

Thèse de doctorat  
Spécialité : Physique Océan-Atmosphère

présentée par

**Stéphanie Louazel**

---

**Influence des ondes d'inertie-gravité  
sur la dynamique tourbillonnaire**

---

soutenue le 24 Novembre 2004 devant le jury composé de :

<b>M. Xavier Carton</b>	Président du jury	LPO, Brest
<b>M. Bernard Legras</b>	Rapporteur	LMD, Paris
<b>M. Yves Morel</b>	Rapporteur	SHOM, Toulouse
<b>M. Alain Colin de Verdière</b>	Examinateur	LPO, Brest
<b>M. Patrice Klein</b>	Examinateur	LPO, Brest
<b>Mme Bach Lien Hua</b>	Directrice de thèse	LPO, Brest
<b>M. David Dritschel</b>	Rapporteur hors jury	Université de St Andrews, Ecosse



## Remerciements

---

Ce travail a été effectué à la fois au Centre Militaire d'Océanographie, à l'EPS-HOM, et au Laboratoire de Physique des Océans, à l'IFREMER. Je voudrais remercier les différents responsables du CMO ; ils m'ont non seulement permis de poursuivre ma formation en thèse mais m'ont aussi toujours laissée libre des orientations à lui donner. Je voudrais également remercier Xavier Carton, directeur du LPO, pour m'avoir accueillie avec autant d'enthousiasme dans son laboratoire.

On dit souvent qu'il faut de la volonté pour mener une thèse à son terme, je pense qu'il en faut autant, voire plus pour en encadrer une, alors merci Lien pour m'avoir suivie jusqu'au bout malgré mes régulières périodes de doutes. Merci également Patrice, si je suis aujourd'hui heureuse d'avoir fini, ton aide cette dernière année y est sûrement pour beaucoup.

Merci à l'ensemble des membres du jury et en particulier aux rapporteurs pour leur lecture attentive de mon manuscrit. Je n'oublie pas David Dritschel, également rapporteur, qui s'est montré très intéressé par mon travail.

Merci à l'ensemble des membres du CMO/RED et du LPO, sites fac et Ifremer réunis, pour leur disponibilité et leur enthousiasme. Au cours de cette thèse, j'ai beaucoup hésité sur la voie à prendre et nos discussions, même ponctuelles, m'ont évité des impasses et aidée à construire mon sujet. Yves, merci pour ton soutien scientifique mais aussi moral. Fabienne, Herlé, désolée de vous avoir fait faux bond lors de ma première année : à l'époque, OPA et surtout son adjoint m'ont fait peur ! J'espère qu'en plus de toujours se croiser sur les pontons du Moulin Blanc, nous nous reverrons bientôt de nouveau pour des questions scientifiques. Merci à la fine équipe des algécos qui tente de faire "avancer la science" dans la bonne humeur ! Merci aux fidèles du RU pour leur capacité à refaire le monde qu'il soit politique, sportif, artistique...ou bien sûr océanographique. Bruno, merci pour tous les services que tu m'as rendus, tu as spécialement été un excellent "responsable logistique" le jour J. Steven, tu passes par toutes les humeurs en un minimum de temps, merci de nous faire partager ton côté joueur et tes interrogations, notamment face au monde de la recherche !

Finalement, merci à tout ce qui m'a régulièrement permis de m'échapper des tourbillons. J'ai découvert Brest en commençant cette thèse et j'ai vite trouvé où me divertir : merci aux musiciens du CCM, merci aux pongistes du PL Recouvrance et merci aux voileux de la FSGT, ma thèse est finie mais ensemble on affrontera d'autres tempêtes sur une rade déchaînée et on continuera à relater nos aventures au Tour du Monde ! Enfin, bien entendu merci à ma famille, qui bien qu'intriguée par le monde de l'océanographie, a su éviter de me demander comment avançaient mes recherches !



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>7</b>
<b>1 Quant à la distinction dynamique lente / dynamique rapide</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	9
1.1.1 Un peu d'histoire de la prévision météorologique . . . . .	9
1.1.2 Le retour à l'actualité de la dynamique rapide en océanographie	11
1.2 Décomposition mode lent - mode rapide . . . . .	13
1.3 Interaction mode lent / mode rapide . . . . .	16
1.3.1 Source interne d'ondes d'inertie-gravité . . . . .	16
1.3.2 Source externe d'ondes d'inertie-gravité . . . . .	17
1.3.3 Synthèse et cadre du problème posé . . . . .	24
1.4 Méthodologie d'extraction du mode lent . . . . .	25
1.4.1 Hypothèses . . . . .	26
1.4.2 Système à résoudre . . . . .	27
1.5 Conclusion . . . . .	28
<b>2 Erosion de tourbillon en modèle shallow-water</b>	<b>31</b>
2.1 Introduction . . . . .	31
2.2 A propos de filamentation de tourbillons . . . . .	31
2.2.1 Observations . . . . .	31
2.2.2 Etude du processus de filamentation . . . . .	32
2.3 Vortex erosion in a shallow-water model . . . . .	35
2.3.1 Introduction . . . . .	37
2.3.2 PV gradient growth in shallow-water (SW) . . . . .	39
2.3.3 Slow motion extraction . . . . .	44
2.3.4 Summary . . . . .	47
Appendix A. Vortex alone experiment . . . . .	48
2.4 Discussion . . . . .	49
2.4.1 Nature de l'interaction . . . . .	49
2.4.2 Extraction d'un mode lent quasi-géostrophique . . . . .	52

2.5	Conclusion . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Influence des ondes d’inertie-gravité sur la dynamique des tripôles</b>	<b>55</b>
3.1	Introduction . . . . .	55
3.1.1	Etudes en laboratoire . . . . .	56
3.1.2	Etudes numériques . . . . .	58
3.2	Configuration des simulations numériques . . . . .	59
3.2.1	Terme de diffusion . . . . .	61
3.2.2	Terme de rappel . . . . .	61
3.2.3	Initialisation et forçage . . . . .	63
3.3	Résultats . . . . .	66
3.4	Interprétation . . . . .	69
3.4.1	Détermination de la date de bifurcation . . . . .	69
3.4.2	Propagation des ondes . . . . .	72
3.4.3	Perte de cohérence des mécanismes de déformation . . . . .	75
3.4.4	Processus de diffusion . . . . .	79
3.4.5	Influence cumulée des processus . . . . .	81
3.5	Conclusion . . . . .	82
	<b>Conclusion générale</b>	<b>85</b>
	<b>A Méthodes d’obtention des équations de balance</b>	<b>91</b>
A.1	Méthode en modes normaux . . . . .	91
A.2	Méthode en “ $\delta, \gamma$ balance” . . . . .	92
A.3	Méthode en expansions de Rossby . . . . .	94
	<b>B MICOM, modèle aux coordonnées isopycnales</b>	<b>95</b>
	<b>C Détails du calcul du critère <math>r_1</math></b>	<b>97</b>
C.1	Equations diagnostiques . . . . .	97
C.2	Evaluation de l’écoulement lent de précision $\mathcal{O}(Ro)$ . . . . .	100
C.3	Accélérations Lagrangiennes . . . . .	102
C.4	Calcul du critère $r_1$ . . . . .	102
	<b>Bibliographie</b>	<b>105</b>

# Introduction générale

La force de Coriolis liée à la rotation de la Terre fait que les écoulements géophysiques admettent deux types de dynamique, une dynamique lente et une dynamique rapide d'échelle de temps respectivement supérieure et inférieure à la période inertielle. Ces deux dynamiques se distinguent donc par leur fréquence mais aussi par leur nature : alors que les mouvements rapides sont de nature ondulatoire, les mouvements lents sont liés à la conservation de la vorticité potentielle d'Ertel. D'un point de vue énergétique, les mouvements basse fréquence dominant et permettent d'expliquer la plupart des phénomènes de la circulation générale aussi bien atmosphérique qu'océanique. Toutefois il est maintenant admis que dynamiques lente et rapide ne sont pas parfaitement découplées et que des processus d'interaction entre les deux ont lieu. Dans le cadre des écoulements océaniques, nous nous pencherons sur la capacité des mouvements rapides à modifier les mouvements lents, plus précisément nous examinerons l'influence qu'ont les ondes d'inertie-gravité sur la dynamique tourbillonnaire. En effet, les tourbillons entrent dans la catégorie des mouvements lents mais ils sont de période intermédiaire entre la dynamique rapide d'ondes d'inertie-gravité et la dynamique très basse fréquence de la circulation générale.

D'un côté, les tourbillons font partie des structures les plus énergétiques des écoulements océaniques. Leur nombre, leur taille (d'une dizaine à une centaine de  $km$  de rayon) mais surtout leur capacité à piéger des masses d'eau et à les transporter sur de longues distances font des tourbillons des structures très importantes. En véritables réservoirs de température, salinité, chlorophylle ou encore nutriments, ils participent, avec les grands courants océaniques, à la redistribution des propriétés hydrologiques. D'un autre côté, le spectre temporel des mouvements d'inertie-gravité présente principalement deux pics : un premier autour de la période semi diurne et un second autour de la période inertielle correspondant respectivement à l'onde de marée  $M_2$  et aux ondes quasi-inertielles forcées essentiellement par le vent.

L'objectif de cette thèse est d'améliorer la compréhension des mécanismes d'in-

teraction entre ces deux dynamiques en s'intéressant plus particulièrement aux mécanismes susceptibles de modifier la dynamique tourbillonnaire. Le premier chapitre propose une synthèse bibliographique de quelques études traitant de cette distinction dynamique lente / dynamique rapide et des différentes natures d'interaction envisageables. Les deux autres chapitres correspondent à deux études numériques distinctes. Dans le deuxième chapitre, l'influence des ondes d'inertie-gravité sur le diagnostic de filamentation d'un tourbillon elliptique est analysée. L'article (Louazel et Hua 2004), dont a fait l'objet cette étude, constitue le corps de ce chapitre. Dans le troisième chapitre, nous montrons que les ondes d'inertie-gravité ont un effet stabilisateur sur la dynamique des tripôles, pris comme exemple de tourbillons interagissant entre eux, et nous tentons d'interpréter cet effet en identifiant quelques mécanismes.

Au long de ce manuscrit, quelques abréviations seront régulièrement utilisées, elles sont récapitulées dans le tableau 1.

IG	inertie-gravité
VP	vorticité potentielle
SW	shallow-water
NIO	near inertial oscillation

TABLEAU 1 – *Liste des abréviations utilisées*

# Chapitre 1

## Quant à la distinction dynamique lente / dynamique rapide

### 1.1 Introduction

#### 1.1.1 Un peu d'histoire de la prévision météorologique

Au début du siècle, l'anglais Richardson fut l'un des premiers à vouloir faire une prévision météorologique. Dans le but de résoudre les équations géophysiques générales, il développa des méthodes numériques de résolution approchée des équations différentielles non linéaires. Malheureusement sa prévision à 6 heures de la pression en surface était complètement irréaliste et les variations de pression prédites étaient d'un ordre de grandeur supérieures aux observations.

Puis jusque dans les années 50, plus aucune tentative de prévision n'eut lieu. Entre temps, sont parallèlement menés deux types d'études : des études sur les méthodes numériques de résolution des équations différentielles et des études sur la simplification des équations générales. C'est alors que d'un côté, les mathématiciens allemands Courant, Friedrichs et Lewy développent de manière systématique la méthode aux différences finies de résolution approchée des équations et établissent des critères de stabilité à respecter. D'un autre côté, Charney (1948) généralise les travaux de Rossby (1939) qui avait établi un lien théorique entre l'intensité d'un courant zonal et le sens de déplacement des centres d'action. Charney (1948) propose alors, à partir de l'étude des ordres de grandeur des différents termes des équations générales, une simplification de ces équations connue sous le nom "d'approximation quasi-géostrophique" selon laquelle les mouvements de grande échelle atmosphériques sont gouvernés par les lois de conservation de la température potentielle, de la vorticité potentielle et des équilibres hydrostatique et géostrophique. Les études

de Rossby (1939) et Charney (1948) ont alors montré que le modèle de Richardson n'était pas le plus simple pour la prévision numérique. En effet ses équations gouvernent non seulement les mouvements lents importants en météorologie mais aussi les ondes rapides sonores et de gravité. Son échec venait en fait surtout de la contamination du signal recherché par les modes rapides. De son côté, le modèle simplifié de Charney (1948) des équations générales filtre les ondes sonores grâce à l'hypothèse d'équilibre hydrostatique et les ondes de gravité grâce à l'hypothèse d'équilibre géostrophique.

C'est alors que la prévision numérique de Charney et al. (1950) est la première à être couronnée de succès, le modèle très simple de conservation de la vorticité barotrope a été utilisé pour prévoir l'altitude de la surface isobare  $500mb$ , seule variable du problème, et donc le vent géostrophique à  $500mb$ . Quelques années plus tard, Bolin (1955) utilise également un modèle barotrope pour réaliser le même type de prévision mais avec des pas de temps et d'espace plus petits et sur des durées allant jusqu'à 72h, les coefficients de corrélation entre prévisions et observations sont bons dans les zones où les effets baroclines n'ont pas trop d'influence. Même s'il reste donc quelques erreurs, entre autres dues à cette non représentation des effets baroclines, l'expérience de Charney et al. (1950) marque le point de départ de la prévision météorologique numérique moderne et jusque dans les années 70, le modèle quasi-géostrophique est utilisé pour toutes les prévisions météorologiques (Phillips 1954, Bjercknes 1962).

Puis dans les années 70, la question de la légitimité de ne modéliser que la dynamique lente en ne percevant la dynamique rapide que comme une source de bruit s'est pos e. C'est alors que le problème de l'influence des ondes de gravité sur la circulation atmosphérique générale a été soulevé (Palmer et al. 1986, McFarlane 1987). C'est pourquoi, les calculateurs devenant par ailleurs de plus en plus performants, le modèle quasi-géostrophique est abandonné pour les prévisions météorologiques : elles seront r alis es à partir de modèles aux équations primitives, c'est à dire relâchant l'hypothèse d'équilibre géostrophique mais conservant celle d'équilibre hydrostatique.

### 1.1.2 Le retour à l'actualité de la dynamique rapide en océanographie

En océanographie, la coexistence d'une circulation thermohaline permanente et d'une stratification stable amène la question récurrente suivante : les couches superficielles de l'océan sont mises en mouvement par le vent, aux hautes latitudes le refroidissement des masses d'eau superficielles provoque la formation d'eaux profondes par phénomène de convection intense, mais d'où vient l'énergie nécessaire (estimée à  $2.1TW$  par Munk et Wunsch (1998)) pour faire remonter du fluide dense à travers les surfaces isopycnales permettant ainsi de fermer la cellule de recirculation méridienne ? Alors que jusqu'ici la dynamique rapide était considérée comme distincte de la dynamique lente, depuis quelques années elle revient d'actualité puisqu'elle pourrait avoir son rôle à jouer pour expliquer le mélange profond. En effet le déferlement d'ondes internes permettrait ce mélange vertical, or ces ondes internes ont deux grandes origines (Wunsch 2002, Wunsch et Ferrari 2004) : la marée (Ledwell et al. 2000, Egbert et Ray 2000, Garrett 2003) et le vent (Wunsch 1998). D'un côté le vent génère dans les couches de surface des ondes internes quasi-inertielles se propageant sur la verticale mais, d'après Wunsch et Ferrari (2004), sur de trop courtes distances pour expliquer le mélange profond. D'un autre côté, même si 75% de la marée barotrope est dissipée au niveau des mers peu profondes, le reste (environ  $0.9TW$ ), par interaction avec la topographie, est propice, soit par frottement soit via la création d'ondes internes de marée, à un mélange profond. Cette dissipation de la marée barotrope en océan "ouvert" a été mise en évidence par Egbert et Ray (2000) à partir de données altimétriques satellitales, la figure 1.1 montre que, mises à part les mers peu profondes, les plus fortes dissipations ont lieu dans des zones où la topographie est chaotique. La figure 1.2, tirée de Munk et Wunsch (1998), récapitule les parts respectives de la marée et du vent dans le maintien de la stratification profonde.

Afin de prendre en compte l'influence des ondes d'inertie-gravité (IG) sur la circulation générale très basse fréquence, les ondes ont longtemps été associées, à défaut d'être modélisées, à un effet diffusif paramétrisé à l'aide d'un coefficient de diffusion homogène. Aujourd'hui alors que les ondes sont modélisées, l'idée répandue est de les associer à un effet de mélange hétérogène lié à leur déferlement en certaines zones (Staquet et Bouruet-Aubertot 2001). Mais l'interaction entre les mouvements très basse fréquence et les ondes IG peut être liée à un processus plus complexe où la dynamique tourbillonnaire jouerait un rôle d'intermédiaire important. En effet les tourbillons entrent dans la catégorie des mouvements "lents" mais leur dynamique

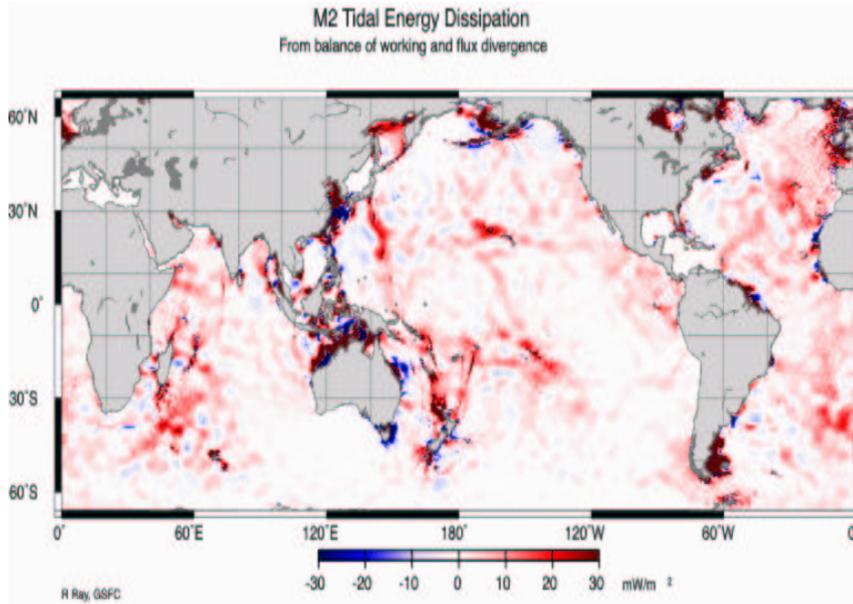


FIGURE 1.1 – Estimation de la dissipation d'énergie de la marée barotrope  $M_2$  par R.D. Ray à partir de données altimétriques Topex/Poseidon.

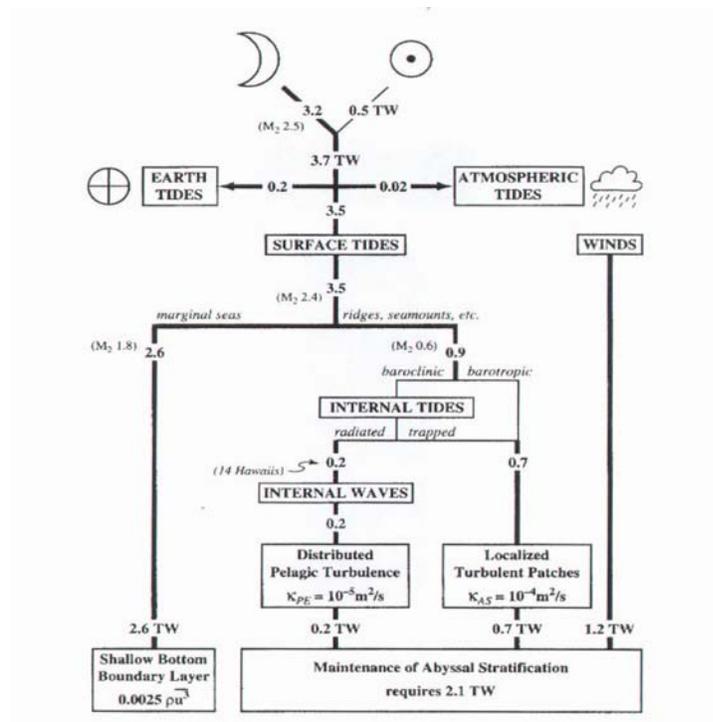


FIGURE 1.2 – Bilan des flux d'énergie dûs à la marée et au vent permettant le maintien d'une stratification profonde, figure tirée de Munk et Wunsch (1998).

est de période intermédiaire (de l'ordre de quelques jours à quelques semaines) entre la circulation générale (période de l'ordre de quelques années) et les ondes IG (période inférieure à 1 jour). Il semble donc envisageable que les ondes IG influent sur la circulation grande échelle via la modification de la dynamique tourbillonnaire et c'est précisément sur cette interaction entre ondes IG et dynamique tourbillonnaire que porte notre étude.

Ce chapitre bibliographique est essentiellement consacré aux différentes natures d'interaction envisageables entre mouvements lent et rapide. Avant cela, nous reviendrons sur cette notion de dynamiques lente et rapide. Puis le chapitre se terminera par une présentation plus technique de diverses méthodes permettant d'extraire d'un écoulement quelconque sa partie lente.

## 1.2 Décomposition mode lent - mode rapide

Par souci de simplicité, tout au long de ce manuscrit, nous utiliserons comme modèle aux équations primitives le modèle shallow-water 1 couche 1/2 sur plan  $f$  dont les équations en régime non forcé prennent la forme suivante :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + f\mathbf{k} \wedge \mathbf{u} = -g'\nabla h \quad (1.1a)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot ((H + h)\mathbf{u}) = 0 \quad (1.1b)$$

où les variables  $\mathbf{u} = (u, v)$  et  $h$  correspondent respectivement à la vitesse horizontale ( $u$  et  $v$  en sont les composantes zonale et méridienne) et à la fluctuation de hauteur de la couche active. Les constantes  $H$ ,  $g'$  et  $f$  représentent, dans l'ordre, la hauteur au repos de la couche, la gravité réduite et le paramètre de Coriolis. Enfin la dérivée Lagrangienne est notée  $\frac{D}{Dt} = \partial_t + u\partial_x + v\partial_y$ . Une grandeur primordiale en dynamique géophysique car conservée le long des trajectoires Lagrangiennes est la vorticité potentielle (VP). Dans le cadre du modèle shallow-water 1 couche 1/2, elle s'exprime comme le rapport de la vorticité absolue (vorticité relative  $\zeta = \partial_x v - \partial_y u$  plus  $f$ ) sur la hauteur totale de la couche ( $H + h$ ).

Comme l'a montré Charney (1948), les équations générales géophysiques gouvernent deux types de mouvements se différenciant principalement par leur échelle de temps. Cette différenciation est basée sur l'étude en modes normaux des équations shallow-water linéarisées autour du repos dont la formulation pour le modèle

(1.1) est la suivante :

$$\partial_t \mathbf{u} + f \mathbf{k} \wedge \mathbf{u} = -g' \nabla h \quad (1.2a)$$

$$\partial_t h + H \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.2b)$$

A ce système d'équations linéaires est associée la relation de dispersion :

$$\omega(\omega^2 - f^2 - g' H K^2) = 0 \quad (1.3)$$

où  $\omega$  et  $K$  représentent la fréquence et la norme du nombre d'onde du mode. Le jeu d'équations (1.2) possédant trois équations pronostiques, la relation (1.3) fait apparaître trois modes :

- Un mode de Rossby associé à la fréquence propre nulle, ce mode est stationnaire pour la théorie linéaire (équilibre géostrophique). Les termes non linéaires des équations shallow-water font que ce mode n'est plus exactement stationnaire. C'est pourquoi il est aussi appelé mode "lent".
- Deux modes d'inertie-gravité (IG) appelés modes "rapides", de fréquence propre  $\omega = \pm \sqrt{f^2 + g' H K^2}$ , supérieure au paramètre de Coriolis  $f$ .

Ces modes se distinguent donc par leur fréquence mais aussi par la nature de leur dynamique. En effet, dans le cadre des équations linéaires, d'un côté le mode lent a une dynamique non divergente ( $\partial_x u + \partial_y v = 0$ ), d'un autre côté le mode rapide est lui associé à une anomalie de vorticité potentielle nulle (il vérifie  $\zeta = fh/H$ ). Alors que dans le cadre des modèles linéaires, les modes lent et rapide évoluent indépendamment, le retour aux équations générales pose la question :

*“Y a-t-il interaction entre modes lent et rapide ?”* (Q1)

Comme Charney (1948), ou encore Rossby (1939) et Bolin (1955), beaucoup espèrent pouvoir séparer la composante lente de l'écoulement de la composante rapide. Mais une séparation exacte est-elle possible? Leith (1980) a cru en la séparation des deux modes et expose le concept de “variété lente”.

Malheureusement, les termes non-linéaires des équations primitives font qu'il n'y a pas de raison a priori pour qu'il n'y ait pas d'interaction entre les deux composantes et Lorenz (1986) commence alors  a se poser des questions sur l'existence de cette variété lente alors qu'il essaie de l'approcher par différentes méthodes itératives sans qu'aucune ne converge. Enfin dans Lorenz et Krishnamurthy (1987) et Lorenz (1992), la notion de variété localement lente et invariante est définie , l'idée d'une

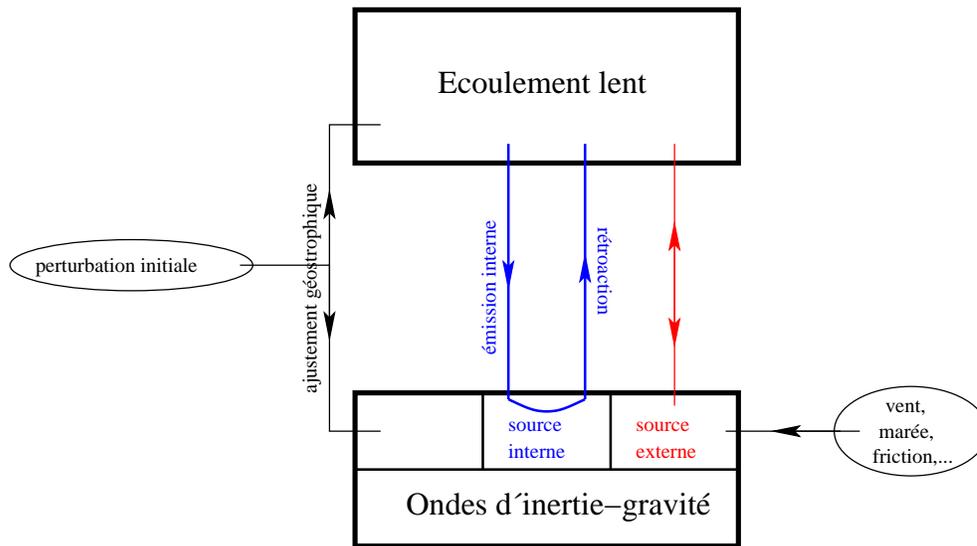


FIGURE 1.3 – Schéma représentant les différentes sources d'ondes IG pouvant interagir avec un écoulement lent.

variété lente exacte est quant à elle définitivement abandonnée.

Aujourd'hui l'existence d'une variété lente exacte est donc remise en cause et beaucoup estiment qu'inévitablement, il y aura interaction entre modes lent et rapide. La question (Q1) se pose alors différemment :

*“Quelle est la nature et l'ampleur de l'interaction entre les ondes d'inertie-gravité et le mode lent?”* (Q2)

Cette interaction peut revêtir plusieurs aspects schématisés sur la figure 1.3. Nous ne considérerons pas l'ajustement géostrophique qui est un phénomène transitoire où une perturbation initiale s'ajuste vers un écoulement lent en émettant des ondes IG. Pour cet aspect, on pourra se référer aux travaux récents de Bouchut et al. (2004) qui traitent théoriquement et numériquement, dans un cadre unidimensionnel, les discontinuités liées au déferlement d'ondes IG lors de l'ajustement géostrophique. Ci-dessous, nous présentons des études d'interaction où la source des ondes IG est soit interne à l'écoulement lent (paragraphe 1.3.1) soit externe (paragraphe 1.3.2).

### 1.3 Interaction mode lent / mode rapide

Dans ce paragraphe nous examinons les réponses apportées par la littérature à la question (Q2). Au cours des différentes études présentées ci-dessous, les grandeurs suivantes caractéristiques d'un écoulement d'échelle de vitesse  $U$  et d'échelle de longueur  $L$  sont régulièrement utilisées :

- vitesse de phase des ondes de gravité :  $c_0$  ( $c_0 = \sqrt{g'H}$  dans le cadre des équations (1.1)),
- rayon de déformation :  $R_d = \frac{c_0}{f}$
- nombre de Rossby :  $Ro = \frac{U}{fL}$
- nombre de Froude :  $Fr = \frac{U}{c_0}$

#### 1.3.1 Source interne d'ondes d'inertie-gravité

On appelle source interne d'ondes IG, les ondes émises par un mode lent (flèche bleue sur la figure 1.3). Pour évaluer l'amplitude de telles ondes et l'amplitude de leur rétroaction sur le mode lent les émettant, certains auteurs comme Polvani et al. (1994), Ford et al. (2000) ou encore Plougonven et Zeitlin (2002) évoquent la théorie de Lighthill, aérodynamicien qui a travaillé sur l'émission spontanée d'ondes sonores par un écoulement lent. Selon cette théorie, dans un milieu non tournant, un écoulement lent non stationnaire, donc de fréquence non nulle, excite inévitablement des ondes sonores de même fréquence. Afin de rationaliser ce phénomène et d'évaluer l'amplitude des ondes sonores émises et l'amplitude de leur rétroaction sur l'écoulement lent, Lighthill se place dans le cadre d'un nombre de Mach petit devant 1. La généralisation de ce phénomène à la géophysique, donc à un milieu tournant, prévoit qu'inévitablement, tout écoulement lent non stationnaire excitera des ondes IG. Dans le cadre d'un petit nombre de Froude, analogue du nombre de Mach, Ford et al. (2000) montre que l'amplitude des ondes IG émises par le mode lent est en  $\mathcal{O}(Fr^2)$  et que la rétroaction de ces ondes IG sur le mode lent est, elle, en  $\mathcal{O}(Fr^4)$ . Cette interaction se place donc dans un cadre où les ondes IG sont faibles par rapport à l'écoulement lent avec lequel elles interagissent puisque le rapport énergétique entre les deux est en  $\mathcal{O}(Fr^2)$ .

Des auteurs comme Saujani et Shepherd (2001) considèrent que ce phénomène d'émission / rétroaction est encore de plus faible amplitude que celle prédite par la théorie généralisée de Lighthill dont ils doutent de l'applicabilité à la dynamique

des fluides géophysiques puisque le raisonnement de Ford et al. (2000) permettant d'estimer l'amplitude de l'interaction repose fortement sur l'hypothèse  $Ro > 1$ , ce qui n'est pas le cas aux latitudes moyennes. En effet si  $U$  et  $L$  représentent les échelles de vitesse et de longueur de l'écoulement lent et  $\lambda$  l'échelle des ondes IG émises, la correspondance en fréquences des modes lent et rapide impose :

$$\frac{U^2}{L^2} = f^2 + c_0^2 \frac{4\pi^2}{\lambda^2}, \quad (1.4)$$

ce qui peut être reformulé sous la forme :

$$Ro^2 - 1 = \left(2\pi \frac{R_d}{\lambda}\right)^2 \quad (1.5)$$

il existera donc  $\lambda$  réel uniquement si  $Ro > 1$ . En fait Saujani et Shepherd (2001) ne remettent pas en cause le fait que le mode lent puisse émettre des ondes IG mais prétendent que cette émission est mal décrite par la théorie adaptée de Lighthill à cause de la fréquence de coupure  $f$  des ondes IG, inexistante chez les ondes sonores dans le cas non tournant de la théorie originelle.

Dans le régime  $Ro \ll 1$  où la théorie de Lighthill ne peut être adaptée, Vanneste et Yavneh (2004) évaluent l'amplitude des ondes IG émises par un écoulement lent. Leur méthode n'est pas générale et considère comme écoulement lent un courant, prescrit analytiquement, cisailé horizontalement en équilibre géostrophique. Ils perturbent cet écoulement et montrent alors numériquement et analytiquement que la perturbation présentera, en plus de la composante lente initialisée, une composante rapide dont l'amplitude est exponentiellement faible en  $Ro^{-1}$ . La rétroaction de cette composante rapide sur le mode lent n'est pas étudiée.

