

15

MODÉLISATION NUMÉRIQUE DU FLAMBAGE DE PANNEAUX SANDWICH RAIDIS

J.L. BATOZ*, T. QUESNEL**

Résumé - Cet article présente une méthode numérique d'analyse du flambage de panneaux sandwichs raidis pour la construction navale en composites. La formulation d'un élément fini quadrilatère de coque plane prenant en compte le cisaillement transverse est présentée dans une version multicouche. Quelques tests classiques permettent d'évaluer la performance de cet élément pour des plaques composites. La méthode qui sera utilisée pour l'analyse de flambage est ensuite exposée.

mots clés : matériau composite, structure sandwich, flambage, plaque coque, éléments finis

INTRODUCTION

Le flambage des panneaux composites raidis est un phénomène qui préoccupe la construction navale. Dans un premier temps, on voit en quoi ce type de comportement et de structure suscite un intérêt. On veille en particulier à bien dégager les caractéristiques de ce type de panneau et à mettre en évidence ce que cela implique pour l'étude du phénomène. Ensuite, nous présentons la modélisation numérique générale pour l'étude de ce phénomène. Puis, nous exposons plus précisément deux briques de cette modélisation ; l'élément fini de coque composite d'une part, le module de résolution en flambage linéaire d'autre part. Ces outils numériques n'étant pas tous

* UNIVERSITE DE TECHNOLOGIE DE COMPIEGNE -Division
Modèles Numériques en Mécanique
Professeur de Génie Mécanique

** INSTITUT DE RECHERCHES DE LA CONSTRUCTION
NAVALE - Service Recherche Mécanique
Ingénieur de Recherche

finalisés, nous terminons en évaluant l'apport de cette étude et ses limites. Les possibilités de compléter cette analyse et d'en exploiter les résultats pour la construction navale sont évoquées.

INTÉRÊT DE LA RECHERCHE ET CONSTRUCTION NAVALE

L'élément structurel de base rencontré dans les navires est le panneau raidi, globalement plan, sur des unités de taille moyenne à grande. Sur les navires en matériaux composites, encore peu nombreux, l'utilisation de ce type de panneau a été maintenue. Par rapport aux panneaux raidis métalliques, une plaque sandwich se substitue à la plaque en tôle métallique mince et les raidisseurs métalliques à âmes minces font place à des poutres composites en U ou en Ω . Ces panneaux raidis constituant des ponts ou des cloisons du navire, leur mode de sollicitation privilégié est la compression. La prévision du comportement en flambage de ces panneaux est donc un problème qui se pose à l'ensemble des concepteurs. Afin d'appréhender le comportement de ces panneaux sous une sollicitation de compression, il convient donc de bien définir les caractéristiques de ces structures navales composites afin de développer un modèle adapté au problème.

Les panneaux et raidisseurs composites ont des élancements plus faibles que ceux métalliques. Négliger le cisaillement transversal devient donc peu réaliste. De plus, l'empilage de plusieurs matériaux entraîne une discontinuité du comportement. Cette hétérogénéité favorise l'effet du cisaillement, même dans des structures peu épaisses. Ceci implique l'utilisation de théories de plaque et poutre prenant en compte le cisaillement transverse. Comme dans le cas des panneaux métalliques utilisés en construction navale, le raidissement de ces panneaux composites présente une dissymétrie par rapport au plan de la plaque. Cette dissymétrie engendre un état de fléchissement du panneau dès que l'on entre en compression. Le panneau ne se trouve donc pas en compression pure au moment où il flambe.

L'étude de ces panneaux pour la construction navale ne peut donc se faire directement avec des formules et abaques de type R.d.M. contenant des étapes empiriques fondées sur l'expérience en métallique. Avant de prévoir le comportement en flambage sur ce type de structure, il convient de se forger une connaissance de ce phénomène. La mise en place d'outils numériques prenant en compte la spécificité du problème est une manière de l'aborder.

DÉMARCHE DE L'ÉTUDE

On s'intéresse à des panneaux du type présenté dans la figure 1. Vu le savoir-faire en éléments finis, on retient cette méthode. Les panneaux étant plans et à géométrie rectangulaire, on a choisi d'utiliser des éléments quadrilatères de coques planes à quatre noeuds offrant de bonnes performances tant en flexion-cisaillement qu'en membrane. Pour les raidisseurs à section fermée, un élément de poutre en torsion libre a été retenu. Pour ces éléments, on prend en compte l'aspect matériau par une homogénéisation des poutres et des plaques. Pour la poutre, un module de calcul évalue les caractéristiques d'un matériau homogène orthotrope équivalent suivant les méthodes exposées par Batoz et Dhatt [1] et Gay [2]. Pour les plaques stratifiées, l'homogénéisation se fait automatiquement en prétraitement à partir de la donnée de l'empilement, comme on le trouve dans les références Batoz et Dhatt [1] et Tsai [3]. Pour la poutre comme pour la plaque, le comportement en cisaillement transversal a été évalué [1] et [4]. Pour ces éléments, nous avons la possibilité de les excentrer. La prise en compte de ces excentrement passe par l'introduction de couplages membrane-flexion, ce qui est cohérent avec l'apparition d'effets de flexion dès la mise en compression d'un panneau raidi. Avec ces éléments, on peut donc modéliser ce type de panneau. L'élément de poutre étant de formulation assez courante [1], [5], [6], nous reviendrons par la suite sur la formulation plus originale de notre élément de coque plane. Ces éléments et leur module d'estimation de loi de comportement ont tout d'abord été mis au point et testés dans le domaine statique linéaire.

