

18

UN MODÈLE ASYMPTOTIQUE DE PLAQUE STRATIFIÉE

R. KAIL¹, F. LÉNÉ², Y.H. DE ROECK³

Résumé : Pour le calcul de structures minces en composites stratifiés, nous présentons un modèle bidimensionnel de type plaque, obtenu par une technique de développement asymptotique. Ce modèle fournit des relations permettant de calculer, en tout point du stratifié, les déplacements et le tenseur des contraintes à partir d'une analyse de structure, par éléments finis plans, sur la surface moyenne de la plaque. Après une description du modèle théorique, nous comparons les résultats numériques à la solution analytique d'un problème test.

mots clés : plaque, composites, développement asymptotique, éléments finis.

LE MODÈLE THÉORIQUE

Le modèle de plaque proposé pour le calcul des structures composites stratifiées doit permettre de bien évaluer certaines composantes du tenseur des contraintes. D'une part, la prise en compte du cisaillement transverse assure le couplage membrane-flexion produit par un empilement quelconque des couches. D'autre part, aux interfaces entre matériaux, la donnée du cisaillement membranaire, ainsi que du pincement ou arrachement, permet d'étudier la rupture par délamination. En employant un développement asymptotique par rapport à l'épaisseur de la plaque, nous élaborons une démarche qui permet de bien poser les relations entre le problème tridimensionnel et la modélisation bidimensionnelle.

¹ Doctorant IFREMER - INRIA, Proj. MODULEF, Le Chesnay, France

² Professeur d'université - Paris VI, Labo. de Mécanique, Modélisation et Calcul, Paris, France

³ Ingénieur - IFREMER, Svce. Structures et Ouvrages en Mer, Brest, France

LE PROBLÈME TRIDIMENSIONNEL

Le domaine étudié, Ω_ϵ , figure 1, représente, dans son état non déformé, une plaque plane et fine, de demi-épaisseur ϵ . Ce domaine est généré par une surface fermée, ω , du plan (\vec{x}_1, \vec{x}_2) de la manière suivante :

$$\Omega_\epsilon = \omega \times [-\epsilon, +\epsilon] \quad \text{de frontière } \partial\Omega_\epsilon = \Gamma^+ \cup \Gamma_\epsilon \cup \Gamma^- \quad \text{avec}$$

$$\Gamma^+ = \omega \times \{\epsilon\}, \quad \Gamma_\epsilon = \partial\omega \times [-\epsilon, +\epsilon] \quad \text{et } \Gamma^- = \omega \times \{-\epsilon\}.$$

La matrice de rigidité \mathbf{a} est symétrique et définie positive. Nous supposons que chaque couche a un comportement élastique linéaire et qu'elle est monoclinique d'axe \vec{x}_3 c'est-à-dire que le plan moyen de chaque couche est un plan de symétrie matérielle pour celle-ci. Cette dernière hypothèse implique que les termes $a_{\alpha\beta\gamma 3}$ et $a_{\alpha 333}$ soient nuls, les indices grecs prenant pour valeur 1 et 2. Nous supposons, de plus, que le domaine est soumis à une densité volumique d'efforts, \vec{f}_ϵ , et aux densités surfaciques \vec{G}_ϵ^+ sur Γ^+ , \vec{G}_ϵ^- sur Γ^- et \vec{F}_ϵ sur une partie Γ_{σ_ϵ} de Γ_ϵ . De même, Ω_ϵ est encasté sur une partie Γ_{u_ϵ} de Γ_ϵ , complémentaire de Γ_{σ_ϵ} . Enfin, les couches sont parfaitement collées entre elles.