### 1.3.2 Source externe d'ondes d'inertie-gravité

On appelle source externe d'ondes IG, des ondes d'origine indépendante du mode lent avec lequel elles vont interagir, les ondes de marée ou forcées par le vent entrent dans cette catégorie (cf. figure 1.3)

## Modification du mode rapide

Kunze (1985) étudie la propagation linéaire des ondes quasi-inertielles (NIO pour "near-inertial oscillation") dans un écoulement géostrophique tridimensionnel cisailé. Ces ondes se caractérisent par une fréquence  $\omega$  proche de  $f$  telle que  $\omega = f(1 + \epsilon)$  avec  $\epsilon \ll 1$ . L'écoulement lent a deux types d'effet sur les ondes qui sont à

la fois advectées par son champ de vitesse et dispersées par son cisaillement. En effet, Kunze (1985) établit la relation de dispersion vérifiée par les NIO en présence d'un écoulement lent faiblement cisailé, le cisaillement horizontal est inférieur à la fréquence de Coriolis  $f$  et le cisaillement vertical à la fréquence de Brunt-Väisälä  $N$  :

$$\omega \sim \underbrace{f}_{(i)} + \underbrace{\zeta/2}_{(ii)} + \underbrace{\frac{N^2(k_x + k_y)^2}{2fk_z^2}}_{(iii)} + \underbrace{\frac{1}{k_z^2}(\partial_z U k_y - \partial_z V k_x)}_{(iv)} + \underbrace{\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}}_{(v)} \quad (1.6)$$

où  $\omega$  et  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  représentent la fréquence et le nombre d'onde des NIO,  $\mathbf{V} = (U, V)$  l'écoulement géostrophique avec  $\zeta = \partial_x V - \partial_y U$  la vorticité relative géostrophique. Dans l'équation (1.6), le terme (v) constitue le terme d'advection, le terme (iv) vient légèrement modifier le terme de dispersion (iii) et le terme (ii) montre comment la vorticité modifie la fréquence minimale des NIO égale à  $f$  en l'absence d'interaction avec un écoulement géostrophique. Cette modification, spatialement hétérogène, de la fréquence de coupure élargit la bande de fréquence des NIO dans les zones anticycloniques ( $\zeta < 0$ ) et la rétrécit dans les zones cycloniques ( $\zeta > 0$ ), expliquant le piégeage des NIO par les structures anticycloniques et leur répulsion par les structures cycloniques. En effet, la fréquence intrinsèque  $\omega_0 = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}$  d'une NIO devant rester supérieure à  $f + \zeta/2$ , une NIO ne peut entrer dans une zone où  $f + \zeta/2$  dépasse sa fréquence  $\omega_0$  et reste au contraire piégée dans la zone où  $f + \zeta/2$  en est inférieure. La propagation aussi bien horizontale que verticale des NIO est alors modifiée par l'écoulement géostrophique, ce qui correspond selon la théorie des rayons à la réflexion/réfraction d'une onde dans un milieu hétérogène. La propagation horizontale de NIO à travers un courant Nord-Sud géostrophique est illustrée en figure 1.4, une onde ne peut notamment traverser le courant que si  $\omega_0$  dépasse la plus haute fréquence de coupure localisée où  $\zeta$  est maximum, sinon elle sera réfléchiée où  $f + \zeta/2$  atteint  $\omega_0$ . Enfin, en plus de leur propagation, l'amplitude des NIO est également modifiée. En effet, pour conserver leur fréquence absolue  $\omega$ , d'après la relation de dispersion (1.6), la norme de leur nombre d'onde doit croître quand  $\zeta$  diminue. D'où, pour qu'elles conservent leur énergie, leur amplitude doit augmenter.

Young et Ben Jelloul (1997) étudient le même processus que Kunze (1985) mais leur rationalisation est différente, deux échelles de temps sont utilisées : l'échelle inertielle ( $1/f$ ) et une échelle sub-inertielle ( $1/f\epsilon$ ) caractérisant l'écart de fréquence  $f\epsilon$  entre les NIO et  $f$ . L'équation d'évolution temporelle de la composante sub-inertielle des NIO est alors établie, trois processus y sont représentés : l'advection,

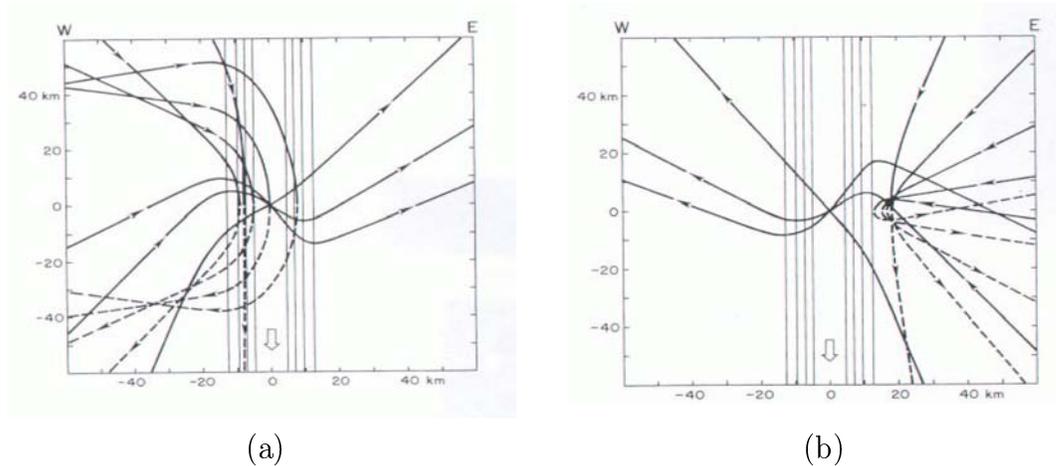


FIGURE 1.4 – Propagation horizontale de NIO à travers un courant géostrophique Nord-Sud cisailé, la partie Ouest du courant est anticyclonique alors que la partie Est est cyclonique. Le courant est représenté par les lignes fines, les NIO par les courbes en gras. Les NIO arrivent (a) de l'Ouest du bassin (b) de l'Est du bassin. La figure est tirée de Kunze (1985)

la réfraction et la dispersion qui peut expliquer pourquoi après une tempête les NIO générées dans la couche de surface se propagent si vite verticalement (jusqu'à 10m/jour), phénomène illustré par la figure 1.5. Aucune rétroaction sur l'écoulement géostrophique n'est considérée dans cette étude où l'énergie des NIO est conservée, l'écoulement géostrophique redistribue l'énergie des NIO mais il n'y a pas d'échange énergétique. Le modèle de Young et Ben Jelloul (1997), dans le cadre d'une échelle verticale des NIO petite par rapport à celle de l'écoulement géostrophique, est utilisé par Klein et al. (2004) pour étudier l'organisation spatiale des NIO dans un champ de tourbillons. Sous des hypothèses supplémentaires sur l'échelle de temps et le spectre de la vorticité quasi-géostrophique, ils montrent théoriquement et numériquement que l'énergie des NIO est concentrée autour d'une échelle critique qui croît avec le temps.

Aussi bien dans Kunze (1985) que dans Young et Ben Jelloul (1997), il est principalement question de la dispersion dans l'espace physique des NIO, la question du gain (ou de la perte) d'énergie par les ondes n'est abordée que par Kunze (1985) qui montre qu'il est négligeable alors que dans le modèle de Young et Ben Jelloul (1997), il est nul par construction. Contrairement à d'autres études d'interaction mode lent / mode rapide que nous présenterons par la suite, aucun de ces deux modèles ne fait d'hypothèse sur le rapport énergétique, défini comme le rapport des énergies cinétiques, ou sur le rapport d'échelle horizontale des ondes par rapport à l'écoulement lent.

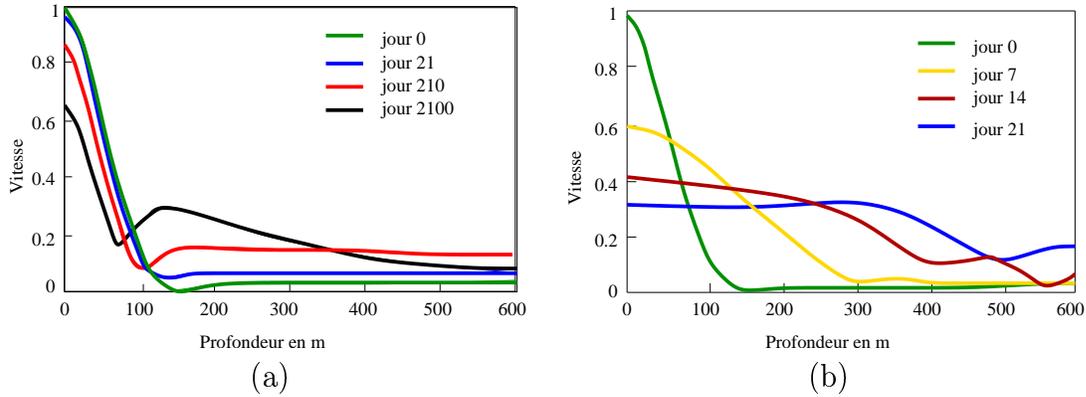


FIGURE 1.5 – Profils de vitesse des NIO en fonction de la profondeur à des instants successifs (a) sans écoulement géostrophique (b) avec écoulement géostrophique. Ces figures, illustrant la plus grande radiation sur la verticale des NIO en présence d'un écoulement géostrophique, sont tirées de Young et Ben Jelloul (1997) où les profils de vitesse sont calculés à partir de l'équation de propagation des NIO.

Notons également que dans le contexte de la théorie WKB (l'échelle spatiale des ondes est petite par rapport à celle de l'écoulement lent), Moulin et Flór (2004b) étudient la propagation d'ondes d'inertie-gravité en présence d'un tourbillon en équilibre géostrophique prescrit analytiquement. La modification de la fréquence absolue des ondes par effet Doppler lié à l'écoulement du tourbillon est le seul effet physique pris en compte dans cette étude, il est à l'origine de phénomènes de réfraction, réflexion et piégeage des ondes.

## Modification du mode lent

La modification de la composante lente d'un écoulement par la composante rapide peut reposer sur une interaction de nature dissipative ou non.

### *Interaction non dissipative*

Tout d'abord, Farge et Sadourny (1989) comme Bartello (1995) étudient les conséquences de l'interaction mode lent / mode rapide sur les caractéristiques générales de l'écoulement lent, d'où des études réalisées essentiellement dans l'espace spectral.

Farge et Sadourny (1989) montrent numériquement, à partir d'expériences de turbulence libre dans un modèle une couche, que les cascades du mode lent sont modifiées en présence d'ondes IG, leur étude spectrale révèle qu'à grande échelle la

cascade inverse d'énergie est ralentie. Par contre, comme Dewar et Killworth (1995) pour un modèle 1 ou 2 couches, ils n'observent aucun transfert significatif d'énergie entre mode rapide et mode lent.

Bartello (1995) étudie l'interaction entre modes par phénomène de résonance : il y aura résonance entre 3 modes quand l'interaction non-linéaire de deux d'entre eux excitera le troisième. La seule interaction permettant le transfert d'énergie entre mode rapide et mode lent est alors la triade impliquant 2 modes lents et un mode rapide mais cette triade ne peut être résonante que pour  $Ro$  de l'ordre de 1, elle permet alors le transfert d'énergie entre un mode lent et un mode rapide. La résonance de cette triade permet également à Bartello (1995) d'expliquer pourquoi la cascade inverse d'énergie est modifiée en présence d'ondes IG. En effet cette cascade repose sur la résonance de triades impliquant 3 modes lents. Mais en dessous d'une échelle critique où le nombre de Rossby atteint 1, la triade entre 2 modes lents et un mode rapide devient active également transférant de l'énergie d'un mode lent grande échelle vers un mode rapide d'échelle intermédiaire, énergie rapide qui cascade ensuite vers les petites échelles par résonance de triades impliquant 2 modes rapides et un mode lent.

Les études qui suivent n'analysent plus les conséquences de l'interaction sur les caractéristiques générales de l'écoulement mais visent plutôt à étudier les détails de l'interaction dans l'espace physique.

A notre connaissance, seuls Kuo et Polvani (1999) présentent une interaction ondes/vortex n'ayant que des effets réversibles sur le mode lent. Ils étudient, en une dimension, l'interaction entre un train d'ondes IG et un vortex en équilibre géostrophique. Ils montrent analytiquement et numériquement que les ondes modifient de façon transitoire le champ de VP mais qu'après leur passage il n'en a plus la signature. Toutefois, ce **cadre unidimensionnel** est un cadre très particulier où l'équilibre géostrophique constitue une solution stationnaire des équations primitives. Leur étude repose sur l'hypothèse d'un faible rapport énergétique entre les ondes et le vortex, elle est alors basée sur des développements limités, en amplitude de l'onde, des différentes grandeurs étudiées (vitesse, hauteur de couche, VP). Toutefois quand Kuo (1999) tente d'étendre cette étude à une configuration bidimensionnelle où l'équilibre géostrophique n'est plus exact, ses conclusions sont moins tranchées. D'après Kuo (1999), dans ce cadre, les ondes sont juste capables de déplacer le vortex mais ne peuvent lui extraire ou fournir de l'énergie.

Dans un autre cadre particulier, celui d'un **milieu non tournant**, Bühler et McIntyre (2003) montrent analytiquement que l'écoulement moyen est soumis à une force due à la réfraction des ondes par un vortex. Cette force n'est pas ressentie là où les ondes sont réfractées mais au cœur du vortex. La rationalisation de ce processus repose sur plusieurs types d'hypothèses : la vorticité relative du vortex doit être confin e dans une région extérieure au train d'ondes, les ondes doivent être de petite échelle par rapport au vortex, enfin les développements limités réalisés s'appuient sur un petit nombre de Froude (vortex faible) et sur des ondes de faible amplitude par rapport au vortex.

Dans un cadre plus général, Bühler et McIntyre (1998) examinent en quoi la dynamique de la VP est modifi e par les ondes IG, le but étant de paramétriser l'action des ondes dans le système d'équations gouvernant l'évolution du mode lent. D'une manière générale, ce système comporte deux étapes : une étape diagnostique où l'écoulement est obtenu par inversion de la VP et une étape pronostique où celle-ci est advect e. Bühler et McIntyre (1998) montrent que les deux étapes sont modifi es. En effet non seulement l'étape pronostique est affect e mais également l'étape diagnostique où l'équation de balance servant à l'inversion de la VP contient des termes supplémentaires en présence d'ondes. Le champ de vitesse lent, issu de cette étape diagnostique, est alors modifié entraînant une modification irréversible de l'advection des contours de VP, modification qualitativement différente de celle attendue par simple considération d'une dérive de Stokes. Leur étude repose sur une séparation d'échelle entre des ondes IG courtes et un écoulement moyen plus grande échelle, leur permettant de définir un opérateur de moyenne adapté à la théorie Lagrangienne non-linéaire, de plus les ondes sont suppos es de faible amplitude par rapport à l'écoulement moyen.

### *Interaction dissipative*

Les études de McIntyre et Norton (1990), Bühler (2000) et Klein et al. (2003) reposent sur des arguments dissipatifs. Bühler (2000) considère que la dissipation des ondes IG, dissipation visqueuse comme dans McIntyre et Norton (1990), mais aussi dissipation par déferlement ou formation de chocs, induit transport et création de VP, phénomène illustré par la figure 1.6. Ce processus peut être associé à une force supplémentaire dans l'équation d'évolution du mode lent permettant de paramétriser l'effet de la dissipation des ondes IG sur la composante lente de l'écoulement, la rationalisation de ce processus repose sur l'hypothèse d'ondes IG de petite longueur d'onde par rapport à l'écoulement moyen. Les expériences en cuve

tournante de Moulin et Flór (2004a) montrent que l'interaction d'ondes IG externes avec un tourbillon induit du mélange jusque dans son noyau qu'en cas de déferlement d'ondes piégées dans la couronne. Avant le déferlement, seules quelques trajectoires de la couronne sont déstabilisées par résonance avec le champ d'ondes IG, ce qui induit un mélange local limité à une petite région du tourbillon.

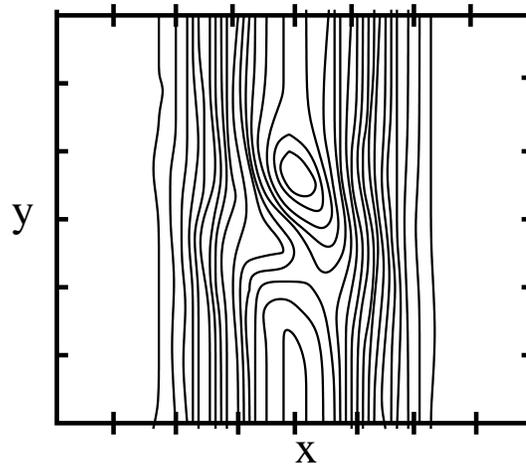


FIGURE 1.6 – *Champ de VP créé par le déferlement d'ondes IG. Cette figure, tirée de Bühler (2000), est réalisée d'après une simulation numérique où, dans un modèle shallow-water 1 couche plan  $f$ , des ondes IG sont forcées à gauche du domaine et dissipées à droite, sans le déferlement de ces ondes, la VP serait homogène.*

L'argument dissipatif de Klein et al. (2003) est lui d'une autre nature. Il n'est plus question de la dissipation des ondes IG mais de l'influence des NIO sur la dissipation du mode lent : l'effet des ondes sur le mode lent est vu comme un effet diffusif, la dissipation du mode lent sera donc plus importante dans les régions où des NIO sont présentes. Or celles-ci sont piégées par les anticyclones et repoussées par les cyclones (Kunze 1985, Young et Ben Jelloul 1997), les zones anticycloniques seront alors plus dissipées que les zones cycloniques expliquant l'émergence de cyclones. Klein et al. (2003) paramétrisent ce processus en prenant, dans leur modèle quasi-géostrophique, un coefficient de diffusion proportionnel à l'énergie cinétique des NIO dont la propagation dans l'écoulement quasi-géostrophique est modélisé parallèlement (Young et Ben Jelloul 1997). En l'absence de rétroaction des NIO sur le mode lent le coefficient de diffusion quasi-géostrophique est homogène entraînant une symétrie cyclone / anticyclone alors que quand cet effet est pris en compte, il devient hétérogène brisant cette symétrie. Les NIO permettent l'émergence des structures cycloniques au profit des structures anticycloniques. Ce biais dans le champ de vorticité relative se manifeste à travers la valeur du "skewness" de vorticité relative  $\mu_3$

défini comme  $\mu_3 = \langle \zeta^3 \rangle / \langle \zeta^2 \rangle^{3/2}$  ( $\zeta$  représente la vorticité relative centrée et  $\langle . \rangle$  la moyenne spatiale). Dans un champ où les cyclones (resp. anticyclones) dominant,  $\mu_3$  est positif (resp. négatif). Les évolutions temporelles de  $\mu_3$ , pour des simulations de turbulence où la rétroaction des NIO sur le mode lent est prise en compte, sont présentées en figure 1.7 illustrant l'émergence de cyclones.

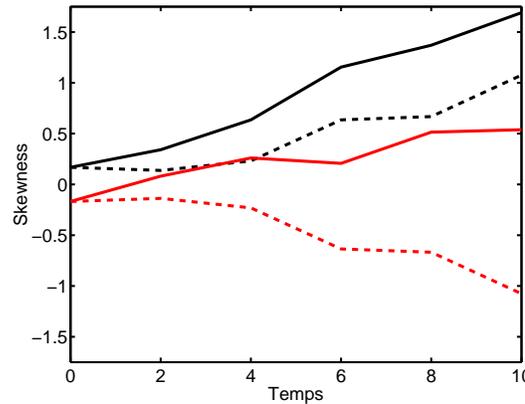


FIGURE 1.7 – Evolution temporelle du “skewness” de vorticité relative dans des simulations de turbulence, en pointillés noirs le coefficient de diffusion est homogène, en trait plein noir le coefficient de diffusion est rendu hétérogène par la rétroaction des NIO sur le mode lent. A chaque simulation “noire” correspond une simulation “rouge” où les conditions initiales sont opposées afin de s’affranchir de la valeur initiale du skewness. Cette figure, tirée de Klein et al. (2003), illustre l’émergence des cyclones par rapport aux anticyclones en présence de NIO alors qu’en leur absence leur dynamique est symétrique.

### 1.3.3 Synthèse et cadre du problème posé

Ce paragraphe est à la fois consacré à une synthèse des réponses apportées par la littérature à la question (Q2) et au choix du problème que l’on se pose par rapport à ces réponses.

Tout d’abord, il ressort que l’interaction d’un écoulement lent avec les ondes IG qu’il émet est un phénomène de très petite amplitude. En effet, rappelons que dans le cadre  $Ro > 1$  et  $Fr \ll 1$ , la théorie de Lighthill généralisée à la dynamique géophysique prévoit une modification de l’écoulement lent de l’ordre de  $\mathcal{O}(Fr^4)$  (Ford et al. 2000). Pour un nombre de  $Ro$  réaliste des moyennes latitudes ( $Ro < 1$ ), l’écart de fréquence entre les ondes IG et l’écoulement lent fait que sa modification ne peut être que de plus petite amplitude même si, à notre connaissance, aucune théorie générale pour  $Ro < 1$  n’a été établie. Parce que ce type d’interaction est minime,

nous ne l'aborderons pas et nous placerons dans des situations où les ondes sont de source externe à l'écoulement lent.

Notre étude portant sur l'influence des ondes IG sur la dynamique tourbillonnaire, nous n'aborderons que brièvement la modification de leur propagation par l'écoulement lent, phénomène bien documenté pour des ondes quasi-inertielles se propageant dans un écoulement géostrophique, sans hypothèse de séparation d'échelle ni d'amplitude, dont les résultats principaux sont d'une part le piégeage (resp. répulsion) de ces ondes par les zones anticycloniques (resp. cycloniques) et d'autre part leur propagation verticale plus rapide en présence d'un écoulement lent (Kunze 1985).

Notre étude s'insère donc plutôt dans le cadre des études présentées dans le paragraphe 1.3.2 où un écoulement lent est modifié par des ondes IG. Comme nous l'avons vu, cette interaction peut être de nature dissipative ou pas. Dans le cadre dissipatif, il a été établi d'une part que la dissipation visqueuse ou par déferlement d'ondes IG pouvait créer de la VP et d'autre part que les NIO pouvaient modifier la dynamique lente via la modification de son coefficient de diffusion. Dans le cadre non dissipatif, on peut distinguer les études où  $Ro < 1$  des études où la modification du mode lent passe par un nombre de  $Ro > 1$  (Bartello 1995) voire infini dans le cas non tournant (Bühler et McIntyre (2003)). Nous nous intéresserons au cadre  $Ro < 1$  réaliste des moyennes latitudes. Les études déjà réalisées dans ce cadre soit se placent dans l'espace spectral (Farge et Sadourny (1989)) soit reposent sur des développements asymptotiques mathématiques sous l'hypothèse d'ondes IG de petite échelle spatiale et de petite amplitude par rapport à l'écoulement lent. A partir de simulations numériques shallow-water où  $Ro < 1$ , notre objectif est de mettre en évidence, dans l'espace physique, l'influence d'ondes IG sur la dynamique tourbillonnaire sans faire d'hypothèse sur l'échelle et l'amplitude des ondes par rapport aux tourbillons. Au cours de nos études, nous serons alors amenés à extraire d'un écoulement issu d'un modèle shallow-water sa partie lente afin d'étudier séparément, de manière diagnostique, sa composante lente et sa composante rapide. C'est pourquoi le paragraphe suivant est consacré aux méthodes rencontrées dans la littérature pour isoler la composante lente d'un écoulement.

## 1.4 Méthodologie d'extraction du mode lent

Comme le montrent les études présentées dans le paragraphe précédent, il n'existe pas de sous-espace lent strictement invariant, plusieurs méthodes plus ou moins pré-

cises permettent alors d'isoler le mode lent. Une méthode grossière et non diagnostique consiste à moyennner temporellement l'écoulement sur une période des ondes IG. Une méthode plus précise consiste à inverser, à instant donné, la VP, grandeur associée au mode lent. Dans ce paragraphe, nous faisons le point sur les différentes méthodes d'inversion existantes.

### 1.4.1 Hypothèses

Hoskins et al. (1985) expliquent que l'on ne peut parler précisément d'inversion de VP que si en plus des conditions aux limites sont mentionnés l'*état de référence* et les *équations de balance*.

D'un côté, ce n'est pas exactement la VP qui est inversée mais une anomalie de VP par rapport à un état de référence qui peut :

- être le même avant et après inversion, il peut par exemple correspondre au champ de VP d'un écoulement au repos,
- être différent avant et après inversion, la VP de référence peut par exemple être la moyenne spatiale de la VP, choisir une VP de référence différente après et avant inversion permet de respecter en plus certaines contraintes (Mohebalhojeh 2002) comme la conservation de la circulation et/ou de la masse.

D'un autre côté, les équations de balance sont des équations diagnostiques décrivant les relations existant entre les différentes variables de la composante lente. Notons que ces équations de balance ne servent pas qu'à inverser la VP. Elles sont également beaucoup utilisées en météorologie pour initialiser les modèles afin de filtrer les bruits (Daley 1981). Elles servent aussi d'équations diagnostiques pour les modèles de balance (Warn et al. 1995, Muraki et al. 1999, Mohebalhojeh et Dritschel 2001) qui sont des modèles simplifiés, décrivant la physique lente, des modèles aux équations primitives. En effet, un modèle de balance est un jeu d'équations dont l'une est pronostique, elle décrit l'évolution du mode lent, les autres sont diagnostiques, elles relient toutes les autres variables à la variable pronostique. Il existe trois grandes méthodes d'obtention des équations de balance : la méthode en modes normaux annulant les variations temporelles du mode rapide, la méthode en " $\delta, \gamma$  balance" qui est la traduction dans l'espace physique de la méthode en modes normaux et la méthode en expansion de  $Ro$  qui consiste à développer les équations primitives en nombre de  $Ro$  supposé petit devant 1. La technique de ces trois méthodes est détaillée en annexe A.

### 1.4.2 Système à résoudre

Pour un modèle 1 couche 1/2, notons  $Q = \frac{\zeta + f}{h_T}$  la VP où  $\zeta$  est la vorticité relative,  $f$  le paramètre de Coriolis et  $h_T$  la hauteur totale de la couche active, il s'agit alors de résoudre un problème d'inconnues  $\zeta_{inv}$  et  $h_{Tinv}$  du type :

$$Q - R = \frac{f + \zeta_{inv}}{h_{Tinv}} - R_{inv} \quad (1.7a)$$

$$F(\zeta_{inv}, h_{Tinv}) = 0 \quad (1.7b)$$

où :

- $R$  désigne la VP de référence,
- l'indice  $inv$  correspond aux grandeurs après inversion,
- $F$  représente le jeu d'équations de balance obtenu avec l'une des trois méthodes. Par exemple si l'équilibre géostrophique est utilisé comme équation de balance, (1.7b) correspond à  $\zeta_{inv} = g'/f\nabla^2 h_{Tinv}$  pour un modèle 1 couche 1/2 de gravité réduite  $g'$ .

Notons que dans le système (1.7),  $R_{inv}$  peut également être considérée comme une inconnue dans quel cas une équation supplémentaire est nécessaire : la conservation de la masse ou de la circulation avant et après inversion peut être imposée.

Quand les équations diagnostiques de balance sont obtenues par expansion de Rossby, toutes les variables intervenant dans les équations de balance sont développées en  $Ro$  mais la forme de l'équation de la vorticité linéarisée (A.4c) ne permet pas l'obtention d'équations diagnostiques, le système (1.7) n'est alors pas fermé, il peut être fermé en considérant une des variables comme variable "maîtresse", ie seul le premier terme dans son développement en  $Ro$  est non nul. Deux cas se présentent alors :

- Si la variable maîtresse est l'anomalie de VP  $Q - R$ , l'équation (1.7a) est développée jusqu'à l'ordre considéré. A l'ordre  $n$  en  $Ro$ , l'équation (1.7a) n'est alors plus exactement vérifiée, une erreur en  $\mathcal{O}(Ro^{n+1})$  est commise.
- Si la variable maîtresse est une autre variable que l'anomalie de VP  $Q - R$ , l'équation (1.7a) n'est pas développée en  $Ro$ . Poser que seul le premier terme dans le développement en  $Ro$  de la variable maîtresse est non nul suffit à fermer le système (1.7). Warn et al. (1995) estiment que les méthodes d'inversion les plus précises sont, dans ce cas, obtenues quand la variable maîtresse, en termes d'équations linéaires, se projette entièrement sur le mode lent.

Le tableau 1.1 récapitule différentes méthodes d'inversion de la VP utilisées par divers auteurs. Notons que Mohebalhojeh (2002) propose des variantes des méthodes exposées dans ce tableau, il teste notamment une version modifiée de la méthode de Vallis (1996) en expansion de  $Ro$ . D'une part, pour une inversion d'ordre  $n$ , il ne développe (1.7a) que jusqu'à l'ordre  $n - 1$ , la  $n^{\text{ème}}$  équation étant constituée des termes restants, cela lui permet de respecter rigoureusement (1.7a). D'autre part, il prend comme états de référence, avant et après inversion, la moyenne de la VP. Il va même jusqu'à développer  $R_{inv}$  dans (1.7a) pour respecter à chaque ordre les conservations de la masse et de la circulation.

	Equations diagnostiques	Etats de références
Whitaker (1993)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\delta</math> balance</li> </ul>	$R = R_{inv} = \text{VP au repos}$
Warn et al. (1995) Vallis (1996)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• expansion en <math>Ro</math> avec l'anomalie de VP comme variable maîtresse</li> </ul>	$R = R_{inv} = \text{VP au repos}$
McIntyre et Norton (1999)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\delta</math> balance</li> <li>• modes normaux</li> </ul>	$R = R_{inv} = \text{VP au repos}$
Mohebalhojeh (2002)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• expansion en <math>Ro</math> avec <math>q_l</math>, <math>h</math> ou <math>\zeta</math> comme variable maîtresse</li> <li>• <math>\delta</math>, <math>\gamma</math> ou <math>\delta - \gamma</math> balance</li> </ul>	$R = \langle Q \rangle$ , $R_{inv} = \langle Q_{inv} \rangle$ tels que circulation et masse conservées

TABLEAU 1.1 – *Equations diagnostiques et états de références choisis par divers auteurs pour inverser la VP, la notation  $\langle . \rangle$  représente la moyenne spatiale.*

## 1.5 Conclusion

Ce chapitre bibliographique a passé en revue quelques études traitant de la distinction mode lent / mode rapide et des différentes natures d'interaction envisageables. L'objectif de cette thèse est d'analyser l'impact des ondes IG sur la dynamique tourbillonnaire à partir d'études numériques en s'appuyant sur cette revue

bibliographique. Soulignons que l'impossibilité de séparer rigoureusement ces deux dynamiques rend l'étude de leur interaction particulièrement complexe. Toutefois, l'influence d'ondes IG externes sur des tourbillons caractérisés par un petit nombre de Rossby sera envisagée sous deux angles. La première étude consiste à examiner en quoi les ondes IG affectent l'étude **diagnostique** de la dynamique tourbillonnaire. Dans le chapitre 2, où un tourbillon est érodé par filamentation, est alors étudiée l'influence des ondes IG sur la localisation des zones d'éjection de filaments. La seconde étude vise à mettre en évidence et à interpréter **une modification de la dynamique tourbillonnaire** par les ondes IG, aspect déjà abordé dans la première étude. Le chapitre 3 est alors consacré à l'influence que peuvent avoir les ondes IG sur la stabilité d'un tripôle.



## Chapitre 2

# Erosion de tourbillon en modèle shallow-water

### 2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'érosion d'un tourbillon par filamentation dans un modèle shallow-water où dynamiques lente et rapide coexistent. Le but est de voir en quoi les ondes IG perturbent la localisation des points d'éjection de filaments. Cette étude a fait l'objet d'un article publié dans la revue "Physics of fluids" (Louazel et Hua 2004) et présenté en paragraphe 2.3, avant cela nous exposerons quelques aspects généraux de la filamentation des tourbillons, le chapitre se terminera par une discussion, basée sur l'étude bibliographique du chapitre précédent, des résultats présentés dans l'article.

### 2.2 A propos de filamentation de tourbillons

#### 2.2.1 Observations

Le processus de filamentation d'un tourbillon est régulièrement observé, deux exemples de tourbillons de surface repérés par satellite et un exemple de tourbillons profonds repérés par mesure in situ sont présentés ici.

##### **Tourbillons de surface**

Sur la figure 2.1(a), l'activité tourbillonnaire de surface du Golfe de Gascogne est mise en évidence à partir de la mesure par satellite de la réflectance à la surface de l'eau. La présence de ces nombreux tourbillons qui filamentent dans une zone où le courant moyen est très faible est à l'origine d'une circulation turbulente intense et

d'une dispersion extrêmement forte dans toutes les directions.

Sur la figure 2.1(b) de la mer de Tasmanie, les tourbillons sont repérés à partir de la concentration en chlorophylle mesurée par satellite illustrant ainsi l'impact du processus de filamentation sur les processus biologiques. On y observe plusieurs tourbillons qui filamentent dispersant de la chlorophylle qu'ils concentraient.

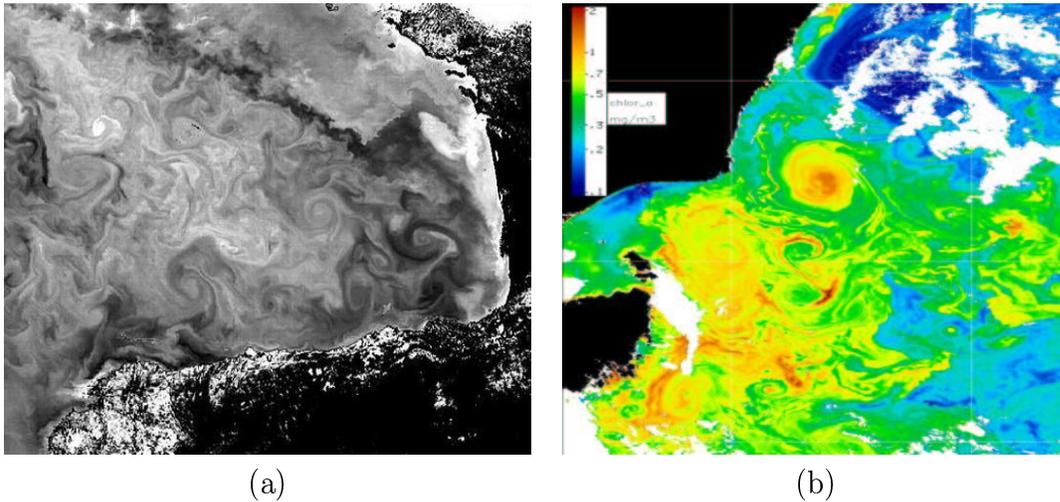


FIGURE 2.1 – *Tourbillons de surface. (a) Réflectance dans le Golfe de Gascogne. (b) Concentration en chlorophylle en mer de Tasmanie.*

### Tourbillons profonds

La figure 2.2 représente des tourbillons profonds repérés par mesure in-situ à 1200m de fond à la sortie du détroit de Gibraltar. Il s'agit de tourbillons d'eau Méditerranéenne mesurant environ 80 km de rayon, la Méditerranée étant plus chaude mais aussi plus salée que l'Atlantique, ces tourbillons sont repérés par leur forte salinité illustrant l'impact de la filamentation sur les processus physiques. On observe sur cette figure deux tourbillons dont l'un est érodé par filamentation formant des fronts de salinité visibles malgré le faible échantillonnage spatial des mesures in-situ par rapport aux mesures par satellite. Les tourbillons d'eau Méditerranéenne (“meddies”) sont importants car ils alimentent l'Atlantique Nord en sel et en chaleur d'où leur rôle majeur dans la circulation grande échelle.