Afin d'aborder le comportement en flambage de ces panneaux, il convient de mettre en place un module de résolution en flambage. Vu la présence de flexion sous sollicitation de compression, l'estimation de la stabilité du panneau devrait prendre en compte ce phénomène. En fait, le panneau a un comportement non linéaire géométrique dès sa mise sous charge. Une étude prenant en compte ces non-linéarités permet d'appréhender la stabilité de ces structures et surtout de fixer les ordres de grandeur pour une analyse non linéaire plus fine. La mise au point d'un module de calcul en flambage linéaire s'avère donc un passage nécessaire. La validité de la charge critique fournie pourra être évaluée postérieurement par un calcul non linéaire géométrique sous forme incrémentale. Le développement d'un modèle non linéaire géométrique devrait s'appuyer sur une formulation lagrangienne totale permettant de considérer les grands déplacements tout en restant dans le domaine des

rotations modérées, réalistes pour nos panneaux. Ce module fera suite à celui de flambage linéaire, aujourd'hui en cours de validation.

PRÉSENTATION DE L'ÉLÉMENT FINI DE COQUE PLANE

Dans la mesure où le comportement étudié fait intervenir à la fois la membrane et la flexion, l'élément utilisé est la combinaison d'un élément de membrane robuste et d'un élément de flexion-cisaillement performant.

L'élément de membrane est celui proposé en élasticité plane par Wilson et Taylor [7]. C'est un élément quadrilatère à quatre noeuds de type déplacement pour lequel on a introduit des modes incompatibles quadratiques et quatre paramètres indéterminés. L'adjonction de ces modes permet une bonne représentation des effets de membrane grâce à une faible sensibilité à la distorsion du maillage. De plus, ces modes peuvent être éliminés au niveau élémentaire (condensation statique), ce qui n'augmente pas la taille du problème par rapport à l'élément Q4 bilinéaire. L'élément de flexion-cisaillement choisi est un élément Q4 bilinéaire avec représentation particulière du cisaillement transverse par substitution du champ de déformations de cisaillement. Cet élément a été présenté par plusieurs auteurs : Bathe, Dvorkin [8], Donea [9] ..., Prathap [10], Batoz, Dhatt [1]. Il utilise le champ de déformation qui découle du champ de déplacement de Mindlin-Reissner pour ce qui concerne la flexion. Pour le cisaillement, c'est un champ de déformation de substitution qui est pris tel que sa moyenne sur chaque côté de l'élément soit égale à la moyenne de celui utilisé à partir du déplacement. Ces deux éléments sont à la base de celui utilisé pour notre étude, mais afin de prendre en compte les effets possibles de couplage membrane-flexion, c'est un élément mixant les deux aspects qui a été développé dans une version multicouche.

A partir du champ de déplacement suivant :

$$\vec{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 + z\beta x \\ v_0 + z\beta y \\ w_0 \end{Bmatrix}$$

on définit le champ de déformation suivant :

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon \rangle &= \langle \varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_{xy} \rangle = \langle e \rangle + z \langle X \rangle \\
&= \langle u_{0,x} \ v_{0,y} \ u_{0,y} + v_{0,x} \rangle \\
&\quad + z \langle \beta_{x,x} \ \beta_{y,y} \ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \rangle \\
\langle \gamma \rangle &= \langle \gamma_{xz} \ \gamma_{yz} \rangle = \langle w_{0,x} + \beta_x w_{0,y} \ \beta_y \rangle
\end{aligned}$$

Défini comme cela, $\{\varepsilon\}$ est linéaire alors que $\{\gamma\}$ est constant dans l'épaisseur. La loi de comportement est définie à partir de la donnée des caractéristiques de la stratification par :

$$[H_m] = \int_{t^-}^{t^+} [H^i] dz \quad [H_{mI}] = \int_{t^-}^{t^+} z [H^i] dz \quad [HI] = \int_{t^-}^{t^+} z^2 [H^i] dz$$

avec $[H^i]$ tel que $\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [H^i] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$ pour le ième pli.

(voir Figure 2).

$[H_c]$ est lui défini par comparaison des énergies de cisaillement ; l'une associée au modèle de plaque de Mindlin-Reissner, l'autre associée à la distribution théorique exacte des contraintes de C.T. [1] [4].

