V_\epsilon(x_0)$ (fig. 17), et l'équation (6) correspondante, obtenue à partir de la relation de BETTI.

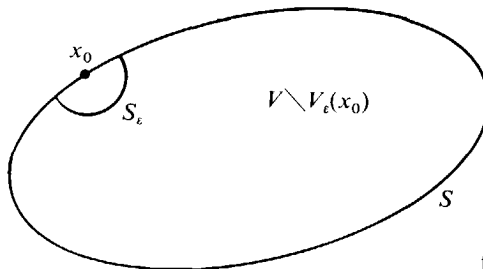


fig. 17.

D'une part la fonction vectorielle $u^i(x_0, y)$, localement intégrable sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{x_0\}$, définit une distribution du type valeur principale de CAUCHY sur \mathbb{R}^3 , et la fonction $t^i(x_0, y)$ obtenue par une dérivation d'ordre 1 définit une distribution du type pseudo-fonction ; on peut alors considérer la valeur principale en t de u^i et la partie finie en u de t^i , que l'on note respectivement :

$$\int_S^* U_{ij}(x_0, y) t_j(y) dS(y)$$

et

$$\int_S^* T_{ij}(x_0; y, n) u_j(y) dS(y).$$

D'autre part d'après [57]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} T_{ij}(x_0; y, n) dS_\varepsilon(y) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \{ (1-2\nu) \delta_{ij} \Omega + 3 P_{ij} \} = c_{ij}(x_0)$$

où Ω est l'angle solide sur lequel S est vue du point x_0 et où P_{ij} est le produit d'inertie relatif aux axes (x_0, \vec{i}) et (x_0, \vec{j}) de la portion de sphère unité centrée en x_0 , de densité surfacique l'unité, et limitée par les plans tangents à S en x_0 . En particulier :

- si S est régulière on a $c_{ij}(x_0) = \frac{1}{2} \delta_{ij}$,
- si S présente une arête prise pour axe (x_0, \vec{i}) et si $\Omega = \pi/2$, on a :

$$\begin{aligned} c_{ii}(x_0) &= \frac{1}{4} \\ c_{12}(x_0) &= c_{13}(x_0) = 0 \\ c_{23}(x_0) &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)}. \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} T_{ij}(x_0; y, n) u_j(y) dS_\varepsilon(y) = c_{ij}(x_0) u_j(x_0).$$

Ainsi comme,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} U_{ij}(x_0, y) t_j(y) dS_\varepsilon(y) = 0$$

on écrit l'équation intégrale de base sous la forme :

$$(8) \quad c_{ij}(x_0) u_j(x_0) + \int_S^* T_{ij}(x_0; y, n) u_j(y) dS(y) = \int_S^* U_{ij}(x_0, y) t_j(y) dS(y).$$

Enfin, on peut déterminer les contraintes en tous les points du domaine V à partir de la loi de HOOKE,

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij}$$

où les déformations ε_{ij} sont définies par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) .$$

On obtient alors, pour tout $x \in V$:

$$(9) \quad \sigma_{ij}(x) = \int_S^* D_{ijk}(x, y) t_k(y) dS - \int_S^* F_{ijk}(x; y, n) u_k(y) . dS$$

où D_{ijk} et F_{ijk} sont des tenseurs de 3^e ordre réguliers pour tout $x \in V^-$

$$D_{ijk}(x, y) = \frac{1}{8 \pi (1 - \nu) r^2} \left\{ (1 - 2 \nu) \left[\delta_{ij} \frac{x_k - y_k}{r} - \delta_{ik} \frac{x_j - y_j}{r} - \delta_{jk} \frac{x_i - y_i}{r} \right] - \right. \\ \left. - 3 \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{r^3} \right\}$$

$$F_{ijk}(x; y, n) = \frac{E}{8 \pi (1 - \nu^2) r^3} \left\{ n_S(y) \frac{x_S - y_S}{r} \left[3(1 - 2 \nu) \delta_{ij} \frac{x_k - y_k}{r} + \right. \right. \\ \left. \left. + 3 \nu \left(\delta_{ik} \frac{x_j - y_j}{r} + \delta_{jk} \frac{x_i - y_i}{r} \right) - 15 \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{r^3} \right] \right. \\ \left. + n_i(y) \left[3 \nu \frac{(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{r^2} + (1 - \lambda \nu) \delta_{jk} \right] \right. \\ \left. + n_j(y) \left[3 \nu \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{r^2} + (1 - 2 \nu) \delta_{ik} \right] \right. \\ \left. + n_k(y) \left[3(1 - 2 \nu) \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{r^2} - (1 - 4 \nu) \delta_{ij} \right] \right\} .$$

II.3.2. Traitement numérique des équations intégrales

II.3.2.1. Méthode du CETIM * [47] (1975)

Tout d'abord, nous allons présenter une méthode de discrétisation de l'équation intégrale de base qui a pour objet d'approcher l'équation intégrale par un système d'équations linéaires dont les inconnues sont les valeurs des tensions et déplacements aux nœuds de contrôle.

* Centre Technique des Industries Mécaniques.

Soit $x \in S$, nous considérons l'équation (8) :

$$c_{ij}(x) u_j(x) + \int_S^* T_{ij}(x; y, n) u_j(y) dS(y) = \int_S^* U_{ij}(x, y) t_j(y) dS(y).$$

a) *Le sous-régionnement*

On a vu que les noyaux U_{ij} et T_{ij} ont respectivement des singularités en $1/r$ et $1/r^2$; il est clair que pour une structure de forme allongée (r pouvant être grand), une méthode de discrétisation globale conduirait à une matrice pleine ayant un grand nombre de termes de faibles valeurs en dehors d'un voisinage de la diagonale principale, et que par suite, on aurait un mauvais conditionnement de la matrice (théorème de SAINT-VENANT).

Pour éviter cela, on décompose le milieu en sous-régions (fig. 18).

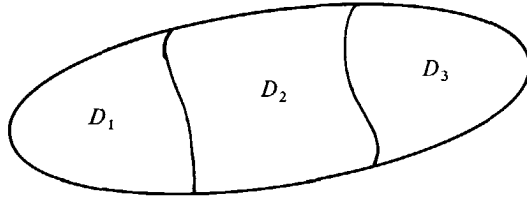


fig. 18. — Décomposition du domaine D en trois sous-régions.

On considère alors :

$$V = \bigcup_k D^{(k)}$$

où $D^{(k)}$ est une sous-région de V limitée par la surface $S^{(k)}$.

Pour chaque k , on voit que pour tout $x \in S^{(k)}$, l'équation (8) devient :

$$(10) \quad c_{ij}^{(k)}(x) u_j(x) + \int_{S^{(k)}}^* T_{ij}^{(k)}(x; y, n) u_j^{(k)}(y) dS(y) = \int_{S^{(k)}}^* U_{ij}^{(k)}(x, y) t_j^{(k)}(y) dS(y)$$

et que pour tout x élément de l'interface $D^{(k)} \cap D^{(l)}$, $l \neq k$, les conditions de continuité donnent :

$$u_i^{(k)}(x) = u_i^{(l)}(x)$$

$$t_i^{(k)}(x) = - t_i^{(l)}(x).$$

b) *Discrétisation de l'équation intégrale de base*

Les surfaces élémentaires étudiées sont des quadrilatères à huit nœuds ou des triangles à six nœuds (fig. 19) qui sont obtenus à partir des quadrilatères précédents par dégénérescence.