### 2.2.2 Etude du processus de filamentation

Ce processus de filamentation peut avoir des conséquences à la fois sur la cohérence des tourbillons et sur l'intensité du mélange. En effet d'un côté, la durée de vie d'un tourbillon est directement liée à sa filamentation puisque par ce processus

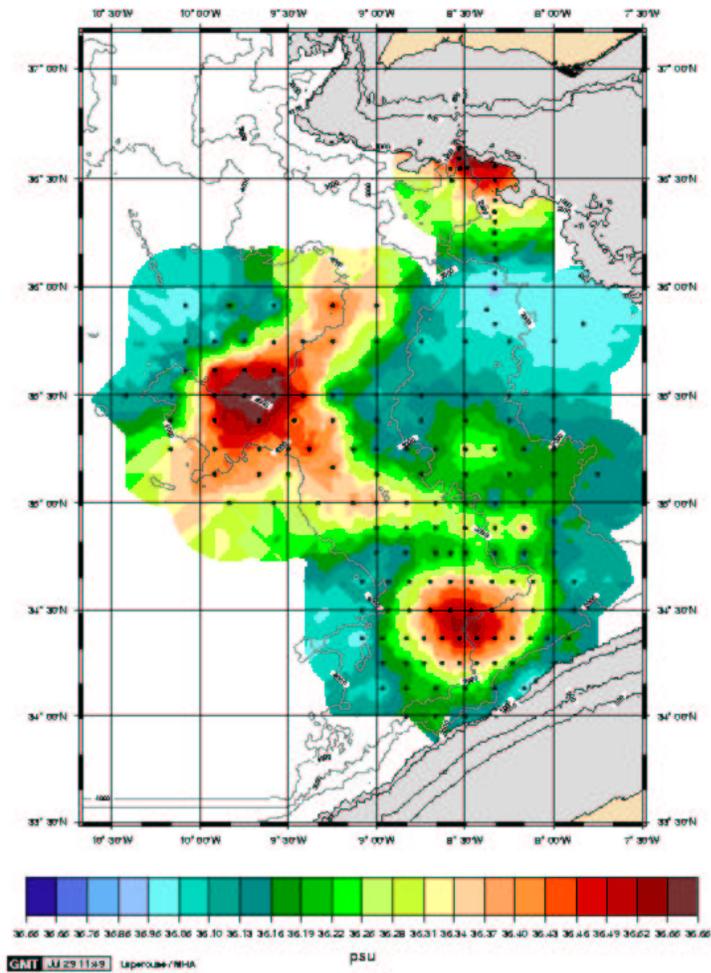


FIGURE 2.2 – *Tourbillons à 1200m de fond - Salinité à la sortie du Déroit de Gibraltar mesurée lors de la campagne SEMANE 99.*

il va pouvoir soit gagner en cohérence en acquérant une forme plus stable et vivre longtemps soit perdre en cohérence en perdant de son intensité dans quel cas il peut être absorbé par des tourbillons plus gros qu'il rencontre. D'un autre côté, l'un des moteurs du processus de mélange est la filamentation des tourbillons puisqu'elle permet la dispersion de masses d'eau ayant les propriétés de la zone de formation du tourbillon dans les eaux environnantes.

Cet impact important de la filamentation des tourbillons fait que ce processus est l'objet de nombreuses études. Pour des écoulements bidimensionnels incompressibles, des auteurs comme Kida (1981), Mariotti et al. (1994) ou encore Legras et al. (2001) étudient l'évolution d'un vortex dans un champ de déformation externe. Soumis à cette déformation, le tourbillon est contraint d'éjecter des filaments pour s'ajuster à l'écoulement ambiant, la stabilité des filaments produits par ce mécanisme a été étudiée par Dritschel et al. (1991). D'autres auteurs comme Polvani et al. (1989), Melander et al. (1987) ou Kimura et Herring (2001) analysent le processus de filamentation d'un tourbillon à vortacité distribuée soumis à son propre champ de déformation. L'axisymétrisation d'un tel tourbillon initialement elliptique passe par l'éjection de filaments.

Toujours dans le cadre bidimensionnel, plusieurs approches théoriques permettent d'étudier ce processus. Polvani et al. (1989) et Legras et al. (2001) analysent la géométrie des lignes de courant en examinant la localisation et la nature des points stationnaires (centre ou point selle), le processus de filamentation étant lié à la présence de points selles dans l'écoulement. Par ailleurs, comme la notion de filamentation est associée à la notion de gradient (Mariotti et al. 1994 et Kimura et Herring 2001), une autre approche consiste à étudier la dynamique du gradient de VP, ce qui fait intervenir le champ de déformation, moteur du processus de filamentation. Dans le cadre bidimensionnel, la VP se restreignant à la vortacité relative, il s'agit alors de distinguer les zones de production de gradient de vortacité relative des zones de destruction. Le premier à considérer cette approche fut Weiss (1991), il établit dans un cadre bidimensionnel un critère basé sur la compétition entre la déformation qui fait croître les gradients et la vortacité qui les fait tourner, l'espace physique peut alors être divisé en zones hyperboliques où la déformation l'emporte (croissance exponentielle du gradient) et zones elliptiques où la vortacité l'emporte (pas de croissance du gradient). Le même critère avait été établi par Okubo (1970) dans un autre contexte, celui de la dispersion de particules. Pour aboutir à cette partition de l'espace physique, Weiss (1991) néglige entre autres les variations du champ de déformation. Lapeyre et al. (1999) remettent ces hypothèses en cause et

établissent un nouveau critère, appelé “critère  $r$ ”, dans le cadre quasi-géostrophique barotrope. Leur travail est basé sur l’étude de l’alignement du gradient de vorticité relative et tient compte des variations Lagrangiennes des taux de cisaillement et d’étirement entraînant notamment la rotation des axes de déformation. Notre étude sur l’érosion par filamentation d’un tourbillon dans un modèle shallow-water se base sur le critère de Lapeyre et al. (1999) qui est redéveloppé pour ce type de modèle dans l’article du paragraphe 2.3.

Enfin notons que, non plus dans un cadre bidimensionnel mais shallow-water, Arai et Yamagata (1994) étudient la différence d’évolution entre cyclones et anticyclones elliptiques. Ils montrent que les cyclones sont plus instables que les anticyclones, ils se brisent en effet plus facilement. La fission d’un cyclone a lieu quand le point critique situé en son milieu bifurque d’un centre à un point selle. Notre étude ne se penche pas sur cette asymétrie cyclones / anticyclones et prendra l’exemple d’un anticyclone.

## 2.3 Vortex erosion in a shallow-water model

### Louazel et Hua (2004)

L’objectif de cet article est d’étudier le processus d’érosion par filamentation d’un tourbillon en présence d’ondes IG. Les simulations numériques réalisées ici révèlent que les ondes modifient légèrement ce processus de filamentation. Toutefois l’information nécessaire pour l’analyser s’avère être contenue dans la composante lente de l’écoulement et les zones d’éjection de filaments peuvent être localisées à partir du critère diagnostique de Lapeyre et al. (1999) basé sur des grandeurs instantanées de cette composante. Cette étude repose sur des simulations numériques où un tourbillon elliptique avec un profil de VP distribué est initialisé en présence d’ondes de Poincaré, elles sont réalisées avec le modèle shallow-water MICOM dont notre configuration est brièvement décrite en annexe B, les valeurs des différents paramètres intervenant dans ces simulations, de la vitesse des ondes de gravité  $c_0 = \sqrt{g'H}$  et du rayon de déformation  $R_d = c_0/f$ , sont récapitulées dans le tableau 2.1.

$f$	$H$	$g'$	$\nu_0$	$C_{Quick}$	$C_{Smag}$
$7.10^{-5} s^{-1}$	$1000m$	$5.10^{-3} m.s^{-2}$	0	1/32	1

$c_0$	$R_d$	$L_x$	$L_y$
$2.2m.s^{-1}$	$31.6km$	$768km$	$768km$

TABLEAU 2.1 – Valeurs des différents paramètres des simulations réalisées dans Louazel et Hua (2004).

### Abstract

The purpose of this paper is to study the erosion of eddies by filamentation in a shallow-water model where both fast and slow components of the dynamics coexist. In presence of inertia-gravity waves this filamentation process is indeed found to be altered. However, the information required to analyze the filamentation process is shown to be entirely captured by the slow component of the flow and regions of filament ejection can be identified from a diagnostic criterion based on instantaneous slow quantities. This is illustrated numerically in a reduced gravity model for an initial elliptic vortex of distributed potential vorticity in presence of Poincaré waves.

### 2.3.1 Introduction

Large-scale geophysical flows are characterized by coherent vortices where enstrophy is concentrated. The filamentation of these structures, a manifestation of the enstrophy cascade, has been largely studied for 2D incompressible flows. Some authors investigate, theoretically (Kida 1981) or numerically (Mariotti et al. 1994), the vortex evolution in an external shear flow. Under the influence of the shear, the vortex is constrained to expell vorticity filaments in order to maintain its coherence. Filaments produced by this mechanism can roll up in new vortices depending on their stability (Dritschel et al. 1991). Vortex filamentation can also be produced under the own vortex deformation field as analyzed by Melander et al. (1987), Polvani et al. (1989) or Kimura et Herring (2001). The objective of this paper is to study the evolution of an elliptic vortex in a shallow-water (hereafter SW) context.

The wave-vortex interaction has been studied in many different manners (theoretically or numerically, in spectral space or in physical space,etc). In the case of non-dissipative waves (Dewar et Killworth 1995, Bartello 1995, Farge et Sadourny 1989), all studies find that there is no significant energy transfer between the fast and the slow components of the flow in the small Rossby number limit. However, waves can modify the vortical component of the flow and Bühler et McIntyre (1998) insist on the irreversible modification of potential vorticity (hereafter PV) contours advection by waves which is “qualitatively different from that expected from a naive consideration of Stokes drifts alone”. In the case of dissipating or breaking waves, PV can be created as illustrated in shallow-water flow by Bühler (2000).

The process of filamentation is associated with PV gradient intensification. The evolution of PV gradient has been examined by Okubo (1970) and Weiss (1991) in a context where the velocity gradient tensor is considered as slowly variable along the Lagrangian trajectories, its real eigenvalues corresponding to areas of filamentation. Because it is simple and based on instantaneous quantities, this criterion is widely applied to study the process of filamentation. Carton et al. (2002) estimate it from hydrological data to localize warm and salty filaments near Meddies (Mediterranean water Eddies). Maassen et al. (2002) estimate it from laboratory data to study the detachment of viscous boundary layers. It should be pointed out that data from geophysical or laboratory flows are often available as instantaneous snapshots and their study requires instantaneous criteria. Herbette et al. (2003) also use the Okubo-Weiss criterion, but in shallow-water numerical experiments, to identify the filamentation areas of a surface vortex as it encounters a seamount.

Thus, although it does not consider any time variation of the velocity gradient tensor, the Okubo-Weiss criterion is largely used even in experiments involving vor-

tices whose edge is a region where these variations are important as noted by Hua et Klein (1998) who instead study the eigenvalues of the acceleration gradient tensor which governs the second order time derivative of the PV gradient. For 2D quasi-geostrophic flows, the approach of Lapeyre et al. (1999) and Klein et al. (2000) is based on the investigation of the PV gradient alignment in strain coordinates. Their criterion is related to the Okubo-Weiss criterion, it is also estimated from instantaneous quantities but takes furthermore into account the rotation of the strain principal axes which depends on Lagrangian accelerations, thus on the balance of forces. This criterion is more appropriate to our study of vortex filamentation than the Okubo-Weiss one since it is this rotation of the strain axes which is important on the vortex edge.

Note that this criterion is not only used to study filamentation but also for perturbation growth on a basic state flow. Indeed the mathematical expressions of vector stretching dynamics in the evolution equations of PV gradient and velocity perturbation are similar. Rivière et al. (2003) use the Lapeyre et al. (1999) criterion in a quasi-geostrophic framework and Straub (2003) tests it in a primitive equations model where it is estimated from the basic flow which only has a slow component.

The Lapeyre et al. (1999) criterion is more accurate than the Okubo-Weiss one but is based on restrictive assumptions such as the slowness of the strain axes rotation. Its advantage is to provide a diagnostic criterion based on instantaneous quantities since data over a long time can only be available in numerical experiments but not in geophysical or laboratory datasets. A more complete approach is to consider the full Lagrangian history on which the process of filamentation depends (cf Haller (2001) who has developed a Lagrangian version of the Okubo-Weiss criterion to localize hyperbolic and elliptic structures and the application of the method within the context of the polar vortex flow by Koh et Legras (2002)).

This paper that aims at analyzing the filamentation process of a vortex in SW dynamics is organized as follows. In Sec. 2.3.2, the similarities and differences of this process with or without inertia-gravity (hereafter IG) waves are assessed from numerical SW experiments. In spite of its limitations, we attempt to use the Lapeyre et al. (1999) criterion to localize the areas of filament ejection but the presence of rapid motions causes the criterion to fail. Thus in Sec. 2.3.3, the filamentation process is diagnosed from the slow component of the flow. Finally, results are summarized and discussed in Sec. 2.3.4.

### 2.3.2 PV gradient growth in shallow-water (SW)

We consider a simplified version of the primitive equations model MICOM (Miami Isopycnic Coordinate Ocean Model) on an  $f$  plane. The vertically discretized equations in isopycnal coordinates (Bleck et Boudra 1986) reduce to the SW equations. In a square doubly periodic domain, we use a reduced gravity configuration without any diapycnal mixing:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + f\mathbf{k} \wedge \mathbf{u} = -g'\nabla h, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot ((H + h)\mathbf{u}) = 0,$$

where  $\mathbf{u} = (u, v)$  represents the horizontal velocity field,  $H$  the layer depth at rest,  $h$  the height fluctuation,  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$  the Lagrangian derivative,  $\mathbf{k}$  the vertical unitary vector and  $g'$  the reduced gravity parameter. For numerical reasons, isopycnal diffusion of momentum is added to the first equation.

In SW dynamics the key quantity is PV which is a Lagrangian invariant, the PV anomaly is denoted by  $q$ .

$$q \equiv H \left( \frac{\zeta + f}{H + h} - \frac{f}{H} \right) = \frac{\zeta - f \frac{h}{H}}{1 + \frac{h}{H}}, \quad (2.2)$$

where  $\zeta = \partial_x v - \partial_y u$  represents the relative vorticity. Moreover, we will note hereafter  $\sigma_n = \partial_x u - \partial_y v$  the normal strain,  $\sigma_s = \partial_x v + \partial_y u$  the shear strain,  $\sigma = \sqrt{\sigma_n^2 + \sigma_s^2}$  the strain rate and  $\delta = \partial_x u + \partial_y v$  the divergence.

#### Criterion of PV gradient growth

The filamentation process is associated with PV gradient intensification and from the dynamics of PV gradient, different diagnostic criterions can be derived to study this process. Considering PV conservation along a Lagrangian trajectory, which reduces to  $\frac{Dq}{Dt} = 0$  on the  $f$  plane, the evolution equation of  $q$  gradient is obtained:

$$\frac{D\nabla q}{Dt} = -[\nabla \mathbf{u}]^* \nabla q \quad (2.3)$$

where  $[\nabla \mathbf{u}]^*$  represents the transpose of the velocity gradient tensor.

The approach of Okubo (1970) and Weiss (1991) consists in considering in (2.3) that  $-\nabla \mathbf{u}$  is slowly varying along the Lagrangian trajectories, hence they consider its eigenvalues which are  $\frac{-\delta \pm \sqrt{\sigma^2 - \zeta^2}}{2}$ . Thus for non divergent flows, the physical space is divided into rotation dominated areas ( $|\zeta| > \sigma$ ) and strain dominated areas ( $\sigma > |\zeta|$ ) where an exponential growth of PV gradient norm is expected. Note that,

even for small divergent flows, the widely used Okubo-Weiss quantity is  $\sigma^2 - \zeta^2$ .

For 2D motions, Lapeyre et al. (1999) improve the above criterion by taking into account the strain variations along the Lagrangian trajectories through the rotation of its principal axes. This criterion is developed here for SW equations. As the approach is based on the investigation of the  $q$  gradient alignment in strain coordinates,  $q$  gradient and the strain rates are written in terms of magnitude and angles :

$$\nabla q = \rho \left( \cos \left( \frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \sin \left( \frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right), \quad (\sigma_s, \sigma_n) = \sigma (\cos(2\phi), \sin(2\phi)), \quad (2.4)$$

where the angle  $\phi$  defining the direction of the strain compressional axis, the norm  $\rho$  of  $q$  gradient and the angle  $\xi$  characterizing its position relatively to the compressional axis are illustrated in Fig. 2.3. Dritschel et al. (1991) use the same formalism to investigate the stability of a vorticity filament under the action of strain.

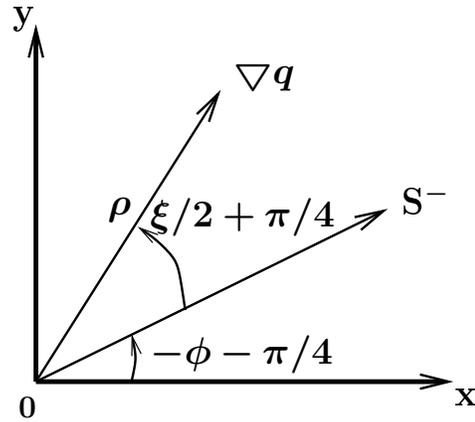


FIGURE 2.3 – Magnitude  $\rho$  of PV gradient and angles defining the directions of the strain compressional axis  $S^-$  and PV gradient.

Then the vector equation (2.3) is split into two scalar equations, one for  $\rho$  and one for  $\xi$ ,

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} = -\sigma \sin \xi - \delta, \quad (2.5)$$

$$\frac{D\xi}{Dt} = \sigma(r - \cos \xi), \quad (2.6)$$

where  $r$  compares the strain to an “effective rotation” which is the difference between the relative vorticity and the rotation rate  $-2(D\phi/Dt)$  of the strain axes,

$$r \equiv \frac{\zeta + 2(D\phi/Dt)}{\sigma}. \quad (2.7)$$

The SW expression of  $2(D\phi/Dt)$ , which depends on the spatial derivatives of Lagrangian accelerations, is the following :

$$2\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\sigma_s(D\sigma_n/Dt) - \sigma_n(D\sigma_s/Dt)}{\sigma^2},$$

$$\frac{D\sigma_n}{Dt} = \partial_x \left( \frac{Du}{Dt} \right) - \partial_y \left( \frac{Dv}{Dt} \right) - \delta\sigma_n \quad , \quad \frac{D\sigma_s}{Dt} = \partial_y \left( \frac{Du}{Dt} \right) + \partial_x \left( \frac{Dv}{Dt} \right) - \delta\sigma_s. \quad (2.8)$$

Note that the divergence  $\delta$ , which is zero in the 2D framework of Lapeyre et al. (1999), is directly involved in the magnitude equation (2.5) and indirectly in the orientation one (2.6) via the expression of the rotation of the strain principal axes (2.8). All quantities can be obtained diagnostically at each instant.

Assuming that  $r$  is slowly varying along Lagrangian trajectories, equation (2.6) shows that in the strain dominated regions where  $|r| < 1$ , the vorticity gradient lines up with a specific direction relative to the strain axes such that  $\xi = \xi_- = -\arccos(r)$ ; according to equation (2.5), for small divergent flows, this alignment is associated with an exponential growth of  $\rho$ . On the contrary, in the ‘‘effective rotation’’ dominated regions where  $|r| > 1$ , the vorticity gradient rotates and no exponential growth of its magnitude is expected, the vorticity gradient dynamics are more precisely investigated by Klein et al. (2000). Thus  $r$  is a criterion, depending on the Lagrangian accelerations (and therefore on forces) via the rotation rate of the strain principal axes, to identify areas of PV gradient intensification.

## Initialization and experiments

Two numerical experiments (hereafter denoted by 1 and 2) are performed using the above code at a resolution of  $1024 \times 1024$ , the Coriolis parameter  $f$  is equal to  $7.10^{-5} s^{-1}$ ,  $g'$  to  $5.10^{-3} m.s^{-2}$ ,  $H$  to  $1000m$  and the domain size to  $768 \times 768 km^2$ . The Rossby deformation radius  $R_d = \sqrt{g'H}/f$  is equal to  $32km$ , it is well resolved since the grid size  $\Delta$  is such that  $R_d \simeq 40\Delta$ .

A geostrophic vortex alone is initialized in experiment 1 and a geostrophic vortex and IG waves are initialized in experiment 2 such that the initial PV fields are identical for both experiments. Specifically, in experiment 2, the initial vortex velocity and height fields are obtained by PV inversion (see section III A) of the following elliptic distributed profile (Melander et al. 1987, Kimura et Herring 2001) :

$$q(l) = q_0 \left[ 1 - \exp \left\{ -C \frac{R_0}{l} \exp \left( -\frac{R_0}{R_0 - l} \right) \right\} \right] \quad \text{for } 0 \leq l < R_0,$$

$$q(l) = 0 \quad \text{for } l \geq R_0, \quad (2.9)$$

$$l = \sqrt{ax^2 + by^2},$$

$$q_0 = -3.10^{-5} s^{-1} \quad a = 1 \quad b = 10 \quad R_0 = 6R_d \quad C = 2.5608517.$$

Since PV is a non linear quantity, the presence of IG waves in this experiment 2 makes the actual initial PV profil  $\tilde{q}$  slightly different from (2.9). In experiment 1, the initial vortex velocity and height fields are obtained by  $\tilde{q}$  inversion.

For both experiments, the height fluctuation  $h$  at the vortex center is about  $1/3H$ , the rotation time scale of such vortex is around  $40 \times \frac{2\pi}{f}$ . In experiment 1, the Rossby and Froude numbers are respectively equal to 0.25 and 0.15. In experiment 2, the Poincaré waves amplitude is about  $1/30H$ , their wave lengths are  $12R$  and  $8R$  and the two components are out of phase, the Rossby and Froude numbers are respectively equal to 0.25 and 0.3, specifically the ratio  $\frac{|\mathbf{u}|_{slow}}{|\mathbf{u}|_{fast}}$  is about 0.5.

### Filamentation process

In both experiments, the vortex shows some similar behaviors. As studied in 2D flows by Melander et al. (1987) and Kimura et Herring (2001), the vortex relaxes towards axisymmetry as the result of filament ejection. Indeed the ellipticity of the vortex which is initially equal to 0.95 progressively decreases to reach 0.6 after two vortex rotation time scales. The filamentation process occurs through successive stages. We will focus hereafter on the first two sheddings of such filaments, the primary one occurring at the tip of the longest axis of the ellipse after around a quarter vortex rotation time scale and the secondary one that is more laterally located occurring after a full vortex rotation time scale.

Whereas the first shedding occurs in the same way and at the same position for both vortices, for the second one the shape and the localization of PV filaments are different (cf. boxes of Fig. 2.4). There is a shift in the position of the ejection points of the secondary filaments in presence of IG waves (the distance between the primary and secondary ejection points changes by a factor of 1.2 between the two experiments).

Pursuing further in time the integration of both experiments, we have found that differences in filamentation were irreversible, as already noted by Bühler et McIntyre (1998). We have used as an index for measuring this difference the quantity  $\langle |q_1 - q_2| \rangle / \langle |q_1| \rangle$  where  $q_1$  (respectively  $q_2$ ) represents PV anomaly of experiment 1 (respectively 2) and  $\langle . \rangle$  the spatial domain average. The non oscillatory component of this index indeed increases monotonously (Fig. 2.5(a)).

Although the process of filamentation is altered in presence of IG waves, we would like to be able to localize theoretically at a given time the areas of filament ejection, relying on previously established criteria, such as the  $r$  criterion. We will use instead of  $r$ , which involves a division by the strain  $\sigma$  that can be zero at some points of the

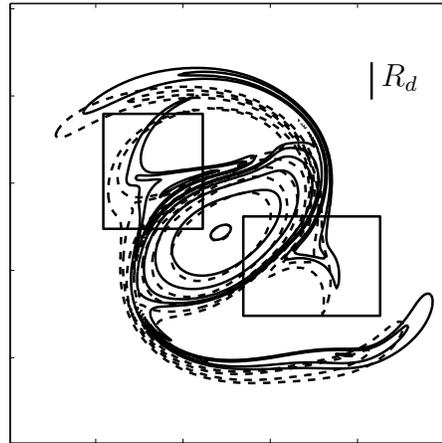


FIGURE 2.4 – *PV anomaly field after a vortex rotation time scale, solid contours are for experiment 2 and dashed ones for experiment 1. All contours are negative, contour interval is  $6 \cdot 10^{-6} s^{-1}$ . The scale of the Rossby deformation radius  $R_d$  is given.*

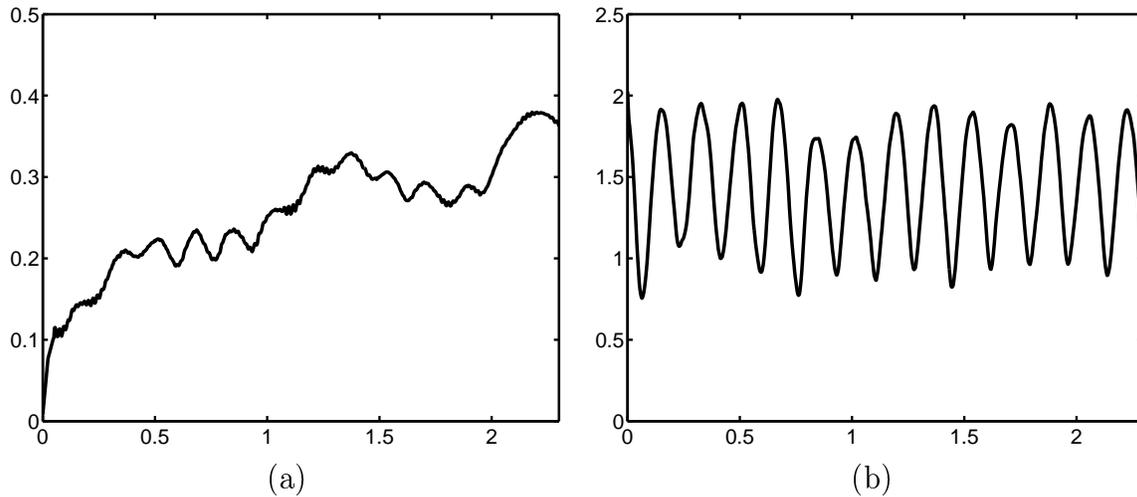


FIGURE 2.5 – (a) *Time evolution of  $\langle |q_1 - q_2| \rangle / \langle |q_1| \rangle$  (b) time evolution of the ratio between the spatial averages of IG strain and geostrophic strain for experiment 2, the two strains are averaged over a box enclosing 90% of geostrophic strain. Time is adimensionalized by the vortex rotation time scale.*

flow, the following  $\tilde{r}$  quantity :

$$\tilde{r} = \frac{\sigma^3}{f^3} (1 - |r|) = \frac{1}{f^3} (\sigma^3 - |\zeta\sigma^2 + \sigma_s(D\sigma_n/Dt) - \sigma_n(D\sigma_s/Dt)|). \quad (2.10)$$

Therefore, filaments should be ejected where  $\tilde{r} > 0$ .  $\tilde{r}$  is tested for experiment 1 (cf. Appendix), as it proves to be successful in this case, it is also plotted in Fig. 2.6(a) for experiment 2:  $\tilde{r}$  is obviously no longer relevant. For primitive equations, the existence of rapid inertia-gravity motions introduces fast time scales in the  $r$  criterion. Indeed, the rotation of the strain axes  $2(D\phi/Dt)$ , which appears in the  $r$  quantity (2.7) and which depends on the Lagrangian accelerations, takes large instantaneous values. Herbette et al. (2003) note that the presence of IG waves in their experiments prevents them from directly using this criterion to study the filamentation of a vortex that encounters a seamount in a SW context. IG waves have a significant strain field: Fig. 2.5(b) shows the time evolution of the ratio between the spatial averages of IG strain and geostrophic strain, the two strains are averaged over a box enclosing 90% of geostrophic strain for the whole simulation. This figure illustrates that the IG strain is of the same order as geostrophic strain, while PV dynamics has a mostly slow component. This suggests that IG strain should not be taken into account in the evaluation of  $r$  for analyzing PV filamentation, and that one should filter IG waves before using an appropriate instantaneous  $r$  criterion. The above statements only hold for the special case of the tracer PV and do not apply for passive tracer fields that are not correlated with the slow velocity field.

### 2.3.3 Slow motion extraction

#### Filtering from geostrophic balance

The filtering can be done by PV inversion. A set of diagnostic equations describing the slow component of the flow is necessary for the inversion. Many papers deal with this set of diagnostic equations; indeed in addition of the papers discussing PV inversion (Vallis 1996, McIntyre et Norton 1999, Mohebalhojeh 2002), these equations are involved in balanced models (Warn et al. 1995, Muraki et al. 1999, Mohebalhojeh et Dritschel 2001) which furthermore use a prognostic equation for the evolution of the slow component.

A first approximation consists in finding the geostrophic flow, characterized by a stream function  $\psi_0$ , by inverting the *exact* SW PV anomaly  $q$  (without expanding

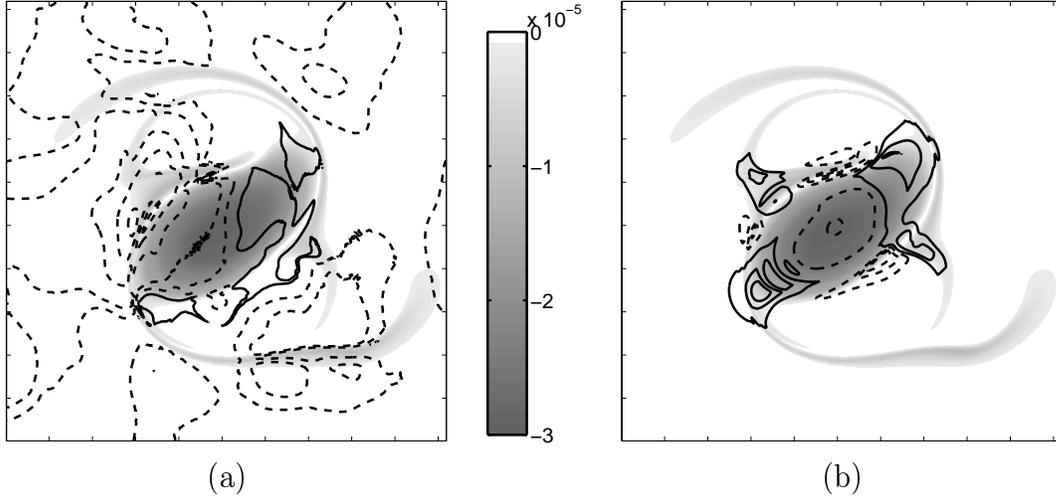


FIGURE 2.6 – (a)  $\tilde{r}$  field (b)  $\tilde{r}_0$  field after a vortex rotation time scale of experiment 2. For both figures, solid lines are positive contours ( $2 \cdot 10^{-4}$  for (a), interval is  $10^{-3}$  for (b)) and dashed lines are negative contours (interval is  $2 \cdot 10^{-2}$  for (a) and  $10^{-3}$  for (b)), the gray shading corresponds to the PV anomaly field.

it in Rossby number  $Ro$ ) such that :

$$\frac{\nabla^2 \psi_0 - \frac{f^2 \psi_0}{g'H}}{1 + \frac{f \psi_0}{g'H}} = q, \quad (2.11)$$

The corresponding geostrophic flow is :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_0 = \mathbf{k} \wedge \nabla \psi_0 & \zeta_0 = \nabla^2 \psi_0 \\ h_0 = \frac{f \psi_0}{g} & \delta_0 = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

All “slow” quantities are noted with the subscript 0.

To estimate the slow criterion  $\tilde{r}_0$ , the strain axes rotation related to the above  $\mathbf{u}_0$  field must be evaluated, according to (2.8) the corresponding Lagrangian accelerations are required, as  $\mathbf{u}_0$  is  $\mathcal{O}(Ro^0)$ , the accelerations are  $\mathcal{O}(Ro)$  :

$$\frac{D_0 \mathbf{u}_0}{Dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_0 \equiv -\nabla P - f \mathbf{k} \wedge \nabla \chi, \quad (2.13)$$

$P$  and  $\chi$  respectively represent the ageostrophic pressure and the divergent part of the slow motion ageostrophic velocity (Hua et al. 1998), they are obtained by a

$\mathcal{O}(Ro)$  expansion of Euler equations,

$$\begin{aligned}\nabla^2 P &= 2J(u_0, v_0), \\ (g'H\nabla^2 - f^2)\nabla^2 \chi &= \nabla \cdot (f\zeta_0 \mathbf{u}_0).\end{aligned}\tag{2.14}$$

From  $\frac{D_0 \mathbf{u}_0}{Dt}$ , the rotation rate of the strain axes related to the velocity field  $\mathbf{u}_0$ ,  $2(D_0 \phi_0 / Dt)$ , can be evaluated. Using  $P$  and  $\chi$ , (2.8) gives for the slow variables,

$$2\frac{D_0 \phi_0}{Dt} = \frac{\sigma_{s0}(D_0 \sigma_{n0} / Dt) - \sigma_{n0}(D_0 \sigma_{s0} / Dt)}{\sigma_0^2},$$

$$\frac{D_0 \sigma_{n0}}{Dt} = \partial_{yy} P - \partial_{xx} P + 2f \partial_{xy} \chi \quad , \quad \frac{D_0 \sigma_{s0}}{Dt} = -2\partial_{xy} P + f(\partial_{yy} \chi - \partial_{xx} \chi).\tag{2.15}$$

Finally, from  $2(D_0 \phi_0 / Dt)$ ,  $\zeta_0$  and  $\sigma_0$ , the strain rate of the  $\mathbf{u}_0$  field, a slow quantity  $\tilde{r}_0$  that identifies the areas of filament ejection can be calculated as in (2.7) and (2.10).

$$\begin{aligned}r_0 &\equiv \frac{\zeta_0 + 2(D_0 \phi_0 / Dt)}{\sigma_0}, \\ \tilde{r}_0 &= \frac{\sigma_0^3}{f^3} (1 - |r_0|).\end{aligned}\tag{2.16}$$

### Filamentation diagnosed from the slow component

In experiment 2, the slow criterion  $\tilde{r}_0$  is calculated and shown in Fig.2.6(b). Both events of filaments ejection are well identified by areas where  $\tilde{r}_0 > 0$ , even for the secondary filaments modified by the IG waves.

