

17

FLAMBEMENT GLOBAL ET LOCAL DES MATERIAUX COMPOSITES : APPLICATION AUX MATS DE VOILIERS.

H. DEVAUX¹

Résumé - L'ensemble mâât-gréement d'un voilier est l'élément structurel qui transmet les efforts aérodynamiques dus aux voiles à la plate-forme du voilier. Cet élément de transmission des efforts est en général constitué d'un mâât : tube mince à grand élancement, et d'un gréement : ensemble des câbles reliant le mâât à la plate-forme. Le mâât et le gréement sont des pièces longues (souvent plus longues que la coque), à centre de gravité élevé et il est primordial d'obtenir une masse la plus faible possible, tant pour la sécurité que pour la performance. Cette recherche de gain de poids impose l'emploi de matériaux de plus en plus légers : le bois, puis les alliages d'aluminium et enfin, depuis le début des années 1980, les matériaux composites. C'est l'utilisation de ce dernier matériau qui nous intéresse ici.

mots clés : flambement, mâât, gréement, éléments finis.

INTRODUCTION

L'analyse de la structure mâât-gréement fait apparaître que le mat est une poutre soumise essentiellement à des efforts de flexion et de compression, et que, dans la plupart des cas étudiés, les efforts de compression prédominent. Ce qui implique que, en plus des dimensionnements classiques de cette structure en contrainte et en déformation, il faut s'intéresser de près aux phénomènes de flambement :

- flambement global de la structure : il s'agit ici de déterminer les chargements critiques de la structure,
- flambement local de paroi : le mâât étant en général constitué d'un tube à parois minces, on doit vérifier que le peau (coque mince) reste stable aux contraintes de fonctionnement.

¹ACX, 29200 Brest, France

Une approche globale de ces problèmes peut être effectuée en discrétisant la structure en éléments finis "coque" pour le tube de mât et en éléments finis "câbles (barre en traction)" pour le gréement. La finesse de maillage nécessaire à l'accès aux contraintes critiques de paroi de tube aboutit à un nombre de noeuds et de degrés de liberté important (supérieur à 20000), ce qui limite cette approche. La démarche la plus courante aujourd'hui consiste à séparer les études de flambement global et local :

- l'approche du flambement global de mât-gréement passe alors par la modélisation du mât en e.f. poutre, le gréement restant modélisé par des "câbles".

- le flambement local, quant à lui, sera déterminé soit en calculs e.f. avec une discrétisation du tube de mât en éléments de coque, sur un tronçon de longueur réduite (quelques longueurs d'onde de flambement), soit approximé à l'aide de formules analytiques issues de l'étude de flambement des coques isotropes : c'est cette dernière démarche que nous allons exposer ici.

FLAMBEMENT GLOBAL DE LA STRUCTURE MAT-GREEMENT.

Une étude éléments finis "poutre-cable" montrerait que, dans la majorité des cas étudiés, les critères de résistance et de déformation sont les critères dimensionnants pour les câbles de gréement, tandis que le critère de flambement est le critère le plus pénalisant pour le tube de mât. Les coefficients de sécurité au flambement (valeurs inverses des coefficients de flambement CF : rapport du chargement réel sur le chargement critique), sont en général compris entre 1.15 et 1.6 : la marge d'erreur est faible et la choix des rigidités du tube de mât doit être effectué avec soin... Nous avons développé, pour le calcul du flambement global, un outil de calcul spécialisé qui s'appuie sur l'utilisation de la matrice de souplesse de la structure. Ce type de modèle numérique permet d'accéder, avec des temps de calcul très réduits, aux coefficients de flambement de la structure - valeurs dimensionnantes - et de déterminer aisément les déformées du mât en prenant en compte les effets amplificateurs des efforts de compression. Les caractéristiques mécaniques de la poutre (à inertie variable) constituant le tube du mât - rigidités en compression, flexion, cisaillement - sont naturellement prises en compte.

Les principaux résultats que l'on peut retenir sur le flambement global des mâts composites carbone par rapport aux mâts métalliques (en alliage d'aluminium) sont :

- il est nécessaire de caractériser les rigidités de compression et de flexion du tube composite à partir des modules de compression des

matériaux car toute la section du tube de mât est soumise à des contraintes de compression. Selon le type de fibre de carbone utilisé et sa mise en oeuvre, le module en compression peut être inférieur de 15% au module de traction, ce qui se retrouve directement sur les coefficients de flambement.