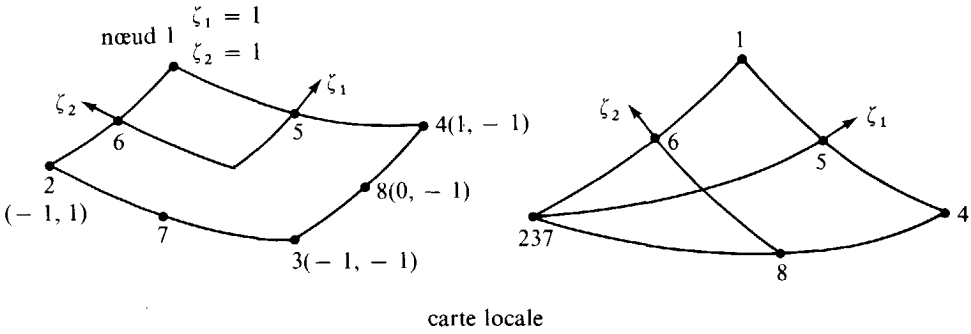


fig. 19. — (D'après LACHAT et WATSON [46].)

a) Tout point P de la surface élémentaire étant un barycentre des nœuds P^a ($a = 1, \dots, 8$), il existe pour tout élément a , des fonctions polynomiales $N^a(\zeta)$ définies sur la carte locale des $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ où $-1 \leq \zeta_i \leq 1$, telles que l'on ait :

$$P = N^a(\zeta) P^a \quad \text{et} \quad \sum_{a=1}^8 N^a(\zeta) = 1.$$

On appelle ζ_1 et ζ_2 les **coordonnées intrinsèques** de P et $N^a(\zeta)$ une fonction de forme :

$$N^1(\zeta) = \frac{1}{4} (\zeta_1 + 1)(\zeta_2 + 1)(\zeta_1 + \zeta_2 - 1)$$

et

$$N^5(\zeta) = \frac{1}{2} (\zeta_1 + 1)(1 - \zeta_2).$$

On en déduit facilement les autres fonctions de forme par symétrie axiale et par symétrie centrale sur la carte locale.

b) De même, si ϕ est un champ de vecteurs (ex. : u ou t) :

$$\phi = M^a(\zeta) \phi^a$$

où ϕ^a est la valeur de ϕ au nœud a et où $M^a(\zeta)$ est une fonction de forme définie sur la carte locale, les fonctions de forme les plus usuelles modélisent des variations du type linéaire, quadratique ou cubique (éléments de SERENDIP).

En particulier, pour une variation quadratique, on a

$$M^a(\zeta) = N^a(\zeta).$$

c) Soit :

$$S^{(k)} = \bigcup_{b=1}^{p(k)} S_b^{(k)}$$

où $S_b^{(k)}$ est une surface élémentaire à n nœuds ($n = 6$ ou 8).

On numérote $d = d^{(k)}(b, c)$ le nœud P^c de l'élément $S_b^{(k)}$. L'équation (10) discrétisée pour le nœud x^a s'écrit :

$$c_{ij}^{(k)}(x^a) u_j^{(k)}(x^a) + \sum_{b=1}^{p(k)} \sum_{c=1}^{n-} u_j^{(k)}(x^d) \int_{S_b^{(k)}}^* T_{ij}^{(k)}(x^a; y(\xi), n) M^c(\zeta) J(\zeta) d\zeta =$$

$$= \sum_{b=1}^{p(k)} \sum_{c=1}^{n-} t_j^{(k)}(x^d) \int_{S_b^{(k)}}^* U_{ij}^{(k)}(x^a, y(\zeta)) M^c(\zeta) J(\zeta) d\zeta$$

où : y est l'élément générique de \mathbb{R}^3 du point courant pour l'intégration, $J(\zeta)$ est le jacobien de la transformation des coordonnées cartésiennes en coordonnées intrinsèques, c'est-à-dire le déterminant $|\partial x_i / \partial \zeta_j|$.

c) *Traitement numérique*

- *Le nœud x^a n'appartient pas à $S_b^{(k)}$, alors les intégrales*

$$\int_{S_b^{(k)}} T_{ij}^{(k)}(x^a; y(\zeta), n) M^c(\zeta) J(\zeta) d\zeta \quad \text{et} \quad \int_{S_b^{(k)}} U_{ij}^{(k)}(x^a, y(\zeta)) M^c(\zeta) J(\zeta) d\zeta$$

sont régulières et pour les calculer, on peut utiliser des formules de quadrature de GAUSS à deux dimensions et à nœuds optimisés [67].

Les études faites dans le cas des milieux bidimensionnels montrent qu'un critère de bonne précision est de privilégier la partie de $S_b^{(k)}$ la plus proche de x^a ; ceci peut être fait en associant à un découpage de $S_b^{(k)}$ en sous-éléments, suivant les directions des axes de coordonnées intrinsèques, une augmentation de la densité des nœuds dans les sous-éléments proches de x^a (fig. 20).

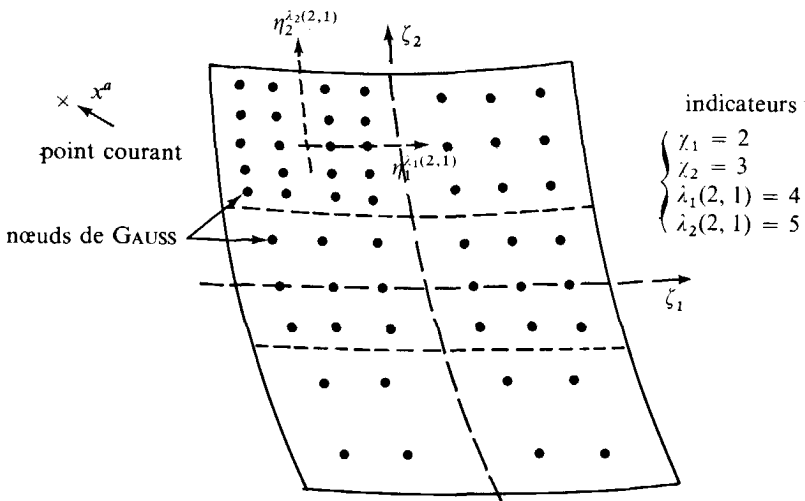


fig. 20. — Élément $S_b^{(k)}$.

Si l'on numérote les sous-éléments de $S_b^{(k)}$ par un indicateur (i, j) où $1 \leq i \leq \chi_1$ et $1 \leq j \leq \chi_2$ et si pour un sous-élément (i, j) , on numérote les nœuds par un indicateur (k, l) où $1 \leq k \leq \lambda_1(i, j)$ et $1 \leq l \leq \lambda_2(i, j)$, il devient clair que les paramètres $\chi_1, \chi_2, \lambda_1(i, j), \lambda_2(i, j)$ sont alors les pivots du traitement numérique de l'intégration sur $S_b^{(k)}$.

Si de plus, on définit par $\eta_1^{\lambda_1(i, j)}$ et $\eta_2^{\lambda_2(i, j)}$ les coordonnées intrinsèques de la carte locale du sous-élément (i, j) , on a :

$$\zeta_1 = 1 + \frac{1 - 2i + \eta_1^{\lambda_1(i, j)}}{\chi_1}$$

et

$$\zeta_2 = 1 + \frac{1 - 2j + \eta_2^{\lambda_2(i, j)}}{\chi_2}.$$

Pour déterminer ces pivots, on peut s'appuyer sur la méthode suivante : soient

— K une constante expérimentale normalisée à partir du nombre de points de GAUSS pouvant être mis sur un arc de 1 radian.

— $\lambda^{[L]}$ et $\lambda^{[H]}$ les bornes respectivement inférieure et supérieure de l'ordre de la formule de GAUSS.

— Θ une borne supérieure du nombre de sous-éléments suivant les axes de coordonnées intrinsèques.

On note que toutes ces bornes sont fixées par les contraintes de l'utilisateur.

— R la distance du nœud x^a à l'élément $S_b^{(k)}$.

Une boucle sur $h = \lambda^{[L]}, \dots, \lambda^{[H]}$ permet de déterminer $m_i(h_0)$ inférieur à Θ tel que :

$$\frac{2h_0 + 1}{(2R)^{2h_0}} \left(\frac{1}{m_i(h_0)} \right)^{2h_0} \left(\left| \frac{\partial S}{\partial \zeta_i} \right| \right)^{2h_0} \leq K$$

on pose alors $\chi_1 = m_1(h_0)$ et $\chi_2 = m_2(h_0)$.

L'élément $S_b^{(k)}$ est ainsi découpé en sous-éléments.

Pour $i = 1, 2$ on détermine ensuite un entier m_i vérifiant

$$(11) \quad \lambda^{[L]} \leq m_i \leq \lambda^{[H]}$$

et

$$(12) \quad \frac{2m_i + 1}{(2R)^{2m_i}} \left(\left| \frac{\partial S}{\partial \eta_i} \right| \right)^{2m_i} \leq K$$

(s : abscisse curviligne); l'inégalité (12) étant vérifiée sur la carte locale de coordonnées intrinsèques (η_1, η_2) , contenant le point de $S_b^{(k)}$ le plus proche de x^a . Si l'indicateur de cette carte est (i, j) , on aura :

$$\lambda_1(i, j) = m_1 \quad \text{et} \quad \lambda_2(i, j) = m_2.$$

Pour une carte locale d'indicateur (k, l) , on remplace dans (12), R par la distance de x^a à la carte locale (k, l) ; et les valeurs des entiers m_1 et m_2 vérifiant alors (12) sont les valeurs de $\lambda_1(k, l)$ et $\lambda_2(k, l)$.

