

Thèse de doctorat

présentée par

Eric Danioux

Spécialité : Physique Océan-Atmosphère

Propagation 3D d'ondes inertielles au sein d'un champ turbulent mésoéchelle

soutenue le **23 Mars 2007**, devant le jury composé de :

Alain COLIN DE VERDIERE	Président du jury	LPO, Brest
Chantal STAQUET	Rapporteur	LEGI, Grenoble
Jacques VANNESTE	Rapporteur	University of Edinburgh
Guillaume LAPEYRE	Examineur	LMD, Paris
Patrice KLEIN	Directeur de thèse	LPO, Brest

Thèse préparée au sein du Laboratoire de Physique des Océans
UMR 6523 CNRS - IFREMER - UBO

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse Patrice Klein, pour ses précieux conseils et son soutien, en particulier sur la fin de ma thèse. Patrice, j'ai appris beaucoup à ton contact, évidemment des connaissances scientifiques, mais également une certaine façon de pratiquer la recherche, comme par exemple simplifier les problèmes afin de mieux comprendre la physique sous-jacente.

Je remercie les rapporteurs et membres du jury de thèse : Chantal Staquet, Jacques Vanneste, Alain Colin de Verdière et Guillaume Lapeyre. Guillaume, merci pour ton aide et ton intérêt pour mes travaux.

Merci à Lien Hua et le groupe GFD. Essayez d'organiser des réunions GFD plus souvent ! Ah oui, pardon, la dernière, c'était moi qui devait m'y coller... mes excuses...

Merci à Xavier Carton de m'avoir accueilli au sein du Laboratoire de Physique des Océans.

Merci à Pascal Rivière pour sa disponibilité et sa gentillesse.

Merci à mes collègues précaires des non moins précaires algécos, portakabin & co : Claire M., Claire G., Catherine, Carole, Guillaume, Jeff (tu as un *réel* talent d'humoriste), Eric "le jeune", Mark, Jordi. Vous allez tous beaucoup me manquer. Tout comme les pauses café si essentielles à l'équilibre de la journée de travail ! Merci aussi à Richard, Bruno et Louis pour les discussions que nous avons pu y avoir. Coucou aux "anciens" qui sont déjà partis vers d'autres horizons : Marc P., Marc d'O., Gaël, Stéphanie, Fabrice.

Merci à Thierry Reynaud et Sylvie Le Gentil pour leur disponibilité et leurs innombrables coups de pouce informatiques.

Merci à Jocelyne Le Gall pour son dévouement et son professionnalisme au secrétariat.

Plus généralement, merci à l'ensemble du personnel du LPO (sites Ifremer et fac) pour l'ensemble des petits coups de pouce que j'ai pu recevoir.

Enfin, et bien sûr, merci à ma famille.

Table des matières

Introduction générale	3
1 Intérêt de l'étude. Etat de l'art	7
1.1 Les réservoirs d'énergie dans l'océan	7
1.2 Sources d'énergie des ondes inertielles	7
1.2.1 Le vent, principale source d'énergie inertielle	7
1.2.2 Variabilité spatiale et temporelle liée à l'injection d'énergie inertielle	8
1.2.3 Problèmes liés à l'échantillonnage temporel du vent. Phénomène de résonance.	9
1.3 Pourquoi s'intéresser aux ondes inertielles?	13
1.3.1 Rôle dans l'échange de propriétés entre les couches de surface et les couches profondes	13
1.3.2 Rôle important dans la circulation thermohaline	14
1.4 Décomposition mode lent / mode rapide	16
1.4.1 Théorie linéaire	16
1.4.2 Séparation mode lent / mode rapide dans un modèle aux équations primitives	17
1.4.3 Effets du mode rapide sur le mode lent	18
1.4.4 Effets de la vorticité du mode lent sur le mode rapide	19
1.4.5 Effets des autres composantes du champ de déformation mésoéchelle	24
1.4.6 Effet- β sur la propagation des NIO	26
2 Une nouvelle méthode d'extraction du signal inertiel. Comparaison avec deux autres méthodes	27
2.1 Description de la nouvelle méthode	27
2.1.1 Equations de base et adimensionnalisation	28
2.1.2 Description de la méthode	29
2.2 Evaluation de l'erreur commise par la méthode d'inversion de vorticité potentielle	34
2.3 Présentation des deux autres méthodes	40
2.3.1 Méthode de moyenne	40
2.3.2 Méthode de soustraction	40
2.4 Comparaison des trois méthodes	40
2.4.1 Bilan des avantages et des inconvénients des 3 méthodes	40
2.4.2 Résultats	42

2.4.3	Conclusion	43
3	Structure de l'énergie inertielle horizontale et verticale	49
3.1	Propagation of wind energy into the deep ocean through mesoscale eddies	49
3.1.1	Introduction	50
3.1.2	Physical mechanisms	51
3.1.3	Primitive Equations simulations	52
3.1.4	Inertial motions : horizontal kinetic energy	57
3.1.5	Inertial motions : vertical kinetic energy	60
3.1.6	Characteristics of the two w -maxima	64
3.1.7	Discussion and conclusion	67
3.2	Propagation verticale de l'énergie cinétique inertielle horizontale . . .	71
3.2.1	Observations	71
3.2.2	Explication	72
3.3	Vitesses verticales inertielles moyennes	81
3.3.1	Introduction	81
3.3.2	Solution analytique	81
3.3.3	Observations	82
3.4	Conservation de l'énergie mécanique	87
4	Un nouveau mécanisme de résonance généré par les ondes inertielles	93
4.1	Introduction	93
4.2	Resonance in a Shallow Water model	94
4.2.1	The model used and its nondimensionalization	94
4.2.2	Asymptotic analysis	95
4.2.3	The resonance mechanism	98
4.3	Generalization to Primitive Equations	99
4.3.1	Theory	99
4.3.2	Numerical simulations	102
4.4	Conclusion	103
	Conclusion générale	107
	Bibliographie	112

Introduction générale

Les ondes inertielles sont des ondes internes qui oscillent à la fréquence de Coriolis ($f = 2\Omega \sin \theta$ où Ω est la vitesse angulaire de rotation de la Terre et θ la latitude considérée). Elles peuvent être générées par différents processus, les deux principales sources étant le vent et l'ajustement de Rossby lors de pertes de géostrophie dans les équations du mouvement. Néanmoins, généralement, les ondes inertielles engendrées par le vent sont beaucoup plus énergétiques que celles créées par ajustement géostrophique. Par extension, on nomme aussi ondes inertielles (ou ondes quasi-inertielles) des ondes oscillant à une fréquence proche de f . D'après Gill (1982), l'équation de dispersion des ondes internes en milieu tournant est donnée par : $\omega^2 = f^2 + N^2 k_h^2 / k_z^2$ où k_h et k_z sont l'amplitude respectivement des nombres d'onde horizontal et vertical et N la fréquence de Brunt Väisälä. Les ondes quasi inertielles (notées NIO par la suite pour near inertial oscillations) sont donc des ondes internes pour lesquelles le terme $N^2 \frac{k_h^2}{k_z^2}$ est petit devant f^2 , et par conséquent dont les échelles horizontales sont bien plus grandes que les échelles verticales.