Another check on the theory is based on the fact that in strain dominated regions ( $\tilde{r} > 0$ ), the exponential growth of  $|\nabla q|$  characterizing filamentation is associated with an alignment of PV gradient along a specific direction relative to the strain axes (Lapeyre et al. 1999). This preferential direction can be verified via the statistical study of PV gradient alignment for experiment 2. Therefore, two probability density functions (PDF) are calculated in strain dominated regions: the first one concerns the difference between the actual orientation of PV gradient relatively to the compressional axis associated with the slow velocity field  $\mathbf{u}_0$  and its theoretical value,  $-\arccos(r_0)$ , and the second one concerns the same difference but restricted to the two boxes of Fig. 2.4. As these PDF, plotted in Fig. 2.7, present an important peak around zero, there is a clear evidence for the alignment of PV gradient with the theoretical value in strain dominated regions both in the whole domain and in the two boxes corresponding to the second filaments shedding.

Fig. 2.6(b) and Fig. 2.7 show that the filtered criterion  $\tilde{r}_0$  based on the slow com-

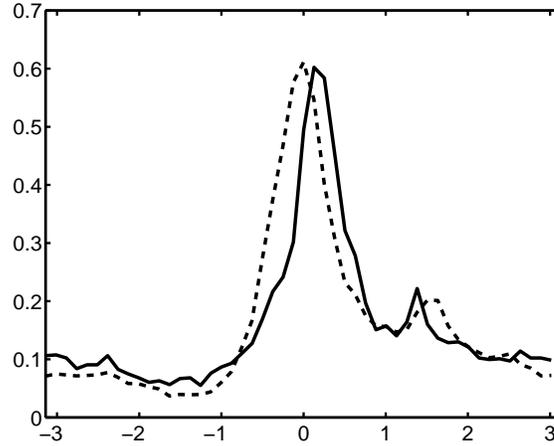


FIGURE 2.7 – *PDF of the difference between the actual orientation of PV gradient relatively to the compressional axis associated with the filtered velocity field  $\mathbf{u}_0$  and its theoretical value after a vortex rotation time scale in the whole domain (dashed line) and in boxes of Fig. 2.4 (solid line). PDF are calculated for experiment 2 where  $|r_0| < 1$  and  $|\nabla PV| > 10\%|\nabla PV|_{max}$ .*

ponent of the flow proves to be a good tool to study vortex erosion by filamentation even when PV is only inverted from geostrophic balance. Many more accurate PV inversion methods than from geostrophic balance exist (Vallis 1996, McIntyre et Norton 1999, Mohebalhojeh 2002). We have tested higher-order inversion, but since the theory of gradient alignment in strain coordinates is not exact (Lapeyre et al. 1999)– it neglects in particular the Lagrangian  $r$  variations – using more precise balance equations did not improve our results (not shown).

Therefore, PV gradients appear to be in equilibrium with geostrophic dynamics and although the process of filamentation is altered by the interaction between the vortex and IG waves, it can be diagnosed from the modified slow component of the flow which still captures the required information.

### 2.3.4 Summary

The purpose of this paper was to study the vortex filamentation process in SW dynamics. Numerical experiments show that this process can be modified by the presence of IG waves irreversibly. In presence of rapid motions, the ejection points of filament are shifted and the SW version of the  $r$  criterion (Lapeyre et al. 1999) cannot any longer locate them. The filamentation process must be analysed from the slow component of the flow which, despite its alteration by the presence of IG waves, still captures the required information and we have shown that the  $r$  criterion, estimated from the slow quantities, can be used to identify areas of PV

filament ejection. These findings are in agreement with the current paradigm that PV advection is dominated by the slow velocity field.

Results presented in this paper pertaining to the filamentation process and a slow  $r$  criterion have also been studied in other regimes (not shown) of different Rossby and Froude numbers (from 0.1 to 0.5) by modifying the intensity, shape and size of the vortex and the intensity and wave-length of inertia-gravity waves. They seem to be robust even if PV is only inverted from geostrophic balance.

Further work is needed to quantify the modification of the filamentation process by IG waves. We expect it to depend on the intensity and wave-length of the IG waves compared to the intensity and size of the vortex.

#### ACKNOWLEDGEMENTS

The calculations reported here were done on the NEC SX-5 of the IDRIS (Orsay, France) (project No. 031589). We thank Guillaume Lapeyre and Patrice Klein for their comments on the manuscript.

### Appendix A. Vortex alone experiment

The difference between the Okubo-Weiss and the  $r$  criterions is illustrated in experiment 1. For the  $r$  criterion, we consider the  $\tilde{r}$  quantity (2.10) and for consistency, a modified Okubo-Weiss quantity  $\lambda = \frac{\sigma^3}{f^3}(1 - |\zeta|/\sigma)$  is estimated. Both quantities should be positive in regions of filament ejection. After a vortex rotation time scale, Fig. 2.8(a) and 2.8(b) respectively show the  $\lambda$  and  $\tilde{r}$  fields, on both figures the gray shading corresponds to the PV anomaly field. They illustrate that the Okubo-Weiss criterion locates filamentation all around the vortex whereas the areas of filament ejection are better identified by the areas where  $\tilde{r}$  is positive. This difference is due to the fact that the Okubo-Weiss criterion neglects the rotation of the strain principal axes which is important on the vortex edge and maximal along the ellipse's main axes.

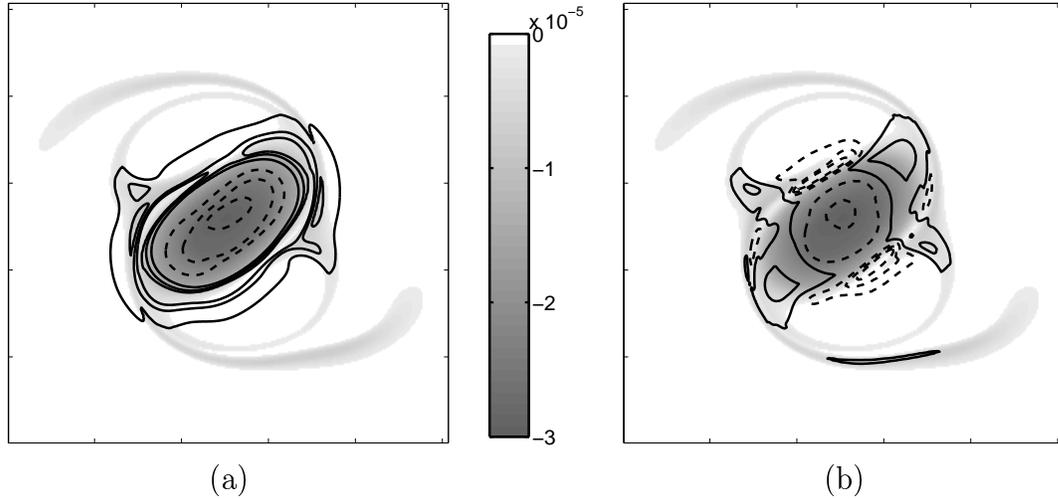


FIGURE 2.8 – (a)  $\lambda$  field (b)  $\tilde{r}$  field after a vortex rotation time scale for experiment 1. For both figures, solid lines are positive contours and dashed lines are negative contours (interval is  $10^{-3}$ ), the gray shading corresponds to the PV anomaly field.

## 2.4 Discussion

Rapprochons cette étude de l'étude bibliographique du chapitre 1 sur la distinction entre dynamiques lente et rapide et voyons quelles questions se posent alors. D'une part, dans notre étude, les ondes IG modifient légèrement le champ de VP en déplaçant les points d'éjection de filaments secondaires, est-il possible de mettre un nom sur la nature de l'interaction observée? D'autre part, notre revue bibliographique fait part de plusieurs méthodes plus ou moins précises d'extraction de la composante lente d'un écoulement quelconque, pourquoi n'avoir utilisé que la méthode assez grossière consistant à inverser la VP à partir de l'équilibre géostrophique?

### 2.4.1 Nature de l'interaction

Dans les expériences numériques réalisées jusqu'ici, l'interaction tourbillon / ondes IG se traduit par une légère modification du champ de VP dans le sens où les points d'éjection des filaments secondaires sont déplacés. A la lecture des articles présentés aux paragraphes 1.3.1 et 1.3.2 est-il possible de mettre un nom sur la nature de cette interaction?

Tout d'abord excluons l'interaction exposée au paragraphe 1.3.1 où le tourbillon interagit avec les ondes qu'il émet. En effet non seulement cette interaction est mi-

nime mais de plus elle est présente dans nos deux simulations, avec et sans ondes de Poincaré.

Intéressons nous alors aux interactions exposées au paragraphe 1.3.2, il s'agit donc de discuter de la nature dissipative ou non de l'interaction entre les ondes de Poincaré et le tourbillon.

Une interaction non dissipative due aux termes non-linéaires des équations shallow-water est bien sûr possible mais peut on la voir comme une résonance triadique (Bartello 1995) ou encore comme une modification, par les ondes IG, des équations gouvernant la dynamique lente (Bühler et McIntyre 1998)? L'interaction par résonance triadique semble peu probable. En effet, ce processus ne permet la modification d'un mode lent par un mode rapide que par résonance d'une triade impliquant 2 modes lents et un mode rapide, or pour satisfaire la condition de résonance selon laquelle la somme des fréquences des 3 modes impliqués doit être nulle, cette triade ne peut être résonante que dans les régions où  $Ro$  est de l'ordre de 1, rappelons que dans nos expériences  $Ro$  ne dépasse pas 0.25. Penchons nous alors sur l'explication non dissipative de Bühler et McIntyre (1998) selon laquelle à la fois l'étape pronostique et l'étape diagnostique d'un modèle gouvernant l'évolution de la dynamique lente sont modifiées par la présence d'ondes IG. Ce principe entraînant une modification irréversible de l'advection des contours de VP semble attrayant, malheureusement la rationalisation de ce processus par Bühler et McIntyre (1998) repose sur une séparation d'échelle entre modes lent et rapide, le premier devant être de grande échelle par rapport au second, ce qui n'est pas vérifié dans notre expérience où les ondes IG et le tourbillon ont sensiblement la même échelle spatiale. Toutefois le principe exposé par Bühler et McIntyre (1998) peut rester pertinent quand les ondes atteignent une échelle comparable à celle de la dynamique lente.

Examinons maintenant la possibilité d'une interaction de nature dissipative, comme nous l'avons vu dans le paragraphe 1.3.2, elle peut être de deux types : soit il s'agit de la dissipation des ondes IG, par déferlement par exemple, qui entraîne une modification du champ de VP (McIntyre et Norton 1990, Bühler 2000), soit il s'agit de la dissipation du mode lent qui est modifiée en présence d'ondes IG (Klein et al. 2003).

D'un côté, les interactions non linéaires entre les ondes IG présentes dans le domaine sont susceptibles d'engendrer des ondes de forte amplitude amenant leur déferlement provoquant ainsi une modification du champ de VP. Une expérience numérique supplémentaire où seules les ondes de Poincaré sont initialisées a été réalisée afin de voir

si ce phénomène est significatif dans notre cas. Il s'avère que l'anomalie de VP créée ne dépasse pas quelques millièmes de  $f$ , ces quelques millièmes peuvent provenir d'erreurs numériques ou du déferlement des ondes IG dans des zones très localisées comme le laisse penser l'examen du champ de hauteur de la couche. Même si la VP créée dans cette expérience semble faible, il est probable que le déferlement des ondes ait des conséquences plus importantes en présence d'un tourbillon dans le sens où il peut non pas créer de la VP mais modifier le transport d'une anomalie de VP présente par ailleurs.

D'un autre côté, une interaction de nature dissipative dans le sens de Klein et al. (2003) est-elle envisageable? Rappelons que pour les expériences réalisées jusqu'ici, la diffusion est paramétrisée par un biharmonique dont le coefficient dépend du champ de vitesse (cf. annexe B). Même si ce coefficient ne dépend pas uniquement de l'énergie cinétique des ondes IG comme dans Klein et al. (2003), celles-ci tendent aussi à le modifier rendant possible une interaction tourbillon / ondes IG due à la nature du terme de dissipation.

Enfin, cette discussion montre que plusieurs types d'interaction mode lent / mode rapide sont envisageables pour expliquer les différences de filamentation observées entre les deux simulations. Quels aspects des simulations réalisées jusqu'ici font que cette discussion quant à la nature de l'interaction observée soit si éparse? Dans un premier temps, les ondes de Poincaré initialisées ont non seulement une structure complexe, bidimensionnelle, avec deux ondes de longueurs d'onde différentes superposées, mais de plus elles ne sont que très faiblement amorties par la diffusion biharmonique codée dans le modèle, d'où une prévision de déferlement des ondes difficile. Par ailleurs, la forme du coefficient de diffusion adoptée dans nos expériences ne permet pas de distinguer une interaction de nature dissipative comme celle décrite par Klein et al. (2003) d'une interaction non dissipative due aux termes non-linéaires. Enfin la comparaison des deux simulations aurait été plus rigoureuse si dans chacune d'entre elles l'écoulement initial lié au tourbillon avait été strictement le même. Or superposer initialement un tourbillon et des ondes IG impose un choix déjà discuté dans la rubrique "Initialization and experiments" du paragraphe 2.3.2 : il faut choisir entre le même champ de VP total ou les mêmes champs  $(\mathbf{u}, h)$  liés au tourbillon. La VP étant une grandeur de dynamique lente nous avons opté pour un même champ de VP total dans chacune des expériences, par conséquent les écoulements géostrophiques d'initialisation du tourbillon sont légèrement différents.

### 2.4.2 Extraction d'un mode lent quasi-géostrophique

Dans un modèle shallow-water, l'évaluation du critère  $r$  permettant de localiser les zones d'éjection de filaments de vorticité potentielle est basée sur l'extraction de la partie lente de l'écoulement. Comme les parties lente et rapide ne sont pas exactement découplées, cette extraction ne peut ˆetre qu'approximative. Est-ce alors légitime de penser que le critère sera d'autant plus performant que la méthode d'extraction de la partie lente sera précise? Nous nous proposons ici d'isoler le mode lent par inversion de la VP non plus à partir de l'équilibre géostrophique mais à partir d'equations diagnostiques en  $\mathcal{O}(Ro)$ . Rappelons que le calcul de  $r$  nécessite les accélérations liées au mode lent extrait, ces accélérations impliqueront alors des termes d'ordre  $\mathcal{O}(Ro^2)$ , on note  $r_1$  le critère issu d'une telle inversion, le calcul de  $r_1$  est d etaill e en annexe C. Il est test e sur la même expérience numérique, au même instant, que le critère  $r_0$  dans le paragraphe 2.3.

#### Pourquoi $r_1$ n'est-il pas plus précis que $r_0$ ?

La comparaison de ces 2 critères est basée sur la PDF de l'écart entre les orientations théorique et réelle du gradient de VP dans les zones où la déformation l'emporte sur la rotation effective ( $|r_0|, |r_1| < 1$ ), zones correspondant aux zones d'éjection de filaments. Pour chacun des critères, une première PDF est calculée sur l'ensemble des zones d'éjection et une seconde sur les zones d'éjection secondaire. Le critère est d'autant plus précis que le pic autour de zéro que présente la PDF est important. La figure 2.9 montre que l'orientation théorique du gradient de VP donnée par le critère  $r_1$  est aussi précise (voire très légèrement plus précise) que celle donnée par  $r_0$ , ceci aussi bien dans l'ensemble des zones d'éjection qu'uniquement dans les zones d'éjection secondaire. La légère amélioration que laisse entrevoir la figure 2.9 (les courbes rouges sont légèrement plus pointues que les courbes noires) n'est en fait pas robuste d'un pas de temps à un autre, d'une expérience à une autre.

En fait l'étude statistique de l'alignement du gradient de VP n'implique pas seulement la précision de la méthode de filtrage des ondes de gravité mais également les hypothèses faites lors de la théorie d'alignement des gradients. Dans le but de tester la précision de la méthode de filtrage une expérience supplémentaire, notée 1bis, a été réalisée avec un tourbillon seul. Pour cette expérience, les champs initiaux de vitesse et de fluctuations de hauteur sont obtenus par inversion du même profil de VP que l'expérience 1, non plus à partir de l'équilibre géostrophique, mais avec une précision d'ordre  $\mathcal{O}(Ro)$ , ie à partir des equations diagnostiques (C.10) et (C.11). Puis pour chacune des expériences 1 et 1bis, la composante lente de l'écoulement est calculée par inversion de la VP soit à partir de l'équilibre géostrophique pour

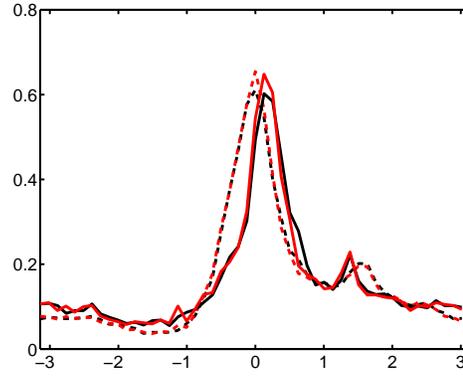


FIGURE 2.9 – PDF de l'écart entre les orientations théorique et réelle du gradient de VP, courbes rouges : selon critère  $r_1$ , courbes noires : selon critère  $r_0$ , traits pointillés : ensemble des zones d'éjection de filaments, trait plein : zones d'éjection secondaire de filaments. Les PDF sont calculées pour l'expérience impliquant le tourbillon et des ondes de Poincaré, après une période de retournement du tourbillon, dans les zones où  $|r_1|, |r_0| < 1$  et  $|\nabla PV|$  dépasse  $10\%|\nabla PV|_{max}$

l'expérience 1 soit avec une précision d'ordre  $\mathcal{O}(Ro)$  pour l'expérience 1bis. Par conséquent, la composante rapide de l'écoulement, pour chaque expérience, est la différence entre l'écoulement réel issu du modèle shallow-water et la composante lente obtenue par inversion de la VP. La méthode d'inversion utilisée sera d'autant plus précise que la composante rapide est faible. La figure 2.10 présente, pour chacune des expériences 1 et 1bis, l'évolution temporelle des amplitudes, moyennées sur le domaine, de la vitesse et de la fluctuation de hauteur de la composante rapide. Cette figure montre que la composante lente est bien mieux décrite par le jeu d'équations diagnostiques de précision  $\mathcal{O}(Ro)$  (équations (C.10) et (C.11)) que par la géostrophie. Ceci suggère que le fait que  $r_1$  ne soit pas plus précis que  $r_0$  n'est pas dû à un manque de précision de la méthode de filtrage d'ordre  $\mathcal{O}(Ro)$ .

La non-amélioration du critère  $r_0$  par le critère  $r_1$  est donc due aux hypothèses faites lors de la théorie d'alignement des gradients de VP. En effet, cette théorie n'est pas exacte, elle néglige notamment les variations de  $r$  bien qu'elles comportent des termes en  $\mathcal{O}(Ro)$ . Il n'est donc pas cohérent de prendre d'un côté en compte des termes en  $\mathcal{O}(Ro^2)$  dans les accélérations Lagrangiennes et de négliger d'un autre côté des termes en  $\mathcal{O}(Ro)$  dans les variations de  $r$ . Nous en déduisons que la localisation des zones d'éjection de filaments est plus contrainte par les hypothèses intrinsèques à la théorie d'alignement des gradients que par la précision de la composante lente de l'écoulement.

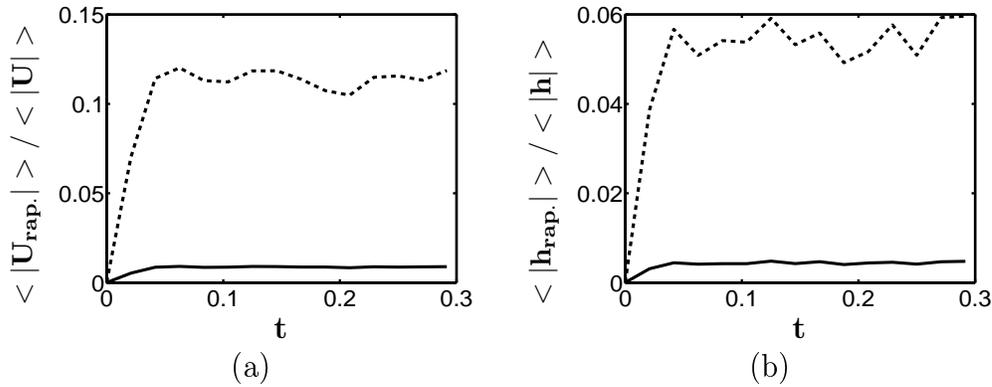


FIGURE 2.10 – Evolution de la composante rapide (a) de la vitesse et (b) de la fluctuation de hauteur, moyennée sur le domaine. Traits pointillés : expérience 1 où la VP est inversée à partir de l'équilibre géostrophique. Trait plein : expérience 1bis où la VP est inversée avec une précision d'ordre  $\mathcal{O}(Ro)$ . La moyenne de la composante rapide de la vitesse (resp. de la fluctuation de hauteur) est adimensionnalisée par la moyenne de la vitesse (resp. de la fluctuation de hauteur) totale et le temps est adimensionnalisé par le temps de retournement du tourbillon.

## 2.5 Conclusion

Le but de ce chapitre a essentiellement été d'étudier, dans un modèle shallow-water, le processus de filamentation des tourbillons et d'examiner comment les ondes IG en affectent l'étude diagnostique. Les expériences numériques ont montré que ce processus pouvait être modifié de manière irréversible par les ondes IG, les points d'éjection de filaments sont déplacés et la version shallow-water du critère  $r$  (Lapeyre et al. 1999) n'est plus à même de les localiser. Le processus de filamentation doit être analysé à partir de la composante lente de l'écoulement qui, malgré sa modification par les ondes IG, contient l'information nécessaire. Nous avons montré que le critère  $r$ , estimé à partir de cette composante, pouvait alors être utilisé pour localiser les zones d'éjection de filaments.

La configuration utilisée pour ces simulations ne nous permet pas d'étudier plus largement l'interaction dynamique tourbillonnaire / ondes IG observée, notamment d'en déterminer sa nature. Le chapitre suivant est lui consacré à cette interaction. Dans une configuration différente où les mécanismes d'interaction possibles sont moins nombreux, les simulations visent à mettre en évidence une modification, par les ondes IG, des processus d'interaction entre tourbillons engendrant des états d'équilibre différents en présence ou non d'ondes.

## Chapitre 3

# Influence des ondes d'inertie-gravité sur la dynamique des tripôles

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier l'influence des ondes IG sur la dynamique des tripôles. Pourquoi considérer des tripôles et ne pas continuer à étudier la filamentation de tourbillons monopôles elliptiques? En fait l'étude du chapitre précédent a montré que même si la dynamique de filamentation pouvait être légèrement modifiée par la présence d'ondes IG, la structure globale du tourbillon restait inchangée. En revanche, si les ondes IG doivent influencer la dynamique tourbillonnaire, les résultats de Farge et Sadourny (1989) laissent à penser que la dynamique d'interaction entre tourbillons, moins robuste que la dynamique d'un tourbillon isolé, devrait être affectée de manière plus spectaculaire. En effet, les cascades du mode lent, gérées par les interactions entre tourbillons, sont d'après Farge et Sadourny (1989) modifiées par les ondes IG, cette modification devrait donc se traduire dans l'espace physique par une modification des processus d'interaction entre tourbillons. Nous considérons alors les tripôles où un tourbillon principal (le noyau) interagit avec deux tourbillons plus faibles (les satellites) comme exemples de tourbillons interagissant entre eux. Ce type de structure n'a pas seulement un intérêt académique, il est observé aussi bien dans l'atmosphère que dans l'océan. En effet d'un côté Hsu et Plumb (2000) observent, au niveau de la tropopause, la formation d'une telle structure à partir de la distorsion de l'anticyclone tibétain de mousson. D'un autre côté, la figure 3.1 montre le tripôle observé en 1990 par Pingree et Le Cann (1992) dans le Golfe de Gascogne, le tripôle se détache ici du courant de pente lors de son changement de direction. Ce type de structures multipolaires a déjà été étudié à la fois numériquement et à partir d'expériences en cuve tournante. Dans

les deux cas le tripôle émerge par instabilité barotrope d'un vortex axisymétrique avec une couronne de vorticité de signe opposé, puis la stabilité de ce tripôle dépend de l'influence des termes non linéaires.

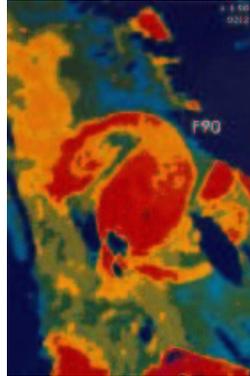


FIGURE 3.1 – Image infrarouge (4 Janvier 1990) illustrant une structure tripolaire dans le Golfe de Gascogne au niveau du Cap Ferret, figure issue de Pingree et Le Cann (1992).

### 3.1.1 Etudes en laboratoire

Van Heijst et al. (1991) furent les premiers à mettre en évidence la formation d'un tripôle à partir d'expériences en laboratoire, les différentes étapes de cette formation sont repr sent es en figure 3.2. Leur tourbillon initial a un cœur cyclonique (vorticité relative positive) et une couronne anticyclonique (vorticité relative négative), lors de la formation du tripôle, la vorticité est redistribu e telle que la vorticité négative se retrouve dans les satellites et la vorticité positive dans le noyau. L'étude des propriétés du tripôle montre que cette structure est caract ris e par une distribution continue de vorticité. Toutefois sa rotation d'ensemble est bien estim e par un modèle de tripôle constitué de trois points vortex.

Van Heijst et al. (1991) mettent également en évidence la déstabilisation d'un tripôle: le noyau cyclonique se brise en deux et forme avec les deux satellites deux dipôles. La figure 3.3 illustre la formation de tels dipôles. La différence entre cette expérience et l'expérience précédente où le tripôle était stable est li e à un "rapport de force" noyau / satellites diff rent, les satellites sont plus intenses en amplitude de vorticité relative par rapport au noyau dans le cas d'un tripôle instable que dans le cas d'un tripôle stable.

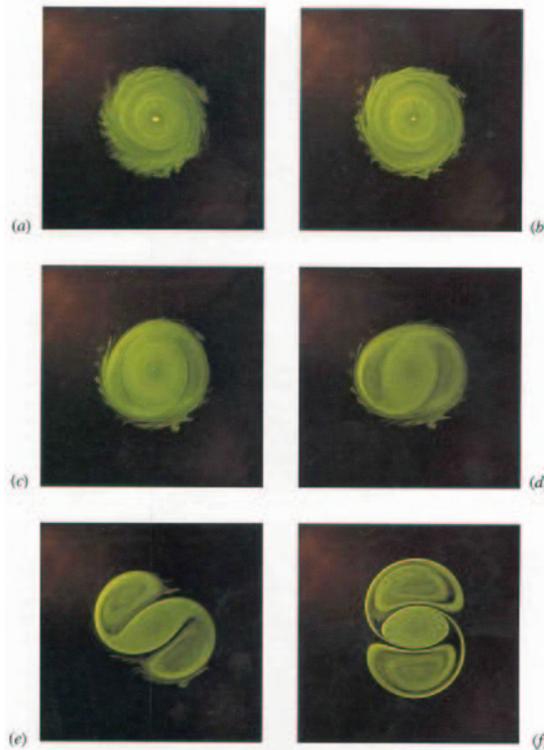


FIGURE 3.2 – Vues de dessus illustrant la formation d'un tripôle à partir d'un tourbillon cyclonique instable. (a)  $t = 1.25T$ , (b)  $2.34T$ , (c)  $4.2T$ , (d)  $5.2T$ , (e)  $5.9T$  et (f)  $7.0T$ , avec  $T = 8.4s$  la période de rotation de la cuve tournante, la hauteur d'eau moyenne est de  $18.2cm$  et le diamètre du tourbillon initial est de  $20cm$ . Cette figure est issue de Van Heijst et al.(1991)

Notons par ailleurs que dans des régimes où le nombre de Rossby est grand (de l'ordre de 1), Kloosterziel et Van Heijst (1991) remarquent dans leurs expériences qu'alors qu'un cyclone se stabilise souvent en tripôle, un anticyclone se scinde rapidement en deux dipôles sans passer par la phase tripôle. Kloosterziel et Van Heijst (1991) estiment que l'instabilité centrifuge dans un référentiel tournant est à l'origine de cette dissymétrie anticyclone/cyclone. En effet selon le critère de Rayleigh étendu à un tel référentiel, le tourbillon sera stable si le produit de la vorticité absolue par la vitesse absolue est partout positif, la dépendance de ce critère en la vitesse de rotation du référentiel fait que cyclones et anticyclones se comportent différemment. Il en ressort que le nombre de Rossby critique pour que l'instabilité centrifuge se développe est plus faible pour un anticyclone que pour un cyclone. Ce type d'asymétrie cyclone/anticyclone n'est pertinente que pour des nombres de Rossby élevés, ce qui ne sera pas le cas de nos simulations numériques.

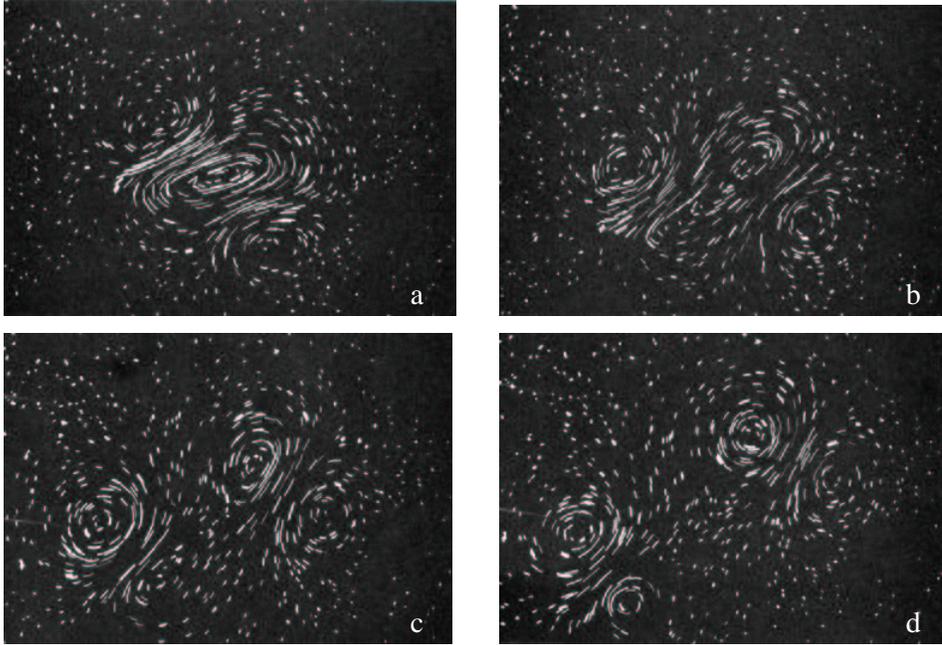


FIGURE 3.3 – Photographies des lignes de courant illustrant la formation de dipôles à partir d'un tripôle de noyau cyclonique instable. (a) $t = 2.7T$ , (b) $3.3T$  et (c) $3.9T$  et (d) $4.5T$  avec  $T = 6.4s$  la période de rotation de la cuve tournante, la hauteur d'eau moyenne est de  $17.6cm$  et le diamètre du tourbillon initial est de  $20cm$ . Cette figure est issue de Van Heijst et al.(1991)

### 3.1.2 Etudes numériques

Dans un écoulement bidimensionnel barotrope incompressible, Carton et Legras (1994) étudient la formation de tripôles à partir de monopôles dont la vorticité de la couronne est de signe opposé à celle du noyau. Le profil initial de vorticité de leurs simulations est le suivant :

$$\begin{cases} \zeta(z) = \zeta_0 \left(1 - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{z}{z_0}\right)^\alpha\right) \exp\left(-\left(\frac{z}{z_0}\right)^\alpha\right) \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad (3.1)$$

La stabilité de ce profil dépend du paramètre  $\alpha$ . Au delà d'une valeur critique de  $\alpha$ , le monopôle est linéairement instable, cette valeur critique est estimée numériquement mais est bien approximée théoriquement quand le profil (3.1) est simplifié en un patch de vorticité entouré d'une couronne uniforme. Après une croissance linéaire initiale, la perturbation est amplifiée non-linéairement, au cours de cette phase, le noyau s'allonge, deux satellites se forment par enroulement de la vorticité issue de la couronne autour des deux centres formés lors de l'instabilité linéaire. Les satellites exercent alors une déformation sur le noyau qui fait qu'il existe une seconde

valeur critique de  $\alpha$  au delà de laquelle les satellites sont suffisamment intenses pour briser le noyau en deux et former deux dipôles qui s'éloignent l'un de l'autre. Cette deuxième valeur critique de  $\alpha$  est bien approchée analytiquement par un modèle de tripôle simplifié où le noyau est représenté par une ellipse uniforme de vorticité et les satellites par deux points vortex.