Le problème mécanique consiste alors à trouver $(\vec{u}_\epsilon, \boldsymbol{\sigma}_\epsilon)$ solution de (P_ϵ) , avec :

$$(P_\epsilon) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_\epsilon + \vec{f}_\epsilon = \vec{0} \quad \text{avec } \boldsymbol{\sigma}_\epsilon = \mathbf{a}_\epsilon \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{u}_\epsilon) \quad \text{dans } \Omega_\epsilon \\ \vec{u}_\epsilon = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma_{u_\epsilon} \\ \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\vec{n}) = \vec{F}_\epsilon \quad \text{sur } \Gamma_{\sigma_\epsilon}, \quad \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\pm \vec{x}_3) = \vec{G}_\epsilon^\pm \quad \text{sur } \Gamma^\pm \\ [[\vec{u}_\epsilon]] = [[\boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\vec{n})]] = \vec{0} \quad \text{aux interfaces} \end{array} \right.$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}$ désigne le tenseur linéarisé des déformations et \vec{n} la normale extérieure. Ce problème admet une solution unique, (Duvaut, 1990).

LE PASSAGE DU TRIDIMENSIONNEL AU BIDIMENSIONNEL

Afin de nous ramener à une étude bidimensionnelle, nous utilisons une technique de développement asymptotique à un paramètre, la demi-épaisseur ϵ . Pour d'autres exemples de ce type de technique, on pourra se reporter à (Ciarlet, 1979) ou (Destuynder, 1980). Nous utilisons, tout d'abord, l'affinité

$$\Phi_\epsilon : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, x_3/\epsilon),$$

qui transfère le problème au domaine de référence $\Omega = \Omega_\epsilon \circ \Phi_\epsilon$, indépendant du paramètre géométrique ϵ .

Ayant supposé la rigidité \mathbf{a} invariante par Φ_ϵ , nous imposons pour chaque composante des chargements un ordre de grandeur en ϵ :

$$\begin{cases} f_{i\epsilon}(x_1, x_2, x_3) \circ \Phi_\epsilon = \epsilon^{p_i} f^{(p_i)}(y_1, y_2, y_3) \\ F_{i\epsilon}(x_1, x_2, x_3) \circ \Phi_\epsilon = \epsilon^{q_i} F^{(q_i)}(y_1, y_2, y_3) \\ G_{i\epsilon}^\pm(x_1, x_2, x_3) \circ \Phi_\epsilon = \epsilon^{r_i} G^{\pm(r_i)}(y_1, y_2, y_3) \end{cases}$$

Ensuite, nous développons la solution en puissance de ϵ :

$$\begin{aligned} \vec{u}_\epsilon(x_1, x_2, x_3) \circ \Phi_\epsilon &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \epsilon^n \vec{u}^{(n)}(y_1, y_2, y_3) \\ \sigma_\epsilon(x_1, x_2, x_3) \circ \Phi_\epsilon &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \epsilon^n \sigma^{(n)}(y_1, y_2, y_3) \end{aligned}$$

LE PROBLÈME 2D ET LES RELATIONS 2D-3D

En utilisant les développements précédents dans le problème (P_ϵ) et en identifiant les termes de même puissance en ϵ , nous obtenons, par un processus itératif, (Kail, 1991), les relations entre les déplacements de la surface moyenne et les déplacements et les contraintes dans le volume :

$$\begin{cases} u_3^{(n)} = \tilde{u}_3^{(n)} + \int_0^{y_3} \text{fonc}(\vec{\tilde{u}}^{(n-s)}) dz \\ u_\gamma^{(n)} = \tilde{u}_\gamma^{(n)} - y_3 \tilde{u}_{3,\gamma}^{(n-1)} + \int_0^{y_3} \text{fonc}(\vec{\tilde{u}}^{(n-s)}) dz \\ \sigma_{\alpha\beta}^{(n)} = Q_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma,\delta}^{(n)} + A_{\alpha\beta} \sigma_{33}^{(n)} \\ \sigma_{3\alpha}^{(n)} = -G_\alpha^{-(n)} - \int_{-1}^{y_3} (f_\alpha^{(n-1)} + \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(n-1)}) dz \\ \sigma_{33}^{(n)} = -G_3^{-(n)} - \int_{-1}^{y_3} (f_3^{(n-1)} + \sigma_{3\alpha,\alpha}^{(n-1)}) dz \end{cases}$$

où $\vec{\tilde{u}}^{(n)}$ est défini sur la surface moyenne c'est-à-dire $\vec{\tilde{u}}^{(n)} = \vec{u}^{(n)}(y_1, y_2, 0)$, $s \geq 1$, $A_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta 33} / a_{3333}$ et $Q_{\alpha\beta\gamma\delta} = a_{\alpha\beta\gamma\delta} - A_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta 33}$. On remarque que \mathbf{Q} n'est rien d'autre que la matrice de rigidité réduite par rapport à la direction \vec{y}_3 .