En 1985, inspiré des travaux de Stern (1965), Niiler (1969) et Weller (1982), Kunze insère dans le calcul de l'équation de dispersion des ondes internes les termes d'advection des vitesses quasi-inertielles par les vitesses mésoéchelles de l'écoulement ambiant en utilisant l'hypothèse WKB (qui stipule que l'échelle horizontale des vitesses inertielles est très inférieure à l'échelle horizontale des vitesses mésoéchelles). Il obtient alors l'équation de dispersion suivante pour la fréquence des ondes quasi-inertielles :

$$\omega \simeq f + \frac{\xi}{2} + \frac{N^2 k_h^2}{2k_z^2}$$

où ξ représente la vorticité mésoéchelle et où les termes sont rangés par amplitude décroissante.

Un grand pas est franchi dans l'étude des NIO. On sait désormais que la fréquence des ondes inertielles est modifiée par la vorticité du milieu ambiant, ce qui aura de nombreuses conséquences sur notre compréhension des mécanismes de propagation des NIO.

Une des raisons de l'intérêt suscité par les NIO est que celles-ci comptent parmi les mouvements les plus énergétiques de l'océan, approximativement la moitié de l'énergie de l'ensemble des ondes internes se trouve dans les ondes inertielles. Un spectre d'énergie en fréquence tel que celui présenté en figure 1 montre deux pics : l'un à la fréquence inertielle et l'autre à la fréquence semidiurne correspondant aux marées barotrope et barocline. La plus grande partie de cette énergie inertielle est finalement dissipée sous forme de mélange diapycnal et l'on sait aujourd'hui qu'elle joue un rôle important dans le maintien de la circulation thermohaline (voir chapitre

1). Si on arrive à estimer assez précisément la quantité d'énergie transférée par le vent aux ondes inertielles (cf Alford (2003a) qui l'estime à 0.47 TW^1 grâce à des simulations numériques globales à partir de données de vent réel), on ne sait pas encore bien quels sont les chemins spatiaux et temporels ainsi que les mécanismes suivis par l'énergie inertielle entre sa création par le vent en surface et sa dissipation finale supposée en profondeur.

On suspecte également les ondes inertielles d'être responsables d'une partie de la variabilité de la production primaire en surface par le biais du mélange qu'elle génère (voir chapitre 1).

Il est donc essentiel de comprendre quels sont les mécanismes de propagation de l'énergie inertielle. En particulier, il est nécessaire d'étudier la dispersion d'ondes inertielles au sein d'un champ turbulent car il apparaît que les zones d'injection d'énergie inertielle (qui correspondent aux zones de forts coups de vent, associées aux trajectoires des tempêtes) coïncident remarquablement avec les zones de forte turbulence mésoéchelle océanique (cf figure 2). Cette coïncidence n'est pas fortuite car aux moyennes latitudes, les deux fluides (océan et atmosphère) sont forcés par des gradients méridiens de grande échelle qui ont tendance à se nourrir mutuellement et génèrent une forte turbulence mésoéchelle par instabilité barocline. En outre, Zhai et al. (2005) ont montré que la propagation des ondes inertielles était radicalement différente en présence ou non de tourbillons.

Afin de répondre à ces questions, l'étude de la propagation des ondes inertielles au sein d'un champ turbulent est ici envisagée. Plusieurs modèles numériques (un code Shallow Water à une couche et demie ainsi que le modèle numérique SPEM) seront utilisés afin de rationaliser la dispersion des NIO.

Le premier chapitre de ce rapport est consacré à une revue des connaissances utiles avant d'aborder notre étude. Il explique notamment de façon détaillée les raisons de l'intérêt porté aux ondes inertielles. Une partie importante est consacrée à la décomposition mode lent / mode rapide et aux interactions entre ces deux types de dynamique. Le chapitre 2 détaille la mise au point d'une nouvelle méthode d'inversion de vorticité potentielle développée durant cette thèse afin d'extraire le signal inertielle du signal total. Un comparatif est fait avec deux autres méthodes. Le chapitre 3 décrit les principaux résultats obtenus sur la propagation horizontale et verticale des ondes inertielles. Le chapitre 4 consiste en un article scientifique à soumettre sur un mécanisme de résonance nouveau qui pourrait avoir un fort impact sur le mélange en profondeur. Enfin, une conclusion rappelle l'ensemble des résultats obtenus et propose des perspectives à ce travail.

¹1TW=10¹²W

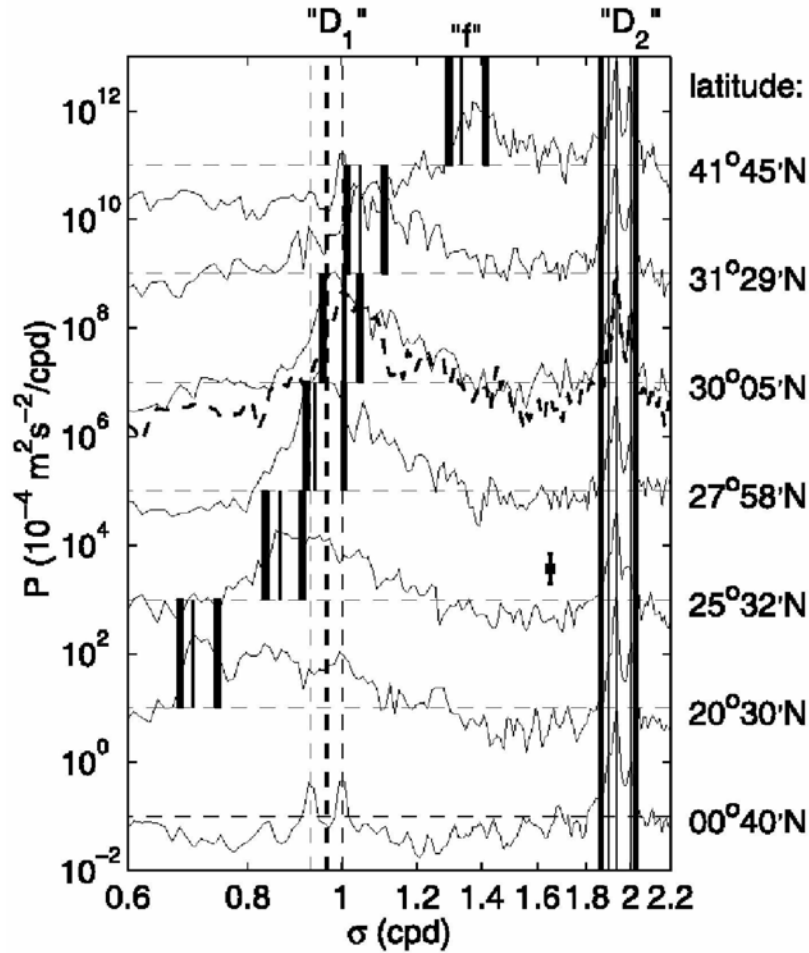


FIG. 1 – Spectres de l'énergie inertielle entre 1000 et 2000m de profondeur calculés à partir des enregistrements de 8 courantomètres situés à des latitudes distinctes. Les spectres sont translétés de deux décades, exceptés ceux représentant les enregistrements de mouillages vers 30°N . Les lignes verticales en pointillés indiquent les fréquences diurnes (D_1) : O_1 , M_1 (pointillés épais) et K_1 . Les lignes verticales épaisses situent la bande de fréquence correspondant à D_2 (marées internes). Enfin, les lignes verticales épaisses hautes de deux décades situent la bande de fréquences autour de la fréquence inertielle (épaisseur de bande : $0.09f$ autour de f). Celle-ci varie avec la latitude. A presque toutes les latitudes, on note un pic d'énergie au niveau de f ainsi qu'au niveau de D_2 . Figure extraite de Van Haren (2005).