Le travail virtuel élémentaire interne est :

$$\begin{aligned}
W_{int}^e = \int_{A^e} &\langle e^* \rangle ([H_m] \{e\} + [H_{mI}] \{X\}) \\
&+ \langle X^* \rangle ([H_{mI}] \{e\} + [HI] \{X\}) \\
&+ \langle \gamma^* \rangle [H_c] \{\gamma\} dA^e
\end{aligned}$$

A^e est l'aire de l'élément.

En utilisant l'interpolation de l'élément Q4WT pour u et v , on a :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1 \alpha_1 + P_2 \alpha_3 \\ P_1 \alpha_2 + P_2 \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

On obtient $\{e\} = [B_m] \{u_n^m\} + [B_{m\alpha}] \{\alpha_n\}$

Pour la partie flexion-cisaillement, on a :

$$\{\chi\} = [B_f] \{u_n\} \text{ et } \{\underline{\gamma}\} = [N \gamma] \{\underline{\gamma}_n\} = [B_c] \{u_n\}$$

avec $\{\gamma\}$ champ de substitution et $\langle \underline{\gamma}_n \rangle = \langle \gamma_{s1-2} \gamma_{s2-3} \gamma_{s3-4} \gamma_{s4-1} \rangle$ défini sur chaque côté de l'élément.

$\{\underline{\gamma}_n\}$ est relié à $\{u_n\}$ par les relations intégrales suivantes.

$$\int_{L_{ij}} (w_{,s} + \beta_s) - \gamma_{sz} = 0$$

où L_{ij} représente le côté $i-j$ de l'élément, on obtient donc :

$$\gamma_{ij} = \frac{w_j - w_i}{sz L_{ij}} + \frac{\cos \theta_{ij}}{2} (\beta_{xi} + \beta_{xj}) + \frac{\sin \theta_{ij}}{2} (\beta_{yi} + \beta_{yj})$$

Dans Wint, on remplace le terme $\langle \gamma^* \rangle [H_c] \{\gamma\}$ par $\langle \gamma^* \rangle [H_c] \{\underline{\gamma}\}$, on obtient donc la matrice de rigidité suivante :

$$\begin{bmatrix} *m & * & *f & * \\ u_n & w_n & u_n & \alpha_n \\ [km] & & [kmf]^T [kma] & \\ [kmf] \begin{bmatrix} kc + [kf] \end{bmatrix} & & [kf\alpha]^T & \\ [km\alpha] & [kf\alpha] & [k\alpha] & \end{bmatrix}$$

Pour éliminer les termes concernant les α_n , on opère une condensation statique, c'est à dire on utilise le fait que les α_n sont des paramètres locaux de l'élément.

Pour respecter la compatibilité de l'élément malgré l'existence des modes incompatibles, on évalue $[km\alpha]$ et $[kf\alpha]$ en prenant une valeur constante du jacobien sur tout l'élément. Cela assure la bonne représentation d'un état de déformation constante quelle que soit la géométrie de l'élément. Pour le traitement de structures composites, le calcul des contraintes en post-résolution fournit les résultats pour chaque couche.

Cet élément de membrane-flexion-cisaillement a donc une bonne performance, car il s'appuie sur un élément de membrane robuste et peu sensible à la distorsion et un élément de flexion-cisaillement valable pour les plaques minces comme pour les plaques épaisses. Cet élément ne souffre ni de blocage en cisaillement, ni d'existence de mode parasite (rang correct) pour une intégration exacte (2X2).

Pour montrer la validité de notre élément, nous rapportons les résultats du test de Pagano pour un 9 couches décrit dans [11], Tableau 1, Figures 3 et 4. Pour des plaques telles que $L/H > 10$, les résultats sont bons ; pour un élancement plus faible, l'élément Q4γWT ne permet de fournir que des ordres de grandeur.

Pour vérifier le comportement de notre élément dans le cas de panneaux sandwich, nous avons comparé nos résultats à ceux analytiques trouvés dans la référence [12], Tableau 2.

FLAMBAGE LINÉAIRE

Pour notre étude du flambage, nous explicitons le problème que nous allons être amenés à résoudre ainsi que le moyen d'y donner une réponse. Le flambage est caractérisé par une augmentation disproportionnée de la déformée d'une structure pour un petit accroissement de charge. Ceci indique que le phénomène étudié est non linéaire, au moins géométrique.

La théorie du flambage linéaire est une analyse de la stabilité de la configuration initiale (non déformée) qui suppose un comportement élastique de la structure. Les matériaux composites thermodurcissables utilisés sont à comportement élastique fragile, ce qui rend l'hypothèse de linéarité matérielle valable. Pour faire cette étude, nous avons considéré directement une formulation non linéaire géométrique (Formulation Lagrangienne Totale). Cette présentation a pour avantage de préparer le terrain pour une étude non linéaire ultérieure. En effet, le flambage linéaire correspond à la recherche d'un état critique entre un comportement linéaire et un comportement non linéaire. Des renseignements complémentaires peuvent être trouvés dans les références [13] et [14].