- l'influence du module de cisaillement des matériaux du tube de mât se fait d'autant plus sentir que l'on utilisera des fibres de carbone de module élevé, la perte sur les C.F. peut atteindre 10%, ce qui est loin d'être négligeable, d'autant plus que les coefficients de sécurité sur le flambement sont faibles.

Les précautions relatives aux deux points précédents étant prises, la détermination des coefficients de flambement d'un mât composite est analogue à la détermination de ceux d'un mât métallique.

FLAMBEMENT LOCALE DES PAROIS DU TUBE DE MAT.

Un tube de mât peut être considéré comme un tube à parois minces (par exemple l'épaisseur de paroi d'un tube composite de section elliptique 300*150mm est de l'ordre de 6mm). On a vu précédemment qu'un des facteurs dimensionnants d'un mât est le flambement global, c'est à dire que ce critère nous amène à choisir des rigidités de flexion, ce qui nous amène à concevoir le tube composite avec un maximum de fibres dans son axe longitudinal. On imagine aisément qu'un tube réalisé uniquement avec de la fibre à 0° peut causer des soucis quant au flambement local de paroi, et pour des raisons de recherche de poids minimum on veut minimiser la quantité de fibres à 45° et 90°.

La recherche des contraintes critiques de parois ne peut s'effectuer de façon précise qu'avec une modélisation e.f. coque composite, cependant au niveau de l'avant projet ou pour une simple vérification, nous utilisons des résultats obtenus avec des formules analytiques établies pour des coques ou des portions de coque cylindrique isotropes. Cette approximation n'est pas si aberrant que cela, si l'on considère que l'empilement des différentes couches de la peau du mât fournit des rigidités locales de flexion, dans les directions axiale et tangentielle, relativement proches. L'erreur la plus grande faite par cette modélisation provient du choix du rayon de courbure de la coque. On peut retenir que l'ordre de grandeur de l'erreur faite sur les contraintes critiques est de l'ordre de 15 à 40% : de plus la contrainte critique "analytique" est systématiquement inférieure à la contrainte critique réelle (calcul e.f.), ce qui nous place en sécurité.

18

UN MODÈLE ASYMPTOTIQUE DE PLAQUE STRATIFIÉE

R. KAIL¹, F. LÉNÉ², Y.H. DE ROECK³

Résumé : Pour le calcul de structures minces en composites stratifiés, nous présentons un modèle bidimensionnel de type plaque, obtenu par une technique de développement asymptotique. Ce modèle fournit des relations permettant de calculer, en tout point du stratifié, les déplacements et le tenseur des contraintes à partir d'une analyse de structure, par éléments finis plans, sur la surface moyenne de la plaque. Après une description du modèle théorique, nous comparons les résultats numériques à la solution analytique d'un problème test.

mots clés : plaque, composites, développement asymptotique, éléments finis.

LE MODÈLE THÉORIQUE

Le modèle de plaque proposé pour le calcul des structures composites stratifiées doit permettre de bien évaluer certaines composantes du tenseur des contraintes. D'une part, la prise en compte du cisaillement transverse assure le couplage membrane-flexion produit par un empilement quelconque des couches. D'autre part, aux interfaces entre matériaux, la donnée du cisaillement membranaire, ainsi que du pincement ou arrachement, permet d'étudier la rupture par délamination. En employant un développement asymptotique par rapport à l'épaisseur de la plaque, nous élaborons une démarche qui permet de bien poser les relations entre le problème tridimensionnel et la modélisation bidimensionnelle.

¹ Doctorant IFREMER - INRIA, Proj. MODULEF, Le Chesnay, France

² Professeur d'université - Paris VI, Labo. de Mécanique, Modélisation et Calcul, Paris, France

³ Ingénieur - IFREMER, Svce. Structures et Ouvrages en Mer, Brest, France

LE PROBLÈME TRIDIMENSIONNEL

Le domaine étudié, Ω_ϵ , figure 1, représente, dans son état non déformé, une plaque plane et fine, de demi-épaisseur ϵ . Ce domaine est généré par une surface fermée, ω , du plan (\vec{x}_1, \vec{x}_2) de la manière suivante :

$$\Omega_\epsilon = \omega \times [-\epsilon, +\epsilon] \quad \text{de frontière } \partial\Omega_\epsilon = \Gamma^+ \cup \Gamma_\epsilon \cup \Gamma^- \quad \text{avec}$$

$$\Gamma^+ = \omega \times \{\epsilon\}, \quad \Gamma_\epsilon = \partial\omega \times [-\epsilon, +\epsilon] \quad \text{et } \Gamma^- = \omega \times \{-\epsilon\}.$$