L'intégration sur l'épaisseur des équations d'équilibre et des conditions aux limites conduisent, grâce aux relations précédentes, au problème ($P^{(n)}$), posé sur la surface moyenne. Son expression est :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{\alpha\beta}^{(n)} + \mathcal{F}_\alpha^{(n)} = 0 \quad \text{avec } X_{\alpha\beta}^{(n)} = A_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{u}_{\gamma,\delta}^{(n)} - B_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{u}_{3,\gamma\delta}^{(n-1)} \text{ sur } \omega \\ Y_{\alpha\beta,\alpha\beta}^{(n)} + \mathcal{F}_3^{(n)} = 0 \quad \text{avec } Y_{\alpha\beta}^{(n)} = -D_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{u}_{\gamma,\delta}^{(n)} + C_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{u}_{3,\gamma\delta}^{(n-1)} \text{ sur } \omega \\ \tilde{u}_\gamma^{(n)} = \tilde{u}_{3,\gamma}^{(n-1)} = \tilde{u}_3^{(n-1)} = 0 \text{ sur } \partial_u \omega \\ X_{\alpha\beta}^{(n)} n_\beta = g_\alpha^{(n)}, Y_{\alpha\beta}^{(n)} n_\beta = h_\alpha^{(n)} \text{ et } Y_{\alpha\beta,\beta}^{(n)} n_\alpha = g_3^{(n)} \text{ sur } \partial_\sigma \omega \end{array} \right.$$

où

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \int_{-1}^1 Q_{\alpha\beta\gamma\delta} dy_3 && \text{membrane-membrane} \\ B_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \int_{-1}^1 y_3 Q_{\alpha\beta\gamma\delta} dy_3 && \text{membrane-flexion} \\ C_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^{y_3} z Q_{\alpha\beta\gamma\delta} dz dy_3 && \text{flexion-flexion} \\ D_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^{y_3} Q_{\alpha\beta\gamma\delta} dz dy_3 && \text{flexion-membrane} \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_\alpha^{(n)} = \sum_{-/+} G_\alpha^{(n+1)} + \int_{-1}^1 \left(f_\alpha^{(n)} + \Psi_{\alpha\beta,\beta}^{(n)} \right) dy_3$$

$$\mathcal{F}_3^{(n)} = \sum_{-/+} G_3^{(n+2)} - 2G_{\alpha,\alpha}^{-(n+1)} + \int_{-1}^1 f_3^{(n+1)} dy_3 - \int_{-1}^1 \int_{-1}^{y_3} \left(f_{\alpha,\alpha}^{(n)} + \Psi_{\alpha\beta,\alpha\beta}^{(n)} \right) dz dy_3$$

$$g_\alpha^{(n)} = \int_{-1}^1 \left(F_\alpha^{(n)} - \Psi_{\alpha\beta}^{(n)} n_\beta \right) dy_3$$

$$g_3^{(n)} = 2G_\alpha^{-(n+1)} n_\alpha + \int_{-1}^1 F_3^{(n)} dy_3 + \int_{-1}^1 \int_{-1}^{y_3} \left(f_\alpha^{(n)} + \Psi_{\alpha\beta,\beta}^{(n)} \right) n_\alpha dz dy_3$$

$$h_\alpha^{(n)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^{y_3} \left(F_\alpha^{(n)} - \Psi_{\alpha\beta}^{(n)} n_\beta \right) dy_3$$

où $\Psi^{(n)}$ représente des termes de récurrence en $\overline{\tilde{u}^{(n-s)}}$

On démontre que ce problème admet une solution unique, si $\begin{pmatrix} A & -B \\ -D & C \end{pmatrix}$ est

coercive et $\left(\overline{\mathcal{F}^{(n)}}, \overline{g^{(n)}}, \overline{h^{(n+1)}} \right) \in \left(L^2(\partial_\sigma \omega) \right)^8$.