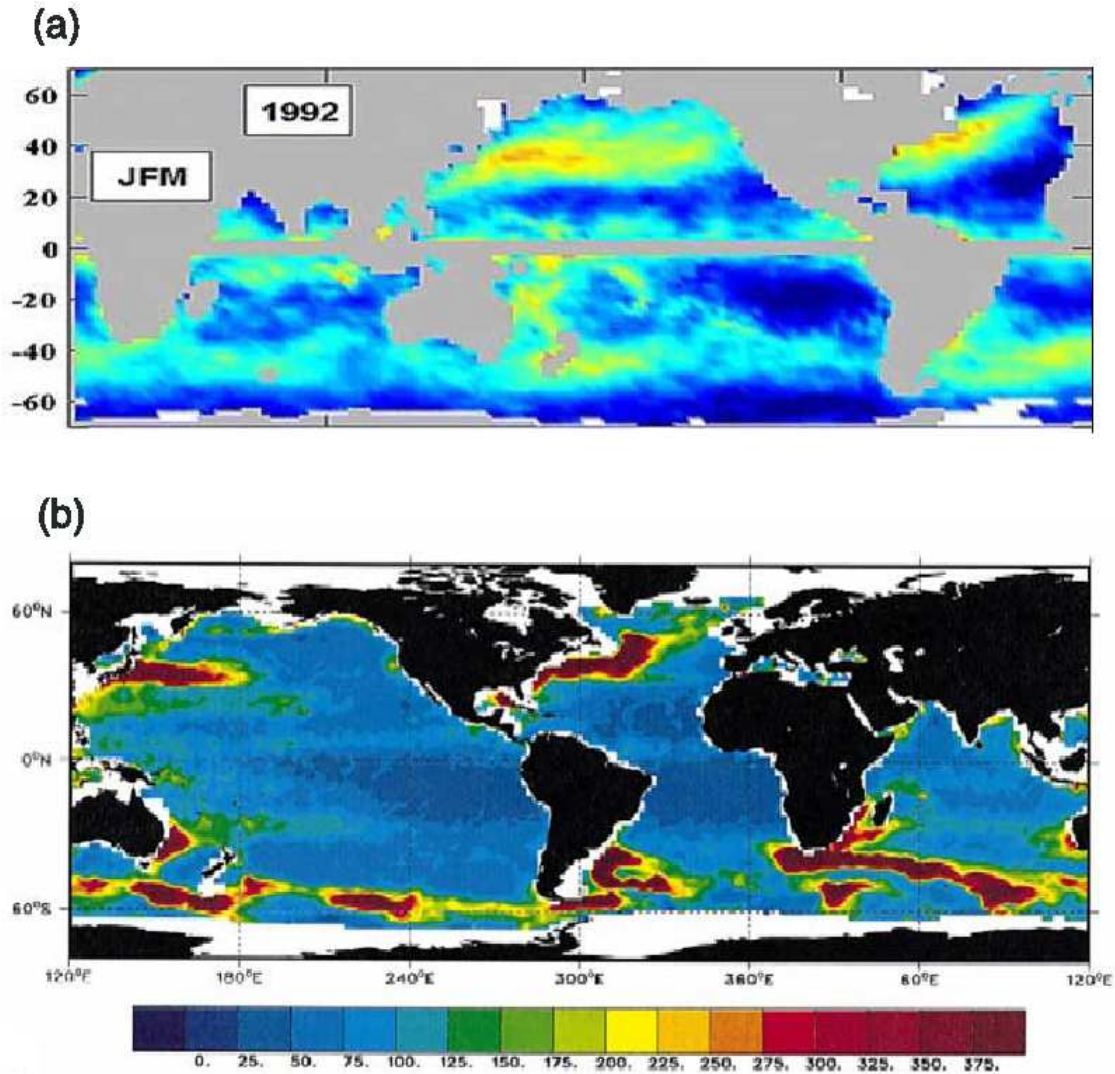


FIG. 2 – (a) Injection d'énergie inertielle à la surface de l'océan mondial en hiver (d'après Alford (2003a)); (b) Energie cinétique turbulente océanique en surface (d'après Stammer et Wunsch (1999)). Noter l'utilisation de références longitudinales différentes dans les deux figures. Figure extraite de Zhai et al. (2005).

Chapitre 1

Intérêt de l'étude. Etat de l'art

1.1 Les réservoirs d'énergie dans l'océan

On distingue trois principaux réservoirs d'énergie dans l'océan (cf Wunsch et Ferrari (2004)) :

- la circulation générale "grande échelle"
- les tourbillons océaniques
- les mouvements haute fréquence

Ces réservoirs sont repérés par des cases grisées sur la figure 1.1. La circulation générale n'est autre que la circulation thermohaline prise dans sa globalité, incluant les différents jets qui lui sont associés (Gulf Stream, courant antarctique circumpolaire, etc). C'est de loin le réservoir le plus énergétique. Les tourbillons mésoéchelles sont également un réservoir d'énergie important. Ils sont généralement créés par instabilité (barotrope, barocline, topographique, etc) de jets liés à la circulation thermohaline. Enfin, on peut classer les trois dernières cases grisées sous le terme générique de "mouvements haute fréquence". Parmi ceux-ci, deux types de mouvements prédominent : les ondes de marée interne générées par interaction de la marée barotrope avec la topographie et les ondes inertielles principalement générées par le vent. Un spectre d'énergie en fréquence tel que ceux présentés sur la figure 1 montre d'ailleurs deux pics principaux : l'un à la fréquence semi-diurne correspondant aux marées barotrope et barocline et l'autre à la fréquence locale de Coriolis. Notre étude est consacrée à ce dernier type de mouvements.

1.2 Sources d'énergie des ondes inertielles

1.2.1 Le vent, principale source d'énergie inertielle

Une source d'ondes inertielles est l'ajustement de Rossby lors de pertes de géostrophie dans les équations du mouvement. Toutefois, les ondes inertielles issues de cette source sont généralement peu énergétiques. Ainsi, dans une configuration idéalisée (jet cisailé) et pour un nombre de Rossby R_o faible, Vanneste et Yavneh (2004) démontrent analytiquement que l'amplitude des ondes d'inertie-gravité émises par le jet perturbé est proportionnelle à $R_o^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{\alpha}{R_o})$ où α est une constante positive, donc très faible quand le nombre de Rossby est petit. Nous ne nous attarderons pas