La matrice de rigidité \mathbf{a} est symétrique et définie positive. Nous supposons que chaque couche a un comportement élastique linéaire et qu'elle est monoclinique d'axe \vec{x}_3 c'est-à-dire que le plan moyen de chaque couche est un plan de symétrie matérielle pour celle-ci. Cette dernière hypothèse implique que les termes $a_{\alpha\beta\gamma 3}$ et $a_{\alpha 333}$ soient nuls, les indices grecs prenant pour valeur 1 et 2. Nous supposons, de plus, que le domaine est soumis à une densité volumique d'efforts, \vec{f}_ϵ , et aux densités surfaciques \vec{G}_ϵ^+ sur Γ^+ , \vec{G}_ϵ^- sur Γ^- et \vec{F}_ϵ sur une partie Γ_{σ_ϵ} de Γ_ϵ . De même, Ω_ϵ est encastré sur une partie Γ_{u_ϵ} de Γ_ϵ , complémentaire de Γ_{σ_ϵ} . Enfin, les couches sont parfaitement collées entre elles.

Le problème mécanique consiste alors à trouver $(\vec{u}_\epsilon, \boldsymbol{\sigma}_\epsilon)$ solution de (P_ϵ) , avec :

$$(P_\epsilon) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_\epsilon + \vec{f}_\epsilon = \vec{0} \quad \text{avec } \boldsymbol{\sigma}_\epsilon = \mathbf{a}_\epsilon \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{u}_\epsilon) \quad \text{dans } \Omega_\epsilon \\ \vec{u}_\epsilon = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma_{u_\epsilon} \\ \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\vec{n}) = \vec{F}_\epsilon \quad \text{sur } \Gamma_{\sigma_\epsilon}, \quad \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\pm \vec{x}_3) = \vec{G}_\epsilon^\pm \quad \text{sur } \Gamma^\pm \\ \llbracket \vec{u}_\epsilon \rrbracket = \llbracket \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\vec{n}) \rrbracket = \vec{0} \quad \text{aux interfaces} \end{array} \right.$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}$ désigne le tenseur linéarisé des déformations et \vec{n} la normale extérieure. Ce problème admet une solution unique, (Duvaut, 1990).

LE PASSAGE DU TRIDIMENSIONNEL AU BIDIMENSIONNEL

Afin de nous ramener à une étude bidimensionnelle, nous utilisons une technique de développement asymptotique à un paramètre, la demi-épaisseur ϵ . Pour d'autres exemples de ce type de technique, on pourra se reporter à (Ciarlet, 1979) ou (Destuynder, 1980). Nous utilisons, tout d'abord, l'affinité

$$\Phi_\epsilon : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, x_3/\epsilon),$$

qui transfère le problème au domaine de référence $\Omega = \Omega_\epsilon \circ \Phi_\epsilon$, indépendant du paramètre géométrique ϵ .

Ayant supposé la rigidité \mathbf{a} invariante par Φ_ϵ , nous imposons pour chaque composante des chargements un ordre de grandeur en ϵ :

$$\begin{cases} f_{i\epsilon}(x_1, x_2, x_3) \circ \Phi_\epsilon = \epsilon^{p_i} f^{(p_i)}(y_1, y_2, y_3) \\ F_{i\epsilon}(x_1, x_2, x_3) \circ \Phi_\epsilon = \epsilon^{q_i} F^{(q_i)}(y_1, y_2, y_3) \\ G_{i\epsilon}^\pm(x_1, x_2, x_3) \circ \Phi_\epsilon = \epsilon^{r_i} G^{\pm(r_i)}(y_1, y_2, y_3) \end{cases}$$

Ensuite, nous développons la solution en puissance de ϵ :

$$\begin{aligned} \vec{u}_\epsilon(x_1, x_2, x_3) \circ \Phi_\epsilon &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \epsilon^n \vec{u}^{(n)}(y_1, y_2, y_3) \\ \sigma_\epsilon(x_1, x_2, x_3) \circ \Phi_\epsilon &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \epsilon^n \sigma^{(n)}(y_1, y_2, y_3) \end{aligned}$$