Le développement est, quant à lui, de la forme :

$$\begin{aligned} u_{\epsilon_\gamma} \circ \Phi_\epsilon &= \epsilon^i u_\gamma^{(i)} + \dots & u_{\epsilon_3} \circ \Phi_\epsilon &= \epsilon^{i-1} u_3^{(i-1)} + \dots \\ \sigma_{\epsilon_{\alpha\beta}} \circ \Phi_\epsilon &= \epsilon^i \sigma_{\alpha\beta}^{(i)} + \dots & \sigma_{\epsilon_{\alpha 3}} \circ \Phi_\epsilon &= \epsilon^{i+1} \sigma_{\alpha 3}^{(i+1)} + \dots \\ \sigma_{\epsilon_{33}} \circ \Phi_\epsilon &= \epsilon^{i+2} \sigma_{33}^{(i+2)} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{où } i = \inf(p_\alpha, p_3 - 1, q_\alpha, q_3 - 1, r_\alpha - 1, r_3 - 2).$$

Pour la justification de ces résultats, on se reportera à (Kail, 1991).

Nous pouvons faire, cependant, les remarques suivantes :

- la continuité, aux interfaces, du déplacement et du vecteur contrainte est automatiquement vérifiée,
- pour un empilement quelconque, il apparaît un couplage membranc-flexion non-symétrique,
- la loi de comportement du problème ($P^{(n)}$) est obtenue à partir des coefficients de chaque pli par une loi de mélange,
- au premier ordre, le déplacement est de type Love-Kirchhoff,
- pour un matériau homogène isotrope, il y a découplage et nous obtenons les équations classiques des plaques de Love-Kirchhoff,
- pour un empilement symétrique, il y a découplage.

QUELQUES REMARQUES SUR L'IMPLEMENTATION

Le modèle est discrétisé par une méthode conforme d'éléments finis. La non-symétrie du système linéaire obtenu doublera les coûts en place mémoire et en temps de calcul par rapport à un problème de plaque classique. Cependant, la matrice est indépendante de l'ordre n . Celle-ci, factorisée par la méthode de Gauss, permet de calculer tous les termes du développement.

Si, de plus, nous supposons tous les efforts du même ordre de grandeur par rapport à la demi-épaisseur, ϵ , nous pouvons calculer les termes du développement deux à deux, (Kail, 1992).

QUELQUES RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Les résultats que nous présentons ont été obtenus par comparaison avec la solution analytique (Pagano, 1969) du problème suivant : une plaque de largeur $L = 1.m$ suivant x , de longueur infinie suivant y , chargée d'un "tas de sable" $q = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ dans la direction de l'épaisseur z , et simplement supportée suivant z sur les bords $x = 0$ et $x = L$. En fonction du nombre de degrés de liberté retenus, les diagrammes montrent le pourcentage d'erreur relative aux points où la quantité étudiée est maximale. Le stratifié choisi est un sandwich

dont l'empilement peau-âme-peau a pour épaisseur $2mm - 16mm - 2mm$, avec pour matériau :

- âme : une mousse syntactique, (Ben Hamida, 1989), de coefficients :

$$E = 3.04GPa \text{ et } \nu = 0.31$$

- peau : un unidirectionnel fibre de verre/Epoxyde, (Gay, 1987), de coefficients :

$$E_l = 45GPa, E_t = 12GPa, \nu = 0.31, G_{lt} = 4.5GPa \text{ et } G_{tt} = 4.58GPa$$

Nous avons implémenté l'élément Hsieh-Clough-Tocher réduit décrit figure 2, (Bernadou-Boisserie-Hassan, 1980). Cet élément possède trois degrés de liberté par nœud et par direction : la valeur et son gradient.

Les figures 4 à 6 montrent la convergence de cet élément avec :

- figure 4, le déplacement dans la direction \bar{x}_1 aux points $(0, -10mm)$ et $(0, -8mm)$.
- figure 5, la flèche au centre de la plaque.
- figure 6, la contrainte σ_{11} aux points $(0.5m, -10mm)$ et $(0.5m, -8mm)$.