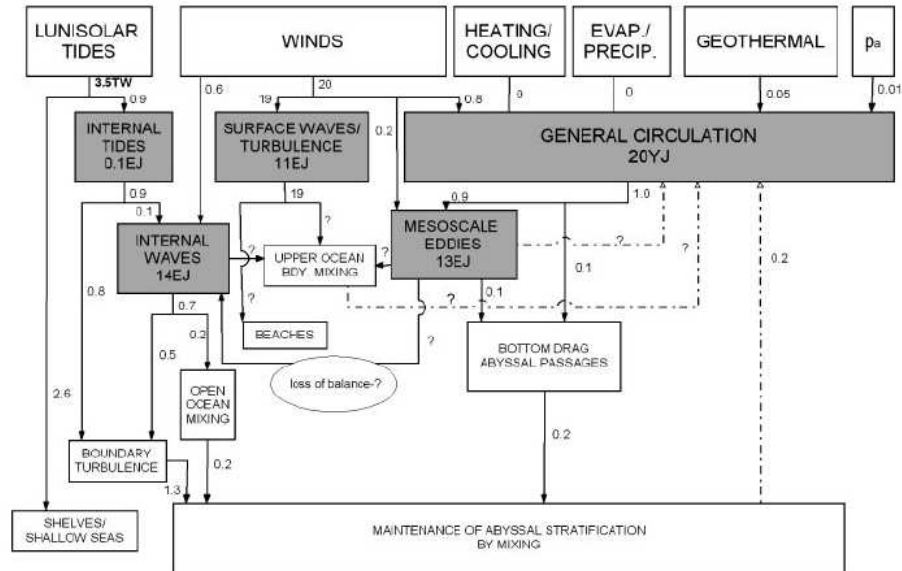


FIG. 1.1 – Budget schématique de l'énergie pour la circulation globale océanique. Les cases du haut représentent les différentes sources d'énergie. Les cases grisées les principaux réservoirs d'énergie dans l'océan, avec des valeurs d'énergie données en exajoules (EJ) 10^{18} J et yottajoules (YJ) 10^{24} J. Les flux depuis ou vers les réservoirs sont données en terrawatts (TW) 10^{12} W.

plus sur ce phénomène.

Un autre mécanisme, bien plus énergétique, est source d'ondes inertielles : le vent. Quand le vent souffle sur l'océan, il crée une couche turbulente en surface que l'on appelle couche d'Ekman, dans laquelle son influence se fait ressentir. Plus précisément, le tenseur de Reynolds turbulent est égale en surface à la tension de vent :

$$[\overline{u'w'}, \overline{v'w'}]_{z=0} = -(\tau_x, \tau_y)$$

La tension de vent est généralement calculée à partir des données météorologiques de vent à 10m de la surface de la mer (par exemple les réanalyses de vent NCEP-NCAR, ou encore les données Quikscat) grâce à des formules telles que celles de Large et Pond (1981) ou Garratt (1977). Cette tension de vent excite en surface des ondes inertielles qui vont ensuite se propager.

Ce phénomène soulève néanmoins plusieurs questions : quelle est la variabilité spatiale et temporelle de l'injection d'énergie inertielle due au vent ? Existe-t-il des fréquences et des caractéristiques spatiales particulières du vent qui excitent plus les ondes inertielles que d'autres ? Si oui, quelles sont-elles ?

1.2.2 Variabilité spatiale et temporelle liée à l'injection d'énergie inertielle

D'Asaro (1985) remarque, en utilisant des données de vent toutes les 3h issues de stations météorologiques réparties dans l'Atlantique et le Pacifique, que le forçage

d'ondes inertielles est fortement intermittent. La majeure partie du forçage prend place pendant les mois d'hiver, avec une douzaine d'évènements expliquant plus de la moitié du flux d'énergie annuel total. En outre, les périodes de forçage important sont généralement associées à des passages de fronts froids ou de dépressions intenses d'échelle petite, proche de 100 km.

Au passage, on peut remarquer que l'échelle spatiale initiale des ondes inertielles créées lors du passage d'un front ou d'une tempête est liée à la vitesse de déplacement u du front ou de la tempête. Précisément, la longueur d'onde inertielle initiale est égale à $L = u \times \frac{2\pi}{f}$.

Alford (2001) utilise lui un modèle à couche pour calculer la réponse inertielle entre 50° S et 50° N à des vents issus de réanalyse NCEP-NCAR toutes les 6h et avec une résolution spatiale de 2.5° pendant une période de trois ans. Au-delà de ces latitudes, la réponse inertielle est trop rapide pour être correctement modélisée avec une intervalle de 6h. Alford constate que les tempêtes des moyennes latitudes produisent les flux d'énergie inertielle les plus importants, résultant en un forçage maximum proche de la latitude 40° pendant l'hiver de chaque hémisphère, concentré sur le bord ouest de chaque bassin. Les flux de l'hémisphère nord dépassent ceux de l'hémisphère sud de 50% et une forte variabilité saisonnière est constatée. Alford obtient ainsi des bilans globaux d'énergie inertielle injectée et en profite pour essayer de boucler le bilan advectif-diffusif de la circulation thermohaline.

Watanabe et Hibiya (2002) (figure 1.2) puis Alford (2003a) de nouveau trouvent des distributions spatiale et temporelle de forçage qualitativement similaires à celles de Alford (2001), mais cette fois sur la totalité du globe (i.e. au-delà de 50° contrairement à Alford (2001)). De plus, Alford (2003a) calcule l'évolution de ces forçages entre les années 1958 et 2001. Si le flux tropical d'énergie (c'est-à-dire à aux latitudes inférieures à 20°) est resté relativement constant au cours de ces 54 années, le flux extratropical a lui augmenté d'environ 40%, ce qui donne une augmentation globale d'environ 25%, à relier à une augmentation de la fréquence des cyclones, des maxima de vent, et des hauteurs de vagues dans le Pacifique Nord (Graham et Diaz (2001)).

1.2.3 Problèmes liés à l'échantillonnage temporel du vent. Phénomène de résonance.

Problèmes liés à l'échantillonnage temporel du vent

Comme on vient de le voir, Watanabe et Hibiya (2002) et Alford (2003a) ont mis en évidence l'impact des vents haute-fréquence sur l'amplitude des mouvements inertiels dans la couche de mélange à l'échelle globale en utilisant un échantillonnage temporel de 6h. Une bonne résolution temporelle est primordiale afin de bien représenter les mouvements inertiels. La figure 1.3 extraite de Klein et al. (2004a) montre l'effet de la prise en compte de données de vent toutes les 3h par rapport à des données toutes les 12h sur la quantité d'énergie inertielle injectée à l'océan. On constate que l'énergie est multipliée par un facteur proche de 5 dans les simulations avec des données de vent toutes les 3h. En outre, la présence ou non de tourbillons ne semble pas avoir d'effet sur la quantité *totale* d'énergie inertielle injectée. Ce résultat met en avant la nécessité d'avoir une résolution temporelle élevée afin de bien