L'état d'équilibre est caractérisé par un minimum de l'énergie soit, d'après le principe des travaux virtuels,

$$\delta\pi = W = W_{int} - W_{ext} = 0$$

Quand on utilise une formulation lagrangienne totale, on exprime cette relation sur la configuration initiale, soit :

$$W = \int_V \langle \delta\varepsilon \rangle \{S\} dV^0 - \int_V \langle \delta u \rangle \{fv\} dV^0 - \int_{S_F^0} \langle \delta u \rangle \{fs\} dS^0 = 0$$

$$\langle \delta u \rangle = 0 \text{ sur } S_u^\circ$$

avec $\{S\} = [H] \{\varepsilon\}$ $[H]$ constant

$\{S\}$ contraintes de Piola-Kirchoff de 2de espèce

et $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1\} + \{\varepsilon_{n1}\}$

$\{\varepsilon\}$ contraintes de Green Lagrange

Cette relation étant non linéaire, on ne peut déterminer $\{u\}$ directement. On résout ce problème de façon itérative de la façon suivante :

A partir de U^1 solution estimée, on a :

$$W(u^1) \neq 0$$

on cherche Δu^1 tel que $W(u^1 + \Delta u^1) = 0$

$$\text{or } W(u^1 + \Delta u^1) = W(u^1) + \Delta W(u^1, \Delta u^1) + 0 ((\Delta u^1)^2)$$

$$\Delta W = \int (\langle \delta \varepsilon \rangle [H] \{\delta \varepsilon\} + \langle \delta^2 \varepsilon \rangle \{S\}) dV^\circ - \int \langle \delta u \rangle \{\delta f\} dV^\circ$$

en supposant les forces de contour f_s indépendantes de U .

Dans l'expression de δW , seuls les termes linéaires en déplacement sont conservés. Ainsi en explicitant $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1\} + \{\varepsilon_{n1}\}$

$$\begin{aligned} \text{on a } \Delta W &= \int_V (\langle \delta \varepsilon_1 \rangle [H] \{\delta \varepsilon_1\} \longrightarrow [K_I] \\ &+ \langle \delta \varepsilon_{n1} \rangle [H] \{\delta \varepsilon_1\} + \langle \delta \varepsilon_1 \rangle [H] \{\delta \varepsilon_{n1}\} \longrightarrow [K_U] \\ &+ \langle \delta^2 \varepsilon_{n1} \rangle \{S_1\} - \langle \delta u \rangle \{\delta f\} dV^\circ \\ &\quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ &\quad \quad \quad \{K_\sigma\} \quad \quad \quad \{K_\lambda\} \end{aligned}$$

En non linéaire, on cherche à résoudre : $\Delta W(U^1, \Delta U^1) = -W(U^1)$

En discrétisant, on a donc :

$$[K_T] \{\Delta U^1\} = \{R(U^1)\}$$

$$\text{d'où } \{U^2\} = \{U^1\} + \{\Delta U^1\}$$

$$\text{avec } \{R\} = \{F_{ext}\} - \{F_{int}\}$$

$$\text{et } [K_T] = [K_I] + [K_U] + [K_\sigma] - [K_\lambda]$$

$[K_I]$: matrice de rigidité linéaire

$[K_U]$: matrice des déplacements initiaux

$[K_\sigma]$: matrice contraintes initiales

$[K_\lambda]$: matrice des forces suiveuses

Un état critique (situation de flambage) est caractérisé par une matrice tangente singulière, c'est-à-dire un état où $[K_T]\{\Delta u\} = \{0\}$. En flambage linéaire, on suppose que le comportement de la structure est linéaire jusqu'à la rencontre d'un état critique. Par conséquent, connaissant u_0 solution linéaire pour un état de chargement $\{F_0\}$, on cherche

$$U_{CR} = \lambda_{U_0}$$

On a alors :

$$[K_T] = [K_I] + \lambda([K_U]_0 + [K_\sigma]_0 - [K_\lambda]_0) \Rightarrow [K_T]\{u_{CR}\} = \{0\}$$

soit encore :

$$([K_I] + \lambda([K_U]_0 + [K_\sigma]_0 - [K_\lambda]_0)) \{u_{CR}\} = \{0\}$$

soit le problème aux valeurs propres suivant à résoudre :

$$([K_I] + \lambda[K_S]) \{u_{CR}\} = \{0\}$$

avec $[K_S]$ matrice de stabilité $([K_U] + [K_\sigma] - [K_\lambda])$

On obtient la charge critique de flambage $\{F_{CR}\} = \lambda_{CR} \{F_0\}$ avec λ_{CR} plus petite valeur propre positive du problème. Notons que $[K_T] \{u_{CR}\} = 0$ correspond à $\delta_2 \Pi = 0$ (critère classique d'analyse de stabilité). Pour illustrer cette démarche, prenons le graphe force déplacement de la figure 5.