On peut signaler que l'erreur commise ε dans la formule de quadrature de GAUSS ($m_1 \times m_2$) est :

$$\varepsilon = \frac{2 MJ}{R^2} \sum_{i=1}^2 \frac{2 m_i + 1}{(2 R)^{2m_i}} \left(\frac{\partial s}{\partial \eta_i} \right)^{2m_i}$$

où $M \simeq 4,0$ et où J est le jacobien $\left| \frac{\partial s}{\partial \eta_i} \right|$.

- Le nœud x^a appartient à $S_b^{(k)}$ mais on a $a \neq d^{(k)}(b, c)$

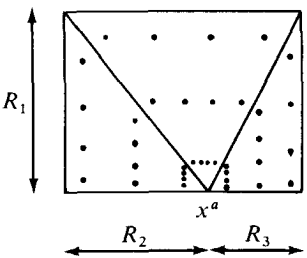
On doit alors déterminer la valeur principale de l'intégrale

$$\int_{S_b^{(k)}}^* U_{ij}^{(k)}(x^a, y(\zeta)) M^c(\zeta) J(\zeta) d\zeta$$

et la partie finie de l'intégrale

$$\int_{S_b^{(k)}}^* T_{ij}^{(k)}(x^a; y(\zeta), \eta) M^c(\zeta) J(\zeta) d\zeta$$

ou bien l'élément $S_b^{(k)}$ est un quadrilatère non dégénéré et on décompose tout d'abord $S_b^{(k)}$ en triangles de sommet x^a , puis on détermine les indicateurs de nœuds à partir de l'inéquation (12) précédente avec la définition suivante de R :



x^a est le sommet d'un triangle et R est la distance de x^a à la base qui lui est associée.

fig. 21. — Élément $S_b^{(k)}$. Méthode de GAUSS (4×3).

ou bien l'élément $S_b^{(k)}$ est un quadrilatère dégénéré, et vu sa grande distorsion, il est préférable d'utiliser des fonctions de formes et les coordonnées intrinsèques (L_1, L_2, L_3) , spécialement adaptées aux triangles (méthode souvent utilisée en éléments finis) (fig. 22).

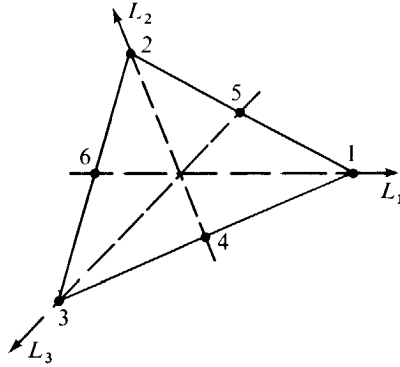


fig. 22.

On transforme alors l'intégrale de surface de base en fonction des coordonnées L_1 , L_2 et L_3 et le schéma d'intégration sur le triangle se déduit de celui du carré par la transformation :

$$L_1 = \frac{1}{2}(1 + \zeta_1) \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{1}{4}(1 - \zeta_1)(1 - \zeta_2).$$

• Enfin, si le nœud pour l'intégration est au point singulier $a = d^{(k)}(b, c)$, on évalue tout d'abord la valeur principale de noyau $U_{ij}(x^a, y)$ par une formule de GAUSS à nœuds optimisés, adaptée aux fonctions de poids de la forme $1/r$ [18]; par contre, il n'existe pas de formule de quadrature suffisamment précise pour évaluer la partie finie de l'intégrale de noyau $T_{ij}(x^a, y)$. Celle-ci peut s'obtenir en matérialisant le mouvement d'un solide ($u = \text{Cte}$, $t = 0$); il vient alors

$$\begin{aligned} c_{ij}^{(k)}(x^a) + \sum_{b=1}^{p(k)} \sum_{c=1}^n \delta_{ad} \int_{S_b^{(k)}}^* T_{ij}^{(k)}(x^a; y(\zeta), n) M^c(\zeta) J(\zeta) d\zeta \\ = - \sum_{b=1}^{p(k)} \sum_{c=1}^n (1 - \delta_{ad}) \int_{S_b^{(k)}}^* T_{ij}^{(k)}(x^a; y(\zeta), n) M^c(\zeta) J(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

où δ_{ad} est le symbole de KRÖNECKER $\begin{cases} \delta_{ad} = 0 & \text{si } a \neq d \\ \delta_{ad} = 1 & \text{si } a = d \end{cases}$.

On évite ainsi le calcul de :

$$c_{ij}^{(k)}(x^d) + \int_{S_b^{(k)}}^* T_{ij}^{(k)}(x^d; y(\zeta), n) M^c(\zeta) J(\zeta) d\zeta$$

puisque le deuxième membre de l'équation précédente a été calculé dans le cas où $x^a \neq x^d$.

II.3.2.2. Méthode de CRUSE (1969)

On a vu précédemment que l'écriture des fonctions inconnues (déplacements et tensions) à l'aide des fonctions de forme permet de modéliser des variations du type linéaire, quadratique ou cubique.

Dans une première approche CRUSE [19] a supposé les distributions des fonctions inconnues constantes sur chaque facette.

Cette hypothèse simplificatrice permet une systématisation du calcul des intégrales qui ne dépendent alors que de la géométrie de la facette et des noyaux U_{ij} ou T_{ij} . Il est évident que cela entraîne un gain en temps — calcul obtenu au détriment éventuel de la précision du résultat.

En considérant,

$$S^{(k)} = \bigcup_{j=1}^{p(k)} S_j^{(k)}$$

et $y_j^{(k)}$ un point intérieur de la facette $S_j^{(k)}$, l'équation (10) devient :

$$(13) \quad c_{ij}^{(k)}(x) u_j(x) + \sum_{j=1}^{p(k)} u_j^{(k)}(y_j^{(k)}) \int_{S_j^{(k)}}^* T_{ij}^{(k)}(x; y, n) dS_j^{(k)}(y) \\ = \sum_{j=1}^{p(k)} t_j(y_j^{(k)}) \int_{S_j^{(k)}}^* U_{ij}^{(k)}(x, y) dS_j^{(k)}(y).$$

Quand x parcourt la suite des $y_i^{(k)}$, l'équation (13) se traduit par le système linéaire suivant :

$$[A] \{ u \} = [B] \{ t \}.$$

Avec :

$$A_{ij} = c_{ij}^{(k)}(y_i^{(k)}) \delta_{ij} + \int_{S_j^{(k)}}^* T_{ij}(y_i^{(k)}; y, n) dS_j^{(k)}(y)$$

$$B_{ij} = \int_{S_j^{(k)}}^* U_{ij}^{(k)}(y_i^{(k)}, y) dS_j^{(k)}(y)$$

$$u = u_j(y_j^{(k)}) e_j$$

$$t = t_j(y_j^{(k)}) e_j.$$

II.3.2.3. Méthode de BANERJEE (1976)

C'est une formulation indirecte qui adapte l'hypothèse simplificatrice de CRUSE en supposant les distributions de sources constantes par facette [7].