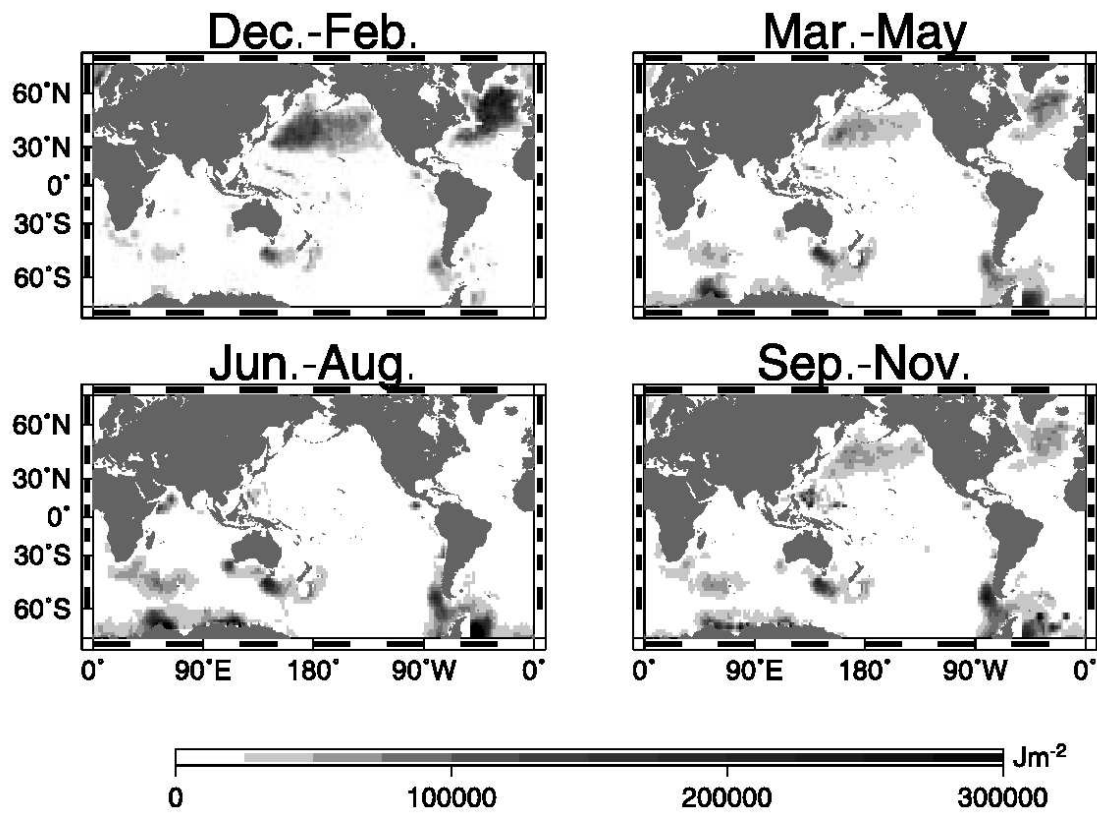


FIG. 1.2 – Distribution globale de l'énergie inertielle injectée par le vent, par unité de surface de l'océan et pour chaque saison, moyennée de 1989 à 1995. (extrait de Watanabe et Hibiya (2002))

représenter l'excitation d'ondes inertielles par le vent, alors qu'encore aujourd'hui, la majorité des simulations grande échelle utilisent des données de vent avec une résolution temporelle faible : souvent 24h, parfois 12h, au mieux 6h.

Cet impact de la résolution temporelle des données de vent sur l'amplitude des NIO peut se comprendre aisément à l'aide du petit calcul suivant, inspiré de Pollard et Millard (1970).

On pose : $Z = u + iv$. En l'absence de dissipation et en négligeant le travail des forces de pression (voir Pollard et Millard (1970)), les équations du mouvement deviennent en notation complexe :

$$\frac{dZ}{dt} + ifZ = \frac{T}{H}$$

où $T = \frac{\tau_x + i\tau_y}{\rho}$ est la tension de vent, H est la profondeur de couche de mélange considérée ici constante et f la fréquence de Coriolis.

Le comportement de l'équation précédente est bien connu. Un vent stationnaire crée un transport d'Ekman $Z_e = \frac{T}{ifH}$. Un vent variable crée en plus du transport d'Ekman un courant inertiel $Z_i = Z - Z_e$.

On obtient alors l'équation suivante pour la partie inertielle :

$$\frac{dZ_i}{dt} + ifZ_i = -\frac{1}{ifH} \frac{dT}{dt}$$

Les fluctuations de vent excitent les ondes inertielles. Or on sait que la variabilité présente beaucoup d'énergie à des périodes inférieures ou égales à 24h (voir figure 5 de Van Meurs (1998) par exemple). Utiliser un vent moyenné sur 24h, c'est se priver de toute cette variabilité et mal représenter le terme de forçage $-\frac{1}{ifH} \frac{dT}{dt}$. Ainsi, si on prend une résolution temporelle plus élevée, alors les dérivées temporelles seront mieux représentées et le terme $\frac{1}{ifH} \frac{dT}{dt}$ sera plus fort, engendrant une amplitude des NIO plus importante.

Phénomène de résonance

Pollard et Millard (1970) et Gonella (1971) avaient déjà remarqué que la durée d'un coup de vent par rapport à la période inertielle était un facteur important pour l'amplitude des ondes inertielles en surface. Ce qu'ils observaient n'était rien d'autre que ce que l'on allait appeler plus tard "résonance dûe au vent" et qui est un phénomène classique de résonance. En effet, la couche de mélange de surface peut-être vue comme un oscillateur de fréquence propre f (en raison des ondes inertielles qui s'y développent) excité par le vent. Quand ce dernier possède de l'énergie dans la bande de fréquences inertielle avec une rotation dans le même sens que les NIO, alors l'oscillateur entre en résonance et l'amplitude des NIO croît fortement. Ce phénomène a été étudié plus en détails par Klein et Coantic (1981) mais surtout Crawford et Large (1996) et Skyllinstad et al. (2000). La figure 1.4 est extraite de ce premier article. On y voit que la profondeur finale de la couche de mélange, qui est intimement liée à la quantité d'énergie inertielle présente, est maximale quand le vent souffle avec une fréquence égale à la fréquence de Coriolis.

Mais depuis Kunze (1985), on sait que la fréquence des ondes inertielles est modifiée par la vorticité du milieu ambiant : $\omega = f + \frac{\xi}{2}$. Une vision plus fine que celle

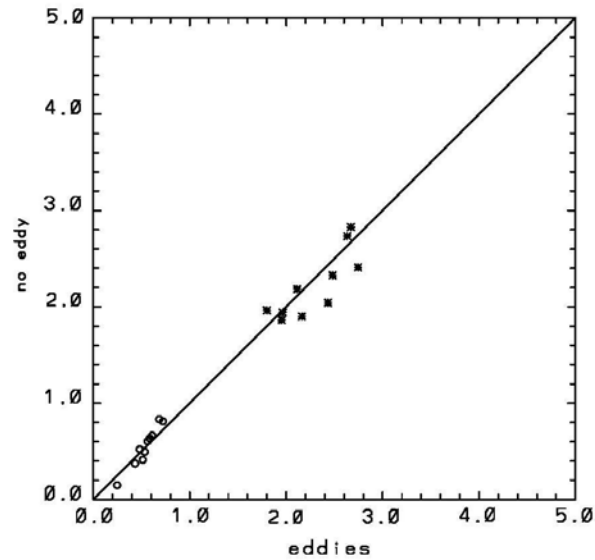


FIG. 1.3 – Scatter plots de l'énergie inertielle totale ($m^3 s^{-2}$) avec ou sans tourbillons. Les symboles * et o correspondent respectivement à des simulations avec des données de vent toutes les 3h et toutes les 12h (figure extraite de Klein et al. (2004a))

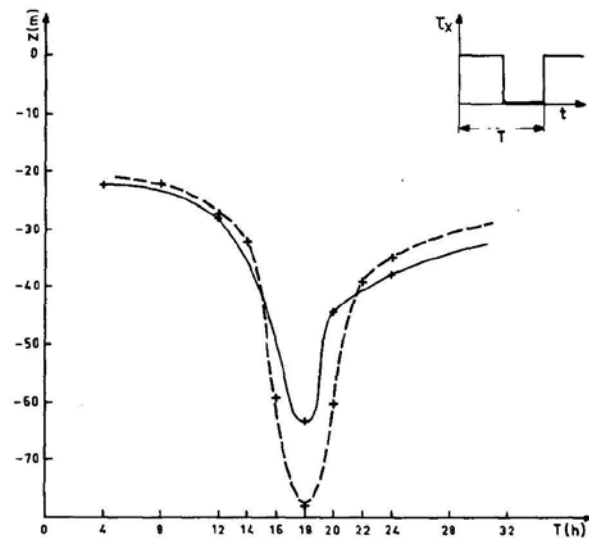


FIG. 1.4 – Profondeur finale de la couche de mélange après avoir fait souffler un vent périodique pendant 96 h, en fonction de la période de ce vent. La période de Coriolis est égale à 18 h dans ces simulations. Les deux courbes correspondent à deux méthodes de paramétrisation différentes de la turbulence (extrait de Klein et Coantic (1981)).

qui représente la couche de mélange comme un unique oscillateur de fréquence f est développée dans Klein et al. (2004a) : celle d'une somme d'oscillateurs indépendants de fréquence propre $f + \frac{\xi}{2}$. Par exemple, si le vent souffle à une fréquence légèrement supérieure à f et tourne dans le sens horaire (dans l'hémisphère nord), alors on verra apparaître une asymétrie entre les cyclones et les anticyclones, l'énergie inertielle étant plus importante dans les cyclones.