Lors d'un premier calcul statique linéaire, on obtient la solution (u_0, F_0) puis on cherche (u, F) correspondant à un état limite entre un équilibre stable et un équilibre instable. Le fait de considérer un comportement initial linéaire conduit à trouver un point de bifurcation B. Ce point critique peut cependant être soit un point limite, soit un point de bifurcation. Cela peut être mis en évidence en effectuant une analyse non linéaire ou grâce au produit $\langle U_{CR} \rangle \{F_0\}$. Si ce produit est nul, on a affaire à une bifurcation sinon c'est un point limite. Les limites de cette approche sont mises en évidence sur le graphe. Plus l'hypothèse de linéarité du comportement est douteuse, plus la valeur de la charge critique de flambage est surévaluée, même si en élastique linéaire le mode $\{U_{CR}\}$ du flambage linéaire a la bonne forme. Pour évaluer la fiabilité d'une charge critique obtenue en flambage linéaire, un calcul non linéaire est donc nécessaire en l'absence de résultats expérimentaux, à moins d'avoir la certitude du comportement linéaire de la structure. Ce n'est pas le cas pour les panneaux raidis.

CONCLUSION

Cette étude en cours doit permettre, une fois les développements terminés, de mieux prévoir le comportement des panneaux raidis composites utilisés en construction navale. Mais une confrontation avec des résultats expérimentaux est un passage obligé pour la validation de cette étude numérique. Peu de mesures ayant été faites à ce jour, il serait intéressant de monter une campagne d'essais qui pourrait être menée en corrélation avec l'étude actuelle. Malheureusement, cette étude expérimentale n'est pour l'instant qu'au stade de projet. De toute façon, l'outil numérique en développement doit aboutir à un logiciel complet à vocation industrielle. Ce logiciel permettra la vérification de structures en flambage. L'étude expérimentale envisagée permettrait non seulement de fiabiliser cet outil informatique mais aussi de compléter notre connaissance du phénomène de flambage de panneaux raidis en composites. Ainsi, l'établissement de formules d'échantillonnage ou de prédimensionnement à l'usage des bureaux d'études devrait être possible.

Pour terminer, nous vous donnons rendez-vous dans quelques temps pour les résultats de cette étude.

- [1] BATOZ J.L., DHATT G., 1990, Modélisation des Structures par Eléments Finis, Hermès, Vol 1 et 2.
- [2] GAY. D., 1989, Matériaux Composites, Hermès, 2e édition.
- [3] TSAI S.W., Mai 1988, Composites Design, Think Composites, 4e édition.
- [4] QUESNEL T., 1990, Facteurs de Correction de Cisaillement Transverse dans les Plaques Composites, U.T.C., Rapport de D.E.A.
- [5] LARDEUR P., 1990, Développement et Evaluation de deux Nouveaux Eléments Finis de Plaque et Coques Composites avec Influence du Cisaillement Transversal, U.T.C., Thèse de Doctorat.
- [6] PRZEMIENIECKI J.S., 1968, Theory of Matrix Structural Analysis, Dover Publications.
- [7] TAYLOR R.L., BERESFORD P.J., WILSON E.L., 1976, A NonConforming Element for Stress Analysis, Vol 10, pp 1211-1219.
- [8] BATHE K.J., DVORKIN E.N., 1985, A Four-Node Plate Bending Element Based on Mindlin/Reissner Plate Theory and a Mixed Interpolation, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 21, pp 367-383.
- [9] DONEA J., LAMAIN L.G., 1987, A Modified Representation of Transverse Shear in C^0 Quadrilateral Plate Elements, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 63, pp 183-207.
- [10] PRATHAP G., SOMASHEKAR B.R., 1988, Field-and Edge-Consistency Synthesis of a 4 Node Quadrilateral Plate Bending Element, International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol 26, pp 1693-1708.
- [11] PAGANO N.J., HATFIELD S.J., 1972, Elastic Behavior of Multilayered Bidirectional Composites, AIAA Journal, Vol 10, N° 7, pp 931-933.
- [12] OWEN D.R.J., FIGUEIRAS, J.A., Anisotropic Elasto-plastic Finite Element Analysis of Thick and Thin Plates and Shells, International Journal for Numerical Method in Engineering, Vol 19, pp 541-566
- [13] CHATELAIN J., 1987, Analyse non Linéaire des Coques Minces Isotropes et Composites par Eléments Finis Quadrilatéraux, U.T.C., Thèse de Doctorat.
- [14] POL P., BATOZ J.L., ROELANDT J.M., 1990, Grands Déplacements et Instabilité des Coques Minces Elastoplastiques, Strucome 1990, pp 66-82.