Les résultats sont satisfaisants. Par contre, son interpolation du 3^{eme} degré ne nous permet pas d'obtenir les contraintes transverses par une loi locale et la méthode utilisée pour approcher celles-ci (Kail, 1991) ne fait pas apparaître les effets de l'empilement. De plus, le calcul des dérivées secondes, nécessaire aux contraintes planes, n'est pas assez précis notamment dans le cas d'un empilement non symétrique.

C'est pourquoi nous implémentons l'élément d'Argyris, (Bernadou, 1989), décrit figure 3, qui possède 21 degrés de liberté, par composante, avec une interpolation du 5^{eme} degré et conduisant à une continuité \mathcal{C}^1 .

Sur les figures 7 à 9, nous comparons la convergence de ces deux éléments dans le cas d'un empilement peau-âme-peau ayant pour épaisseur $3mm - 15mm - 2mm$ pour les mêmes matériau que précédemment.

- figure 7, le déplacement dans la direction \bar{x}_1 au point $(0, -7mm)$.
- figure 8, la flèche au centre de la plaque.
- figure 9, la contrainte σ_{11} au point $(0.5m, -7mm)$.

On voit le net avantage de l'élément d'Argyris pour le calcul des contraintes. De plus, son interpolation nous permettra de calculer les contraintes transverses par une loi locale.

CONCLUSION

Un développement asymptotique pour un matériau stratifié permet un calcul bidimensionnel efficace des structures minces, tout en fournissant les contraintes aux points sensibles du volume. Une première implémentation, utilisant l'élément Hsieh-Clough-Tocher réduit, a montré la faisabilité de la méthode mais a fourni des résultats médiocres pour les contraintes. La meilleure régularité de l'élément d'Argyris semble apporter la précision recherchée.

-
- BEN HAMIDA A., (1989), *Étude micromécanique des mousses syntactiques*, thèse de l'Université Paris VI.
- BERNADOU M., BOISSERIE J.M., HASSAN K., (1980), *Sur l'implémentation des éléments finis de Hsieh-Clough-Tocher complet et réduit*, Rapport de Recherche INRIA n°4.
- BERNADOU M., (1989), *Méthodes d'approximation pour les problèmes de plaques et de coques*, cours D.E.A. Paris VI.
- CIARLET, P.G., (1979), *A Justification of Von Karman equations*, Rapport Interne du Laboratoire d'Analyse Numérique, LA 189, Paris VI.
- DESTUYNDER P., (1980), *Thèse d'État*, Paris.
- DUVAUT G., (1990), *Mécanique des milieux continus*, MASSON.
- GAY D., (1987), *Matériaux composites*, HERMES.
- KAIL, R., (1991), *Un modèle de plaque sandwich, 1^{ère} partie : présentation théorique*, Rapport IFREMER DITI/GO/SOM91-463.
- KAIL, R., (1992), *Un modèle de plaque sandwich, 2nde partie : implémentation et résultats*, Rapport IFREMER DITI/GO/SOM92-191.
- PAGANO N.J., (1969), *Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending*, Jour. Comp. Mat., Vol 3 (July), p.398.