1.3 Pourquoi s'intéresser aux ondes inertielles ?

1.3.1 Rôle dans l'échange de propriétés entre les couches de surface et les couches profondes

Les ondes inertielles créées par le vent sont initialement concentrées en surface et se propagent ensuite sur l'horizontale et la verticale. Par différents mécanismes, elles permettent l'échange de propriétés entre les couches superficielles de l'océan et l'océan profond. Parmi ces propriétés échangées, on pense notamment à la quantité de mouvement, la chaleur, les traceurs (sels nutritifs par exemple, CO₂, etc).

Prenons le cas des sels nutritifs, qui est particulièrement intéressant (voir Williams et Follows (2003) pour une revue complète des mécanismes de transport des nutriments). En effet, ceux-ci sont à la base de la production primaire et sont généralement l'espèce limitante. Un autre ingrédient nécessaire à la production primaire est la lumière. Celle-ci pénètre peu dans les profondeurs de l'océan : elle reste concentrée dans les couches de surface (quelques dizaines de mètres). Les nutriments ont eux une répartition inverse sur la verticale : ils sont concentrés dans les couches profondes. Pour avoir une production primaire, un des moyens est donc d'amener des nutriments des couches profondes vers les couches de surface. Deux mécanismes peuvent permettre cet apport : tout d'abord, très simplement, des vitesses verticales positives. Ensuite l'autre mécanisme, un peu moins direct, est une augmentation du mélange en surface qui aura pour conséquence d'entraîner des eaux de subsurface (celles situées directement sous la couche de mélange) riches en nutriments dans la couche de mélange. Les ondes inertielles comme nous le verrons plus tard peuvent à la fois engendrer de fortes vitesses verticales de sursurface et un fort mélange en surface. Nous pensons qu'une meilleure résolution temporelle du vent dans les simulations numériques et qu'une meilleure représentation de la propagation des ondes inertielles peuvent permettre de mieux comprendre les patchs de chlorophylle visibles sur les images satellites (voir figure 1.5). La compréhension des mécanismes responsables de ces patchs et la prédiction de ces régions présentent un intérêt évident par exemple pour la pêche, puisque les bancs de poissons se situent généralement dans ce type de régions phytoplanctoniques.

Les ondes inertielles ont, exactement de la même façon, un fort impact sur la température de surface et les flux de chaleur de subsurface. En effet, dans les zones où les ondes inertielles se concentrent, le mélange en surface est augmenté en raison du cisaillement, entraînant de l'eau présente sous la couche de mélange (donc plus froide) dans la couche de mélange. Ce mécanisme a été en particulier étudié par Klein et Hua (1990) qui ont constaté qu'après un coup de vent, selon l'intensité de celui-ci, le champ de température de surface ressemblait soit au champ de vortacité

(dans le cas d'un vent faible), soit au champ de température de subsurface (quand le vent est fort). On peut penser également que les vitesses verticales engendrées par le pompage inertiel (c'est-à-dire associées aux mouvements de convergence et divergence du champ de vitesses inertielles, voir par exemple Gill (1984)) vont avoir un impact sur la température de surface. Cela reste à quantifier.

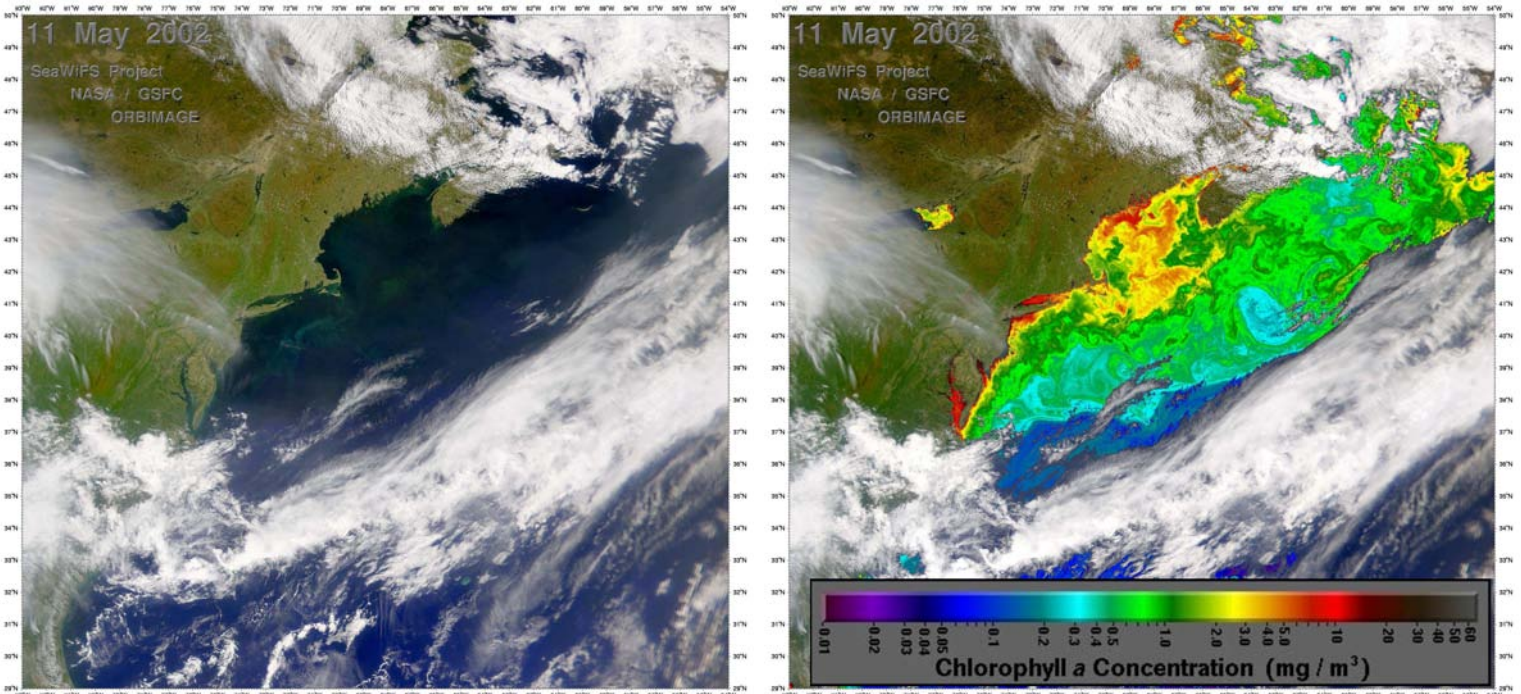


FIG. 1.5 – Image satellite SeaWiFS de la couleur de la mer (à gauche) et de la concentration de chlorophylle en surface (à droite) dans l'Atlantique Nord-Ouest, à proximité des côtes américaines et canadiennes. Les dimensions des 2 cartes sont de 1500 km selon x \times 2300 km selon y. Notez la présence de nombreux filaments de petite échelle.