S = L/h	Modèle	$\bar{\sigma}_x$ (L/2,L/2,h/2)	$\bar{\sigma}_y$ (L/2,L/2,2h/5)	$\bar{\tau}_{xy}$ (0,L/2,0)	$\bar{\tau}_{yz}$ (L/2,0,0)	\bar{w} (L/2,L/2,0)
4	Q4y 6x6	0,468	0,485	0,240	0,239	4,290
	Q4y 10x10	0,472	0,506	0,241	0,240	4,281
	Elasticité[11]	0,684	0,628	0,223	0,223	4,079
10	Q4y 6x6	0,506	0,458	0,257	0,220	1,529
	Q4y 10x10	0,509	0,461	0,258	0,220	1,530
	Elasticité[11]	0,551	0,477	0,247	0,226	1,512
50	Q4y 6x6	0,531	0,428	0,269	0,206	1,016
	Q4y 10x10	0,535	0,431	0,270	0,207	1,020
	Elasticité[11]	0,539	0,433	0,258	0,219	1,021
10 000	Q4y 6x6	0,533	0,426	0,269	0,205	0,995
	Q4y 10x10	0,537	0,429	0,270	0,206	0,998
	Elasticité[11]	0,539	0,431	0,259	0,219	1,000

Tableau 1. Plaque carrée composite à 9 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal.
 Comparaison des déplacements et contraintes (Réf. 11)
Table 1. Simply supported square 9-layer composite plate under double sinusoidal loading.
Comparison of displacements and stresses (ref. 11)

C= $\frac{E_{peau}}{E_{coeur}}$	Modèle	\bar{w}	$-\bar{\sigma}_{xx}$ (L/2,L/2,-4h-/10)	$-\bar{\sigma}_{xx}$ (L/2,L/2,-4h+/10)	$-\bar{\sigma}_{xx}$ (L/2,L/2,-h/2)
C = 1	Q4y 6 x 6	175,41	28,641	28,641	35,802
	Q4y 10 x 10	175,62	28,654	28,654	45,818
	Elasticité[12]	181,05	28,54	28,54	35,94
C = 10	Q4y 6 x 6	40,077	50,960	5,096	63,700
	Q4y 10 x 10	40,088	50,996	5,100	63,745
	Elasticité[12]	41,91	48,61	4,86	65,08
C = 50	Q4y 6 x 6	16,451	46,687	0,934	58,359
	Q4y 10 x 10	16,429	46,727	0,935	58,409
	Elasticité[12]	16,75	37,15	0,74	66,90

Tableau 2. Plaque carrée (L/h=10) sandwich simplement supportée sous charge uniforme.
 Comparaison des déplacements et contraintes (Réf. 12)
Table 1. Simply supported square sandwich plate (L/h=10) under uniform loading.
Comparison of displacements and stresses (ref. 12)