Klein et al. (2003)  tudient l'influence des ondes quasi-inertielles (NIO) sur la transition tripôle / dipôles de la structure initialement définie par (3.1). Leur modèle est constitué de deux équations : la première est celle de la dynamique quasi-géostrophique et la seconde modélise l'évolution des NIO dans un écoulement géostrophique (Young et Ben Jelloul 1997), le couplage se fait via le coefficient de diffusion de l'équation quasi-géostrophique, proportionnel à l'énergie cinétique des NIO lorsque est prise en compte leur rétroaction sur l'écoulement lent et homogène sinon. Or les NIO sont pi g es par les anticyclones et expuls es par les cyclones, d'où une diffusion quasi-géostrophique plus forte au niveau des anticyclones que des cyclones en présence de NIO. Les pôles anticycloniques (resp. cycloniques) d'un tripôle deviennent alors plus faibles (resp. forts) quand la rétroaction des NIO est prise en compte modifiant ainsi le "rapport de force" entre le noyau et ses satellites qui tendent à le déformer. Les NIO ont alors tendance à déstabiliser les tripôles dont le noyau est anticyclonique et à stabiliser ceux dont le noyau est cyclonique. La figure 3.4, issue de Klein et al. (2003), illustre cet effet. Cette figure montre également que, pour une diffusion homogène, la valeur critique de  $\alpha$  de bifurcation tripôle / dipôles est une fonction croissante de la diffusion.

L'objectif de notre étude est d'évaluer l'impact d'ondes IG sur la transition tripôle / dipôles d'une telle structure dans un modèle aux équations primitives, sans paramétrisation spécifique aux ondes IG.

## 3.2 Configuration des simulations numériques

Dans un domaine double périodique de largeur zonale  $L_x$  et de longueur méridienne  $L_y$ , nous garderons une configuration gravité réduite 1 couche 1/2 sur le plan  $f$  du code MICOM décrit en annexe B. On rappelle ici, en présence de dissipation et de forçage, la forme générale des équations d'évolution de la vitesse  $\mathbf{u} = (u, v)$  et

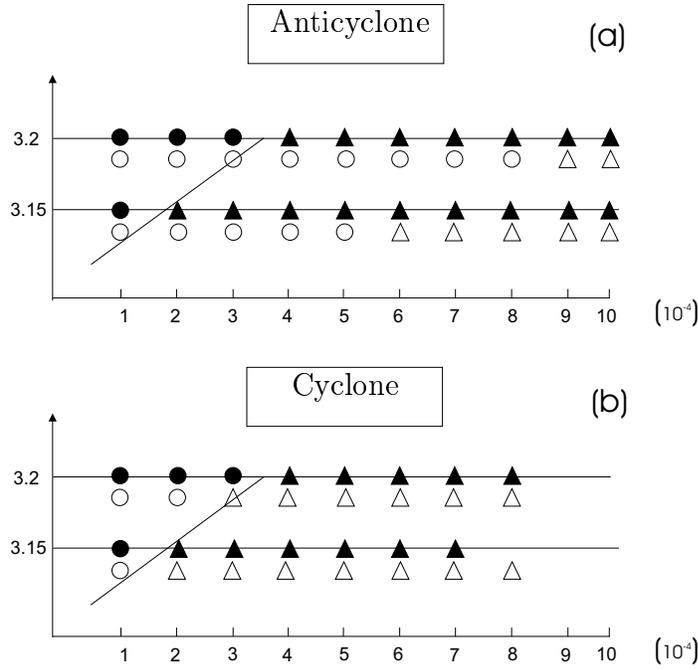


FIGURE 3.4 – Carte des états stationnaires dans le plan “ $\alpha$ - $K$ ” où le noyau est anticyclonique (a) cyclonique (b). Les ronds représentent les dipôles et les triangles les tripôles. Les symboles noirs sont pour les simulations à diffusion homogène  $K$  et les symboles blancs sont pour une diffusion hétérogène spatialement de moyenne égale à  $K$ . Cette figure est issue de Klein et. al (2003)

de la fluctuation de hauteur  $h$  résolues par le modèle :

$$\begin{cases} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + f\mathbf{k} \wedge \mathbf{u} = -g'\nabla h + R(\mathbf{u}_{ref} - \mathbf{u}) + \partial_x (\nu\partial_x^3 \mathbf{u}) + \partial_y (\nu\partial_y^3 \mathbf{u}) \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot ((H + h)\mathbf{u}) = R(h_{ref} - h) \end{cases} \quad (3.2)$$

Au cours de cette étude, trois types de simulations sont réalisés :

- Dans les simulations notées A, les tourbillons initialisés évoluent sans source externe d’ondes IG.
- Dans les simulations notées B, ils évoluent en présence d’une onde IG monochromatique forcée.
- Dans les simulations notées C, ils évoluent en présence d’une onde purement inertielle initialisée.

Des simulations A, B et C initialisées avec le même champ de VP seront comparées entre elles.

### 3.2.1 Terme de diffusion

On rappelle que dans MICOM, de manière générale, le coefficient de viscosité  $\nu$  s'écrit :

$$\nu = \nu_0 + \max \left( C_{Quick} |\mathbf{u}| \Delta x^3, C_{Smag} \sigma \Delta x^4 \right) \quad (3.3)$$

où  $\sigma$  est le taux de déformation. Dans le chapitre précédent, sa partie homogène  $\nu_0$  a été prise nulle alors que les coefficients  $C_{Quick}$  et  $C_{Smag}$  ont été pris strictement positifs. Dans ce chapitre, afin d'éviter toute interaction tourbillon/ondes IG due à la modification de  $\nu$  en présence d'ondes, nous adopterons un coefficient de viscosité homogène constant :  $\nu_0 > 0$  et  $C_{Quick} = C_{Smag} = 0$ .

### 3.2.2 Terme de rappel

Dans les simulations A et C aucun forçage n'est réalisé, le terme de rappel  $R$  est donc uniformément nul. Pour les simulations B, le domaine est divisé en trois zones de même largeur zonale  $L_x$  et de même longueur méridienne  $l$  : la zone Nord correspond à la zone de forçage de l'onde IG, la zone Sud correspond à une zone éponge et la zone intermédiaire où l'écoulement se fait librement correspond à la zone tourbillonnaire.

#### Coefficient de rappel pour les simulations B

Pour les simulations B où une onde IG est forcée, le coefficient  $R$  de rappel, correspondant à l'inverse d'un temps, est nul dans la zone intermédiaire et strictement positif dans les zones éponge et de forçage. Il est choisi indépendant de la longitude  $x$ , sa forme est illustrée en figure 3.5.

#### Champs de rappel pour les simulations B

Dans la zone éponge, les champs  $\mathbf{u}_{ref}$  et  $h_{ref}$  vers lesquels  $\mathbf{u}$  et  $h$  sont rappelés sont nuls. Dans la zone de forçage, ces champs correspondent à un mode libre IG des équations shallow-water linéarisées, indépendant de la longitude  $x$  et se propageant du Nord vers le Sud, ils sont donc solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u - f v = 0 \\ \partial_t v + f u = -g' \partial_y h \\ \partial_t h + H \partial_y v = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Deux paramètres les caractérisent : leur amplitude  $h_0$  et leur longueur d'onde  $\lambda$ , leur nombre d'onde est noté  $k = 2\pi/\lambda$ , dans la zone de forçage, les vitesses  $u$ ,  $v$  et la fluctuation de hauteur  $h$  seront alors rappelées vers les expressions analytiques

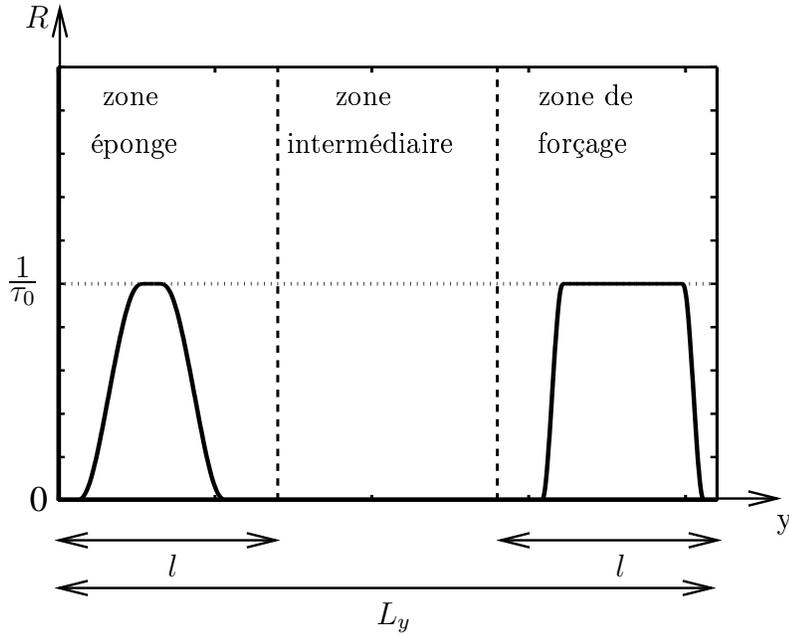


FIGURE 3.5 – Coefficient  $R$  de rappel pour les simulations  $B$  où une onde IG est forcée.

suivantes :

$$\begin{cases} h_{ref} = h_0 \cos(ky + \omega t) \\ u_{ref} = -\frac{fh_0}{kH} \sin(ky + \omega t) \\ v_{ref} = -\frac{\omega h_0}{kH} \cos(ky + \omega t) \end{cases} \quad (3.5)$$

où la fréquence  $\omega$  de l'onde est liée à son nombre d'onde  $k$  par la relation de dispersion  $\omega^2 = f^2 + g'Hk^2$ , sa période est notée  $T = 2\pi/\omega$ .

### Exemple d'onde IG forcée

Nous illustrons ici la méthode de forçage d'une onde IG en réalisant une simulation numérique où seule une onde est forcée, les champs  $\mathbf{u}$  et  $h$  sont initialisés à zéro. La résolution est de  $200 \times 1050$  pour un pas de grille  $\Delta x$  de  $2km$  et un pas de temps de  $250s$ . Les valeurs des différents paramètres sont les même que pour les autres simulations de ce chapitre, elles sont récapitulées dans le tableau 3.1.

Dans cet exemple une onde de longueur d'onde  $500km$  (ce qui lui confère une période  $T$  de  $23h$ ) et d'amplitude  $25m$  est forcée. Le profil méridien des champs  $(\mathbf{u}, h)$  sur tout le domaine est représenté en figure 3.6 illustrant notamment le déphasage existant entre  $u$ ,  $v$  et  $h$ .

Les termes de rappel introduits dans les équations du mouvement (3.2) font que

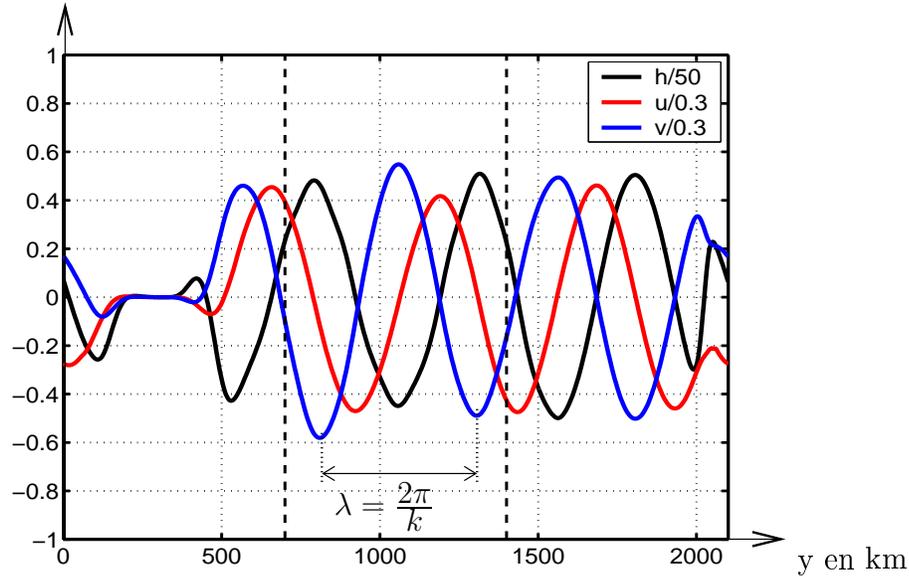


FIGURE 3.6 – Représentation des vitesses  $u$ ,  $v$  et de la fluctuation de hauteur  $h$  dans une simulation où seule une onde IG est forcée, sur cet exemple,  $h_0 = 25\text{m}$  et  $\lambda = 500\text{km}$ ,  $u$  et  $v$  sont adimensionnalisées par  $0.3\text{ms}^{-1}$  et  $h$  par  $50\text{m}$ .

de la VP est créée dans les zones éponge et de forçage. A cette VP est associé un écoulement lent qui ne doit pas “empiéter” sur la zone intermédiaire pour ne pas modifier la dynamique tourbillonnaire. C’est pourquoi nous estimons ici l’écoulement lent engendré par le forçage en inversant la VP qu’il crée à partir de l’équilibre géostrophique à un instant où l’anomalie de VP est particulièrement forte (maximum de l’ordre de  $2.10^{-6}\text{s}^{-1}$ ). Le forçage étant unidimensionnel, l’écoulement géostrophique créé l’est aussi, la figure 3.7 représente alors les profils méridiens de la vitesse zonale et de la fluctuation de hauteur géostrophiques  $u_g$  et  $h_g$  (le forçage étant indépendant de la longitude  $x$ , il en est de même de la fonction de courant géostrophique d’où une vitesse méridienne géostrophique  $v_g$  nulle). On remarque sur cette figure qu’effectivement un écoulement géostrophique apparaît dans les zones éponge et de forçage mais qu’il “n’empiète pas” sur la zone intermédiaire où se tiendra la dynamique tourbillonnaire.

### 3.2.3 Initialisation et forçage

Toutes les simulations sont réalisées dans un domaine rectangulaire de résolution  $200 \times 1050$ , les valeurs des différents paramètres sont présentées dans le tableau 3.1,

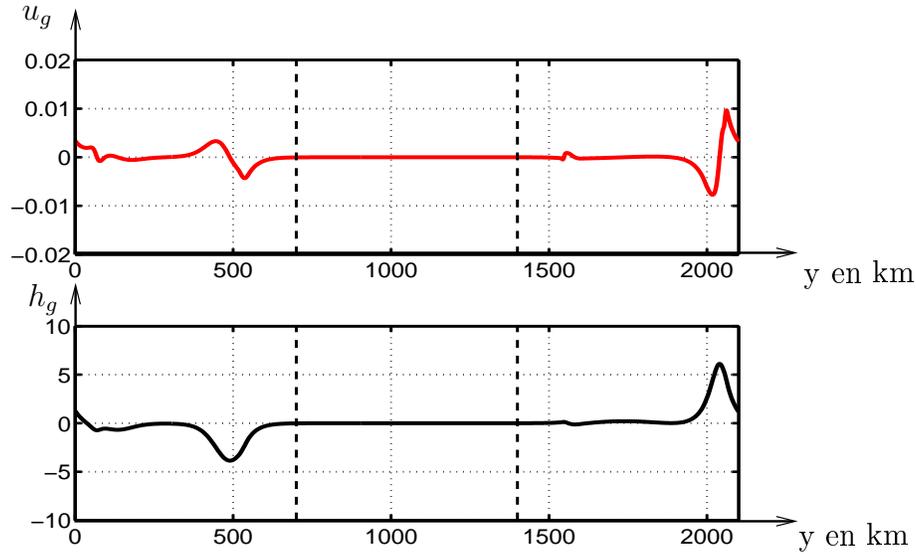


FIGURE 3.7 – Vitesse et fluctuation de hauteur géostrophiques liées à la VP créée par le forçage d’une onde IG de longueur d’onde  $\lambda = 500\text{km}$  et d’amplitude  $h_0 = 25\text{m}$  après 20 jours de forçage. La vitesse  $u_g$  est en  $\text{m.s}^{-1}$  et la hauteur  $h_g$  en m.

le pas de grille de  $2\text{km}$  résout bien le rayon de déformation de  $32\text{km}$ . De plus, pour les simulations de type B, le temps de rappel  $\tau_0$  dans les zones éponge et de forçage est égal à  $3h$ .

Dans chaque simulation, un tourbillon axisymétrique géostrophique est initialisé au centre du domaine, son profil d’anomalie de VP,  $q = \frac{\zeta - fh/H}{1 + h/H}$ , correspond au profil de vorticité relative de Carton et Legras (1994) :

$$\begin{cases} q(z) = q_0 \left(1 - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{z}{z_0}\right)^\alpha\right) \exp\left(-\left(\frac{z}{z_0}\right)^\alpha\right) \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z_0 = 50\text{km} \simeq 1.5R, \quad q_0 = \pm 1.4 \times 10^{-5} \text{s}^{-1} = \pm f/5 \end{cases} \quad (3.6)$$

Comme dans le cas bidimensionnel, deux valeurs critiques de  $\alpha$  existent, au delà de la première le tourbillon axisymétrique est instable, il se forme alors un tripôle, puis au delà de la deuxième ce tripôle est instable, le noyau se brise en deux pour former avec les deux satellites deux dipôles. Pour chacun des tourbillons nous ferons varier  $\alpha$  autour de sa deuxième valeur critique c’est à dire autour de la bifurcation tripôle / dipôles soit pour le cyclone ( $q_0 = f/5$ ) autour de 3.24 et pour l’anticyclone ( $q_0 = -f/5$ ) autour de 3.73. Notons que ces valeurs de  $\alpha$  sont liées au coefficient de diffusion choisi puisque, comme dans le cadre quasi-géostrophique de Klein et al.

(2003), les valeurs critiques de  $\alpha$  en sont des fonctions croissantes. Quelques simulations supplémentaires réalisées dans le cas anticyclonique avec des valeurs différentes de  $\nu_0$  ont montré cette dépendance dans le cadre shallow-water, cette valeur critique de  $\alpha$  passe en effet de 3.73 pour  $\nu_0 = 4.10^6 m^4 s^{-1}$  à 3.745 puis 3.78 pour  $\nu_0 = 8.10^6$  puis  $1.6.10^5 m^4 s^{-1}$ .

Dans les simulations de type C, à l'écoulement géostrophique initial est ajoutée une onde purement inertielle notée "onde C". L'onde inertielle est un cas limite des modes libres IG des équations shallow-water linéarisées dans le sens où elle est spatialement homogène, ce qui correspond à une onde IG de longueur d'onde infinie (ou de nombre d'onde nul). Elle est donc solution de :

$$\begin{cases} \partial_t u - f v = 0 \\ \partial_t v + f u = 0 \\ \partial_t h = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} u = u_0 \cos(ft) \\ v = -u_0 \sin(ft) \\ h = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Pour initialiser une telle onde, il suffit donc d'initialiser une vitesse uniforme et une dénivellation de hauteur nulle, ce qui ne modifie pas le profil d'anomalie de VP. Dans les simulations de type C, au champ de vitesse géostrophique initial est alors ajoutée une vitesse zonale  $u$  uniforme d'intensité  $0.15 m.s^{-1}$ , ce qui correspond à l'échelle de vitesse du tourbillon.

Dans les simulations de type B, une des deux ondes IG (3.5) suivantes est forcée. L'onde B1 a une période de 12h (soit une longueur d'onde  $\lambda$  de  $110 km$ ) et une amplitude de  $25 m$ , ce qui lui confère une énergie cinétique moyenne environ 10 fois inférieure à celle du tourbillon. L'onde B2 a une période de 23h (soit  $\lambda = 500 km$ ) et une amplitude de  $25 m$ , ce qui lui confère une énergie cinétique moyenne du même ordre de grandeur que celle du tourbillon et de l'onde C.

Notons que pour une initialisation (3.6) où  $q_0 = f/5$  (resp.  $-f/5$ ) l'on parle de cyclone (resp. anticyclone) en cohérence avec le sens de rotation de la structure, le noyau est alors cyclonique (resp. anticyclonique) et ses satellites anticycloniques (resp. cycloniques).

Les caractéristiques des simulations A, B1, B2 et C sont récapitulées dans le tableau 3.2. Dans toutes les simulations, les nombres de Rossby ( $Ro = U/fL$ ) et Froude ( $Fr = U/c_0$ ) sont de l'ordre de 0.07 et le nombre de Reynolds ( $Re = UL^3/\nu_0$ ) de l'ordre de  $10^6$ . Les échelles de vitesse et de longueur  $U$  et  $L$  utilisées pour le calcul

de ces nombres sans dimension correspondent au maximum de vitesse du tourbillon initial ( $U = 0.15m.s^{-1}$ ) et au rayon correspondant à ce maximum ( $L = 30km$ ).

$f$	$H$	$g'$	$\nu_0$	$C_{Quick}$	$C_{Smag}$
$7.10^{-5}s^{-1}$	$1000m$	$5.10^{-3}m.s^{-2}$	$4.10^6m^4s^{-1}$	0	0

$c_0$	$R_d$	$L_x$	$L_y$
$2.2m.s^{-1}$	$31.6km$	$200km$	$2100km$

TABLEAU 3.1 – Valeurs des différents paramètres des simulations A, B et C

Simulation	Initialisation	Forçage	Période T de l'onde ( $\lambda$ )	$\langle Ec \rangle$ de l'onde
<b>A</b>	tourbillon seul	aucun	aucune onde	0
<b>B1</b>	tourbillon seul	onde d'inertie-gravité	12h (110km)	$10^{-3}m^2s^{-2}$
<b>B2</b>	tourbillon seul	onde d'inertie-gravité	23h (500km)	$10^{-2}m^2s^{-2}$
<b>C</b>	tourbillon et et onde inertielle	aucun	$2\pi/f = 25h$ ( $\infty$ )	$10^{-2}m^2s^{-2}$

TABLEAU 3.2 – Caractéristiques des simulations A, B1, B2 et C.

### 3.3 Résultats

Le but de ce paragraphe est d'évaluer l'impact des ondes B1, B2 et C sur la stabilité du tripôle né de l'instabilité linéaire du profil d'anomalie de VP (3.6). Les états d'équilibre (tripôle ou dipôles) observés dans les différentes simulations, où varient le paramètre  $\alpha$  et l'onde IG interagissant avec les tourbillons, sont récapitulés sur la figure 3.8.

Tout d'abord, cette figure montre que les ondes IG ont systématiquement un effet stabilisateur sur le tripôle puisqu'en leur présence la valeur critique de  $\alpha$  correspondant à la bifurcation tripôle / dipôles est toujours supérieure à celle sans ondes. Afin d'illustrer cette différence, sont représentées sur la figure 3.9 les évolutions, seul et en présence de l'onde B2 forcée, du même anticyclone dont  $\alpha$  est intermédiaire entre les valeurs critiques sans ondes et en présence de l'onde B2 (ces simulations sont encadrées sur la figure 3.8). La figure 3.9 montre que l'évolution vers l'état de tripôle

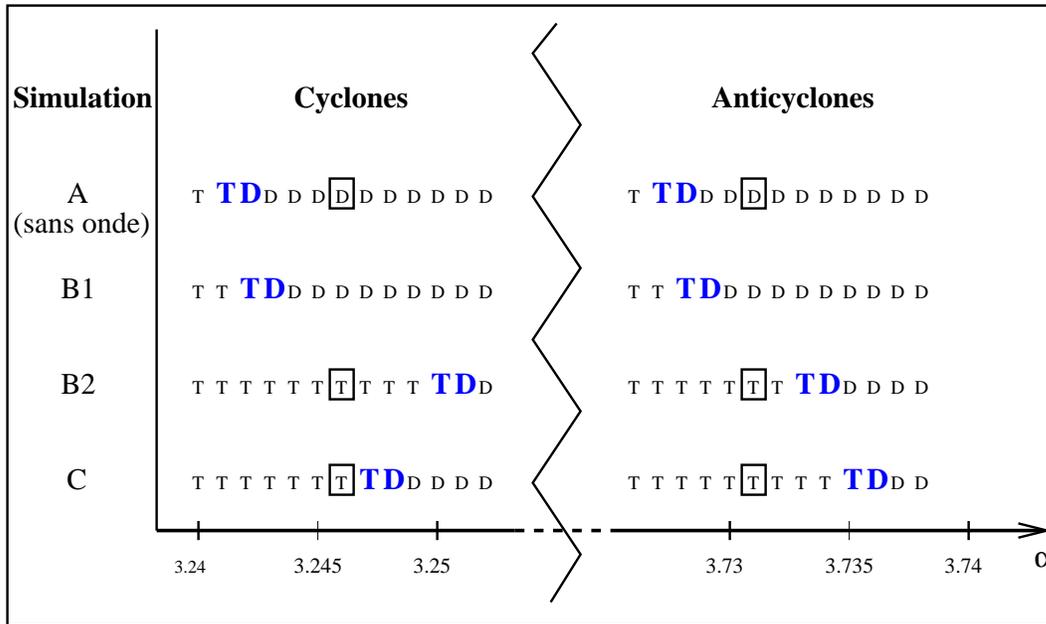


FIGURE 3.8 – Carte des états d'équilibre dans le plan “ $\alpha$ -onde”,  $T$  correspond à un état tripolaire et  $D$  dipolaire, pour chaque série les grands  $T$  et  $D$  bleus font ressortir la bifurcation entre les états tripolaires et dipolaires. Les simulations encadrées seront étudiées plus précisément ultérieurement.

est similaire sans ondes et en présence d'ondes mais ensuite, alors que sans ondes le tripôle se déstabilise en deux dipôles, en leur présence le noyau se réaxisymétrise après avoir connu une phase d'élongation.

De plus, la figure 3.8 montre qu'aussi bien pour les cyclones que pour les anticyclones l'onde B2 a un effet stabilisateur plus fort que l'onde B1. En effet, pour le cyclone (resp. l'anticyclone) la différence de  $\alpha$  critique entre les cas avec ondes et sans ondes est 9 fois (resp. 6 fois) plus grande lors d'une interaction avec l'onde B2 qu'avec l'onde B1. Est-ce dû à la différence de longueur d'onde et/ou à la différence énergétique des ondes B1 et B2? Le forçage par une troisième onde, B3 de même longueur d'onde que l'onde B2 et de même énergie cinétique moyenne que l'onde B1, a montré que cette onde avait le même effet stabilisateur que l'onde B1. L'effet stabilisateur d'une onde forcée semble donc plutôt lié à son énergie qu'à sa longueur d'onde. L'onde C, de même énergie que l'onde B2, a elle un effet stabilisateur moins fort que l'onde B2 pour les cyclones et plus fort pour les anticyclones. Nous tenterons d'expliquer cette différence dans le paragraphe suivant.

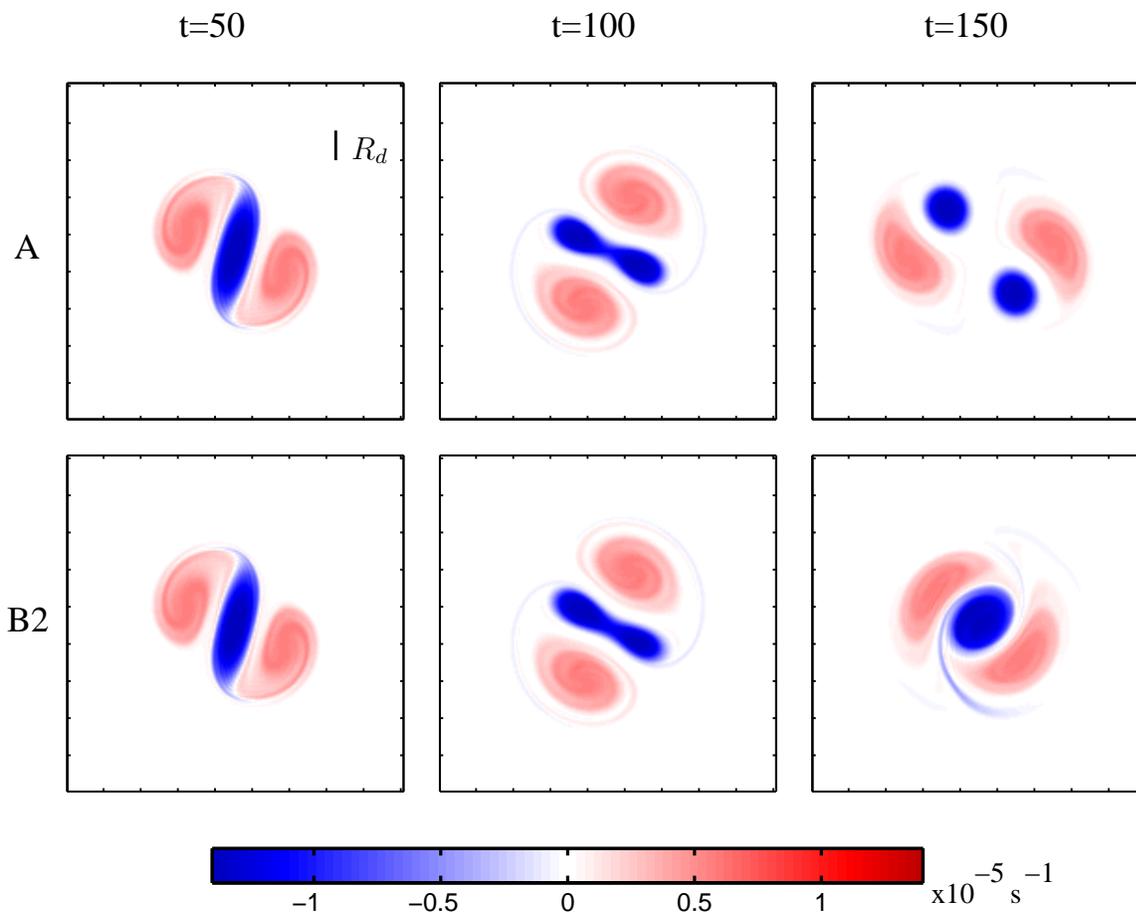


FIGURE 3.9 – Evolution du même tourbillon anticyclonique initial ( $\alpha = 3.731$ ) seul (ligne supérieure) et en présence de l'onde B2 forcée (ligne inférieure). Le tourbillon est repéré par son anomalie de VP, le temps est en jours. L'échelle du rayon de déformation  $R_d$  est donnée.

## 3.4 Interprétation

Dans ce paragraphe nous tentons d'interpréter les résultats présentés ci-dessus. Remarquons tout d'abord que les ondes IG ont un effet de stabilisation du tripôle relativement faible puisque qu'elles n'augmentent la valeur critique de  $\alpha$  que de quelques millièmes par rapport à sa valeur en l'absence d'ondes. Les processus physiques entrant en jeu sont donc de petite amplitude d'où une certaine difficulté à dégager clairement un mécanisme. De plus cette difficulté est accrue par la complexité du processus d'interaction qui peut faire intervenir plusieurs mécanismes. A partir des simulations encadrées sur la figure 3.8, nous avons exploré quelques pistes que nous exposons ici. Dans ces simulations l'anticyclone ( $\alpha = 3.731$ ) et le cyclone ( $\alpha = 3.246$ ) évoluent soit seuls (expérience A), soit en présence de l'onde forcée B2 ou de l'onde initialisée C. Ces valeurs de  $\alpha$  correspondent à des situations où dans l'expérience A le tripôle est déstabilisé et évolue vers deux dipôles alors qu'en présence de l'onde B2 ou C il est stable.

Tout d'abord nous avons cherché à déterminer la date de bifurcation, date à partir de laquelle le tripôle de l'expérience A ne se comporte qualitativement plus de la même façon que celui de l'expérience B2 ou C. Puis nous nous sommes penchés sur les processus, se déroulant avant cette date, susceptibles d'amener les différences de comportement observées sur la figure 3.8. Nous avons alors examiné comment les ondes se propageaient dans le champ de VP lié aux tourbillons et quelles étaient les conséquences de cette propagation sur les mécanismes de rétroaction des ondes sur les tourbillons. Nous avons envisagé deux mécanismes : d'une part les ondes peuvent rendre les processus de déformation moins efficaces, d'autre part elles peuvent modifier les processus de diffusion.

### 3.4.1 Détermination de la date de bifurcation

Afin de déterminer la date de bifurcation, nous mettons en parallèle deux graphes :

- la figure 3.10 représente, pour chacune des expériences, l'évolution temporelle de la moyenne spatiale de  $|\nabla q|^2(A) - |\nabla q|^2(B2, C)$  sur l'ensemble des nombres d'onde ou restreint aux "grandes" ou "petites" échelles. Le nombre d'onde limite entre "grandes" et "petites" échelles a été choisi comme 2 fois le barycentre en nombre d'onde du champ de gradient de VP :

$$k_{lim} = 2 \times \frac{\sum_k k |\widehat{\nabla q}|^2}{\sum_k |\widehat{\nabla q}|^2} \quad (3.8)$$

où  $\widehat{\nabla q}$  représente la transformée de Fourier spatiale de  $\nabla q$ .  $k_{lim}$  a été estimé dans nos simulations à  $5.10^{-4}m^{-1}$ .

- la figure 3.11 représente, pour chacune des expériences, l'évolution temporelle du critère  $r$  (Lapeyre et al. 1999) au centre du noyau. Nous le définissons ici comme le rapport de la déformation sur la valeur absolue de la rotation effective ( $r = \frac{\sigma}{|\omega + 2\dot{\phi}|}$ ) et nous le calculons à partir de la composante lente de l'écoulement (cf. chapitre 2). Il prend des valeurs supérieures à 1 quand la déformation domine et inférieures à 1 quand la rotation domine. Le noyau se brise donc d'autant plus facilement que  $r$  est grand.

Au jour 100 pour le cyclone et 90 pour l'anticyclone, les courbes en trait plein de la figure 3.10 présentent une rupture de pente importante signifiant que la moyenne spatiale de  $|\nabla q|^2$  dans les expériences B2 et C s'écarte nettement de sa valeur dans l'expérience A. Notons de plus que cet écart est systématiquement dû aux gradients de grande échelle, il n'est donc pas lié à un processus de diffusion mais à un processus mécanique de déformation plus fort dans l'expérience A que dans les expériences B2 et C. Au même instant, la figure 3.11 montre que le critère  $r$ , au milieu du noyau, prend des valeurs nettement supérieures dans l'expérience A que dans les expériences B2 et C. Cette coïncidence temporelle laisse penser que ce processus mécanique de déformation correspond à un pincement du noyau en son centre plus fort dans l'expérience A que dans les expériences B2 et C, associé à une valeur du critère  $r$  plus forte.

Cette date correspond au moment où alors que dans l'expérience A le noyau est irrémédiablement pincé pour finir par se briser, dans les expériences B2 et C le noyau après avoir été pincé va commencer à se reformer.