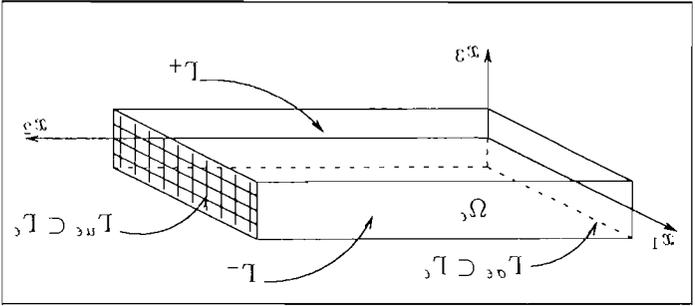


Figure 1 : Le domaine Ω_ϵ

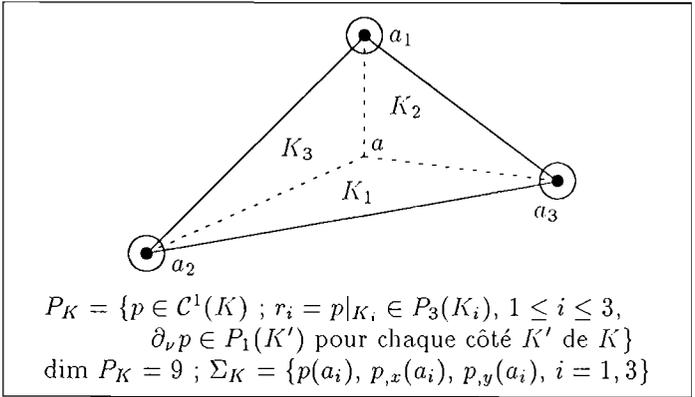


figure 2 : L'élément de Hsieh-Clough-Tocher réduit

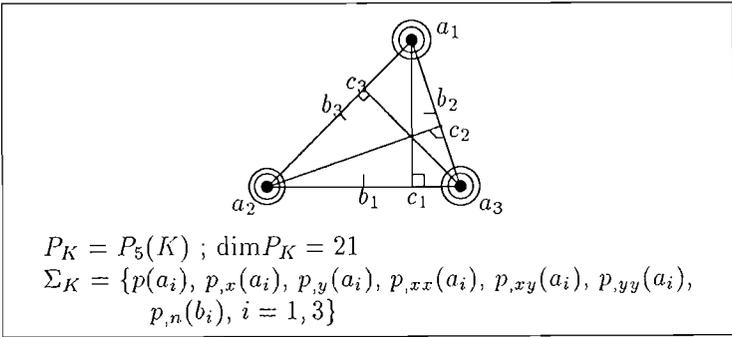


figure 3 : L'élément d'Argyris

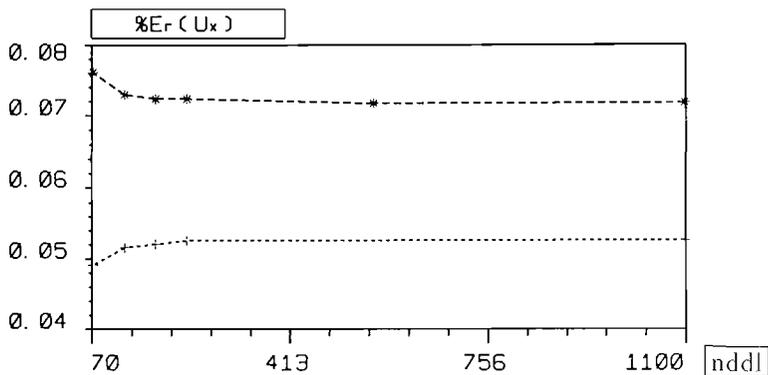


figure 4 : $-\ast-$ $u_x(0, -10mm)$ et $-\ast-$ $u_x(0, -8mm)$

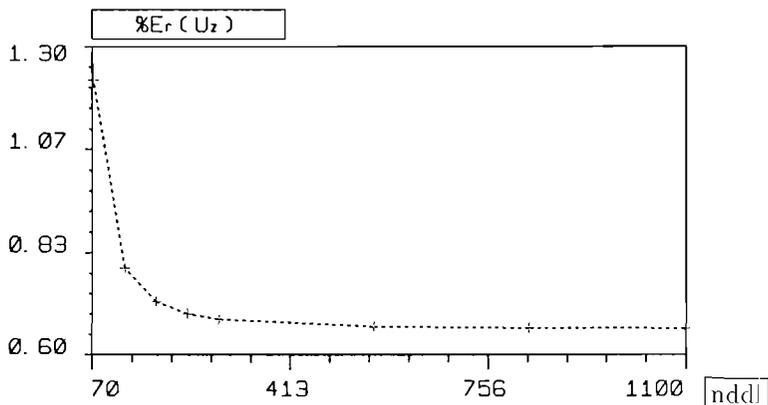


figure 5 : $u_z(0.5m, 0)$