LE PROBLÈME 2D ET LES RELATIONS 2D-3D

En utilisant les développements précédents dans le problème (P_ϵ) et en identifiant les termes de même puissance en ϵ , nous obtenons, par un processus itératif, (Kail, 1991), les relations entre les déplacements de la surface moyenne et les déplacements et les contraintes dans le volume :

$$\begin{cases} u_3^{(n)} = \tilde{u}_3^{(n)} + \int_0^{y_3} \text{fonc}(\vec{\tilde{u}}^{(n-s)}) dz \\ u_\gamma^{(n)} = \tilde{u}_\gamma^{(n)} - y_3 \tilde{u}_{3,\gamma}^{(n-1)} + \int_0^{y_3} \text{fonc}(\vec{\tilde{u}}^{(n-s)}) dz \\ \sigma_{\alpha\beta}^{(n)} = Q_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma,\delta}^{(n)} + A_{\alpha\beta} \sigma_{33}^{(n)} \\ \sigma_{3\alpha}^{(n)} = -G_\alpha^{-(n)} - \int_{-1}^{y_3} (f_\alpha^{(n-1)} + \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(n-1)}) dz \\ \sigma_{33}^{(n)} = -G_3^{-(n)} - \int_{-1}^{y_3} (f_3^{(n-1)} + \sigma_{3\alpha,\alpha}^{(n-1)}) dz \end{cases}$$

où $\vec{\tilde{u}}^{(n)}$ est défini sur la surface moyenne c'est-à-dire $\vec{\tilde{u}}^{(n)} = \vec{u}^{(n)}(y_1, y_2, 0)$, $s \geq 1$, $A_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta 33} / a_{3333}$ et $Q_{\alpha\beta\gamma\delta} = a_{\alpha\beta\gamma\delta} - A_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta 33}$. On remarque que \mathbf{Q} n'est rien d'autre que la matrice de rigidité réduite par rapport à la direction \vec{y}_3 .

L'intégration sur l'épaisseur des équations d'équilibre et des conditions aux limites conduisent, grâce aux relations précédentes, au problème ($P^{(n)}$), posé sur la surface moyenne. Son expression est :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{\alpha\beta}^{(n)} + \mathcal{F}_\alpha^{(n)} = 0 \quad \text{avec } X_{\alpha\beta}^{(n)} = A_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{u}_{\gamma,\delta}^{(n)} - B_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{u}_{3,\gamma\delta}^{(n-1)} \text{ sur } \omega \\ Y_{\alpha\beta,\alpha\beta}^{(n)} + \mathcal{F}_3^{(n)} = 0 \quad \text{avec } Y_{\alpha\beta}^{(n)} = -D_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{u}_{\gamma,\delta}^{(n)} + C_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{u}_{3,\gamma\delta}^{(n-1)} \text{ sur } \omega \\ \tilde{u}_\gamma^{(n)} = \tilde{u}_{3,\gamma}^{(n-1)} = \tilde{u}_3^{(n-1)} = 0 \text{ sur } \partial_u \omega \\ X_{\alpha\beta}^{(n)} n_\beta = g_\alpha^{(n)}, Y_{\alpha\beta}^{(n)} n_\beta = h_\alpha^{(n)} \text{ et } Y_{\alpha\beta,\beta}^{(n)} n_\alpha = g_3^{(n)} \text{ sur } \partial_\sigma \omega \end{array} \right.$$

où

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \int_{-1}^1 Q_{\alpha\beta\gamma\delta} dy_3 && \text{membrane-membrane} \\ B_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \int_{-1}^1 y_3 Q_{\alpha\beta\gamma\delta} dy_3 && \text{membrane-flexion} \\ C_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^{y_3} z Q_{\alpha\beta\gamma\delta} dz dy_3 && \text{flexion-flexion} \\ D_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^{y_3} Q_{\alpha\beta\gamma\delta} dz dy_3 && \text{flexion-membrane} \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_\alpha^{(n)} = \sum_{-/+} G_\alpha^{(n+1)} + \int_{-1}^1 \left(f_\alpha^{(n)} + \Psi_{\alpha\beta,\beta}^{(n)} \right) dy_3$$

$$\mathcal{F}_3^{(n)} = \sum_{-/+} G_3^{(n+2)} - 2G_{\alpha,\alpha}^{-(n+1)} + \int_{-1}^1 f_3^{(n+1)} dy_3 - \int_{-1}^1 \int_{-1}^{y_3} \left(f_{\alpha,\alpha}^{(n)} + \Psi_{\alpha\beta,\alpha\beta}^{(n)} \right) dz dy_3$$