En considérant comme au paragraphe précédent :

$$S^{(k)} = \bigcup_{j=1}^{p(k)} S_j^{(k)}$$

et $y_j^{(k)}$ un point intérieur de la facette $S_j^{(k)}$, on obtient par cette discrétisation de la surface :

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} u(x) = \sum_{j=1}^{p(k)} s(y_j^{(k)}) \int_{S_j^{(k)}}^* U(x, y) dS_j^{(k)}(y) \\ t(x) = \sum_{j=1}^{p(k)} \left\{ c_j(x) s(x) + s(y_j^{(k)}) \int_{S_j^{(k)}}^* T(x, n; y) dS_j^{(k)}(y) \right\} \end{array} \right.$$

Pour la suite $x_0 = (y_1, \dots, y_{p(k)})$, on définit les matrices $[A]$ et $[B]$ par :

$$A_{ij} = \int_{S_j^{(k)}}^* U(y_i^{(k)}, y) dS_j^{(k)}(y)$$

$$B_{ij} = c_{ij}(y_i^{(k)}) \delta_{ij} + \int_{S_j^{(k)}}^* T(y_i^{(k)}, n; y) dS_j^{(k)}(y).$$

On exprime alors (I) en x_0 :

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} u(y_i^{(k)}) = \sum_{j=1}^{p(k)} A_{ij} s(y_j^{(k)}) \\ t(y_i^{(k)}) = \sum_{j=1}^{p(k)} B_{ij} s(y_j^{(k)}) \\ i = 1, \dots, p(k) \end{array} \right.$$

En écrivant (II) composante par composante, on obtient un système (III) de $6 p(k)$ équation. On retient les $3 p(k)$ équations dont les premiers membres sont fixés par les conditions aux limites. La résolution de ce système permet de déterminer les $s(y_j^{(k)})$. Ces valeurs reportées dans les $3 p(k)$ équations restantes de (III) permettent de déterminer les déplacements et tensions inconnues.

II.3.2.4. Comparaison des méthodes

Nous venons de voir que les méthodes de CRUSE et BANERJEE développent des traitements numériques de même nature sur des formulations différentes.

Cependant si dans la méthode de CRUSE on peut encore relier les déplacements et les tensions en un nœud de contrôle anguleux x^a (cf. équation (13)), une indétermination pour la définition d'une normale en x^a apparaît dans la méthode de BANERJEE : la valeur de la tension en x^a dépend alors du choix de cette normale (cf. système (I)). Cette différence résulte de la dualité dans les calculs d'intégration (fig. 23).

Pour des structures massives, sans discontinuité des normales aux facettes, l'approche de BANERJEE a l'avantage d'être un outil plus simple à mettre en œuvre. Cependant les développements (cf. II.3.5) et applications (cf. II.3.7) récentes montrent qu'il est souvent nécessaire d'introduire des discontinuités formelles sur les fonctions inconnues cherchées pour obtenir une approximation suffisante au voisinage d'une fissure.

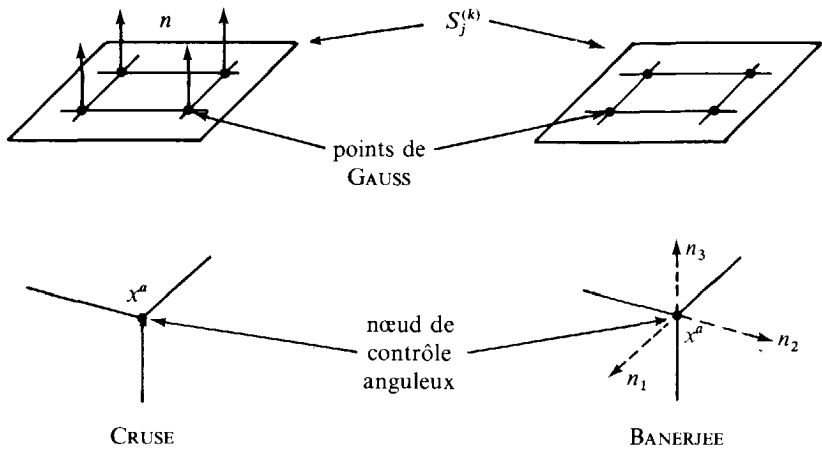


fig. 23. — Dualité, calculs d'intégration.

Ceci peut limiter l'utilisation des approximations de BANERJEE et de CRUSE, alors que dans la méthode du CETIM une telle approche est possible.

II.3.3. Constitution du système linéaire et résolution

Le système est constitué de blocs correspondant à chaque sous-région, à partir des intégrales de l'équation discrétisée (nœuds à trois degrés de liberté) et des relations de compatibilité sur les interfaces des sous-régions.

Les coefficients de la matrice sont transformés dans la programmation de façon à obtenir un système sans dimension stable. C'est pourquoi on prend comme unité de distance la plus grande dimension du domaine, et comme unité de contrainte le module d'élasticité.

La technique d'élimination de GAUSS est utilisée sans itération sur les résidus. La précision du résultat obtenu par le CETIM est due à un calcul approfondi des coefficients de la matrice du système.

II.3.4. Détermination des déplacements et contraintes

La résolution du système linéaire donne les déplacements et les tensions en tous les points de la surface.

On peut alors, en calculant les équations intégrales régulières (7) et (9), connaître les déplacements et les contraintes en tous points de V^- .

Enfin, pour connaître les contraintes en tous points de la surface, et pour éviter d'utiliser les noyaux alors singuliers de l'équation (9), on exprime tout d'abord les déformations à l'aide des fonctions de forme et on applique ensuite les relations d'élasticité.

Les déformations s'expriment par :

$$\frac{\partial u_i}{\partial \bar{x}_1} = \frac{\partial M^a(\zeta)}{\partial \zeta_1} \frac{u_s^a \mu_{is}}{|J_{i1}|}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial \bar{x}_2} = - \frac{\partial M^a(\zeta)}{\partial \zeta_1} \frac{u_s^a \mu_{is} \cos \theta}{|J_{i1}| \sin \theta} +$$

$$+ \frac{\partial M^a(\zeta)}{\partial \zeta_2} \frac{u_s^a \mu_{is}}{|J_{i2}| \sin \theta}$$

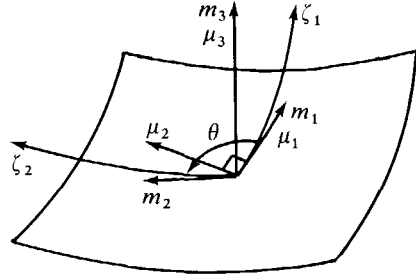


fig. 24.

Ici, m_1 et m_2 sont les vecteurs tangents au point aux lignes $\zeta_2 = 0$ et $\zeta_1 = 0$; ils font, entre eux, un angle θ . (μ_1, μ_2, μ_3) est un repère local où μ_1 coïncide avec m_1 et μ_3 est colinéaire à la normale extérieure à l'élément. Les u_i^a sont les déplacements nodaux et $|J_{i1}|$, $|J_{i2}|$ les jacobiens dans chaque direction.

II.3.5. Traitement numérique des singularités

On a pu voir dans le contexte des méthodes éléments finis comment de nombreux auteurs essaient de prendre en compte les singularités des normales ou des déplacements. Dans le contexte des méthodes équations intégrales, la littérature est moins riche. Néanmoins, on peut distinguer deux principes.

Lorsque les tensions sont interpolées à l'aide de fonctions de forme du type « Serendip », les auteurs cherchent à modifier les positions des nœuds de discrétisation [70]. On doit cependant constater que dans l'état actuel des travaux, les résultats ne sont pas encore suffisamment stables pour être utilisés de façon systématique.

Lorsque les tensions sont interpolées à l'aide des fonctions de forme du type « Lagrange » [73], L. S. XANTHIS [71] a obtenu récemment des résultats stables en transportant la singularité sur les fonctions de forme, sans modifier la discrétisation. On peut résumer ainsi la procédure : T. J. R. HUGHES [30] a développé un algorithme qui permet de définir des fonctions de forme à $(m + 1)$ variables à partir des fonctions de forme à m variables.

On peut donc s'intéresser uniquement à la prise en compte de la singularité pour des fonctions de forme à une variable.