Afin de juger du caractère ponctuel ou non de l'effet des ondes IG, les expériences supplémentaires suivantes où l'arrivée des ondes est retardée ont été menées. Dans les cas cyclonique ( $\alpha = 3.246$ ) et anticyclonique ( $\alpha = 3.731$ ), l'onde B2 a été forcée ou l'onde inertielle C a été introduite successivement 10,5, 10 et 9,5 jours avant la date de bifurcation. Il s'avère que le tripôle n'est stabilisé dans aucune de ces simulations. L'effet d'une onde IG n'est donc pas ponctuel, il ne lui suffit pas d'être présente au moment de la bifurcation pour avoir un effet stabilisateur sur le tripôle, mais elle doit avoir une action continue sur le tripôle suffisamment longue pour pouvoir le stabiliser.

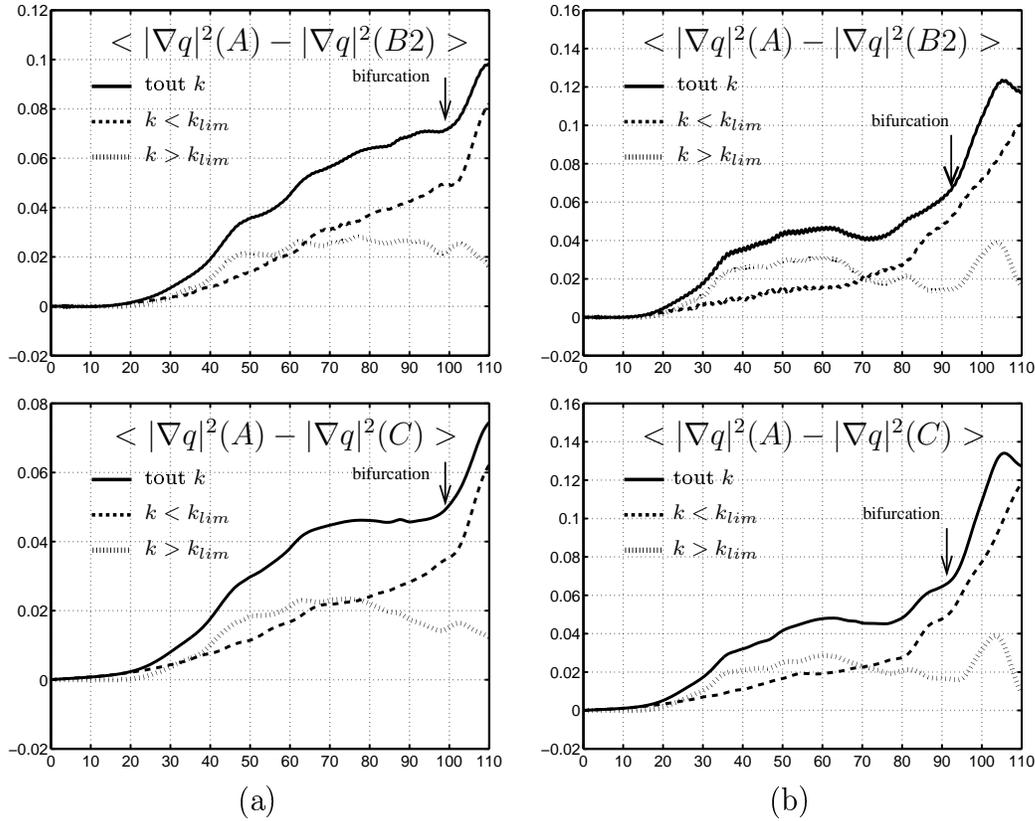


FIGURE 3.10 – Evolution temporelle de la moyenne spatiale de  $|\nabla q|^2(A) - |\nabla q|^2(B2, C)$  sur l'ensemble des nombres d'onde (trait plein), pour les grandes échelles ( $k < k_{lim}$ , tirets) et pour les petites échelles ( $k > k_{lim}$ , pointillés) dans le cas (a) cyclonique (b) anticyclonique. Les moyennes sont adimensionnalisées par la valeur initiale de  $\langle |\nabla q|^2(A) \rangle$  et le temps est en jours.

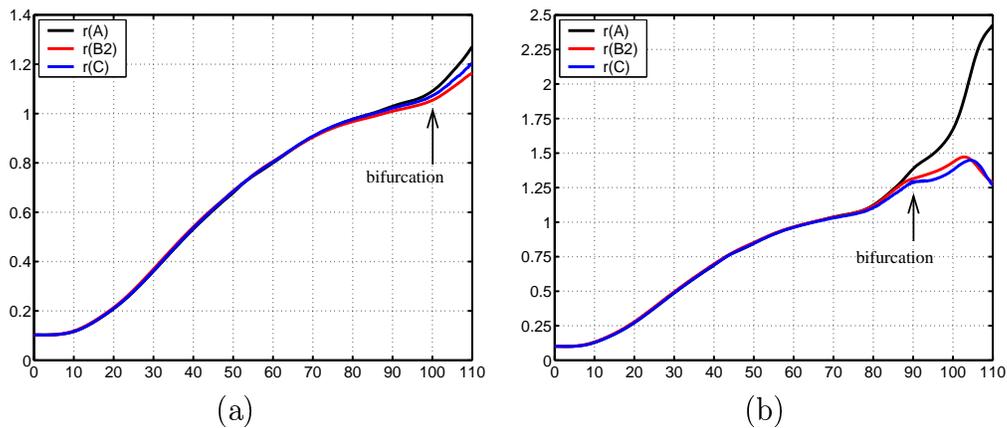


FIGURE 3.11 – Evolution temporelle de  $r = \frac{\text{déformation}}{|\text{rotation effective}|}$  au cœur du noyau dans le cas (a) cyclonique (b) anticyclonique. Le temps est en jours.

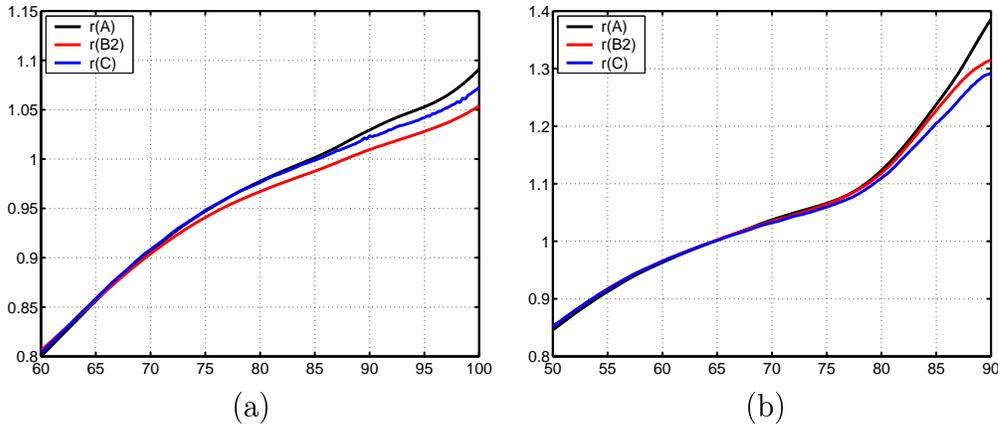


FIGURE 3.12 – Evolution temporelle de  $r = \frac{\text{déformation}}{|\text{rotation effective}|}$  au cœur du noyau durant les 40 derniers jours avant la bifurcation du tripôle de l'expérience A en deux dipôles dans le cas (a) cyclonique (b) anticyclonique. Le temps est en jours.

Dans les paragraphes suivants nous revenons aux simulations encadrées sur la figure 3.8 et nous intéressons à ce qui se passe avant la date de bifurcation. En effet, la figure 3.12, zoom de la figure 3.11 sur les 40 derniers jours avant la bifurcation, montre qu'avant cette bifurcation le centre du noyau est déjà soumis à des efforts différents selon l'onde présente (pas d'onde, onde B2 ou onde C). Cette figure 3.12 est cohérente avec la figure 3.8 puisque dans le cas cyclonique, le tripôle le plus instable est celui de l'expérience A puis celui de l'expérience C puis celui de l'expérience B2, d'où la courbe noire au dessus de la courbe bleue elle-même au dessus de la courbe rouge sur la figure 3.12(a); dans le cas anticyclonique le tripôle le plus instable est celui de l'expérience A puis celui de l'expérience B2 puis celui de l'expérience C, d'où la courbe noire au dessus de la courbe rouge elle-même au dessus de la courbe bleue sur la figure 3.12(b).

Afin d'envisager des mécanismes susceptibles d'amener les différences de comportement observées sur la figure 3.8, nous examinons alors comment les ondes se propagent dans le champ de VP lié aux tourbillons puis quelles peuvent en être les conséquences sur les mécanismes de rétroaction des ondes sur les tourbillons, en terme d'efficacité des processus de déformation et en terme de diffusion.

### 3.4.2 Propagation des ondes

L'analyse de la composante rapide des simulations C, où une onde purement inertielle donc par nature homogène spatialement est initialisée, montre que cette composante rapide décroît en restant homogène au cours du temps, elle perd 23% de

son énergie cinétique en environ 50 jours aussi bien dans les zones anticycloniques que cycloniques. De notre analyse, ne ressort donc aucune modification significative de la propagation de l'onde C par les tourbillons qu'une analyse plus détaillée pourrait peut-être mettre en évidence. Toutefois, cette décroissance énergétique interpelle. En effet, comme la composante rapide reste homogène, cette perte énergétique ne peut être ni liée à l'opérateur de diffusion qui n'agit qu'en présence de gradient ni à la présence de tourbillons, a priori elle ne peut donc provenir que de la discrétisation temporelle du modèle. Afin de confirmer cet a priori, une simulation supplémentaire sans forçage et sans tourbillon a été réalisée, seul un champ de vitesse uniforme correspondant à l'onde C y a été initialisé. Le fait que l'énergie cinétique de cette simulation présente la même décroissance que la composante rapide de la simulation C va dans le sens d'une perte énergétique liée à la discrétisation temporelle.

Quant aux simulations B2 où une onde IG est forcée en permanence indépendamment de la longitude, la figure 3.13 montre que la composante rapide de l'écoulement ne reste pas zonale, d'où une propagation de l'onde B2 modifiée par les tourbillons.

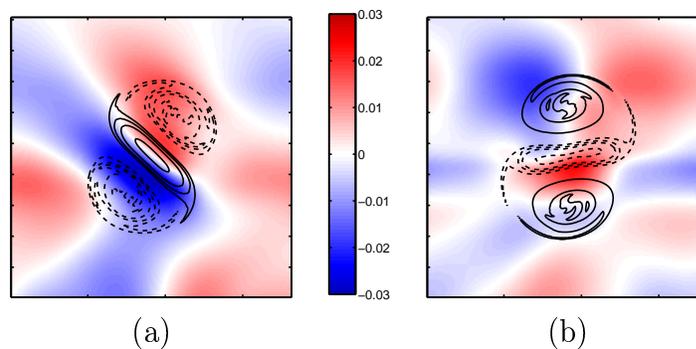


FIGURE 3.13 – *Ecart à sa moyenne zonale de l'énergie cinétique de la composante rapide au jour 80 de l'expérience B2 dans le cas (a) cyclonique (b) anticyclonique. L'énergie cinétique est adimensionnalisée par l'énergie cinétique moyenne de l'onde B2. Les contours noirs (plein: valeurs positives, tirets: valeurs négatives) représentent le tripôle au même jour repéré par son anomalie de VP.*

Peut-on rapprocher cette modification à un phénomène de piégeage / expulsion des ondes analogue à celui décrit par Kunze (1985)? Etant donné la différence de contexte, le rapprochement ne semble pas licite. En effet, Kunze (1985) modélise la propagation libre d'ondes quasi-inertielles (NIO pour "Near Inertial Oscillation") dans un écoulement géostrophique où l'anomalie de VP se réduit à la vorticité relative. Dans ce contexte, les NIO sont piégées au niveau des zones anticycloniques et

expulsées des zones cycloniques. Dans le cadre shallow-water où la vorticité relative évolue conjointement avec le terme de stretching  $h/H$  pour conserver la VP (  la diffusion près), à notre connaissance aucune étude ne traite de la propagation des ondes IG.

Toutefois, nous avons tenté de déceler dans les simulations B2 la trace d'un processus de piégeage / expulsion des ondes. Dans cet objectif, la composante non forcée de la composante rapide, n e de l'interaction de l'onde B2 avec les tourbillons, est isol e en étant à l'énergie cinétique li e aux ondes sa moyenne zonale. Cette grandeur, déjà trac e sur la figure 3.13, est not e  $Ec'_r$  :

$$Ec'_r = \frac{1}{2} \left( |\mathbf{u}_r|^2 - \overline{|\mathbf{u}_r|^2} \right) \quad (3.9)$$

où  $\mathbf{u}_r$  représente la composante rapide du champ de vitesse et  $\overline{(\cdot)}$  la moyenne zonale. Afin de mettre en évidence une relation spatiale entre l'anomalie de VP  $q$  et  $Ec'_r$ , la corrélation spectrale entre ces deux champs est choisie comme index. Précisément, à un pas de temps donné, pour chaque nombre d'onde  $k$ , les coefficients de corrélation entre les coefficients de Fourier de  $q$  et de  $Ec'_r$  sont moyennés dans l'espace des nombres d'ondes sur une couronne de rayon  $k$ . Ces coefficients sont ensuite moyennés temporellement sur les 20 derniers jours avant la date de bifurcation, soit entre les jours 80 et 100 pour le cyclone et 70 et 90 pour l'anticyclone. Les coefficients obtenus n'ayant des valeurs significatives qu'aux grandes échelles, la figure 3.14 ne donnent leur valeur que pour les vingt premiers nombres d'onde, soit pour des échelles supérieures à  $20km$ . Cette figure affiche des valeurs significatives négatives de corrélation aux petits nombres d'onde. Cette tendance est plus large pour le tripôle anticyclonique où pour  $k = 1, 2$  et  $3$  le coefficient de corrélation est inférieur à  $-0.3$  avec un minimum de  $-0.42$  que pour le tripôle cyclonique où ce coefficient n'est inférieur à  $-0.3$  que pour  $k = 1$  et  $2$  avec un minimum de  $-0.38$ . Comme la géométrie du tripôle est bien capt e par les nombres d'ondes inférieurs à  $3$ , cette tendance traduit le fait, qu'à l'échelle du tripôle, la composante non forcée des ondes IG serait pi g e par les zones anticycloniques.

Finalement dans les simulations B2, même s'il n'est pas très marqué (coefficient de corrélation de l'ordre de  $-0.3$ ), même s'il ne concerne qu'une faible proportion des ondes IG (environ 3% d'après la figure 3.13), un phénomène de piégeage grande échelle des ondes IG par les zones anticycloniques semble avoir lieu, conférant aux cyclones et anticyclones un caractère asymétrique vis-à-vis des ondes.

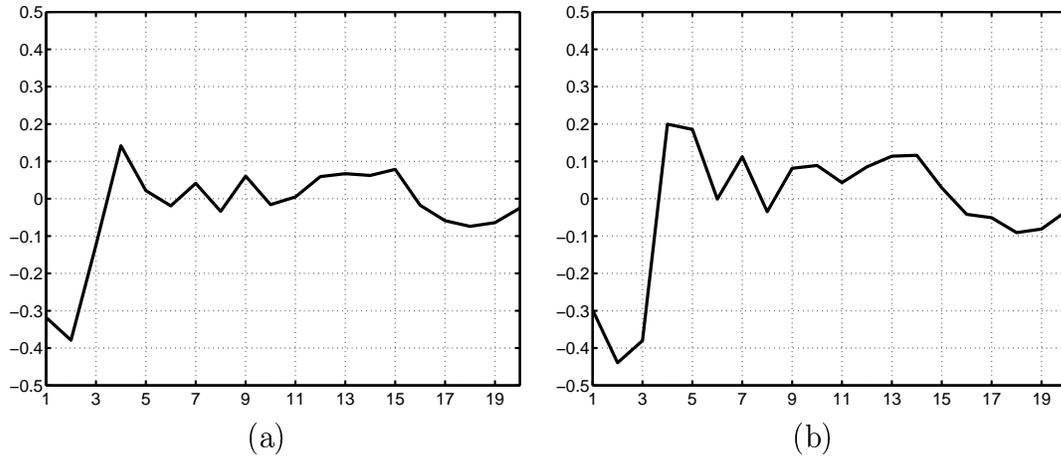


FIGURE 3.14 – Coefficient de corrélation, moyenné sur une couronne de rayon  $k$  dans l'espace des nombres d'onde, entre les coefficients de Fourier de  $q$  et de  $Ec_r$ . Ces coefficients sont moyennés sur les vingt jours précédant la bifurcation. Le graphe (a) correspond au cas cyclonique et le (b) au cas anticyclonique. Les nombres d'onde  $k$  sont donnés en abscisse,  $k = 1$  correspond à la longueur du domaine de corrélation soit 400km.

### 3.4.3 Perte de cohérence des mécanismes de déformation

Dans ce paragraphe, nous examinons quelles conséquences peut avoir la répartition des ondes décrite ci-dessus sur les mécanismes de déformation. En effet, en rendant ces mécanismes moins cohérents (Farge et Sadourny 1989), les rendant ainsi moins efficaces, les ondes IG peuvent modifier l'interaction entre tourbillons. Comme la bifurcation tripôle / dipôles est basée sur la déformation exercée par les satellites sur le noyau, si l'action des satellites est moins cohérente en présence d'ondes IG que sans onde, elle sera moins efficace et le noyau plus stable, d'où un rôle stabilisateur des ondes. Quel indice pourrait laisser à penser que cet effet des ondes IG est envisageable? L'idée d'un tel processus vient du fait que les ondes IG font osciller noyau et satellites autour de leur position en l'absence d'ondes. D'où alors que dans le cadre bidimensionnel incompressible, noyau et satellites restent alignés (Carton et Legras 1994), une action des ondes différente, conséquence d'une répartition hétérogène, sur noyau et satellites est propice à un désalignement lui même propice à une action des satellites moins synchrone donc moins efficace.

On repère le désalignement du noyau par rapport à l'axe des satellites par l'angle  $\theta$  défini sur la figure 3.15.

Prenons le cas académique de deux points vortex, modélisant les deux satellites, de même circulation  $\Gamma$  situés respectivement en  $(x = 0, y = d)$  et  $(x = 0, y = -d)$

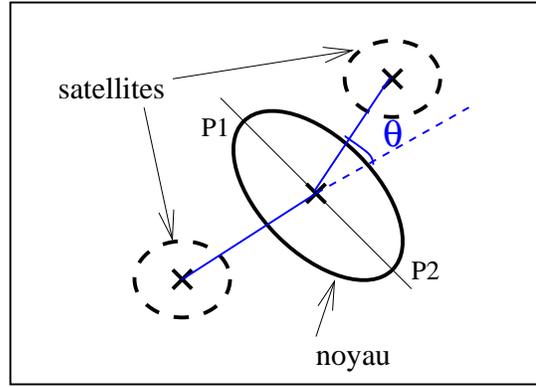


FIGURE 3.15 – Angle  $\theta$  définissant le désalignement entre le noyau et ses satellites.

et montrons que le long de leur médiatrice (ie le long de l'axe  $y = 0$ ) le taux de déformation qu'ils induisent est effectivement maximal en  $x = 0$ . Un désalignement  $\theta$  correspond à un écart  $x$  sur la médiatrice tel que  $\frac{x}{d} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ . La fonction de courant  $\psi$  associée à ces deux points vortex est :

$$\psi = \frac{\Gamma}{4\pi} \left( \log(x^2 + (y - d)^2) + \log(x^2 + (y + d)^2) \right) \quad (3.10)$$

Le taux d'étirement  $\sigma_n = |\partial_x u - \partial_y v| = |2\partial_{xy}\psi|$  étant nul en  $y = 0$ , le taux de déformation  $\sigma$  est égal au taux de cisaillement  $\sigma_s = |\partial_x v + \partial_y u| = |\partial_{xx}\psi - \partial_{yy}\psi|$  :

$$\sigma = \frac{2\Gamma}{\pi d^2} \frac{\left| 1 - \left(\frac{x}{d}\right)^2 \right|}{\left( 1 + \left(\frac{x}{d}\right)^2 \right)^2} = \frac{2\Gamma}{\pi d^2} \frac{\left| 1 - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|}{\left( 1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^2} \quad \text{en } y = 0 \quad (3.11)$$

Comme l'illustre la figure 3.16, sur l'axe  $y = 0$ , la déformation  $\sigma$  induite par les deux points vortex est bien maximale en  $x = 0$  (et présente deux maxima secondaires en  $x = \pm\sqrt{3}d$ ). Cette représentation idéalisée des satellites laisse donc à penser que le centre du noyau sera soumis à une déformation d'autant plus forte qu'il est proche de leur axe. De plus, alors que la vitesse induite par les satellites au coeur du noyau est nulle quand celui-ci est situé au milieu des deux satellites, quand il s'éloigne de cette position ce n'est plus le cas. D'où, les satellites en plus d'exercer une déformation moins forte au centre du noyau le font tourner, engendrant ainsi des mouvements complexes.

Pour calculer l'angle  $\theta$ , il suffit de connaître les positions des centres du noyau et des satellites. Nous expliquons ici brièvement comment elles ont été déterminées dans le cas d'un tripôle cyclonique. Le centre du noyau est défini comme le barycentre

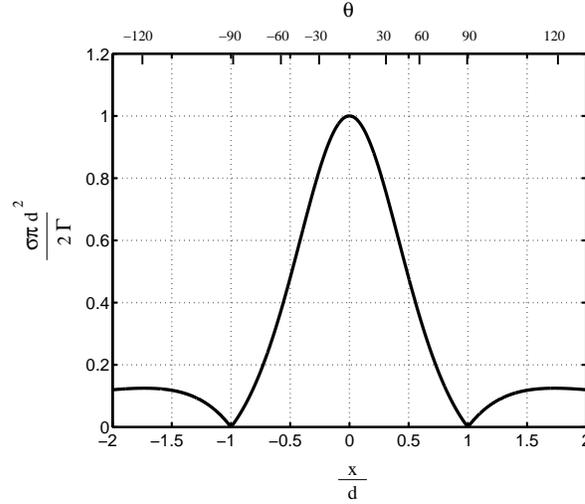


FIGURE 3.16 – Variation du taux de déformation induit par deux points vortex le long de leur médiatrice en fonction de  $x/d$  (axe inférieur) ou de  $\theta$  en degrés (axe supérieur).

d'anomalie de VP positive :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (\text{centre du noyau}) = \frac{\iint_{q>0} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} q dx dy}{\iint_{q>0} q dx dy} \quad (3.12)$$

Puis pour déterminer les positions des centres des satellites il faut séparer le domaine en deux tel que chacun des sous-domaines contienne un satellite. L'observation montre que le grand axe du noyau sépare le domaine en deux telles régions. On recherche alors cet axe comme la droite passant par le centre du noyau dont les deux points d'intersection avec un contour donné d'anomalie de VP du noyau (les points P1 et P2 sur la figure 3.15) sont les plus distants. Nous avons utilisé le contour  $q = 10^{-5} s^{-1}$  pour déterminer cet axe. Puis, de manière analogue à (3.12) le centre de chacun des satellites est défini comme le barycentre d'anomalie de VP négative dans chacun des sous-domaines.

La figure 3.17 montre qu'effectivement en présence d'ondes, noyau et satellites oscillent autour de leur position en l'absence d'ondes. Les évolutions temporelles de  $\theta$  pour les 6 expériences analysées ici sont représentées sur la figure 3.18. On remarque que le comportement de  $\theta$  est qualitativement le même pour anticyclones et cyclones.

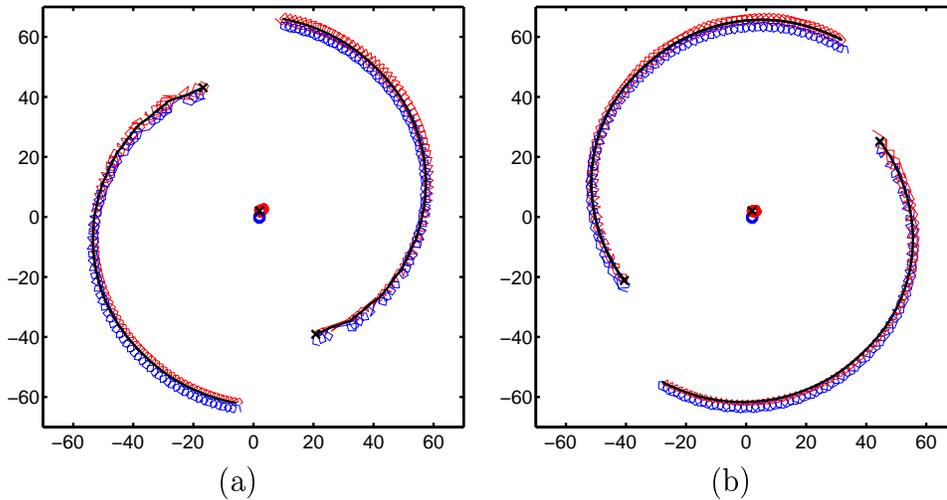


FIGURE 3.17 – Trajectoires des centres du noyau et des satellites (a) du cyclone (b) de l'anticyclone du jour 30 (tripôle formé) au jour 100. Courbes noires : évolution sans ondes (exp. A), courbes rouges : avec onde B2, courbes bleues : avec onde C. Les croix noires indiquent les positions au jour 30. Les axes indiquent la distance en km au centre du domaine.

Dans les simulations A (sans ondes), le noyau et ses satellites restent alignés comme dans le cadre bidimensionnel incompressible.

Dans les simulations C, ils restent également alignés confortant l'idée émise dans le paragraphe 3.4.2 d'une répartition homogène des ondes sur tout le domaine.

Par contre, dans les simulations B2,  $\theta$  croît temporellement, à la vitesse d'environ un degré en 25 jours, en oscillant à la période de l'onde avec une amplitude maximale de l'ordre du degré. Ce désalignement ne peut être que la conséquence d'une action différente des ondes sur noyau et satellites. L'onde B2 est par nature hétérogène, contrairement à une onde purement inertielle par nature homogène, elle n'agit donc pas en phase sur chacun des satellites et sur le noyau, d'où la composante oscillatoire à la période de l'onde de  $\theta$ . La composante croissante de  $\theta$  peut elle être associée au phénomène de piégeage, discuté au paragraphe 3.4.2, de la composante non forcée des ondes IG au niveau des zones anticycloniques. En effet, par ce processus satellites et noyau, d'anomalie de VP de signe opposé, n'oscillent pas avec la même intensité autour de leur position en l'absence d'ondes, d'où un désalignement du noyau par rapport à l'axe des satellites.

L'effet stabilisateur de l'onde B2 sur le tripôle pourrait donc avoir comme origine une action moins efficace des satellites sur le noyau dû à ce léger désalignement, conséquence de la répartition hétérogène des ondes dans ces simulations. Toutefois, bien que ce désalignement présente une tendance croissante frappante par rapport

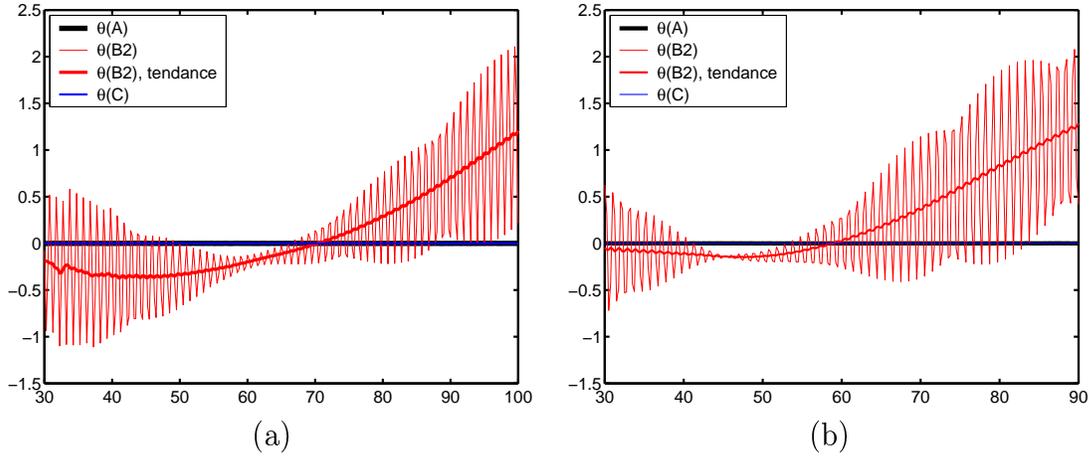


FIGURE 3.18 – Evolutions temporelles de  $\theta$  défini par la figure 3.15 pour (a) le cyclone (b) l'anticyclone. Courbes noires : évolution sans ondes (exp. A), courbes rouges : avec onde B2, courbes bleues : avec onde C.  $\theta$  est en degrés et le temps en jours.

au parfait alignement des expériences A et C, la question de savoir si ce désalignement est suffisant pour expliquer l'effet stabilisateur de l'onde B2 aussi bien sur l'anticyclone que sur le cyclone reste en suspens.

### 3.4.4 Processus de diffusion

Dans le but d'apprécier l'effet des ondes IG sur la diffusion, l'évolution temporelle jusqu'à la date de bifurcation de différentes moyennes spatiales d'anomalie de VP sont tracées sur la figure 3.19. Pour chacune des expériences, on définit les champs d'anomalie de VP suivants :

$$q_+(x, y) = \max(0, q(x, y)) \quad q_-(x, y) = \max(0, -q(x, y)), \quad (3.13)$$

$q_+$  et  $q_-$  sont des grandeurs positives correspondant respectivement aux zones cycloniques et anticycloniques de l'écoulement.

Notons que sur la figure 3.19 une courbe décroissante correspond à une diffusion accrue par l'onde et que, pour une onde donnée, la séparation des courbes en trait plein et en tirets correspond à une diffusion rendue hétérogène. Cette figure montre donc que les ondes B2 et C ont un effet diffusif sur le champ de VP<sup>1</sup> mais que leur effet est différent : l'onde C augmente de manière homogène la diffusion entre zones

1. En effet les variations observées sur la figure 3.19 sont bien dues à de la diffusion d'anomalie de VP ie à  $\frac{Dq}{Dt}$  non nulle puisque par exemple pour les zones cycloniques  $\frac{D}{Dt} \iint_{q>0} q dx dy = \iint_{q>0} \frac{Dq}{Dt} dx dy + \iint_{q>0} \nabla \cdot (q\mathbf{u}) dx dy = \iint_{q>0} \frac{Dq}{Dt} dx dy + \oint_{q=0} q\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{q>0} \frac{Dq}{Dt} dx dy$ .

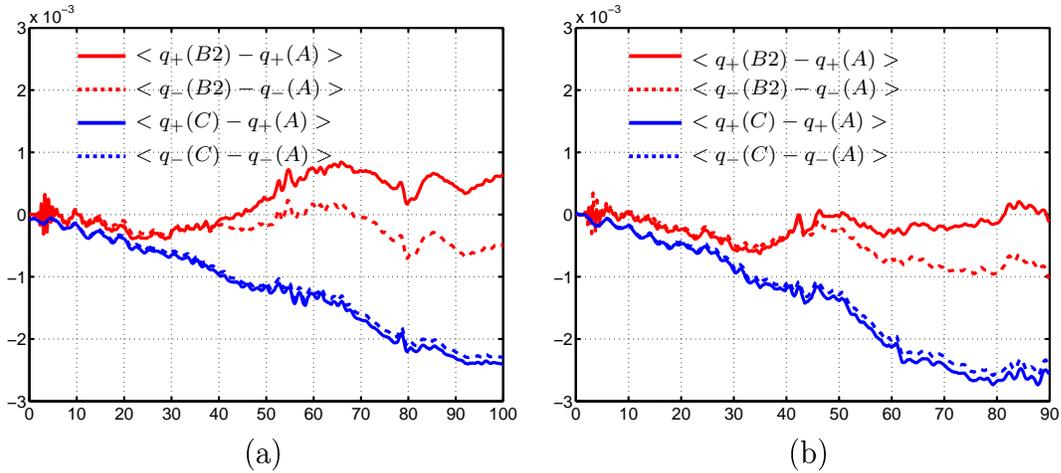


FIGURE 3.19 – Evolution temporelle de la moyenne spatiale de l'écart de  $q_+$  (trait plein) et de  $q_-$  (traits pointillés) des expériences B2 (rouge) et C (bleu) à leur valeur dans l'expérience A pour (a) le cyclone (b) l'anticyclone. Les moyennes sont adimensionnalisées par la moyenne initiale de  $q_+(A)$  et le temps est en jours.

cycloniques et anticycloniques (les courbes bleues en trait plein et tirets décroissent et se superposent), l'onde B2 ne l'augmente pas (les courbes rouges restent à peu près horizontales) mais la rend hétérogène renforçant les zones cycloniques par rapport aux zones anticycloniques (la courbe rouge en trait plein est toujours au dessus de la courbe rouge en tirets).

Comment expliquer cette différence de diffusion ?

Tout d'abord, lorsque, comme dans nos simulations, un coefficient de diffusion biharmonique constant ( $\nu_0$ ) pour la quantité de mouvement est utilisé, la diffusion d'anomalie de VP prend elle l'expression suivante :

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{\nu_0}{1 + \frac{h}{H}} \Delta^2 \zeta = \nu_{eff} \Delta^2 \zeta \quad (3.14)$$

où  $\nu_{eff}$ ,  $h$ ,  $H$  et  $\zeta$  représentent un coefficient de diffusion effectif, la dénivellation de hauteur, la hauteur moyenne et la vorticité relative. D'après (3.14), les ondes IG peuvent modifier  $Dq/Dt$  via le coefficient de diffusion effectif  $\nu_{eff}$  et via  $\Delta^2 \zeta$  en modifiant la structure petite échelle de la vorticité relative. L'action des ondes IG sur la diffusion de la VP est d'autant plus complexe que ces deux effets ne sont pas indépendants. C'est pourquoi les différences observ es sur la figure 3.19 n'ont pu être clairement expliqu es. Toutefois on peut rapprocher la figure 3.19 du paragraphe 3.4.2 sur la propagation des ondes dans le champ de VP lié au tripôle. En effet,

dans les simulations C, l'augmentation homogène de la diffusion par rapport aux simulations A semble liée à la répartition restant homogène au cours du temps de la composante rapide de l'écoulement. Dans les simulations B2, le fait que les ondes rendent la diffusion hétérogène entre zones cycloniques et anticycloniques peut être associé au piégeage par les zones anticycloniques de la composante non forcée des ondes IG.