1.3.2 Rôle important dans la circulation thermohaline

La circulation thermohaline est un mécanisme fondamental dans la régulation du climat. Elle transporte des quantités phénoménales de chaleur de l'équateur vers les pôles (environ 2000 TW). C'est grâce à elle que nous jouissons d'un climat tempéré à nos latitudes. Mais contrairement à ce que l'on pourrait croire, Wunsch et Ferrari (2004) indiquent clairement que ce n'est pas une "machine thermique" (au sens du théorème de Sandström, cf Sandström (1908) et Sandström (1916)). Le principal moteur de cette circulation est d'origine mécanique : on pense de plus en plus que c'est le mélange vertical qui conditionne l'intensité de la circulation thermohaline. Et l'on peut dégager deux sources principales à l'origine de ce mélange : les marées internes (engendrées par la marée barotrope au dessus d'obstacles topographiques) et le vent. L'énergie issue de ces sources permet de mélanger l'océan profond qui sans cela se remplirait d'eau dense formée par convection dans certaines régions de l'Atlantique Nord (mer du Labrador, mer du Groënland). L'équation de chaleur

moyennée horizontalement montre qu'en présence d'une stratification donnée $\rho(z)$, un fort coefficient de mélange K engendre de fortes vitesses verticales w :

$$w \frac{d\rho}{dz} = K \frac{d^2\rho}{dz^2}$$

L'énergie nécessaire à faire remonter ces eaux denses est estimée à environ 2.1 TW (c'est l'énergie nécessaire au maintien de la circulation thermohaline alors que paradoxalement celle-ci transporte environ 2000 TW sous forme de chaleur!). L'énergie fournie par les marées internes est estimée à 0.9 TW (calcul basé sur des mesures astronomiques). Il reste donc à pourvoir 1.2 TW. On pense qu'une partie importante de ces 1.2 TW provient des ondes inertielles créées par le vent. L'étude de Watanabe et Hibiya (2002) estime à 0.7 TW le flux d'énergie du vent aux mouvements inertiels. Mais Alford (2003a) conteste ce chiffre et estime quant à lui à 0.47 TW la quantité d'énergie fournie par le vent aux ondes inertielles et aux courants d'Ekman. D'autres mécanismes sont sans doute à prendre en compte afin de pouvoir boucler le budget, tels que le travail du vent sur la circulation générale (Wunsch (1998) l'estime à 1 TW) ou encore ceux évoqués par Webb et Sugimotohara (2001). Ces derniers avancent que la quantité d'énergie nécessaire au maintien de la stratification abyssale pourrait être bien moindre que prévue, à savoir 0.6 TW au lieu des 2.1 TW évoqués précédemment, car une partie de la remontée d'eau serait due à la succion d'Ekman et que la quantité totale d'eau à faire "remonter" serait moindre que prévue initialement. Ces mécanismes sont encore à l'étude mais ce qui est sûr, c'est que les ondes inertielles participent activement au mélange nécessaire à la circulation thermohaline. Toutes ces idées sont reprises dans Wunsch et Ferrari (2004).

Outre la quantité totale d'énergie inertielle engendrée par le vent, il est également primordial de connaître sa répartition spatiale. En effet, les calculs de coefficients de diffusion turbulent nécessaires au maintien de la stratification abyssale à partir de profils moyens de densité évaluent ce coefficient à $10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ (Munk et Wunsch (1998)). Or, de nombreuses campagnes en mer ont montré que ce coefficient était de l'ordre de $10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ sur une grande partie de l'océan. Ce coefficient doit donc être fortement variable et atteindre localement des valeurs très grandes pour que sa moyenne globale soit de l'ordre de $10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$. On sait déjà grâce à des mesures qu'il est très fort près d'accidents topographiques (type dorsales, talus continental, etc) en raison de la dissipation des ondes de marée internes en ces endroits. Qu'en est-il de la variabilité spatiale du coefficient de diffusion associée à la dissipation des ondes inertielles ?

Une première étape pour répondre à cette question est déjà d'identifier la répartition spatiale des sources d'énergie inertielle. Cela a été fait dans le paragraphe 2.2.2. La seconde étape est ensuite de prévoir la propagation 3D des ondes inertielles ainsi générées et les régions où elles vont finalement se dissiper. Pour cette étape, nous disposons d'un grand nombre de résultats théoriques (détaillés plus loin) d'études de dispersion des NIO, due notamment à l'effet β ou l'effet de la vorticit e m eso echelle. On considère ensuite implicitement que les NIO vont se dissiper dans les r egions o u elles seront pi eg ees, comme par exemple les tourbillons anticycloniques (Kunze (1985)). Toutefois, ces  etudes sont r ealis ees dans des conditions id ealis ees et aucune ne s'int eresse  a la dispersion des NIO au sein de l'oc ean r eel global. Dans ce cas, beaucoup trop de param etres entrent en jeu (topographie, interaction avec la vor-

ticité mésoéchelle, non-linéarités) pour que le problème soit résolu avec les moyens informatiques actuels. En outre, une meilleure représentation de la "route" vers le mélange passe obligatoirement par la prise en compte de la dynamique submésoéchelle (nécessitant une résolution élevée), généralement ignorée dans les modèles actuels.

Toutefois, l'étude de Alford (2003b) est un premier petit pas dans la connaissance des flux réels d'énergie inertielle : à partir de données de mouillages répartis dans l'océan, il arrive à calculer l'amplitude et l'orientation des flux d'énergie associés aux fréquences inertielle et semidiurne. En particulier, il constate que les flux d'énergie inertielle sont majoritairement dirigés en dehors des zones sources et vers l'équateur (effet β , paragraphe 2.4.6), ce qui est en conformité avec les calculs de Kunze (1985). Selon lui, ces flux sont suffisamment importants pour transporter l'énergie injectée dans les régions sources sur des distances de l'ordre des bassins océaniques, ce qui est assez nouveau car jusqu'à présent on pensait que l'énergie inertielle se dissipait à proximité de ces régions sources.

On commence donc tout juste à connaître/comprendre la variabilité spatiale du mélange induit par la dissipation des NIO, grâce notamment à un grand nombre d'études théoriques de propagation des NIO ou à l'analyse de données (cf Alford (2003b)). C'est un pas de plus dans la compréhension de la circulation thermohaline, et donc du climat. En effet, les études de Samelson (1998), dans une configuration idéalisée à un seul bassin, et Hasumi et Sugimoto (1999), dans une configuration plus réaliste de l'océan mondial, tendent à prouver que la circulation thermohaline est très sensible à la localisation des régions de fort mélange.

L'étude présentée dans ce rapport, s'attache précisément à comprendre plus finement les mécanismes de propagation des ondes inertielles, en particulier à comprendre la dispersion des NIO au sein d'un champ turbulent réaliste. Pour cela, il va nous falloir séparer dans l'écoulement total, qui est généralement rendu par les modèles ou mesuré par les courantomètres, la partie basse fréquence due à l'écoulement mésoéchelle de la partie haute fréquence due aux ondes inertielles. Mais une telle séparation est-elle vraiment possible ?