$$g_\alpha^{(n)} = \int_{-1}^1 \left(F_\alpha^{(n)} - \Psi_{\alpha\beta}^{(n)} n_\beta \right) dy_3$$

$$g_3^{(n)} = 2G_\alpha^{-(n+1)} n_\alpha + \int_{-1}^1 F_3^{(n)} dy_3 + \int_{-1}^1 \int_{-1}^{y_3} \left(f_\alpha^{(n)} + \Psi_{\alpha\beta,\beta}^{(n)} \right) n_\alpha dz dy_3$$

$$h_\alpha^{(n)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^{y_3} \left(F_\alpha^{(n)} - \Psi_{\alpha\beta}^{(n)} n_\beta \right) dy_3$$

où $\Psi^{(n)}$ représente des termes de récurrence en $\overline{\tilde{u}^{(n-s)}}$

On démontre que ce problème admet une solution unique, si $\begin{pmatrix} A & -B \\ -D & C \end{pmatrix}$ est

coercive et $(\overline{\mathcal{F}^{(n)}}, \overline{g^{(n)}}, \overline{h^{(n+1)}}) \in (L^2(\partial_\sigma \omega))^8$.

Le développement est, quant à lui, de la forme :

$$\begin{aligned} u_{\epsilon_\gamma} \circ \Phi_\epsilon &= \epsilon^i u_\gamma^{(i)} + \dots & u_{\epsilon_3} \circ \Phi_\epsilon &= \epsilon^{i-1} u_3^{(i-1)} + \dots \\ \sigma_{\epsilon_{\alpha\beta}} \circ \Phi_\epsilon &= \epsilon^i \sigma_{\alpha\beta}^{(i)} + \dots & \sigma_{\epsilon_{\alpha 3}} \circ \Phi_\epsilon &= \epsilon^{i+1} \sigma_{\alpha 3}^{(i+1)} + \dots \\ \sigma_{\epsilon_{33}} \circ \Phi_\epsilon &= \epsilon^{i+2} \sigma_{33}^{(i+2)} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{où } i = \inf(p_\alpha, p_3 - 1, q_\alpha, q_3 - 1, r_\alpha - 1, r_3 - 2).$$

Pour la justification de ces résultats, on se reportera à (Kail, 1991).

Nous pouvons faire, cependant, les remarques suivantes :

- la continuité, aux interfaces, du déplacement et du vecteur contrainte est automatiquement vérifiée,
- pour un empilement quelconque, il apparaît un couplage membranc-flexion non-symétrique,
- la loi de comportement du problème ($P^{(n)}$) est obtenue à partir des coefficients de chaque pli par une loi de mélange,
- au premier ordre, le déplacement est de type Love-Kirchhoff,
- pour un matériau homogène isotrope, il y a découplage et nous obtenons les équations classiques des plaques de Love-Kirchhoff,
- pour un empilement symétrique, il y a découplage.

QUELQUES REMARQUES SUR L'IMPLEMENTATION

Le modèle est discrétisé par une méthode conforme d'éléments finis. La non-symétrie du système linéaire obtenu doublera les coûts en place mémoire et en temps de calcul par rapport à un problème de plaque classique. Cependant, la matrice est indépendante de l'ordre n . Celle-ci, factorisée par la méthode de Gauss, permet de calculer tous les termes du développement.

Si, de plus, nous supposons tous les efforts du même ordre de grandeur par rapport à la demi-épaisseur, ϵ , nous pouvons calculer les termes du développement deux à deux, (Kail, 1992).

QUELQUES RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Les résultats que nous présentons ont été obtenus par comparaison avec la solution analytique (Pagano, 1969) du problème suivant : une plaque de largeur $L = 1.m$ suivant x , de longueur infinie suivant y , chargée d'un "tas de sable" $q = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ dans la direction de l'épaisseur z , et simplement supportée suivant z sur les bords $x = 0$ et $x = L$. En fonction du nombre de degrés de liberté retenus, les diagrammes montrent le pourcentage d'erreur relative aux points où la quantité étudiée est maximale. Le stratifié choisi est un sandwich

dont l'empilement peau-âme-peau a pour épaisseur $2mm - 16mm - 2mm$, avec pour matériau :