Considérons pour $a = 1, \dots, p + 1$ les polynômes de Lagrange $N^a(\zeta)$ ou $\zeta \in [0, 1]$ définis par

$$N^a\left(\frac{b-1}{p}\right) = \delta_{ab} \quad b = 1, \dots, p + 1.$$

Soient $\hat{N}^a(\zeta)$, $a = 1, \dots, p + 1$, les fonctions définies par :

$$\hat{N}^a(\zeta) = \left(\frac{\zeta - \zeta_a}{\zeta}\right)^{1/2} N^a(\zeta) \quad a = 2, \dots, p + 1$$

et

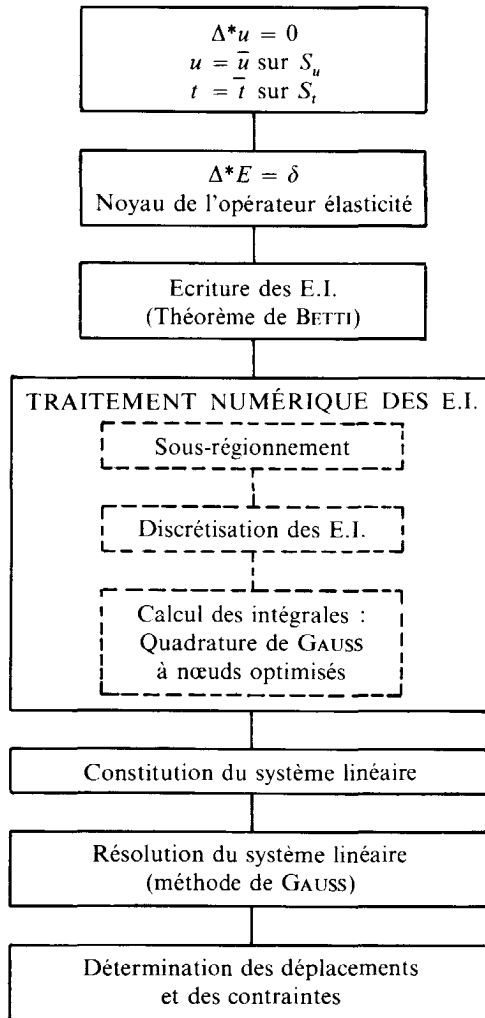
$$\hat{N}^1(\zeta) = 1 - \sum_{a=2}^{p+1} \hat{N}^a(\zeta).$$

On remplace alors les fonctions de forme $N^a(\zeta)$ par $\hat{N}^a(\zeta)$ en tout point singulier ; ce qui, par exemple, permet d'interpoler les déplacements en un point x de coordonnées polaires (r, θ) sous la forme :

$$u(x) = u(0) + r^{1/2} Q(r)$$

où Q est un polynôme de degré $p - 1$.

II.3.6. Organigramme de la méthode



II.3.7. Détermination des facteurs d'intensité de contrainte

Le facteur d'intensité de contrainte K_I a été exprimé en fonction de la contrainte normale au plan de la fissure par :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2 \pi r} \sigma_{22}(r, 0)).$$

Il peut aussi être obtenu à partir du déplacement normal au plan de la fissure :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{2 \pi}{r}} u_2(r, 0) \right).$$

Cette deuxième approche apporte une meilleure précision dans le calcul numérique puisque les déplacements sont les inconnues obtenues directement par résolution du système linéaire alors que le calcul des contraintes à partir des déformations entraîne une incertitude numérique supplémentaire.

Considérons un maillage, d'un défaut elliptique. Une modélisation par éléments à fonction de forme linéaire est une première approximation qui ne conduit pas à des résultats satisfaisants.

Si on utilise des éléments quadrangulaires isoparamétriques à huit nœuds, le fait de déplacer les nœuds milieux au quart des côtés au voisinage du front de fissure, comme dans la méthode du « quarter-point », permet de diviser par deux l'erreur sur les facteurs d'intensité de contrainte (cf. fig. 25).

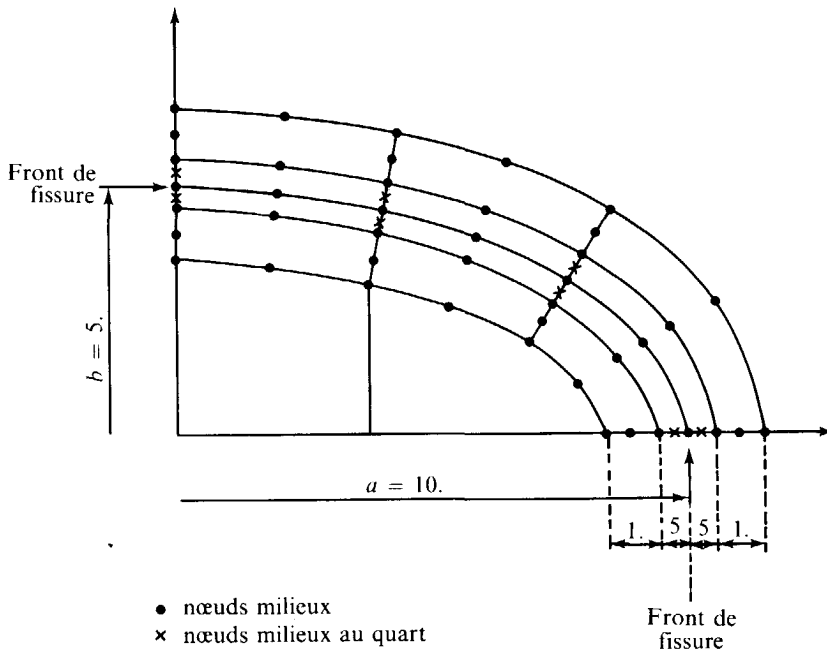


fig. 25. — Maillage d'un défaut elliptique (d'après CETIM).

On calcule K_1 sur quatre lignes normales au front de fissure à partir des déplacements u_2 obtenus :

$$K_1 = \frac{E}{4(1 - \nu^2)} \sqrt{\frac{2}{10}} \frac{u_2}{\sqrt{r}}.$$

En théorie, les valeurs de K_1 obtenues aux quatre points $A(r = 0.125)$, $B(r = 0.5)$, $C(r = 1.0)$ et $D(r = 1.5)$ devraient être alignées.

En pratique, en raison du maillage peu raffiné utilisé, ils ne le sont pas et le K_1 de la fissure est extrapolé à partir de la droite passant par C et D .

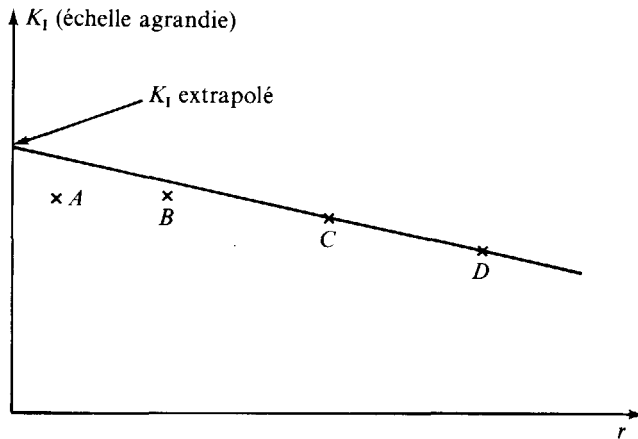


fig. 26. — Détermination de K_1 .

Dans le cas d'une fissure circulaire, les résultats obtenus varient de 1,5 % par rapport à la solution analytique :

$$K_0 = \frac{2 \sigma \sqrt{a}}{\sqrt{10 \pi}}.$$

II.4. MÉTHODE DU SUPER-ÉLÉMENT

Dans le cas d'une structure non massive de grande dimension, présentant une fissure localisée, la M.E.I. n'est pas justifiée sur l'ensemble de la structure. C'est pourquoi on montre comment obtenir, à partir de la M.E.I., une matrice de rigidité pour la région incluant la fissure : c'est la méthode dite du super-élément [42, 76] ; et ainsi par assemblage avec des éléments finis, on peut former une matrice de rigidité pour toute la structure.

Considérons la fonctionnelle Π exprimant l'énergie potentielle du système :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv - \int_{S_t} u_i \bar{t}_i dS_t$$

c'est-à-dire aussi, dans le cas du problème d'élasticité étudié,

$$(14) \quad \Pi = \frac{1}{2} \int_S u_i t_i dS - \int_{S_i} u_i \bar{t}_i dS_i .$$

Considérons pour $x \in S$, l'équation intégrale (voir § II.3.1)

$$(15) \quad c_{ij}(x) u_j(x) + \int_S^* T_{ij}(x; y, n) u_j(y) dS(y) = \int_S^* U_{ij}(x, y) t_j(y) dS(y) .$$

On discrétise les équations (14) et (15) à l'aide d'un maillage sur S et d'interpolations des champs de déplacements et tensions.

On pose :

$$S = \bigcup_{b=1}^p S_b$$

où S_b est un quadrilatère à n nœuds ($n = 6$ ou 8).

On note q le nombre de nœuds distincts du maillage de S .