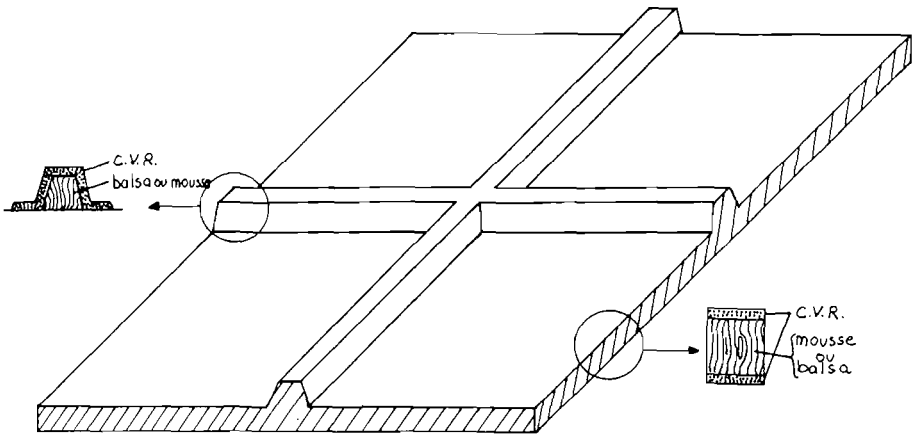


Figure 1. Panneau sandwich raidi
Stiffened sandwich panel

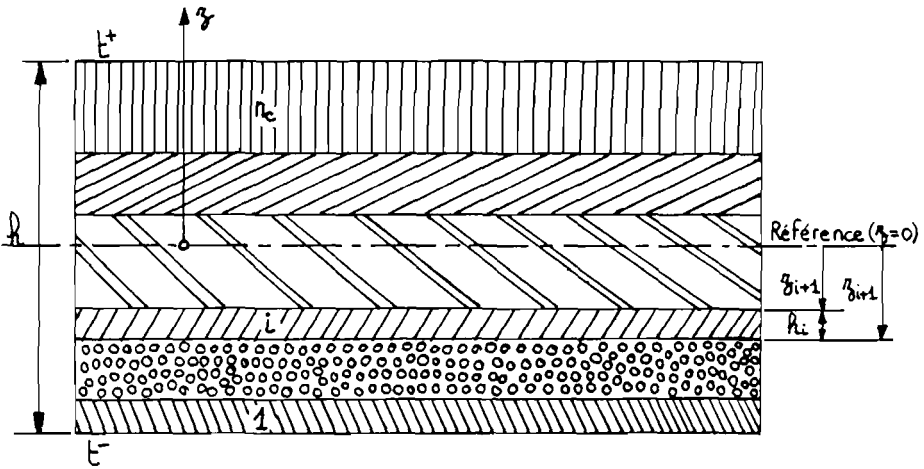


Figure 2. Plaque stratifiée
Laminated panel

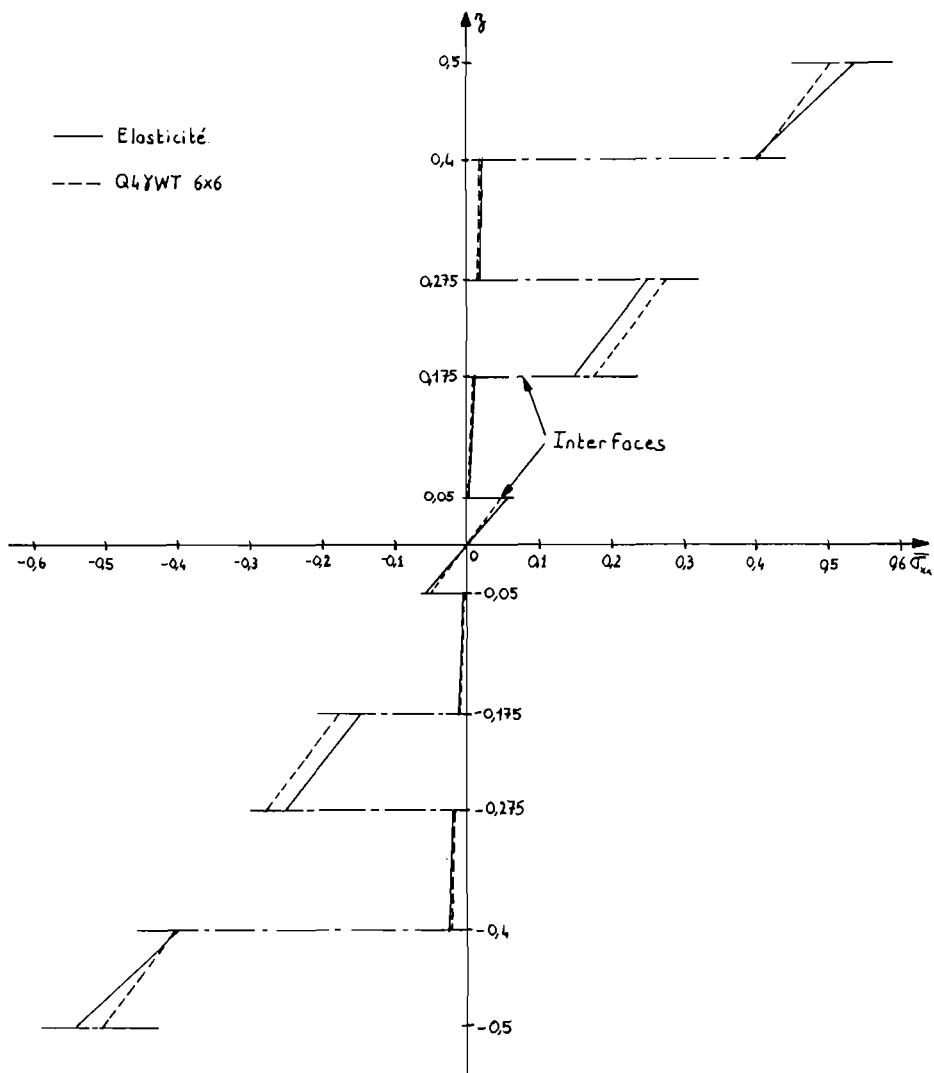


Figure 3. Distribution de σ_{xx} à travers l'épaisseur.
 Test de Pagano pour 9 couches avec $L/h = 10$.
 σ_{xx} distribution through the thickness.
 Pagano's test for 9 layers, $L/h = 10$.