- âme : une mousse syntactique, (Ben Hamida, 1989), de coefficients :

$$E = 3.04GPa \text{ et } \nu = 0.31$$

- peau : un unidirectionnel fibre de verre/Epoxyde, (Gay, 1987), de coefficients :

$$E_l = 45GPa, E_t = 12GPa, \nu = 0.31, G_{lt} = 4.5GPa \text{ et } G_{tt} = 4.58GPa$$

Nous avons implémenté l'élément Hsieh-Clough-Tocher réduit décrit figure 2, (Bernadou-Boisserie-Hassan, 1980). Cet élément possède trois degrés de liberté par nœud et par direction : la valeur et son gradient.

Les figures 4 à 6 montrent la convergence de cet élément avec :

- figure 4, le déplacement dans la direction \bar{x}_1 aux points $(0, -10mm)$ et $(0, -8mm)$.
- figure 5, la flèche au centre de la plaque.
- figure 6, la contrainte σ_{11} aux points $(0.5m, -10mm)$ et $(0.5m, -8mm)$.

Les résultats sont satisfaisants. Par contre, son interpolation du 3^{eme} degré ne nous permet pas d'obtenir les contraintes transverses par une loi locale et la méthode utilisée pour approcher celles-ci (Kail, 1991) ne fait pas apparaître les effets de l'empilement. De plus, le calcul des dérivées secondes, nécessaire aux contraintes planes, n'est pas assez précis notamment dans le cas d'un empilement non symétrique.

C'est pourquoi nous implémentons l'élément d'Argyris, (Bernadou, 1989), décrit figure 3, qui possède 21 degrés de liberté, par composante, avec une interpolation du 5^{eme} degré et conduisant à une continuité \mathcal{C}^1 .

Sur les figures 7 à 9, nous comparons la convergence de ces deux éléments dans le cas d'un empilement peau-âme-peau ayant pour épaisseur $3mm - 15mm - 2mm$ pour les mêmes matériau que précédemment.

- figure 7, le déplacement dans la direction \bar{x}_1 au point $(0, -7mm)$.
- figure 8, la flèche au centre de la plaque.
- figure 9, la contrainte σ_{11} au point $(0.5m, -7mm)$.

On voit le net avantage de l'élément d'Argyris pour le calcul des contraintes. De plus, son interpolation nous permettra de calculer les contraintes transverses par une loi locale.

CONCLUSION

Un développement asymptotique pour un matériau stratifié permet un calcul bidimensionnel efficace des structures minces, tout en fournissant les contraintes aux points sensibles du volume. Une première implémentation, utilisant l'élément Hsieh-Clough-Tocher réduit, a montré la faisabilité de la méthode mais a fourni des résultats médiocres pour les contraintes. La meilleure régularité de l'élément d'Argyris semble apporter la précision recherchée.

BEN HAMIDA A., (1989), *Étude micromécanique des mousses syntactiques*, thèse de l'Université Paris VI.

BERNADOU M., BOISSERIE J.M., HASSAN K., (1980), *Sur l'implémentation des éléments finis de Hsieh-Clough-Tocher complet et réduit*, Rapport de Recherche INRIA n°4.

BERNADOU M., (1989), *Méthodes d'approximation pour les problèmes de plaques et de coques*, cours D.E.A. Paris VI.

CIARLET, P.G., (1979), *A Justification of Von Karman equations*, Rapport Interne du Laboratoire d'Analyse Numérique, LA 189, Paris VI.

DESTUYNDER P., (1980), *Thèse d'État*, Paris.

DUVAUT G., (1990), *Mécanique des milieux continus*, MASSON.

GAY D., (1987), *Matériaux composites*, HERMES.

KAIL, R., (1991), *Un modèle de plaque sandwich, 1^{ère} partie : présentation théorique*, Rapport IFREMER DITI/GO/SOM91-463.

KAIL, R., (1992), *Un modèle de plaque sandwich, 2^{nde} partie : implémentation et résultats*, Rapport IFREMER DITI/GO/SOM92-191.

PAGANO N.J., (1969), *Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending*, Jour. Comp. Mat., Vol 3 (July), p.398.