Pour tout $b = 1, \dots, p$, on a :

$$\begin{aligned} u_i^b(y) &= N^a(\zeta) u_i^{ba} & t_i^b(y) &= N^{a'}(\zeta) t_i^{ba'} \\ x_i^b(\zeta) &= N^a(\zeta) x_i^{ba} & & \text{(coordonnées cartésiennes de } y) \end{aligned}$$

où ζ est l'adresse de y sur la carte locale.

Après discrétisation, l'équation (14) devient :

$$(16) \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_b \sum_a \sum_a u_i^{ba} t_i^{ba'} \int_{-1}^{+1} N^a(\zeta) N^{a'}(\zeta) J^b(\zeta) d\zeta \\ - \sum_b \sum_a u_i^{ba} \int_{-1}^{+1} N^a(\zeta) \bar{t}_i(y^b(\zeta)) J^b(\zeta) d\zeta$$

et pour $x = y^{b'}(\eta)$ élément de S_b , l'équation (15) devient :

$$(17) \quad c_{ij}(y^{b'}(\eta)) N^a(\eta) u_j^{ba'} + \sum_b \sum_a u_j^{ba} \int_{-1}^{+1} T_{ij}(y^{b'}(\eta); y^b(\zeta), \eta) N^a(\zeta) J^b(\zeta) d\zeta \\ = \sum_b \sum_a t_j^{ba} \int_{-1}^{+1} U_{ij}(y^{b'}(\eta), y^b(\zeta)) N^a(\zeta) J^b(\zeta) d\zeta .$$

On note $\{u\}$ (resp. $\{t\}$) le vecteur à $3q$ composantes formé par les valeurs u_i^{ba} $i = 1, 2, 3$ (resp. t_i^{ba}) des déplacements (resp. : tensions) aux q nœuds distincts du maillage de S .

Par une méthode d'assemblage, on peut alors définir des matrices $[A]$, $[B]$, et $[C]$ et un vecteur $\{F\}$ tels que l'on ait :

$$(18) \quad \Pi = \frac{1}{2} \{u\}' [C] \{t\} - \{u\}' \{F\}$$

$$(19) \quad [A] \{u\} = [B] \{t\}.$$

$[B]$ apparaît comme une matrice à diagonales principales dominantes ; $[B]$ est inversible (c'est ici que réside la difficulté pour le traitement numérique) ; on peut alors éliminer $\{t\}$ dans l'équation (18) :

$$(20) \quad \Pi = \frac{1}{2} \{u\}' [L] \{u\} - \{u\}' \{F\}$$

où

$$[L] = [C] [B]^{-1} [A].$$

Comme dans toute méthode classique d'éléments finis, on cherche le déplacement u qui minimise la fonctionnelle Π ; d'où l'équation

$$\delta \Pi = \frac{1}{2} \{ \delta u \}' [L + L^T] \{ u \} - \{ \delta u \}' \{ F \} = 0$$

ce qui permet d'obtenir la matrice de rigidité $[K]$ sous la forme :

$$[K] = \frac{1}{2} [L + L^T]$$

c'est-à-dire encore :

$$[K] = \frac{1}{2} \{ [C] [B]^{-1} [A] + \{ [C] [B]^{-1} [A] \}' \}.$$

L'intérêt d'une telle méthode est de permettre des couplages avec des éléments finis, ou d'autres super-éléments ; on obtient alors une matrice de rigidité sur tout le milieu étudié.

CONCLUSION

Pour déterminer le risque de rupture fragile d'une pièce mince sous tension, le critère basé sur la théorie cinématique d'Irwin, comparant le facteur d'intensité de contrainte du premier mode d'ouverture symétrique d'une fissure K_I à la ténacité du matériau K_{IC} semble le plus adapté dans l'état actuel des connaissances utilisables pratiquement. En effet, nous ne considérons que des cas où la zone plastique reste confinée au fond de la fissure et où l'on peut appliquer la théorie linéaire élastique de la mécanique de la rupture.

Avec les références déjà citées, d'autres études récentes [3, 11, 20, 46, 49, 55] montrent les difficultés rencontrées pour la détermination du facteur d'intensité de contrainte d'une fissure quelconque dans un tube cylindrique sous pression. Chaque étude est souvent très particulière (fissure longitudinale, circonférentielle, non débouchante, solide infini...) et est difficilement utilisable pour un problème voisin. La faisabilité de la méthode et une comparaison avec d'autres résultats sont généralement présentées, mais ces études ne mènent pas à un outil convenant à un bureau d'études pour lequel les problèmes posés varient beaucoup.

Parmi les différentes méthodes pratiques de calcul du facteur d'intensité de contrainte, les deux les plus utilisées sont basées soit sur une formulation par éléments finis intégrant la singularité, soit sur une formulation par équations intégrales. Les résultats obtenus par les deux méthodes sont comparables mais la seconde conduit à des temps de calcul nettement diminués si la pièce étudiée est suffisamment massive (rapport surface sur volume pas trop important). De plus, le maillage surfacique pour équations intégrales est plus simple et comporte beaucoup moins de nœuds que le maillage volumique pour éléments finis. Cependant, la méthode avec équations intégrales conduit à la résolution d'un système linéaire possédant une matrice pleine alors que la matrice de rigidité obtenue par éléments finis est bande, mais de dimension nettement supérieure.

Si on limite l'étude à un petit volume contenant la fissure, se pose alors le problème des conditions aux limites à lui appliquer. C'est pourquoi, dans le cas d'une structure faite de plaques et coques minces, il semble judicieux d'utiliser la méthode des éléments finis sauf pour le voisinage de la fissure. Celui-ci peut être avantageusement étudié par la méthode des équations intégrales et représenté par un super-élément — dont la matrice de rigidité est formulée au § II.4 — que l'on assemble avec les éléments finis modélisant le reste de la structure.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMESTOY M., BUI H. D., DANG VAN K., « Analytic asymptotic solution of the kinked crack problems ». *Advances in fracture research. Proceeding ICF 5, Cannes (1981)*, vol. 1, pp. 107-114.
- [2] APES, « Calcul de structures fissurées par éléments finis ». Manuel d'utilisation du programme APES bidimensionnel élastique. CTICM, (févr. 1981), Rapport n° 10.002.1.
- [3] ATLURI S. N., KATHIRESAN K., « Influence of Flow Shapes on Stress Intensity Factors for pressure Vessel surface Flaws and Nozzle Corner Cracks », *Transactions of the ASME**, (août 1980), vol. 102, pp. 278-286.
- [4] BABUSKA I., « The self-adaptive approach in the finite element method. The Mathematics of Finite Elements and Applications II », MAFELAP 1975, J. R. Whiteman (ed.), Academic Press, Londres (1976), pp. 125-143.
- [5] BABUSKA I., RHEINBOLDT W., « Error estimates for adaptive finite element computations ». Institute for Science and Technology, University of Maryland, College Park. Technical note BN 854 (1977).
- [6] BABUSKA I., RHEINBOLDT W., « Reliable error estimator and mesh adaptation for the finite element method ». Institute for Science and Technology, University of Maryland, College Park. Technical note BN 910 (1979).
- [7] BANERJEE P. K., « Integral equations methods for analysis of piece wise nonhomogeneous 3. D elastic solids ». *Int. J. Mech. Science* (1976), vol. 18, p. 293.
- [8] BARSOU R. S., « On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.* (1976), vol. 10, pp. 25-37.
- [9] BARSOU R. S., « A degenerate solid element for linear fracture analysis of plate bending and general shells ». *Int. J. for Num. Meth. in Eng.* (1976), vol. 10, pp. 551-564.
- [10] BARSOU R. S., LOOMIS R. W., STEWART B. D., « Analysis of through cracks in cylindrical shells by the quarter-point elements ». *Int. J. of Fracture* (juin 1979), vol. 15, n° 3, pp. 259-280.
- [11] BERGEZ D., « The determination of stress intensity factors on elastic shells : a possible method ». *Advances in Fracture research. Proceedings ICF 5, Cannes (1981)*, vol. 1, pp. 161-168.
- [12] BOURAAD S., « Etude des concentrations de contraintes au voisinage des points singuliers des structures ». Thèse, Université Paris VI (1979).
- [13] BUECKNER H. F., « The propagation of cracks and the energy of elastic deformations ». *Transaction of the ASME** (1958), vol. 15, pp. 1225-1230.
- [14] BUECKNER H. F., « A novel principle for the computation of stress intensity factors », *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* (1970), p. 529.
- [15] BUECKNER H. F., « Weight functions for the notched bar », *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* (1971), pp. 97-102.