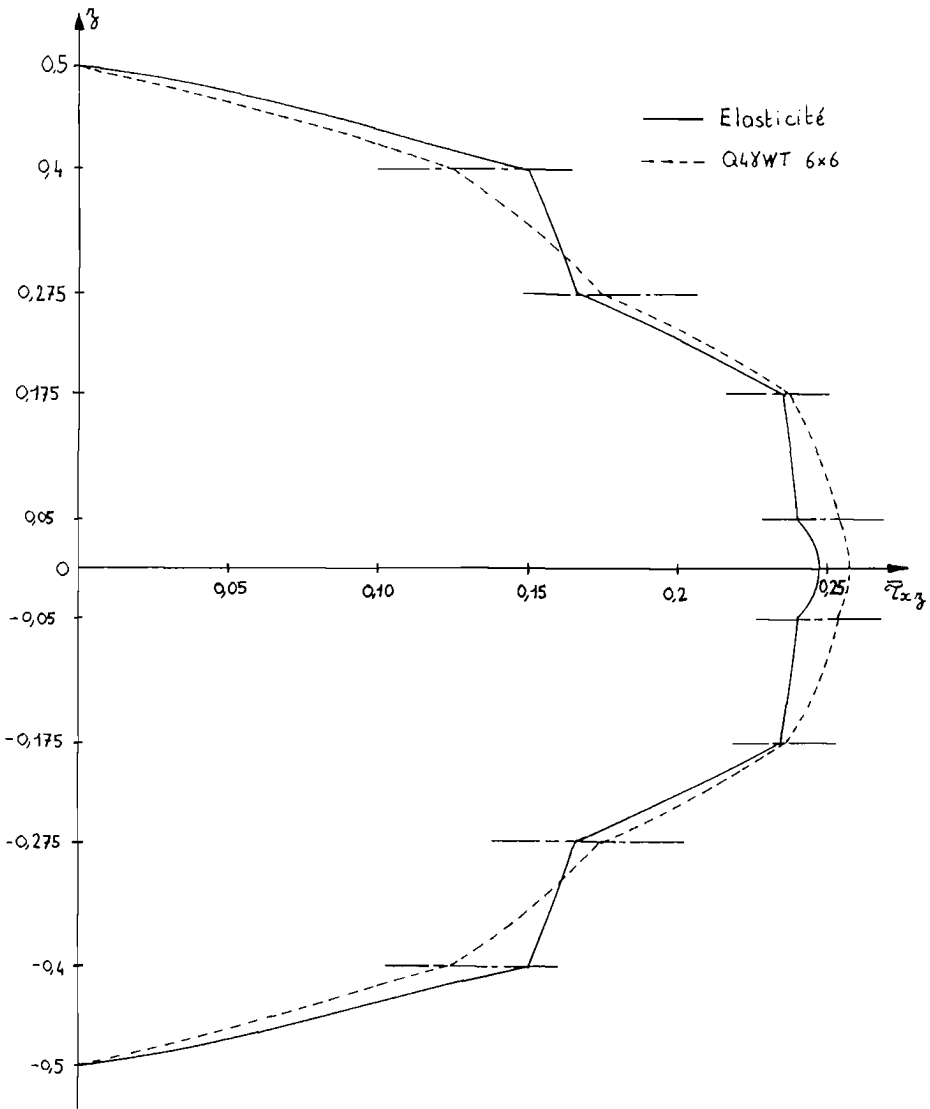


Figure 4. Distribution de τ_{xz} à travers l'épaisseur.
 Test de Pagano pour 9 couches avec $L/h = 10$.
 τ_{xz} distribution through the thickness.
 Pagano's test for 9 layers, $L/h = 10$.

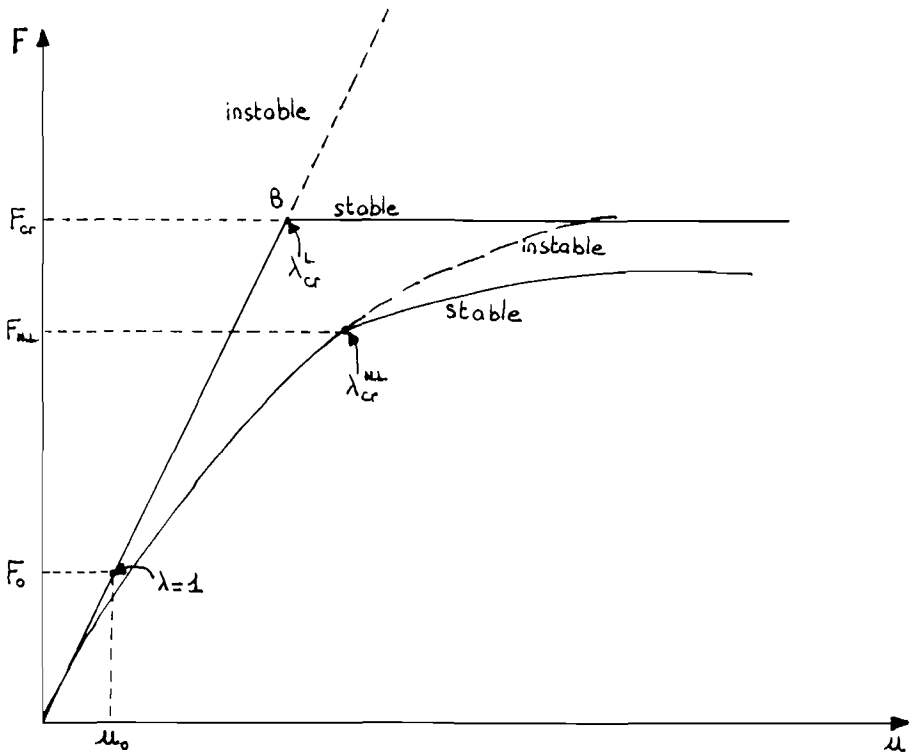


Figure 5. Courbe charge-déplacement de flambage.
Load-displacement plot for buckling.