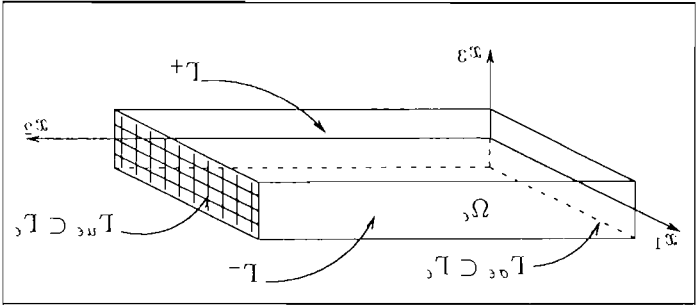


Figure 1 : Le domaine Ω_ϵ

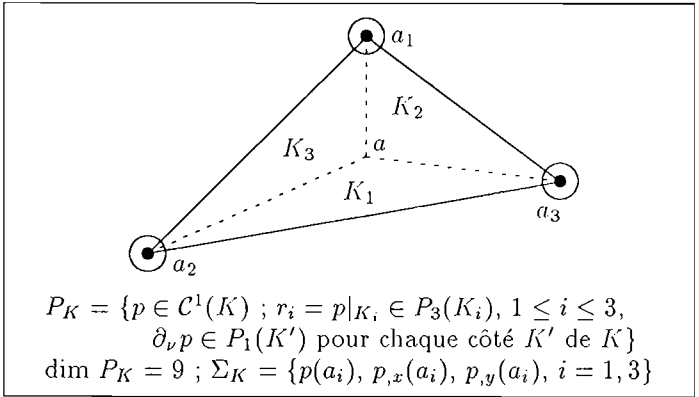


figure 2 : L'élément de Hsieh-Clough-Tocher réduit

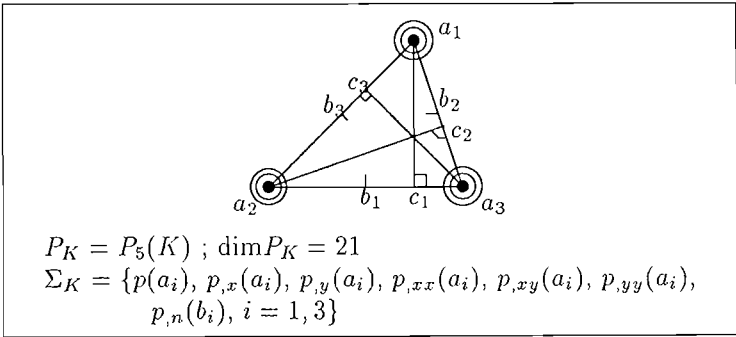


figure 3 : L'élément d'Argyris

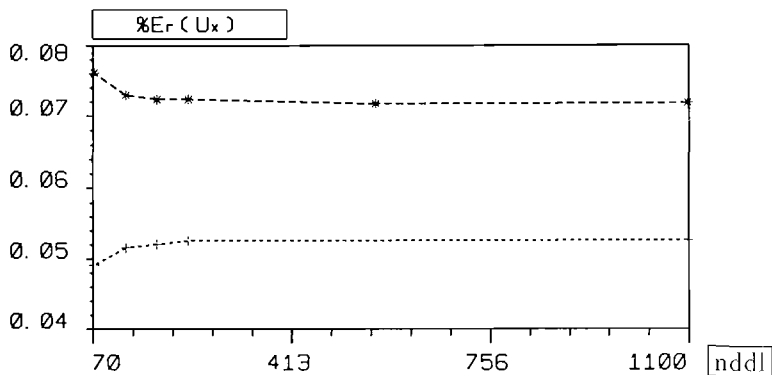


figure 4 : $-\ast-$ $u_x(0, -10mm)$ et $-\ast-$ $u_x(0, -8mm)$

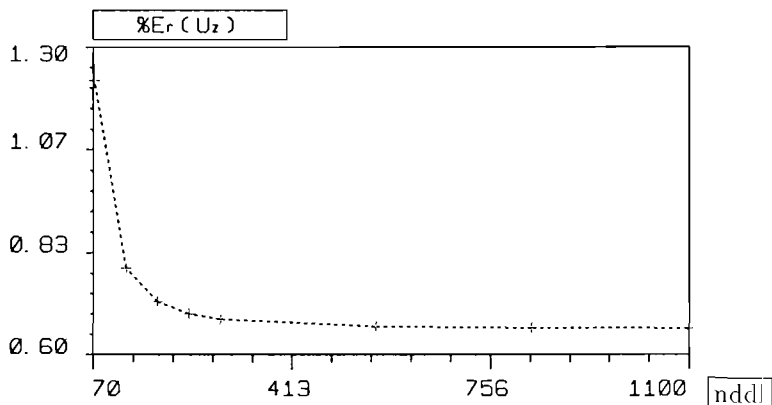


figure 5 : $u_z(0.5m, 0)$