* American Society of Mechanical Engineers.

- [16] BUECKNER H. F., « Fields singularities and related integral representations ». Chapitre V de « Methods of Analysis and Solutions of Cracks problems », ed. G. C. Sih-Nordhoff (1973).
- [17] BUI H. D., « Mécanique de la rupture fragile », Masson (1978).
- [18] CRITESCU M., LOUBIGNAC G., « Quadratures de GAUSS pour des fonctions avec singularité en I/R sur des carrés ou des rectangles ». Congrès GAMNI I (Groupe pour l'Avancement des Méthodes Numériques de l'Ingénieur), Paris, Dunod, 1978.
- [19] CRUSE T. A., « Numerical solutions in three dimensional elastostatics ». *Int. J. of Solid and Structures* (1969), vol. 5, pp. 1259-1274.
- [20] ERDOGAN F. and DELALE F., « Stress intensity factors in pipe elbows ». Advances in fracture research. *Proceedings ICF 5*, Cannes (1981), vol. 1, pp. 169-176.
- [21] ESHELBY J. D., « The continuous theory of lattice defects ». *Solid State Physics* (1956), vol. 3, Academic Press.
- [22] ESHELBY J. D., « Energy relations and the energy momentum tensor in continuous mechanics. Inelastic behaviour of solids » (1969), McGraw-Hill, pp. 77-115.
- [23] GOODIER J. N., « Mathematical theory of equilibrium cracks ». Dans « Fracture », édité par H. Liebowitz, Tome II, Academic Press (1968).
- [24] GREEN A. E., SNEDDON I. N., « The distribution of stress in the neighborhood of a flat elliptical crack in an elastic solid ». *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 46 (1950), pp. 159-163.
- [25] GREGORY J. A., FISHELOV D., SCHIFF B., WHITEMAN J. R., « Local mesh refinement with finite elements for elliptic problems ». *J. Comp. Phys.* (1978), pp. 133-140.
- [26] HASSELIN G., HELIOT J., VOUILLOIN C., Paper 2/3, 2nd International Conference on Structural Mechanics on Reactor Technology, Berlin (1973).
- [27] HELIOT J., LABBENS R. C., PELISSIER-TANON A., « Semi-elliptical cracks in a cylinder subjected to stress gradients fracture mechanics », ASTM STP 677, C. W. Smith ed., American Society for Testing and Materials (1979), pp. 341-364.
- [28] HENSHELL R. D., SHAW K. G., « Crack tip finite elements are unnecessary », *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 9 (1975), pp. 495-509.
- [29] HIBBIT H. D., « Some properties of singular isoparametric elements », *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 11 (1977), pp. 180-184.
- [30] HORMANDER, « On the theory of general partial differential operators », *Acta mat.* vol. 94 (1955).
- [31] HUGUES T. J. R., « Techniques for developping « special » finite element shape functions with particular reference to singularities ». *Int. J. Numer. Meth. Eng.* (1980), vol. 15, pp. 733-751.
- [32] INGRAFFEA A. R., MANU C., « Stress-intensity factor computation in three dimensions with quarter-point elements ». *Int. J. Numer. Meth. Eng.* (1980), vol. 15, pp. 1427-1445.
- [33] KANASAWA T., MACHIDA S., KAWANO H., « Fracture initiation from a surface flaw under combined tension and bending ». Second International Conference on Mechanical Behaviour of Materials, Aug. 16-20 (1976), Boston, Mass.
- [34] KOBAYASHI A. S., ENETANYA A. N., « Stress intensity factor for a corner crack ». Mechanics of Crack Growth, ASTM STP 590 (1976), pp. 477-495.
- [35] KOBAYASHI A. S., POLVANICH N., EMERY A. F., LOVE W. J., « Inner and outer cracks in internally pressurized cylinders », *J. of Pressure Vessel Technology* (feb. 1977), pp. 83-89.
- [36] KOSHIGA F., « Proposal simple theory of overstressing technique to pressure vessels against brittle fracture. Practical application of fracture mechanics to pressure vessel technology », London (mai 1974), pp. 168-174.

- [37] LABBENS R., PELISSIER-TANON A., HELIOT J., « Méthodes pratiques de calcul des facteurs d'intensité de contrainte ». *Revue de Physique Appliquée*, Tome 9 (juil. 1974), pp. 587-598.
- [38] LABBENS R., PELISSIER-TANON, HELIOT J., « Practical method for calculating stress intensity factors through weight functions », *Mechanics of Cracks Growth*, ASTM 590, American Society for Testing and Materials (1976), pp. 368-384.
- [39] LABBENS R. C., HELIOT J., PELISSIER-TANON A., « Weight functions for three-dimensional symmetrical crack problems ». *Cracks and Fracture*, ASTM STP 601, American Society for Testing and Materials (1976), pp. 448-470.
- [40] LABBENS R. C., « Introduction à la mécanique de la rupture », Pluralis (1980).
- [41] LACHAT J. C., WATSON J. O., « A second generation boundary integral equation program for three-dimensional elastic analysis ». *Symposium on Boundary Integral Equations Method*, ASME, New York (juin 1976).
- [42] LECHEVALIER C., « Le couplage entre la méthode des éléments finis et la méthode des équations intégrales ». Etude 07.1, note technique n° 398/DET ETCA (mai 1977).
- [43] LOVE A. E. H., « On stress produced in a semi-infinite solid by pressure on part of the boundary ». *Philosophical Transactions of the Royal Society*, séries A, 228 (1929), pp. 378-395.
- [44] LOVE A. E. H., « A treatise on the mathematical theory of elasticity ». Dover Publications, New York (1944), pp. 241-244.
- [45] LYNN P. P., INGRAFFEA A. R., « Transition elements to be used with quarter point crack tip elements ». *J. Numer. Meth. Eng.*, vol. 12 (1978), pp. 1031-1036.
- [46] GOWAN J. J., RAYMUND M., « Stress intensity factor solution for internal longitudinal semi-elliptical surface flaws in a cylinder under arbitrary loading ». *Fracture Mechanics*, ASTM STP 677 (1970), pp. 365-380.
- [47] Mémoire Technique du CETIM n° 25. CETIM, 52, Rue Félix-Louat, 60304 Senlis.
- [48] NEWMAN J. C., RAJU J. S., « Stress intensity factors for internal surface cracks in cylindrical pressure vessels », *Transactions of the ASME*, vol. 102 (nov. 1980), pp. 342-346.
- [49] OORE M., BURNS D. J., « Estimation of stress intensity factors for embedded irregular cracks subjected to arbitrary normal stress fields ». *Transactions of the ASME*, vol. 102 (mai 1980), pp. 202-211.
- [50] PALUSAMY S. S., HELIOT J., « Two stress intensity factor calculation methods and solutions for various three dimensional crack problems ». *Advances in Fracture Research*, *Proceedings ICF5*, Cannes (1981), vol. 1, pp. 131-139.
- [51] PU S. L., HUSSAIN M. A., LORENSEN W. E., « The collapsed cubic isoparametric element as a singular element for crack problems ». *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, vol. 12 (1978), pp. 1727-1742.
- [52] PU S. L., HUSSAIN M. A., « Stress intensity factors for a circular ring with uniform array of radial cracks using cubic isoparametric singular elements ». *Fracture Mechanics*, ASTM STP 677, C. W. Smith ed., American Society for Testing and Materials (1979), pp. 685-699.
- [53] PUTOT C., « Une nouvelle méthode d'équations intégrales pour certains problèmes de fissures planes ». Thèse IFP 28.354 (1980).
- [54] RAJU J. S., NEWMAN J. C., « Stress intensity factors for a wide range of semi-elliptical surface cracks in finite thickness plates ». *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 11 (1979), pp. 817-829.
- [55] RAJU I. S., NEWMAN J. C., « Stress intensity factors for two symmetric corner cracks fracture mechanics », ASTM STP 677, C. W. Smith ed., American Society for Testing and Materials (1979), pp. 411-430.