Quelles devraient être les conséquences de la modification de la diffusion par les ondes sur la stabilité des tripôles?

Tout d'abord l'onde C, en augmentant la diffusion de manière homogène, a par ce processus le même effet qualitatif qu'une augmentation du coefficient de diffusion du modèle. Le processus de diffusion associé à l'onde C lui confère donc un effet stabilisateur aussi bien sur les tripôles cycloniques qu'anticycloniques qu'une perte de cohérence des mécanismes de déformation induite par cette onde ne permettait pas d'expliquer.

Quant à l'onde B2, par son effet diffusif hétérogène entre zones cycloniques et anticycloniques, elle modifie le "rapport de force" noyau / satellites. En sa présence, le noyau cyclonique (resp. anticyclonique) se voit renforcé (resp. affaibli) par rapport à ses satellites. L'effet diffusif de l'onde B2 tend donc à stabiliser le tripôle cyclonique et déstabiliser le tripôle anticyclonique.

### 3.4.5 Influence cumulée des processus

L'effet des ondes B2 et C sur la stabilité des tripôles résulterait des effets cumulés des deux processus étudiés ci-dessus, même si beaucoup de questions restent en suspens quant à leur pertinence.

L'onde B2 stabiliserait les tripôles en rendant les processus de déformation des satellites sur le noyau moins efficaces qu'en l'absence d'ondes. De plus, parcequ'elle rend les processus de diffusion hétérogènes, l'effet stabilisateur de l'onde B2 serait amplifié dans le cas du tripôle cyclonique et amorti dans le cas du tripôle anticyclonique.

L'onde C stabiliserait elle les tripôles anticycloniques et cycloniques par le seul processus de diffusion en l'augmentant de manière spatialement homogène.

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que l'interaction entre tourbillons était modifiée sous l'action d'ondes IG. Pour cela, le cas académique du tripôle a été utilisé comme exemple de tourbillons interagissant entre eux. Les ondes IG testées stabilisent systématiquement le tripôle par rapport à une évolution sans ondes où le noyau se brise plus facilement pour former avec les satellites deux dipôles. Sans pouvoir conclure clairement sur les processus entrant en jeu lors de cette interaction, nous avons exploré quelques pistes pouvant expliquer cet effet stabilisateur des ondes.

Tout d'abord, cet effet pourrait être la conséquence de la répartition spatiale des ondes dans le champ de VP lié au tripôle, même si les liens entre cette répartition et les mécanismes envisagés restent à prouver. En effet quand, comme dans les simulations B2, la répartition est asymétrique entre zones cycloniques et anticycloniques par phénomène de piégeage des ondes par les anticyclones, l'effet stabilisateur de l'onde semble essentiellement lié à une action de déformation des satellites au centre du noyau rendue moins efficace par désalignement du noyau de l'axe des satellites. Ce processus rentre dans le cadre plus général d'une perte de cohérence des mécanismes de déformation en présence d'ondes IG modifiant ainsi les cascades de la composante lente de l'écoulement (Farge et Sadourny 1989). La répartition hétérogène de l'onde semble également rendre les processus de diffusion hétérogènes, renforçant les cyclones par rapport aux anticyclones. Cet effet diffusif amplifie l'effet stabilisateur par perte de cohérence des processus de déformation dans le cas d'un noyau cyclonique et l'amortit dans le cas d'un noyau anticyclonique. Par contre quand, comme dans les simulations C, la répartition de l'onde semble rester homogène au cours du temps, l'effet stabilisateur de l'onde paraît être entièrement lié à une augmentation homogène de la diffusion.

La question de l'origine de cette répartition des ondes dans le champ de VP reste en suspens. En effet, leur répartition homogène observée dans les simulations C est en particulier inattendue à la vue des résultats de Young et Ben Jelloul (1997), Klein et al. (2003) ou encore Klein et al. (2004) qui prévoient un piégeage des ondes par les zones anticycloniques. L'apparente absence de piégeage dans nos simulations C pourrait venir de la différence de contexte: dans les études citées ci-dessus, les ondes ont une petite échelle verticale par rapport à l'écoulement lent alors que dans nos simulations où il n'y a pas de séparation d'échelle, le terme de stretching lié aux tourbillons peut avoir un rôle important dans la propagation des ondes, il peut peut-être notamment l'inhiber.

Notons que nous n'avons pas envisagé de mécanismes liés à de la création de VP induite par le déferlement d'ondes IG. En effet, la configuration des simulations a été choisie pour éviter de tels phénomènes. Les ondes forcées ont été préalablement testées dans des simulations sans tourbillon afin de vérifier qu'elles ne déferlaient pas. Dans les simulations avec tourbillons, comme l'onde est monochromatique et amortie au Sud du domaine, la seule interaction pouvant provoquer son déferlement est l'interaction onde / tourbillon, vue la faiblesse de cette interaction, le déferlement est peu probable.

L'effet stabilisateur des ondes IG pourrait être considéré comme minime dans le sens où il n'est sensible que pour des tripôles instables proches du point critique de stabilité. Toutefois, cet effet est important car dans le cadre plus général d'un champ turbulent pleinement développé, les tourbillons passent souvent par des phases critiques. D'où en modifiant l'interaction entre tourbillons lors de ces phases critiques, les ondes IG peuvent modifier les propriétés globales de l'écoulement.



## Conclusion générale

Au cours de cette thèse, nous avons cherché à analyser l'influence des ondes d'inertie-gravité (IG) sur la dynamique tourbillonnaire. Cette étude a été motivée par un des problèmes majeurs de la dynamique océanique qu'est le rôle tenu par la dynamique rapide des ondes IG vis-à-vis de la dynamique lente de la circulation grande échelle. Est-il significatif, quelle est sa nature? Même si d'un point de vue énergétique la composante rapide des écoulements océaniques est sans commune mesure avec la composante lente qui représente le plus gros réservoir d'énergie, la capacité des ondes IG à modifier cet énorme réservoir est susceptible de leur conférer un rôle clé. Alors que l'idée aujourd'hui répandue est de les associer à un effet de mélange, nous avons envisagé un processus plus complexe où la dynamique tourbillonnaire jouait un rôle d'intermédiaire important. En effet les tourbillons entrent dans la catégorie des mouvements "lents" mais ont une dynamique de période intermédiaire (de l'ordre de quelques jours à quelques semaines) entre la circulation générale (période de l'ordre de quelques années) et les ondes IG (période inférieure à un jour). La compréhension du processus d'interaction circulation générale / ondes IG passe donc par la compréhension du processus d'interaction dynamique tourbillonnaire / ondes IG.

Une revue bibliographique de quelques études traitant de la distinction mode lent / mode rapide a montré qu'aucune séparation mathématique exacte de ces deux dynamiques ne pouvait être définie, rendant l'étude de leur interaction particulièrement complexe. Toutefois, notre revue aborde cette interaction sous plusieurs aspects: modification adiabatique ou non du mode rapide et/ou du mode lent... Suite à cette synthèse bibliographique, deux études numériques d'interaction ondes IG / tourbillons ont été menées. A chaque fois, nous nous sommes placés dans un cadre shallow-water une couche  $1/2$  sur le plan  $f$  et nous avons analysé, dans des régimes à faibles nombres de Rossby et de Froude, l'influence d'ondes IG externes sur la dynamique tourbillonnaire.

Dans une première étude, nous avons examiné en quoi les ondes IG affectaient

l'étude diagnostique de la filamentation d'un tourbillon. Les expériences numériques ont montré que les points d'éjection des filaments étaient légèrement déplacés en présence d'ondes et que le critère  $r$  développé dans un cadre quasi-géostrophique par Lapeyre et al. (1999) pour repérer de telles zones n'était pas pertinent quand il était directement adapté au modèle shallow-water. Nous avons montré que le processus de filamentation devait être analysé à partir de la composante lente de l'écoulement, qui malgré sa modification par les ondes IG, contient l'information nécessaire. Le critère  $r$ , alors estimé à partir de cette composante, peut être utilisé pour localiser les zones d'éjection de filaments.

Comme le critère moins précis d'Okubo-Weiss (Okubo 1970, Weiss 1991) aujourd'hui largement utilisé, le critère  $r$ , estimé à partir de la composante lente de l'écoulement, peut servir d'outil à des études de processus en modèle shallow-water. Nous nous en sommes au demeurant servi dans notre étude suivante sur la déstabilisation des tripôles. Herbette et al. (2003) ont également tenté de l'appliquer dans leur simulations numériques shallow-water pour localiser les zones d'éjection de filaments d'un tourbillon de surface érodé lors de son passage au dessus d'un mont sous-marin, mais comme ils ont estimé ce critère à partir de la composante totale de l'écoulement, leur diagnostic a échoué. D'ailleurs, le spectre d'utilisation du critère  $r$  pourrait être élargi à des processus tridimensionnels après adaptation à un tel cadre. Dans un modèle multicouches shallow-water, le critère  $r$  peut être estimé dans chacune des couches à partir de la composante géostrophique de l'écoulement caractérisée par la fonction de courant de la couche en question. L'obtention de chacune des fonctions de courant passe par une inversion de la vorticité potentielle non pas par couche mais dans son ensemble puisque le terme de stretching de chaque couche fait intervenir l'ensemble des fonctions de courant. Alors le critère  $r$  pourra être utilisé pour étudier l'interaction d'ondes IG avec une dynamique tourbillonnaire incluant des phénomènes baroclines tel le processus d'alignement entre tourbillons se trouvant à des niveaux différents, processus régulièrement observé aussi bien en Atlantique Nord-Est (Tychensky et Carton 1998) qu'en Atlantique Sud-Ouest (Arhan et al. 2002) ou encore dans le Pacifique Est (Cresswell 1982) et déjà étudié numériquement (Viera 1995, Corréard et Carton 1998) ou en laboratoire (Nof et Dewar 1994).

Cette première étude a montré que le processus de filamentation d'un tourbillon elliptique était légèrement modifié en présence d'ondes IG. La configuration alors utilisée pour ces simulations numériques ne nous a pas permis d'étudier plus largement la nature de cette interaction. En effet, les possibilités entre interactions de nature dissipative ou non ou encore liées au type d'initialisation étaient trop

nombreuses pour identifier un processus. L'objectif de notre seconde étude a alors été de mettre en évidence, dans l'espace physique, la modification d'une dynamique tourbillonnaire précise par une onde IG et d'interpréter localement, sans développements mathématiques asymptotiques (Bühler et McIntyre 1998, Kuo et Polvani 1999), les processus de l'interaction. Inspirés par Farge et Sadourny (1989) selon lesquels les cascades de la composante lente, donc les interactions entre tourbillons, sont modifiées par les ondes IG, nous avons préféré étudier l'influence d'une onde IG sur l'interaction entre tourbillons plutôt que sur un tourbillon isolé. Dans une configuration excluant toute modification due à l'initialisation<sup>2</sup>, à la paramétrisation de la diffusion ou au déferlement de l'onde, nous avons alors choisi d'étudier l'influence qu'avait une onde IG sur la stabilité des tripôles, pris comme exemple bidimensionnel de tourbillons interagissant entre eux. Les expériences numériques ont montré que les ondes avaient un effet stabilisateur sur les tripôles qui se scindent plus facilement en deux dipôles en leur absence, qu'il s'agisse d'une onde purement inertielle initialisée ou d'une onde IG forcée en permanence.

Sans pouvoir conclure clairement sur les processus entrant en jeu lors de la stabilisation d'un tripôle par une onde IG, nous avons exploré quelques pistes susceptibles d'expliquer cet effet stabilisateur des ondes. Il semble qu'une onde agisse en fonction de sa répartition spatiale dans le champ de vortacité potentielle lié aux tourbillons. Une répartition spatiale hétérogène de l'onde (comme l'onde IG forcée de nos simulations), due à un phénomène de piégeage par les zones anticycloniques, pourrait avoir une double conséquence. D'une part, elle pourrait se traduire par un désalignement du noyau de l'axe des satellites rendant leur action de cisaillement au centre du noyau moins efficace, d'où la stabilisation du tripôle par l'onde. Ce type d'interaction entre dans le cadre plus général d'une perte de cohérence des mécanismes de déformation (Farge et Sadourny 1989). D'autre part, une telle répartition des ondes semble rendre les processus de diffusion asymétriques, renforçant les cyclones par rapport aux anticyclones. Cet effet diffusif amplifierait (resp. amortirait) l'effet stabilisateur de l'onde dû à un cisaillement des satellites moins efficace dans le cas d'un tripôle de noyau cyclonique (resp. anticyclonique). Parce qu'ils semblent avoir comme origine commune une répartition spatiale hétérogène de l'onde, la perte de cohérence des mécanismes de déformation et le processus de diffusion asymétrique sont deux effets indissociables de l'onde, ainsi répartie, sur la dynamique tourbillonnaire. Par contre une répartition homogène de l'onde (comme l'onde purement inertielle initialisée) ne semble avoir qu'une conséquence: elle augmente la diffusion de manière symétrique entre cyclones et anticyclones, elle a donc le même effet qu'une augmentation du

---

2. Seules des simulations avec initialement la même vortacité potentielle et le même écoulement géostrophique ont été comparées entre elles.

coefficient de diffusion du modèle, c'est à dire un effet stabilisateur sur le tripôle.

Beaucoup de questions restent en suspens quant à la pertinence des pistes explorées. Une des plus importantes, puisque les autres semblent en découler, concerne la répartition spatiale des ondes dans un champ de vorticité potentielle. Dans un écoulement géostrophique, donc non divergent, la propagation des ondes quasi-inertielles (NIO) a déja été  tudi e. Les modèles de Kunze (1985) et Young et Ben Jelloul (1997) prévoient notamment un piégeage des NIO dans les zones anticycloniques et leur répulsion des zones cycloniques identifi es dans ce contexte non divergent par le signe de la vorticité relative. Dans un écoulement lent divergent ce phénomène de piégeage des ondes par les zones anticycloniques, caract ris es par une vorticité potentielle négative, a-t-il lieu? Dans ce contexte où la vorticité potentielle ne se réduit plus à la vorticité relative mais où cette dernière évolue conjointement avec le terme de stretching pour conserver la première, une étude analytique analogue à celle de Kunze (1985) ou Young et Ben Jelloul (1997) reste à réaliser. D'un point de vue numérique, notre diagnostic assez sommaire pour en déceler la trace laisse à penser qu'un piégeage grande échelle, à l'échelle des tourbillons du tripôle, a effectivement lieu. Ce diagnostic et les études en écoulement non divergent sur le piégeage des ondes laissent présager du rôle dynamique essentiel tenu par les structures cohérentes en vorticité potentielle dans la propagation des ondes. Par conséquent, un outil numérique approprié à ce type de processus, en permettant une étude diagnostique d taill e, serait la technique des ondelettes qui décompose les champs sur un ensemble de fonctions à support compact permettant une décomposition à la fois spectrale et locale, ce qui n'est pas possible avec la transform e de Fourier classique. Cet outil est d'ailleurs déjà utilisé en dynamique géophysique pour étudier les écoulements turbulents (Farge 1992).

La question de la rétroaction des ondes sur la dynamique tourbillonnaire reste également en suspens. En effet, nous avons envisagé deux mécanismes de rétroaction, un cisaillement moins efficace et un processus diffusif, comme conséquence de la répartition des ondes. Une rationalisation de ces mécanismes que nous n'avons que qualitativement décrits permettrait en les quantifiant de connaître leur degré de pertinence dans l'explication de l'effet stabilisateur des ondes IG sur les tripôles. De plus, ces études numériques d'interaction ondes IG / dynamique tourbillonnaire pourraient être étendues à d'autres configurations. Elargir ce genre d'étude au plan  $\beta$  pourrait notamment donner lieu à une interaction plus intense où d'autres mécanismes entreraient en jeu. Par exemple, le mécanisme d'interaction par résonance triadique n'a pas été envisagé sur le plan  $f$  car la seule triade permettant la modification d'un mode lent par un mode rapide n'est résonante que pour des nombres de Rossby de l'ordre de 1 (Bartello 1995), ce qui n'était pas le cas dans nos si-

mulations. Sur le plan  $\beta$  où la fréquence des modes lents linéaires ne s'annule plus (ondes de Rossby), on peut projeter que cette triade sera résonante à des nombres de Rossby inférieurs à 1 et donc envisager un tel mécanisme d'interaction qui rappelle le prévoit un transfert d'énergie entre mode lent et mode rapide contrairement au mécanisme où les ondes IG rendent les processus de déformation moins efficaces. Notons de plus que dans un modèle shallow-water une couche 1/2, le seul nombre d'onde vertical admissible est lié au rayon de déformation ( $k_z = 2\pi/R_d$ ), ce qui confère au mécanisme d'interaction par résonance triadique une contrainte supplémentaire. Elargir l'étude à une configuration multicouches, autorisant alors plusieurs modes baroclines voire un mode barotrope si le cadre gravité réduite est abandonné, donnerait alors plus de degrés de liberté à un tel mécanisme.

Enfin, revenons sur l'importance des ondes IG vis-à-vis de la dynamique tourbillonnaire. Notre première étude numérique (chapitre 2) a montré que leur effet sur un tourbillon isolé ne représentait pas un phénomène majeur puisque même si le processus de filamentation est légèrement modifié, la structure globale du tourbillon reste inchangée. Des expériences supplémentaires de tourbillon isolé, similaires ou en régime d'ondes IG forcées comme dans le chapitre 3, ont été réalisées sans être présentées dans ce manuscrit. En effet, bien qu'ayant joué sur la forme et l'intensité du tourbillon engendrant des nombres de Rossby et de Froude compris entre 0.1 et 0.7, aucune n'a mis en évidence un effet important des ondes IG sur la dynamique du tourbillon isolé. Par contre l'étude du chapitre 3 consacrée à l'influence des ondes IG sur l'interaction entre tourbillons laisse présager un effet beaucoup plus marqué. En effet, nous avons montré que les ondes IG stabilisaient les tripôles, engendrant des états d'équilibre entre tourbillons différents en présence ou non d'ondes IG. Cet effet n'est sensible que pour des tripôles proches du point critique de stabilité, c'est pourquoi il pourrait être considéré comme négligeable. Toutefois, dans le cadre plus général d'un champ turbulent pleinement développé, les tourbillons passent régulièrement par de telles phases critiques et ces expériences sur les tripôles laissent entrevoir que les ondes, en modifiant lors de ces phases, les processus d'interaction entre tourbillons, peuvent modifier la structure globale de l'écoulement, leur conférant un rôle appréciable dans la dynamique tourbillonnaire. De plus notre étude s'est limitée à un modèle shallow-water 1 couche 1/2 plan  $f$ , d'autres études dans des configurations différentes où la dynamique est plus complexe, comme celles décrites dans le paragraphe précédent, pourraient mettre en évidence une action des ondes IG sur la dynamique tourbillonnaire plus importante que dans nos études.



## Annexe A

# Méthodes d'obtention des équations de balance

Cette annexe technique décrit trois grandes classes de méthodes permettant d'obtenir des équations diagnostiques dites de "balance" reliant les différentes variables de la composante lente.

### A.1 Méthode en modes normaux

Cette méthode, développée entre autres par Daley (1981), consiste à réécrire les équations primitives en termes de modes normaux des équations linéaires, les termes non-linéaires des équations shallow-water étant projetés sur les modes normaux. L'interaction entre les modes se fait alors uniquement via ces termes non-linéaires. Formellement, les équations prennent alors la forme suivante (notation de McIntyre et Norton (1999)):

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + i\Lambda \mathbf{A} = \mathbf{N}(\mathbf{A}, \mathbf{a}) \quad (A.1a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + i\lambda \mathbf{a} = \mathbf{n}(\mathbf{A}, \mathbf{a}) \quad (A.1b)$$

où le vecteur  $\mathbf{A}$  contient les variables du mode lent et  $\mathbf{a}$  celles des mode rapides,  $\Lambda$  et  $\lambda$  sont des matrices diagonales comportant les fréquences propres des différents modes. Enfin  $\mathbf{N}(\mathbf{A}, \mathbf{a})$  et  $\mathbf{n}(\mathbf{A}, \mathbf{a})$  représentent respectivement la projection des termes non linéaires des équations primitives sur le mode lent et sur les modes rapides.

Au 1er ordre la méthode en modes normaux consiste à tronquer l'équation (A.1b) des modes rapides en écrivant que  $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = 0$ . Les équations de balance sont alors

contenues dans :

$$i\lambda \mathbf{a} = \mathbf{n}(\mathbf{A}, \mathbf{a}) \quad (\text{A.2})$$

L'équation (A.2) peut alors être vue comme un système implicite dépendant de  $\mathbf{A}$  et d'inconnue  $\mathbf{a}$ . Les variables du mode rapide apparaissent comme esclaves de celles du mode lent qui ont leur équation pronostique.

Au 2ème ordre, il ne s'agit pas de tronquer (A.1b) mais  $\frac{\partial(A.1b)}{\partial t}$  en écrivant que  $\frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} = 0$ . La grandeur  $\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}$  est alors traitée comme une variable auxiliaire diagnostique. Les ordres suivants s'obtiennent de manière analogue en écrivant qu'à l'ordre  $k$ ,  $\frac{\partial^k \mathbf{a}}{\partial t^k} = 0$ .

## A.2 Méthode en “ $\delta, \gamma$ balance”

Cette méthode s'inspire de la méthode précédente mais s'applique aux variables de l'espace physique. Dans cette optique, le jeu d'équations (1.1) est réécrit dans les variables suivantes (notations de Mohebalhojeh (2002)) :

- divergence  $\delta = \partial_x u + \partial_y v$
- vorticité agéostrophique  $\gamma = f\zeta - g'\nabla^2 h = f(\partial_x v - \partial_y u) - g'\nabla^2 h$
- vorticité potentielle linéarisée  $q_l = \zeta - f\frac{h}{H} = \partial_x v - \partial_y u - f\frac{h}{H}$

pour donner :

$$\partial_t \delta + \nabla \cdot (\delta \mathbf{u}) - 2J(u, v) = \gamma \quad (\text{A.3a})$$

$$\partial_t \gamma + \nabla \cdot (f\zeta \mathbf{u} - g'\nabla^2 (h\mathbf{u})) = (g'H\nabla^2 - f^2) \delta \quad (\text{A.3b})$$

$$\partial_t q_l + \nabla \cdot (q_l \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{A.3c})$$

Ces variables sont plus appropriées que  $u, v$  et  $h$  car en termes d'équations linéaires, la divergence et la vorticité agéostrophique se projettent entièrement sur les modes rapides alors que la vorticité potentielle linéarisée se projette entièrement sur le mode lent de Rossby. Un modèle de balance est alors obtenu à partir de (A.3) en tronquant 2 des dérivées temporelles de  $\delta$  ou  $\gamma$ . Mohebalhojeh et Dritschel (2001) classent alors les équations de balance en trois hiérarchies :

- **La hiérarchie des “ $\delta - \gamma$  balances”**

A l'ordre  $k$ , ce type d'équations de balance est obtenu en annulant dans les

équations primitives  $\partial_t^k \delta$  et  $\partial_t^k \gamma$ . Cette hiérarchie d'équations de balance est la traduction directe de la méthode en modes normaux aux variables de l'espace physique.

– **La hiérarchie des “ $\delta$  balances”**

Il s'agit ici d'annuler à l'ordre  $k$  dans les équations primitives  $\partial_t^k \delta$  et  $\partial_t^{k+1} \delta$ . Le modèle de Bolin-Charney (Charney (1955)), qui remarquaient que la divergence  $\delta$  du mode lent était très faible même pour des nombres de Rossby proches de 1 à condition que le nombre de Froude reste lui négligeable, correspond à l'ordre 0 de cette hiérarchie. Annuler  $\delta$  leur permet de définir une fonction de courant  $\psi$  tel que la vitesse horizontale s'écrive  $\mathbf{u} = \mathbf{k} \wedge \nabla \psi$  et annuler  $\partial_t \delta$  leur permet d'obtenir l'équation diagnostique reliant  $\psi$  au géopotentiel, ce qui correspond à un équilibre géostrophique généralisé. McIntyre et Norton (1999) utilisent également ce type d'équations de balance jusqu'à l'ordre 3 pour inverser leur champ de vorticité potentielle sur un demi hémisphere, il s'avère alors que l'ordre 2 est le plus précis et que la méthode semble robuste même pour des nombres de Froude proches de 1.

– **La hiérarchie des “ $\gamma$  balances”**

Ce type d'équations de balance ne semblent n'avoir été  etudi e jusqu'à présent que par Mohebalhojeh et Dritschel (2001). Elles sont obtenues, à l'ordre  $k$ , en annulant dans les équations primitives  $\partial_t^k \gamma$  et  $\partial_t^{k+1} \gamma$ . Cette hiérarchie et la précedente sont aussi des analogues, indirectes, de la méthode en modes normaux dans le sens où l'on passe de la hiérarchie des “ $\delta - \gamma$  balances” à celle des “ $\delta$  balances” (respectivement “ $\gamma$  balances”) en remarquant, à partir du jeu d'équations (A.3), que  $\partial_t^k \gamma$  (resp.  $\partial_t^k \delta$ ) s'exprime en fonction de  $\partial_t^{k+1} \delta$  (resp.  $\partial_t^{k+1} \gamma$ ).

Les équations de balance obtenues par ces différentes hiérarchies sont non-linéaires et implicites, elles doivent être résolues de manière itérative. Mohebalhojeh et Dritschel (2001) testent numériquement les différentes hiérarchies d'équations de balance aux différents ordres. Pour cela le modèle aux équations primitives est int egr e à partir de conditions initiales respectant le jeu d'équations de balance test e, régulièrement le champ de VP est alors invers e avec le même jeu d'équations, la solution trouvée est alors soustraite à la solution brute du modèle pour obtenir la partie “mode rapide” qu'on espère la plus faible possible. L'indice le plus sensible aux différents ordres est alors l'énergie (cinétique + potentielle) du mode rapide. Il se trouve alors que de manière générale, la précision augmente quand l'ordre augmente jusqu'aux ordres 2,3 environ puis elle chute. Les conditions de balance les plus précises semblent être

les “ $\gamma$ ” et “ $\delta$ ” balances à l’ordre 2. En fait d’après McIntyre et Norton (1999) et Mohebalhojeh et Dritschel (2001), ceci est cohérent avec la théorie d’émission spontanée d’ondes IG de Lighthill. En effet chacun des types d’équations de balance précédents correspond à une certaine précision en terme de Rossby et Froude. Comme formellement la précision des équations de balance issues des différentes hiérarchies à l’ordre 4 est en  $\mathcal{O}(Ro^3, Fr^4)$ , on atteint là la limite due à la radiation de Lighthill qui est en  $\mathcal{O}(Fr^4)$ , c’est pourquoi à partir de cet ordre, la précision des méthodes d’inversion décroît.

### A.3 Méthode en expansions de Rossby

Enfin cette dernière grande classe de méthode d’obtention du jeu d’équations de balance consiste à considérer le nombre de Rossby  $Ro$  comme un petit paramètre et à développer les équations shallow-water en  $Ro$ . Pour cela, à partir d’une échelle de longueur  $L$  et d’une échelle de vitesse  $U$ , les différentes variables du problème sont adimensionnalisées :  $t$  par  $L/U$ ,  $\delta$  et  $q_l$  par  $U/L$ ,  $h$  par  $fUL/g'$  et  $\gamma$  par  $fU/L$ . Les variables et opérateurs sans dimension sont notés  $.^*$ , l’adimensionnalisation des équations (A.3) donne alors :

$$Ro (\partial_{t^*} \delta^* - 2J^*(u^*, v^*) + \nabla^* \cdot (\delta^* \mathbf{u}^*)) - \gamma^* = 0 \quad (\text{A.4a})$$

$$Ro (\partial_{t^*} \gamma^* + \nabla^* \cdot (\zeta^* \mathbf{u}^* - \nabla^{*2} (h^* \mathbf{u}^*))) - (Bu \nabla^{*2} - 1) \delta^* = 0 \quad (\text{A.4b})$$

$$Ro (\partial_{t^*} q_l^* + \nabla^* \cdot (q_l^* \mathbf{u}^*)) = 0 \quad (\text{A.4c})$$

Ces équations font intervenir 2 nombres sans dimension : le nombre de Rossby  $Ro = U/fL$  et le nombre de Burger  $Bu = R_d^2/L^2$  où  $R_d = \sqrt{g'H}/f$  est le rayon de Rossby barocline,  $Ro$  est le petit paramètre des équations alors que  $Bu$  est lui considéré d’ordre 1. Le développement en  $Ro$  des équations (A.4) permet d’obtenir des jeux d’équations diagnostiques de complexité croissante dont l’ordre 0 correspond à l’équilibre géostrophique, l’ordre 1 à l’équilibre quasi-géostrophique. La précision de ces équations diagnostiques est testée par Mohebalhojeh (2002). Lynch (1989) obtient des équations plus simples mais moins précises en linéarisant les équations (A.4) avant de les développer en  $Ro$ .

## Annexe B

# MICOM, modèle aux coordonnées isopycnales

Le code utilisé est une version simplifiée du code MICOM (Miami Isopycnic Coordinate Ocean Model). MICOM est un modèle aux coordonnées isopycnales (Bleck et Boudra 1986, Bleck et Smith 1990, Bleck et al. 1992) qui, une fois discrétisé verticalement, se ramène aux équations de St Venant. Dans ce modèle multicouches, permettant de décrire des situations océanographiques complexes (frontalité, agéostrophie), l'océan est alors considéré comme un empilement de couches non miscibles, chaque couche étant caractérisée par une masse volumique constante. Les différentes couches interagissent les unes avec les autres par le biais de la pression hydrostatique.

### Configuration

La version utilisée est une version adiabatique du modèle original MICOM pour laquelle les équations d'évolution des traceurs (T,S) sont négligées. Dans un domaine double périodique de largeur zonale  $L_x$  et de longueur méridienne  $L_y$ , nous adopterons une configuration gravité réduite 1 couche 1/2 sur le plan  $f$ . Pour la couche active, les équations shallow-water de quantité de mouvement et de continuité sont alors respectivement les suivantes :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + f\mathbf{k} \wedge \mathbf{u} = -g'\nabla h + \partial_x (\nu\partial_x^3 \mathbf{u}) + \partial_y (\nu\partial_y^3 \mathbf{u}) \quad (B.1a)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot ((H + h) \mathbf{u}) = 0 \quad (B.1b)$$

où  $H$  représente la profondeur de la couche au repos,  $h$  les fluctuations de hauteur,  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$  la dérivée Lagrangienne,  $\mathbf{k}$  le vecteur vertical unitaire,  $g'$  le paramètre de gravité réduite et  $\mathbf{u}$  le champ de vitesse horizontale qui se décompose en

une vitesse zonale  $u$  et une vitesse méridienne  $v$ .

### Schémas numériques et diffusion

La discrétisation temporelle est de type leap-frog. La grille utilisée est une grille C et la discrétisation spatiale des équations est basée sur des schémas d'ordre 2 sauf ceux des termes d'advection qui sont d'ordre 4 et basés sur le schéma Quick (Webb et al. 1998 et Holland et al. 1998). Comme tous les schémas d'ordre pair, ce schéma Quick engendre des effets dispersifs. L'opérateur de diffusion est alors tel qu'il permet à la diffusion de dominer cette dispersion numérique. La diffusion choisie est de type biharmonique pour l'équation du moment et le coefficient  $\nu$  de viscosité s'écrit :

$$\nu = \nu_0 + \max(\nu_{Quick}, \nu_{Smag}) = \nu_0 + \max(C_{Quick}|\mathbf{u}|\Delta x^3, C_{Smag}\sigma\Delta x^4) \quad (B.2)$$

où  $\Delta x$  représente le pas de grille et  $\sigma = |\nabla\mathbf{u}|$  le taux de déformation.  $\nu_{Quick}$  correspond au coefficient de viscosité permettant, pour une valeur minimale de  $C_{Quick}$ , de dominer les effets dispersifs du schéma Quick.  $\nu_{Smag}$  correspond à la viscosité de Smagorinsky dont le rôle principal est d'éviter le développement de bruit numérique lors de la formation de choc notamment,  $C_{Smag}$  donne alors plus ou moins d'importance à cette viscosité.

### Zones éponge et de forçage

Dans les expériences numériques du chapitre 3, une zone éponge et une zone de forçage sont mises en place. Dans les deux cas, les champs de vitesse et de fluctuation de hauteur doivent être rappelés vers des valeurs de référence, il s'agit donc d'ajouter à l'équation de quantité de mouvement (B.1a) un terme de la forme  $R(\mathbf{u}_{ref} - \mathbf{u})$  et à l'équation de continuité (B.1b)  $R(h_{ref} - h)$ . Le coefficient  $R$  de rappel, correspondant à l'inverse du temps de rappel, est strictement positif dans les zones éponge et de forçage et nul ailleurs. Dans la zone éponge, la vitesse  $\mathbf{u}$  et la fluctuation de hauteur  $h$  doivent être rappelés vers 0,  $\mathbf{u}_{ref}$  et  $h_{ref}$  sont donc nuls. Dans la zone de forçage  $\mathbf{u}_{ref}$  et  $h_{ref}$  correspondent respectivement aux champs de vitesse et de fluctuation de hauteur vers lesquels les champs  $\mathbf{u}$  et  $h$  sont forcés.

## Annexe C

### Détails du calcul du critère $r_1$

Cette annexe détaille les calculs du critère  $r_1$ , basé sur une composante lente dont le champ de vitesse est de précision  $\mathcal{O}(Ro)$  et le champ d'accélération  $\mathcal{O}(Ro^2)$ .