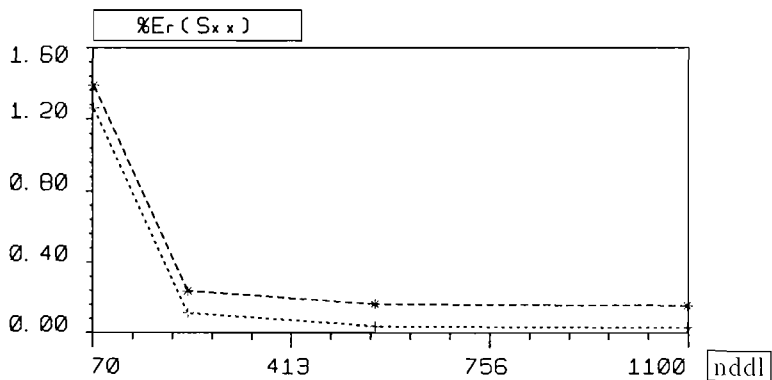


figure 6 : $-\ast-$ $\sigma_{11}(0.5m, -10mm)$ et $-\ast-$ $\sigma_{11}(0.5m, -8mm)$

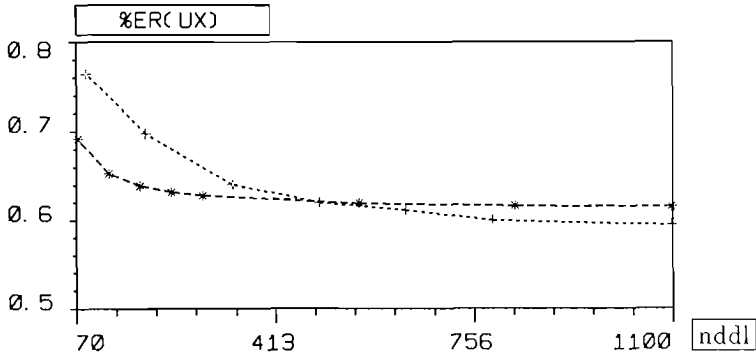


figure 7 : $u_x(0, -7mm)$: —+ Argyris et -* HCTr

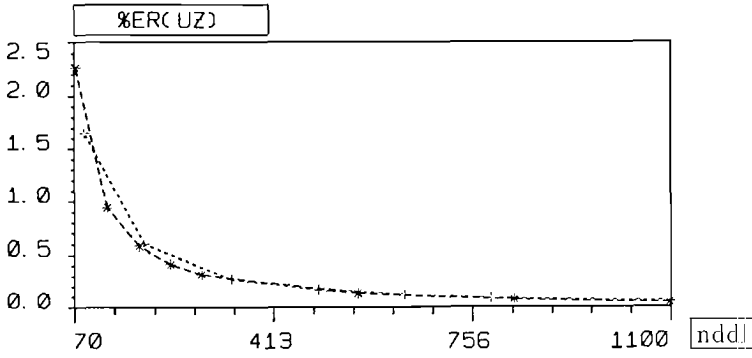


figure 8 : $u_z(0.5m, 0)$: —+ Argyris et -* HCTr

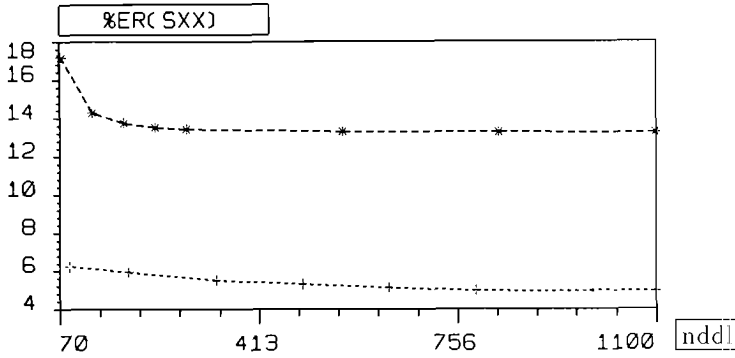


figure 9 : $\sigma_{11}(0.5m, -7mm)$: —+ Argyris et -* HCTr