- [56] RICE J. R., « A path independant integral and the approximate analysis of strain concentration by notched and cracks ». *J. of Applied Mechanics* (1968), pp. 379-386.
- [57] RIGOLOT C., « Potentiel élastique sur une surface non régulière ». *C.R.A.S.*, Paris, 29 mai 1978.
- [58] RIZZO F. J., « An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics ». *Quarterly of Applied mathematics* (1967), pp. 25-83.
- [59] ROOKE D. P., CARTWRIGHT D. J., « Compendium of stress intensity factors ». H.M.S.O., London (1976).
- [60] SCHWARTZ L., « Théorie des distributions », Paris, Hermann ed. (1966).
- [61] SEGEDIN C. M., « Some three-dimensional mixed boundary value problems in elasticity ». University of Washington, Department of Aeronautics and Astronautics, Rep. N° 67. 5 (1967).
- [62] SHAH R. C., KOBAYASHI A. S., « Stress intensity factor for an elliptical crack under arbitrary normal loading ». *Eng. Fract. Mech.*, vol. 3 (1971), pp. 71-96.
- [63] SHAH R. C., KOBAYASHI A. S., « Stress intensity factor for an elliptical crack approaching the surface of a plate in bending ». *Stress Analysis and Growth of Cracks. ASTM STP 513* (1972), pp. 3-21.
- [64] SHAH R. C., KOBAYASHI A. S., « Stress intensity factor for an elliptical crack approaching the surface of a semi-infinite Solid ». *Int. J. of Fracture*. Vol. 9, n° 2 (juin 1973).
- [65] SIH G. C., LIEBOWITZ H., « Mathematical theories of brittle fracture » dans « *Fracture* », de Liebowitz, vol. II (1968), pp. 67-190.
- [66] SMITH F. W., SORENSEN D. R., « The semi-elliptical surface crack. A solution by the alternating method ». *Int. J. of Fracture* (févr. 1976), vol. 12, pp. 47-57.
- [67] STROUD A. M., SECREST D., « Gaussian quadrature formulas ». Prentice Hall, New York (1966).
- [68] TADA H., PARIS P. C., IRWIN G. R., « The stress analysis of cracks handbook », Del Research Corporation, Hellertown Pa. (1979).
- [69] TRESHER R. W., SMITH F. W., « Stress intensity factors for a surface crack in a finite solid ». *J. of Applied Mechanics, Series E*, 39, no. 1 (1972), pp. 195-200.
- [70] VOLAIT F., « Calcul d'un super-élément par une méthode d'équations intégrales ». Thèse de 3^e cycle. Université de Technologie de Compiègne (1980).
- [71] WHITEMAN J. R., « Finite element techniques for boundary value problems containing singularities, with application to fracture ». Institute of Computational Mathematics, Brunel University, Uxbridge, Middlesex, England.
- [72] WINTERMARK H., « Offshore structures fabrication and control of the fatigue and brittle fracture risk ». Det Norske Veritas, Oslo (1976).
- [73] XANTHIS L. S., DERNAL M. J. M., ATKINSON C., « The treatment of singularities on the calculation of stress intensity factors using the boundary integral equation method ». *Computer Methods in Appl. Mech. Eng.*, 26, North Holland Publishing Company (1981).
- [74] YAMADA Y., EZAWA Y., NISHIGUCHI I., « Reconsiderations on singularity or crack tip elements ». *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, vol. 14 (1979), pp. 1525-1544.
- [75] ZIENKIEWICZ O. C., « The finite element method », 3rd ed., MacGraw-Hill (1977).
- [76] ZIENKIEWICZ O. C., KELLY D. W., BETTES P., « The coupling of finite element and boundary solution procedures ». *Int. J. Numer. Mech. Eng.*, vol. 11 (1977), pp. 355-376.

ANNEXE

k : module du Jacobien des fonctions elliptiques
 k' : module complémentaire $k' = \sqrt{1 - k^2}$
 $K(k)$: intégrale elliptique complète de première espèce
 $E(k)$: intégrale elliptique complète de seconde espèce
 A_{ij}, C_{ij}, a, b : constantes.

$\frac{4E(k)}{ab^2}$	○	○	$\frac{8}{a^3 b^2 k^2} [k^2 K(k) - (1-2k^2)E(k)]$	○	$\frac{8}{ab^4 k^2} [(1+k^2) \cdot E(k) - k^2 K(k)]$	○	○	○	○
○	$\frac{4}{a^3 b^2 k^2} [k^2 K(k) - (1-2k^2)E(k)]$	○	○	○	$\frac{8}{a^5 b^3 k^4} [2k^2(2k^2+1) \cdot K(k) - (2+2k^2-8k^4)E(k)]$	○	$\frac{8}{a^3 b^4 k^4} [2(k^2+k^4)E(k) - (2-k^2)k^2 K(k)]$	○	○
○	○	$\frac{4}{ab^4 k^2} [(1+k^2) \cdot E(k) - k^2 K(k)]$	○	○	○	$\frac{8}{a^3 b^4 k^4} [-k^2(2-k^2) \cdot K(k) + 2(k^2+k^4)E(k)]$	○	$\frac{-8}{a^3 b^4 k^4} [2(3k^2-1)K(k) + (3k^2 + \frac{2-10k^2}{k^2})E(k)]$	○
○	○	○	$\frac{8}{a^5 b^2 k^2} [(3-8k^2 + \frac{2}{k^2})E(k) - 2k^2 \cdot (2 + \frac{1}{k^2})K(k)]$	○	$\frac{8}{a^3 b^4 k^4} [k^2(2-k^2) \cdot K(k) - 2(k^2+k^4)E(k)]$	○	○	○	○
○	○	○	○	$\frac{-4}{a^3 k^4 k^4} [k^2(2-k^2) \cdot K(k) - 2(k^2+k^4)E(k)]$	○	○	○	○	○
○	○	○	$\frac{8}{a^3 b^4 k^4} [k^2(2-k^2) \cdot K(k) - 2(k^2+k^4)E(k)]$	○	$\frac{8}{a^3 b^4 k^4} [2(3k^2-1)K(k) + (3k^2 + \frac{2-10k^2}{k^2})E(k)]$	○	○	○	○
○	○	○	○	○	$\frac{8}{3a^3 b^2 k^6} [8+9k^2+16k^4 - 8k^6]E(k) - (8+13k^2 + 24k^4)k^2 K(k)$	○	$\frac{8}{3a^3 b^4 k^6} [(4k^2 k^2 + 5k^2 + 3)k^2 K(k) + (8k^4 k^2 + 3 \cdot k^2 k^2 + 2k^2 - 8)E(k)]$	○	○
○	○	○	○	○	○	$\frac{8}{a^5 b^4 k^6} [8k^4 k^2 + 3k^2 \cdot k^2 + 2k^2 - 8]E(k) + k^2 \cdot (4k^2 k^2 + 5k^2 + 3)K(k)$	○	$\frac{8}{a^5 b^4 k^6} [3k^2 k^2 + 2k^2 - 8]K(k) + (6k^4 - 3k^2 + 16 - \frac{8}{k^2})E(k)$	○
○	○	○	○	○	$\frac{8}{a^5 b^4 k^6} [8k^4 k^2 + 3k^2 \cdot k^2 + 2k^2 - 8]E(k) + (4k^2 \cdot k^2 + 5k^2 + 3)k^2 K(k)$	○	$\frac{8}{a^5 b^4 k^6} [(3k^2 k^2 + 12 \cdot k^2 - 8)K(k) + (6k^4 - 3 \cdot k^2 + 16 - \frac{8}{k^2})E(k)]$	○	○
○	○	○	○	○	$\frac{8}{3a^5 b^4 k^6} [(6k^4 - 3k^2 + 16 - \frac{8}{k^2})E(k) + (3k^2 k^2 + 12k^2 - 8)K(k)]$	○	$\frac{8}{3ab^8 k^6} [(16k^4 - 65k^2 + 8)k^2 K(k) - (48 - 4k^2 - 88k^2 k^2 + 15k^2 k^4)E(k)]$	○	○

C_{00}	A_{00}
C_{10}	A_{10}
C_{01}	A_{01}
C_{20}	A_{20}
C_{11}	A_{11}
$C_{02} = \frac{1}{2G}$	A_{02}
C_{30}	A_{30}
C_{21}	A_{21}
C_{12}	A_{12}
C_{03}	A_{03}

Imprimé en France. — Imprimerie JOUVE, 18, rue Saint-Denis, 75001 PARIS
N° 10021 — Dépôt légal : Juin 1982