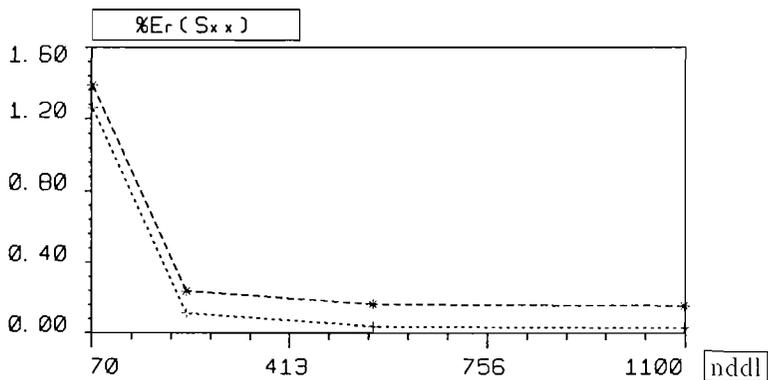


figure 6 : $-\ast-$ $\sigma_{11}(0.5m, -10mm)$ et $-\ast-$ $\sigma_{11}(0.5m, -8mm)$

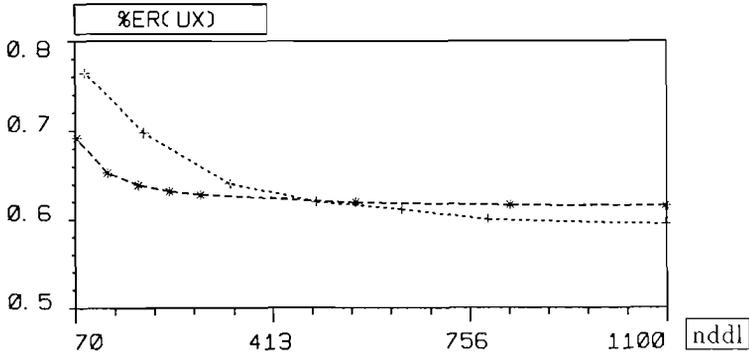


figure 7 : $u_x(0, -7mm)$: —+ Argyris et -* HCTr

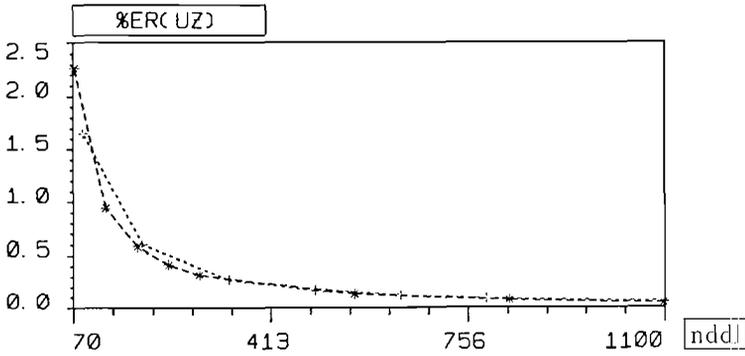


figure 8 : $u_z(0.5m, 0)$: —+ Argyris et -* HCTr

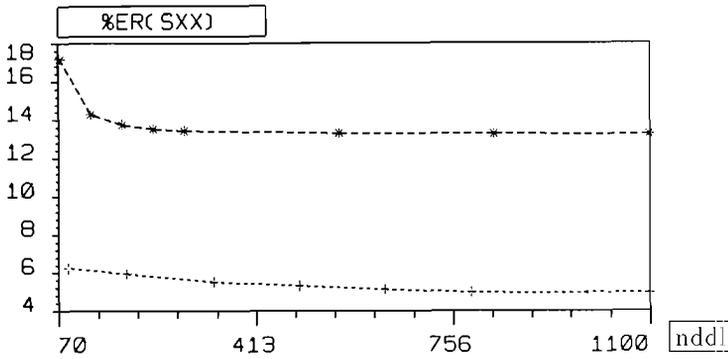


figure 9 : $\sigma_{11}(0.5m, -7mm)$: —+ Argyris et -* HCTr