#### C.1 Equations diagnostiques

Les équations diagnostiques permettant dans un premier temps d'inverser la VP et dans un second temps d'évaluer les accélérations pour calculer  $r$  sont obtenues à partir du développement en  $Ro$  des équations (A.3) rappelées ici :

$$\begin{cases} \partial_t \delta + \nabla \cdot (\delta \mathbf{u}) - 2J(u, v) - \gamma = 0 \\ \partial_t \gamma + \nabla \cdot (f \zeta \mathbf{u} - g' \nabla^2 (h \mathbf{u})) - (g' H \nabla^2 - f^2) \delta = 0 \\ \partial_t q_l + \nabla \cdot (q_l \mathbf{u}) = 0 \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

où  $\delta$ ,  $\gamma$  et  $q_l$  représentent respectivement la divergence, la vorticité agéostrophique et la vorticité potentielle lin aris e :

$$\begin{cases} \delta = \partial_x u + \partial_y v \\ \gamma = f \zeta - g' \nabla^2 h = f(\partial_x v - \partial_y u) - g' \nabla^2 h \\ q_l = \zeta - f \frac{h}{H} = \partial_x v - \partial_y u - f \frac{h}{H} \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

#### Equations sans dimensions

Pour être d velopp es en  $Ro$  ces équations doivent préalablement être exprim es en termes de variables sans dimension. Etant donn es une échelle de longueur  $L$  et une échelle de vitesse  $U$ ,  $t$  est alors adimensionnalis e par  $L/U$ ,  $\delta$  et  $q_l$  par  $U/L$ ,  $h$  par  $fUL/g'$  et  $\gamma$  par  $fU/L$ . Les variables et opérateurs sans dimension sont notés  $*$ ,

l'adimensionnalisation des équations (C.1) donne alors :

$$\begin{cases} Ro(\partial_{t^*}\delta^* - 2J^*(u^*, v^*) + \nabla^* \cdot (\delta^* \mathbf{u}^*)) - \gamma^* = 0 \\ Ro(\partial_{t^*}\gamma^* + \nabla^* \cdot (\zeta^* \mathbf{u}^* - \nabla^{*2}(h^* \mathbf{u}^*))) - (Bu\nabla^{*2} - 1)\delta^* = 0 \\ Ro(\partial_{t^*}q_l^* + \nabla^* \cdot (q_l^* \mathbf{u}^*)) = 0 \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Ces équations font intervenir 2 nombres sans dimension : le nombre de Rossby  $Ro = U/fL$  et le nombre de Burger  $Bu = R_d^2/L^2$  où  $R_d = \sqrt{g'H}/f$  est le rayon de Rossby barocline,  $Ro$  est le petit paramètre des équations alors que  $Bu$  est lui considéré d'ordre 1. Les différentes variables sont alors développées en  $Ro$  :

$$\delta^* = \sum_i \delta_i^* Ro^i \quad \gamma^* = \sum_i \gamma_i^* Ro^i \quad h^* = \sum_i h_i^* Ro^i \quad \zeta^* = \sum_i \zeta_i^* Ro^i \quad q_l^* = \sum_i q_{li}^* Ro^i \quad \dots \quad (\text{C.4})$$

Les variables sans dimensions  $\delta_i^*, \gamma_i^*, h_i^*, \dots$  sont toutes d'ordre 1, elles sont solutions des systèmes suivants obtenus par développement jusqu'à l'ordre 2 en  $Ro$  des équations (C.3) :

– ordre 0

$$\begin{cases} \delta_0^* = 0 \\ \gamma_0^* = 0 \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

– ordre 1

$$\begin{cases} (Bu\nabla^{*2} - 1)\delta_1^* = \nabla^* \cdot (\zeta_0^* \mathbf{u}_0^*) \\ \gamma_1^* = -2J^*(u_0^*, v_0^*) \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

– ordre 2

$$\begin{cases} (Bu\nabla^{*2} - 1)\delta_2^* = -2\partial_{t^*}J^*(u_0^*, v_0^*) + \nabla^* \cdot (\zeta_0^* \mathbf{u}_1^* + \zeta_1^* \mathbf{u}_0^*) - \nabla^{*2}\nabla^* \cdot (h_0^* \mathbf{u}_1^* + h_1^* \mathbf{u}_0^*) \\ \gamma_2^* = -2(J^*(u_0^*, v_1^*) + J^*(u_1^*, v_0^*)) + \nabla^* \cdot (\delta_1^* \mathbf{u}_0^*) + \partial_{t^*}\delta_1^* \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

### Retour aux équations dimensionnelles

Le calcul du critère  $r$ , passant par l'inversion de la VP, repose sur les équations (C.5),(C.6) et (C.7) réécrites en termes de variables dimensionnelles développées en  $Ro$  sous la forme suivante :

$$\delta = \sum_i \delta_i \quad \gamma = \sum_i \gamma_i \quad h = \sum_i h_i \quad \zeta = \sum_i \zeta_i \quad q_l = \sum_i q_{li} \quad \dots \quad (\text{C.8})$$

Cette écriture, où  $\delta_i, \gamma_i, h_i, \dots$  sont d'ordre  $\mathcal{O}(Ro^i)$ , est équivalente à (C.4) à condition de poser  $\forall i$ :

$$\delta_i = \frac{U}{L} Ro^i \delta_i^* \quad \gamma_i = \frac{fU}{L} Ro^i \gamma_i^* \quad h_i = \frac{fUL}{g'} Ro^i h_i^* \quad \zeta_i = \frac{U}{L} Ro^i \zeta_i^* \quad q_{li} = \frac{U}{L} Ro^i q_{li}^* \quad (C.9)$$

Les équations (C.5), (C.6) et (C.7) sont alors redimensionnalisées en utilisant les relations (C.9) pour obtenir :

– ordre 0

$$\begin{cases} \delta_0 = 0 \\ \gamma_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = -\frac{g'}{f} \partial_y h_0 \\ v_0 = \frac{g'}{f} \partial_x h_0 \end{cases} \quad (C.10)$$

– ordre 1

$$\begin{cases} (g'H\nabla^2 - f^2) \delta_1 = \nabla \cdot (f\zeta_0 \mathbf{u}_0) \\ \gamma_1 = -2J(u_0, v_0) \end{cases} \quad (C.11)$$

– ordre 2

$$\begin{cases} (g'H\nabla^2 - f^2) \delta_2 = -2\partial_t J(u_0, v_0) + f\nabla \cdot (\zeta_0 \mathbf{u}_1 + \zeta_1 \mathbf{u}_0) - g'\nabla^2 \nabla \cdot (h_0 \mathbf{u}_1 + h_1 \mathbf{u}_0) \\ \gamma_2 = -2(J(u_0, v_1) + J(u_1, v_0)) + \nabla \cdot (\delta_1 \mathbf{u}_0) + \partial_t \delta_1 \end{cases} \quad (C.12)$$

Pour que les équations d'ordre 2 (C.12) soient explicitement diagnostiques, il reste à exprimer  $\partial_t \delta_1$  et  $\partial_t J(u_0, v_0)$ . En fait ces deux termes nécessitent  $\partial_t h_0$  qui s'obtient à partir de l'ordre 1 de l'équation de continuité :  $\partial_t h_0 = -H\delta_1$ . On a alors pour  $\partial_t \delta_1$  :

$$\begin{aligned} (g'H\nabla^2 - f^2) \partial_t \delta_1 &= \partial_t \nabla \cdot (f\zeta_0 \mathbf{u}_0) \\ &= \frac{g'^2}{f} \partial_t J(h_0, \nabla^2 h_0) \\ &= -\frac{g'^2 H}{f} (J(\delta_1, \nabla^2 h_0) + J(h_0, \nabla^2 \delta_1)) \\ &= g'H (J(\zeta_0, \delta_1) - \nabla \cdot (\nabla^2 \delta_1 \mathbf{u}_0)) \end{aligned} \quad (C.13)$$

$\partial_t \delta_1$  s'obtient donc par inversion de l'opérateur  $(g'H\nabla^2 - f^2)$ .

L'expression de  $\partial_t J(u_0, v_0)$  est quant à elle la suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t J(u_0, v_0) &= \frac{g'^2}{f^2} [J(-\partial_{yt} h_0, \partial_x h_0) + J(-\partial_y h_0, \partial_{xt} h_0)] \\ &= \frac{g'H}{f} [J(\partial_y \delta_1, v_0) + J(\partial_x \delta_1, u_0)] \end{aligned} \quad (C.14)$$

## C.2 Evaluation de l'écoulement lent de précision $\mathcal{O}(Ro)$

Nous cherchons ici à évaluer le champ de vitesse du mode lent avec une précision en  $\mathcal{O}(Ro)$ . Il est obtenu en inversant l'anomalie de VP  $q$  à partir des équations diagnostiques (C.10) et (C.11). La vitesse horizontale est décomposée en une partie rotationnelle et une partie divergente :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \\ &= \mathbf{k} \wedge \nabla \psi_0 + \nabla \chi_0 + \mathbf{k} \wedge \nabla \psi_1 + \nabla \chi_1 \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

De l'ordre 0 on tire que  $\chi_0 = 0$ ,  $\psi_0 = \frac{g'h_0}{f}$  et donc que  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{k} \wedge \nabla \left( \frac{g'h_0}{f} \right)$ .

### Premier problème

Il s'agit de résoudre dans un premier temps le problème suivant d'inconnues  $h_0$ ,  $\zeta_0$ ,  $h_1$  et  $\zeta_1$  :

$$q \left( 1 + \frac{h_0 + h_1}{H} \right) = \zeta_0 + \zeta_1 - f \frac{h_0 + h_1}{H} \quad (\text{C.16})$$

où l'anomalie de vorticité potentielle  $q$  est celle issue des champs bruts du modèle shallow-water. En fait comme  $\zeta_0 = \nabla^2 \psi_0$  et que d'après l'ordre 0 (C.10)  $h_0 = \frac{f\psi_0}{g'}$ , les inconnues ne sont plus qu'au nombre de trois :  $\psi_0$ ,  $\zeta_1$  et  $h_1$ . L'ordre 1 (C.11) nous fournit une deuxième équation liant  $\zeta_1$  et  $h_1$  :

$$f\zeta_1 - g'\nabla^2 h_1 = -2J(\partial_x \psi_0, \partial_y \psi_0) \quad (\text{C.17})$$

Il manque donc une équation pour fermer le système, nous choisissons alors, comme Mohebalhojeh (2002), d'imposer  $q_{l1} = 0$  ce qui donne cette relation supplémentaire entre  $\zeta_1$  et  $h_1$  :

$$\zeta_1 = f \frac{h_1}{H} \quad (\text{C.18})$$

Inverser l'anomalie  $q$ , c'est donc résoudre le premier problème suivant d'inconnues  $\psi_0$  et  $h_1$  :

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi_0 - (f + q) \frac{f\psi_0}{g'H} = q \left( 1 + \frac{h_1}{H} \right) \\ g'\nabla^2 h_1 - f^2 \frac{h_1}{H} = 2J(\partial_x \psi_0, \partial_y \psi_0) \end{cases} \quad (\text{C.19})$$

Ce problème, constitué de deux équations de Helmholtz couplées, est résolu de manière itérative de la façon suivante :

- Avant la première itération,  $\psi_0^0 = 0$  et  $h_1^0 = 0$ .
- A la  $n^{\text{ème}}$  itération, la première équation de (C.19) d'inconnue  $\psi_0$  est inversée

par la méthode du gradient conjugué avec  $h_1 = h_1^{n-1}$  et comme première estimation de  $\psi_0$ ,  $\psi_0^{n-1}$ , on obtient alors  $\psi_0^n$ . Puis la 2<sup>ème</sup> équation de (C.19) d'inconnue  $h_1$  est inversée avec  $\psi_0 = \psi_0^n$  et comme première estimation de  $h_1$ ,  $h_1^{n-1}$ , on obtient alors  $h_1^n$ .

Une fois ce premier problème résolu, toutes les caractéristiques d'ordre 0 de l'écoulement sont connues, alors qu'à l'ordre 1 seule  $h_1$  l'est (et  $\zeta_1 = fh_1/H$ ).

*Remarque:* nous aurions pu choisir de fermer le système à la manière de Warn et al. (1995), ie en développant également  $q$  en  $Ro$  et en considérant que seul le terme d'ordre 0 est non nul, le système à résoudre aurait été le suivant :

$$\begin{cases} q \left( 1 + \frac{f\psi_0}{g'H} \right) = \nabla^2 \psi_0 - \frac{f^2 \psi_0}{g'H} \\ q \frac{h_1}{H} = \zeta_1 - f \frac{h_1}{H} \\ f\zeta_1 - g'\nabla^2 h_1 = -2J(\partial_x \psi_0, \partial_y \psi_0) \end{cases} \quad (\text{C.20})$$

Ce problème consiste à résoudre successivement deux équations de Helmholtz :

$$\nabla^2 \psi_0 - (f + q) \frac{f\psi_0}{g'H} = q \quad (\text{C.21})$$

puis

$$\nabla^2 h_1 - (f + q) \frac{fh_1}{g'H} = \frac{2}{g'} J(\partial_x \psi_0, \partial_y \psi_0) \quad (\text{C.22})$$

enfin on accède facilement à  $\zeta_1$  puisque  $\zeta_1 = (f + q) \frac{h_1}{H}$ .

Nous avons préféré fermer le système à la manière de Mohebalhojeh (2002) car ainsi (C.16) est exactement vérifiée alors qu'à la manière de Warn et al. (1995) l'anomalie de VP liée au mode lent diffère de l'anomalie de VP brute par des termes d'ordre  $\mathcal{O}(Ro^2)$ .

## Second problème

Son but est de déterminer le reste des caractéristiques de l'écoulement d'ordre 1. La divergence est obtenue en inversant la première équation du système (C.11) puis les fonctions  $\chi_1$  et  $\psi_1$  s'obtiennent par inversion de  $\nabla^2 \chi_1 = \delta_1$  et  $\nabla^2 \psi_1 = \zeta_1$ . A la fin du second problème, on a alors accès au champ de vitesse d'ordre 1 :

$$\begin{cases} u_1 = -\partial_y \psi_1 + \partial_x \chi_1 \\ v_1 = \partial_x \psi_1 + \partial_y \chi_1 \end{cases} \quad (\text{C.23})$$

### C.3 Accélération Lagrangiennes

Le critère  $r$  nécessitant la connaissance du champ d'accélération Lagrangienne, l'objectif de ce paragraphe est de déterminer celui lié à la vitesse  $\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ . Dans toute cette annexe la dérivée Lagrangienne contenant au maximum des termes d'ordre  $\mathcal{O}(Ro^2)$  est notée  $\frac{D_f}{Dt}$ . Précisons ici l'expression de l'accélération liée à  $\mathbf{u}_f$ ,  $\frac{D_f \mathbf{u}_f}{Dt}$  :

$$\frac{D_f \mathbf{u}_f}{Dt} = \partial_t(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) + (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) \cdot \nabla \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 \quad (\text{C.24})$$

Pour évaluer les différents termes de (C.24), reprenons l'équation de quantité de mouvement du mode lent en développant chaque variable jusqu'à l'ordre 2 :

$$\partial_t(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \cdot \nabla(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + f\mathbf{k} \wedge (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = -g' \nabla(h_0 + h_1 + h_2) \quad (\text{C.25})$$

L'ordre 0 de cette équation correspond à l'équilibre géostrophique ( $f\mathbf{k} \wedge \mathbf{u}_0 = -g' \nabla h_0$ ), l'ordre 1 à l'équilibre quasi-géostrophique :

$$\partial_t \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_0 = -g' \nabla h_1 - f\mathbf{k} \wedge \nabla \mathbf{u}_1 = -\nabla P_1 - f\mathbf{k} \wedge \nabla \chi_1 \quad (\text{C.26})$$

où  $P_1 = g'h_1 - f\psi_1$ . Enfin l'ordre 2 de (C.25) donne :

$$\partial_t \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_0 = -g' \nabla h_2 - f\mathbf{k} \wedge \nabla \mathbf{u}_2 = -\nabla P_2 - f\mathbf{k} \wedge \nabla \chi_2 \quad (\text{C.27})$$

où  $P_2 = g'h_2 - f\psi_2$ . Enfin l'addition de (C.26) et (C.27) permet d'accéder à l'accélération Lagrangienne (C.24) :

$$\frac{D_f \mathbf{u}_f}{Dt} = -\nabla(P_1 + P_2) - f\mathbf{k} \wedge \nabla(\chi_1 + \chi_2) \quad (\text{C.28})$$

### C.4 Calcul du critère $r_1$

L'étape C.2 nous a fourni avec une précision en  $\mathcal{O}(Ro)$  le champ de vitesse d'advection de  $q$  :  $\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$  :

$$\frac{D}{Dt} \nabla q \simeq -[\nabla \mathbf{u}_f]^* \nabla q \quad (\text{C.29})$$

#### Expression de $r_1$

Le critère  $r_1$ , basé sur le champ de vitesse  $\mathbf{u}_f$ , s'exprime alors comme suit :

$$r_1 = \frac{\zeta_f + 2(D_f \phi_f / Dt)}{\sigma_f} \quad (\text{C.30})$$

où d'une part

$$\begin{aligned}\sigma_{sf} &= \partial_x(v_0 + v_1) + \partial_y(u_0 + u_1) & \sigma_f &= \sqrt{\sigma_{nf}^2 + \sigma_{sf}^2} \\ \sigma_{nf} &= \partial_x(u_0 + u_1) - \partial_y(v_0 + v_1) & \zeta_f &= \zeta_0 + \zeta_1\end{aligned}\quad (\text{C.31})$$

Les champs de vorticité,  $\zeta_f$ , et de déformation,  $\sigma_f$ , correspondant à  $\mathbf{u}_f$  s'expriment à partir de l'écoulement lent déterminé dans le paragraphe C.2. D'autre part le taux de rotation des axes de déformation de  $\mathbf{u}_f$  a la forme suivante :

$$2 \frac{D_f \phi_f}{Dt} = \frac{\sigma_{sf} \frac{D_f \sigma_{nf}}{Dt} - \sigma_{nf} \frac{D_f \sigma_{sf}}{Dt}}{\sigma_f^2} \quad (\text{C.32})$$

où

$$\begin{cases} \frac{D_f \sigma_{nf}}{Dt} = \partial_x \left( \frac{D_f u_f}{Dt} \right) - \partial_y \left( \frac{D_f v_f}{Dt} \right) \\ \frac{D_f \sigma_{sf}}{Dt} = \partial_y \left( \frac{D_f u_f}{Dt} \right) + \partial_x \left( \frac{D_f v_f}{Dt} \right) \end{cases} \quad (\text{C.33})$$

Ces taux de variations de l'étirement  $\sigma_{nf}$  et du cisaillement  $\sigma_{sf}$  s'expriment à partir des accélérations Lagrangiennes calcul es dans le paragraphe C.3 pour donner :

$$\begin{cases} \frac{D_f \sigma_{nf}}{Dt} = (\partial_{yy} - \partial_{xx})(P_1 + P_2) + 2f \partial_{xy}(\chi_1 + \chi_2) \\ \frac{D_f \sigma_{sf}}{Dt} = -2\partial_{xy}(P_1 + P_2) + f(\partial_{yy} - \partial_{xx})(\chi_1 + \chi_2) \end{cases} \quad (\text{C.34})$$

où  $P_1 = g'h_1 - f\psi_1$ ,  $\nabla^2 P_2 = -\gamma_2$  et  $\nabla^2 \chi_2 = \delta_2$ . Les termes d'ordre  $\mathcal{O}(Ro)$  ont été calculés lors de la détermination de l'écoulement lent au paragraphe C.2,  $\gamma_2$  et  $\delta_2$  sont donnés par le jeu d'équations diagnostiques d'ordre 2 (C.12). Tout est alors réuni pour calculer le taux de rotation des axes de déformation (cf (C.32)) et enfin le critère  $r_1$ .



---

# Bibliographie

- Arai M., Yamagata T.** 1994: Asymmetric evolution of eddies in rotating shallow water. *Chaos*, **4**, 163–175
- Arhan M., Carton X., Piola A., Zenk W.** 2002: Deep lenses of circumpolar water in the argentine basin. *J. Geophys. Res.*, **107**, 10.1029/2001JC00963.
- Bartello P.** 1995: Geostrophic adjustment and inverse cascades in rotating stratified turbulence. *J. Atmos. Sci.*, **52**, 4410–4428
- Bühler O.** 2000: On the vorticity transport due to dissipating or breaking waves in shallow-water flow. *J. Fluid Mech.*, **407**, 235–263
- Bühler O., McIntyre M.** 1998: On non-dissipative wave-mean interactions in the atmosphere or oceans. *J. Fluid Mech.*, **354**, 301–343
- Bühler O., McIntyre M.** 2003: Remote recoil: a new wave-mean interaction effect. *J. Fluid Mech.*, **492**, 207–230
- Bjerknes J.** 1962: Synoptic survey of the interaction of sea and atmosphere in the North Atlantic. *Geophysica Norvegia*, **XXIV**, 115–145
- Bleck R., Boudra D.** 1986: Wind driven spin-up in eddy-resolving ocean models formulated in isopycnic and isobaric coordinates. *J. Geophys. Res.*, **91**, 7611–7621
- Bleck R., Rooth C., Hu D., Smith L.** 1992: Salinity driven thermocline transients in a wind and thermohaline forced isopycnic coordinate model of the North Atlantic. *J. Phys. Oceanogr.*, **22**, 1486–1505
- Bleck R., Smith L.** 1990: A wind driven isopycnic coordinate model of the North and Equatorial Atlantic ocean. 1. Model development and supporting experiments. *J. Geophys. Res.*, **95**, 3273–3285
- Bolin B.** 1955: Numerical forecasting with the barotropic model. *Tellus*, **7**, 27–49

- Bouchut F., Le Sommer J., Zeitlin V.** 2004: Frontal geostrophic adjustment and nonlinear wave phenomena in one dimensional rotating shallow-water. Part 2: High-resolution numerical simulations. *J. Fluid Mech.*, **514**, 35–63
- Carton X., Chérubin L., Paillet J., Morel Y., Serpette A., Le Cann B.** 2002: Meddy coupling with a deep cyclone in the Gulf of Cadiz. *J. Mar. Syst.*, **32**, 13–42
- Carton X., Legras B.** 1994: The life-cycle of tripoles in two-dimensional incompressible flows. *J. Fluid Mech.*, **267**, 53–82
- Charney J.** 1948: On the scale of atmospheric motions. *Geophys. Publ.*, **17**(2), 1–17
- Charney J.** 1955: The use of the primitive equations of motion in numerical prediction. *Tellus*, **7**, 22–26
- Charney J., Fjørtoft R., von Neumann J.** 1950: Numerical integration of the barotropic vorticity equation. *Tellus*, **2**, 237–254
- Corréard S., Carton X.** (1998) Vertical alignment of geostrophic vortices. In: Simulation and identification of coherent structures in flows. Kluwer Acad. pp 191–200.
- Cresswell G.** 1982: The coalescence of two East Australian current warm-core eddies. *Science*, **215**, 161–164.
- Daley R.** 1981: Normal mode initialization. *Rev. Geophys. Space Phys.*, **19**, 450–468
- Dewar W., Killworth P.** 1995: Do fast gravity waves interact with geostrophic motions? *Deep-Sea Res.*, **42**(7), 1063–1081
- Dritschel D., Haynes P., Jukes M., Shepherd T.** 1991: The stability of a two-dimensional vorticity filament under uniform strain. *J. Fluid Mech.*, **230**, 647–665
- Egbert G., Ray R.** 2000: Significant dissipation of tidal energy in the deep ocean inferred from satellite altimeter data. *Nature*, **405**, 775–778
- Farge M.** 1992: Wavelet transforms and their application to turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **24**, 395–457
- Farge M., Sadourny R.** 1989: Wave-vortex dynamics in rotating shallow water. *J. Fluid Mech.*, **206**, 443–462

- 
- Ford R., McIntyre M., Norton W.** 2000: Balance and slow quasi-manifold: some explicit results. *J. Atmos. Sci.*, **57**, 1236–1254
- Garrett C.** 2003: Internal tides and ocean mixing. *Science*, **301**, 1858–1859
- Haller G.** 2001: Lagrangian coherent structures and the rate of strain in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, **13**, 3365–3385
- Herbette S., Morel Y., Arhan M.** 2003: Erosion of a surface vortex by a seamount. *J. Phys. Oceanogr.*, **33**, 1664–1679
- Holland W., Chow J., Bryan F.** 1998: Application of a third order upwind scheme in the near ocean model. *J. Climate*, **11**, 1487–1493
- Hoskins B., McIntyre M., Robertson W.** 1985: On the use and significance of isentropic potential vorticity maps. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **111**, 877–946
- Hsu C., Plumb R.** 2000: Nonaxisymmetric thermally driven circulations and upper-tropospheric monsoon dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **57**, 1255–1276
- Hua B., Klein P.** 1998: An exact criterion for the stirring properties of nearly two-dimensional turbulence. *Physica D*, **113**, 98–110.
- Hua B., McWilliams J., Klein P.** 1998: Lagrangian accelerations in geostrophic turbulence. *J. Fluid Mech.*, **366**, 87–108.
- Kida S.** 1981: Motion of an elliptic vortex in a uniform shear flow. *J. Phys. Soc. Jpn.*, **50**, 3517–3520
- Kimura Y., Herring J.** 2001: Gradient enhancement and filament ejection for non-uniform elliptic vortex in 2D turbulence. *J. Fluid Mech.*, **439**, 43–56
- Klein P., Hua B., Carton X.** 2003: Emergence of cyclonic structures due to the interaction between near-inertial oscillations and mesoscale eddies. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **129**, 2513–2525
- Klein P., Hua B., Lapeyre G.** 2000: Alignment of tracer gradient vectors in 2D turbulence. *Physica D*, **146**, 246–260
- Klein P., Llewellyn Smith S., Lapeyre G.** 2004: Organization of near-inertial energy by an eddy field. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **130**, 1153–1166
- Kloosterziel R., Van Heijst G.** 1991: An experimental study of unstable barotropic vortices in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.*, **223**, 1–24

- Koh T., Legras B.** 2002: Hyperbolic trajectories and the Antarctic polar vortex. *Chaos*, **12**, 382–394
- Kunze E.** 1985: Near-Inertial wave propagation in geostrophic shear. *J. Phys. Oceanogr.*, **15**, 544–565
- Kuo A.** (1999) Geostrophic Adjustment and wave-vortex interaction in rotating shallow-water. PhD thesis Columbia University
- Kuo A., Polvani L.** 1999: Wave-vortex interaction in rotating shallow water. Part 1. One space dimension. *J. Fluid Mech.*, **394**, 1–27
- Lapeyre G., Klein P., Hua B.** 1999: Does the tracer gradient vector align with the strain eigenvectors in 2D turbulence? *Phys. Fluids*, **11**, 3729–3737.
- Ledwell J., Montgomery E., Polzin K., St Laurent L., Schmitt R., Toole J.** 2000: Evidence for enhanced mixing over rough topography in the abyssal ocean. *Nature*, **403**, 179–182
- Legras B., Dritschel D., Caillol P.** 2001: The erosion of a distributed two-dimensional vortex in a background straining flow. *J. Fluid Mech.*, **441**, 369–398
- Leith C.** 1980: Non-linear normal mode initialization and quasi-geostrophic theory. *J. Atmos. Sci.*, **37**, 958–968
- Lorenz E.** 1986: On the existence of a slow manifold. *J. Atmos. Sci.*, **43**, 1547–1557
- Lorenz E.** 1992: The slow manifold-what is it? *J. Atmos. Sci.*, **49**, 2449–2451
- Lorenz E., Krishnamurthy V.** 1987: On the nonexistence of a slow manifold. *J. Atmos. Sci.*, **44**, 2940–2950
- Louazel S., Hua B.** 2004: Vortex erosion in a shallow-water model. *Phys. Fluids*, **16**, 3079–3085
- Lynch P.** 1989: The slow equations. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **115**, 201–219
- Maassen S., Clercx H., van Heijst G.** 2002: Self-organisation of quasi-two-dimensional turbulence in stratified fluids in square and circular containers. *Phys. Fluids*, **14**, 2150–2169
- Mariotti A., Legras B., Dritschel D.** 1994: Vortex stripping and the erosion of coherent structures in two-dimensional flows. *Phys. Fluids A*, **6**, 3954–3962

- 
- McFarlane N.** 1987: The effect of orographically excited gravity wave drag on the general circulation of the lower stratosphere and troposphere. *J. Atmos. Sci.*, **44**, 1775–1800
- McIntyre M., Norton W.** 1990: Dissipative wave-mean interactions and the transport of vorticity or potential vorticity. *J. Fluid Mech.*, **212**, 403–435
- McIntyre M., Norton W.** 1999: Potential vorticity inversion on a hemisphere. *J. Atmos. Sci.*, **57**, 1214–1235
- Melander M., McWilliams J., Zabusky N.** 1987: Axisymmetrization and vorticity-gradient intensification of an isolated two-dimensional vortex through filamentation. *J. Fluid Mech.*, **178**, 137–159.
- Mohebalhojeh A.** 2002: On shallow water potential vorticity inversion by Rossby number expansions. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **128**, 679–694
- Mohebalhojeh A., Dritschel D.** 2001: Hierarchies of balance conditions for the f-plane shallow water equations. *J. Atmos. Sci.*, **58**, 2411–2426
- Moulin F., Flór J.-B.** 2004a: Experimental study on wave-breaking and mixing properties in the periphery of an intense vortex. *Dyn. Atmos. Oceans* sous presse
- Moulin F., Flór J.-B.** 2004b: Vortex wave interaction in a rotating stratified fluid : WKB theory. *J. Fluid Mech.* en révision
- Munk W., Wunsch C.** 1998: Abyssal recipes II: energetics of tidal and wind mixing. *Deep-Sea Res.*, **45**, 1977–2010
- Muraki D., Snyder C., Rotunno R.** 1999: The next-order corrections to quasi-geostrophic theory. *J. Atmos. Sci.*, **56**, 1547–1560
- Nof D., Dewar W.** 1994: Alignment of lenses: laboratory and numerical experiments. *Deep-Sea Res.*, **41**, 1207–1229.
- Okubo A.** 1970: Horizontal dispersion of floatable particles in the vicinity of velocity singularities such as convergences. *Deep-Sea Res.*, **17**, 445–454.
- Palmer T., Shutts G., Swinbank R.** 1986: Alleviation of a systematic westerly bias in general circulation and numerical weather prediction models through an orographic gravity wave drag parametrization. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **112**, 1001–1039

- Phillips N.** 1954: Energy transformations and meridional circulations associated with simple baroclinic waves in a two-level, quasi-geostrophic model. *Tellus*, **6**, 273–286
- Pingree R., Le Cann B.** 1992: Three anticyclonic Slope Water Oceanic eDDIES (SWODDIES) in the Southern Bay of Biscay in 1990. *Deep-Sea Res.*, **39**, 1147–1175
- Plougonven R., Zeitlin V.** 2002: Internal gravity wave emission from a pancake vortex: An example of wave-vortex interaction in strongly stratified flows. *Phys. Fluids*, **14**, 1259–1268
- Polvani L., Flierl G., Zabusky N.** 1989: Filamentation of unstable vortex structures via separatrix crossing: A quantitative estimate of onset time. *Phys. Fluids*, **1**, 181–184.
- Polvani L., McWilliams J., Spall M., Ford R.** 1994: The coherent structures of shallow-water turbulence: Deformation radius effects, cyclone/anticyclone asymmetry and gravity-wave generation. *Chaos*, **4**(2), 177–186
- Rivière G., Hua B., Klein P.** 2003: Perturbation growth in terms of barotropic alignment properties. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **129**, 2613–2626
- Rosby C.** 1939: Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action. *J. Mar. Res.*, pp 38–55
- Saujani S., Shepherd T.** 2001: Comments on 'balance and the slow quasimanifold : some explicit results'. *J. Atmos. Sci.*, **59**, 2874–2877
- Staquet C., Bouruet-Aubertot P.** 2001: Mixing in weakly turbulent stably stratified flows. *Dyn. Atmos. Oceans*, **34**, 81–102
- Straub D.** 2003: Instability of 2D flows to hydrostatic 3D perturbations. *J. Atmos. Sci.*, **60**, 79–102
- Tychensky A., Carton X.** 1998: Hydrological and dynamical characterization of meddies in the Azores region: A paradigm for baroclinic vortex dynamics. *J. Geophys. Res.*, **103**, 25061–25079.
- Vallis G.** 1996: Potential vorticity inversion and balanced equations of motion for rotating and stratified flows. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **122**, 291–322

- 
- Van Heijst G., Kloosterziel R., Williams C.** 1991: Laboratory experiments on the tripolar vortex in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.*, **225**, 301–331
- Vanneste J., Yavneh I.** 2004: Exponentially small inertia-gravity waves and the breakdown of quasi-geostrophic balance. *J. Atmos. Sci.*, **61**, 211–223
- Viera F.** 1995: On the alignment and axisymmetrisation of a vertically tilted geostrophic vortex. *J. Fluid Mech.*, **289**, 29–50
- Warn T., Bokhove O., Shepherd T., Vallis G.** 1995: Rossby number expansions, slaving principles, and balance dynamics. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **121**, 723–739
- Webb D., De Cuevas B., Richmond C.** 1998: Improved advection schemes for ocean models. *J. Atmos. Ocean. Techn.*, **15**, 1171–1187
- Weiss J.** 1991: The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional hydrodynamics. *Physica D*, **48**, 273–294.
- Whitaker J.** 1993: A comparison of primitive and balance equation simulations of baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 1519–1530
- Wunsch C.** 1998: The work done by the wind on the oceanic general circulation. *J. Phys. Oceanogr.*, **28**, 2332–2340
- Wunsch C.** 2002: What is the thermohaline circulation? *Science*, **298**, 1179–1181
- Wunsch C., Ferrari R.** 2004: Vertical mixing, Energy, and the General Circulation of the Oceans. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **36**, 281–314
- Young W., Ben Jelloul M.** 1997: Propagation of near-inertial oscillations through a geostrophic flow. *J. Mar. Res.*, **55**, 735–766