1.4 Décomposition mode lent / mode rapide

1.4.1 Théorie linéaire

Comme l'a montré Charney (1948), les équations générales géophysiques gouvernent deux types de mouvements se différenciant principalement par leur échelle de temps. Cette décomposition est basée sur l'étude en mode normal des équations du moment horizontal et de chaleur linéarisées autour du repos dont la formulation est la suivante (on fait l'approximation de Boussinesq) :

$$\begin{aligned}\partial_t u - fv &= -\frac{1}{\rho_0} \partial_x p \\ \partial_t v + fu &= -\frac{1}{\rho_0} \partial_y p\end{aligned}$$

$$\partial_t \rho - \frac{\rho_0 N^2}{g} w = 0$$

On décompose les perturbations en modes normaux ($e^{i(\omega t - kx - ly - mz)}$) et on trouve l'équation de dispersion suivante :

$$\omega(\omega^2 - f^2 - \frac{N^2}{m^2} k_H^2) = 0$$

où $k_H = \sqrt{k^2 + l^2}$

Le jeu d'équations ci-dessus possédant trois équations pronostiques, la relation de dispersion fait apparaître trois modes :

- Un mode de Rossby associé à la fréquence propre nulle, ce mode est stationnaire pour la théorie linéaire (équilibre géostrophique). Les termes non-linéaires des équations complètes font que ce mode n'est plus exactement stationnaire. C'est pourquoi il est aussi appelé mode "lent".
- Deux modes d'inertie-gravité appelés modes "rapides", de fréquence propre

$$\omega = \pm \sqrt{f^2 + \frac{N^2}{m^2} k_H^2}$$

Ces modes se distinguent donc par leur fréquence mais aussi par la nature de leur dynamique. En effet, dans le cadre des équations linéaires, d'une part, le mode lent a une dynamique non divergente ($\partial_x u + \partial_y v = 0$), d'autre part le mode rapide est lui associé à une anomalie de vorticité potentielle nulle (il vérifie $\frac{\rho_0 N^2}{g} \xi = f \partial_z \rho$).

1.4.2 Séparation mode lent / mode rapide dans un modèle aux équations primitives

En raison des termes non-linéaires des équations complètes, les deux types de modes évoqués précédemment interagissent : le mode lent agit sur le mode rapide et le mode rapide agit sur le mode lent. L'interaction de ces deux modes crée une variété d'échelles temporelles intermédiaires. On voit donc qu'une décomposition exacte de l'écoulement total en sa partie lente et sa partie rapide est impossible. Néanmoins, on peut réussir à approcher une telle séparation par différentes méthodes.

Une première méthode consisterait par exemple à moyenner temporellement l'écoulement total sur une période inertielle, dans le cas où le seul type d'ondes internes présentes serait des ondes inertielles. Néanmoins, une telle méthode peut engendrer un certain nombre d'erreurs, notamment dans les zones de forte vorticité où la fréquence des ondes inertielles est différente de la fréquence de Coriolis locale ($\omega = f + \frac{\xi}{2} + \dots$ cf Kunze (1985)).

Une méthode plus précise consiste à inverser à un instant donné la vorticité potentielle d'Ertel (notée EPV par la suite), grandeur associée au mode lent.

Pour pouvoir inverser l'EPV, il faut choisir un ensemble d'équations de balance (dit "modèle de balance") et se donner des conditions aux limites (Hoskins et al. (1985)).

Un modèle de balance est un modèle approché obtenu en omettant ou en modifiant judicieusement des termes dans les équations primitives afin de filtrer les ondes d'inertie-gravité tout en laissant le mouvement basse fréquence relativement inchangé. Plus précisément, ces modèles s'appuient sur la décomposition de la vitesse

horizontale en sa composante rotationnelle et sa composante divergente et utilisent l'hypothèse que cette dernière est d'un ordre inférieur à la composante rotationnelle pour tronquer les équations de vorticité et de divergence (Gent et McWilliams (1983)). Ainsi, dans un modèle de balance, on tronque légèrement les équations primitives afin de fermer le système pour pouvoir inverser la vorticité.

Les modèles de balance ont une longue histoire en météorologie, en commençant par le modèle quasi-géostrophique introduit par Charney (1947), valable pour les fluides à faible nombre de Rossby. Depuis, il y a eu une prolifération de différents types de modèles de balance (voir Allen et al. (1990) pour une liste complète). De nombreuses études proposent des comparatifs des avantages et des inconvénients liés à ces différents modèles (par exemple McWilliams et Gent (1980) ou Whitaker (2002)).

En météorologie, ces modèles sont aussi utilisés car ils permettent de filtrer le bruit numérique haute fréquence.

Tous ces modèles de balance ne s'appliquent pas à notre problème d'inversion car une des contraintes que nous avons est que nous ne connaissons pas la pression associée au mouvement lent.

Deux types de méthodes d'inversion de PV nous ont paru pouvoir s'appliquer plus particulièrement à notre cas : les méthodes telles que celle développée par Davis et Emmanuel (1991) ou les méthodes de type QG+1 développés par Muraki et al. (1999). La méthode de Davis nous paraissant très complexe à mettre en oeuvre, nous lui avons préféré une méthode de type QG+1 inspirée par les travaux de Muraki mais présentant néanmoins quelques différences. Notre méthode est détaillée dans le chapitre 3.

1.4.3 Effets du mode rapide sur le mode lent

La modification de la composante lente d'un écoulement par la composante rapide peut reposer sur une interaction de nature *dissipative* ou *non-dissipative*.

Dans le cas d'une interaction de type non *dissipative*, Farge et Sadourny (1989) puis Bartello (1995) étudient les conséquences de l'interaction mode lent/mode rapide sur les caractéristiques générales de l'écoulement lent, d'où des études réalisées essentiellement dans l'espace spectral. Ces deux études arrivent à la conclusion que les cascades du mode lent sont modifiées en présence d'ondes d'inertie-gravité. Bartello (1995) remarque en outre que sous certaines conditions, un transfert d'énergie du mode lent vers le mode rapide est possible, ce que n'observe pas Dewar et Killworth (1995) dans le cadre d'un modèle à 1 ou 2 couches.

D'autres études se penchent sur les conséquences de l'interaction mode lent/mode rapide sur le mode lent dans l'espace physique. Ainsi Kuo et Polvani (1999) montrent analytiquement et numériquement que les ondes d'inertie-gravité modifient de façon transitoire le champ de vorticité potentielle mais qu'après leur passage, il n'en a plus la signature. Toutefois, ce cadre unidimensionnel est un cadre très particulier où l'équilibre géostrophique est solution exacte des équations primitives. L'extension de ces résultats au cas bidimensionnel est moins tranchée : Kuo (1999) constate alors que les ondes sont capables de déplacer un vortex mais ne peuvent lui extraire ou fournir de l'énergie.

Dans le cadre d'un modèle Shallow Water, Louazel (2004) étudie l'influence des ondes d'inertie-gravité sur la dynamique tourbillonnaire. Elle montre d'une part que les ondes modifient légèrement le processus de filamentation d'un tourbillon elliptique, et d'autre part que, dans le cas où il y a plusieurs tourbillons présents, l'interaction entre ces tourbillons est modifiée. En particulier, dans le cas d'un tripôle, celui-ci est stabilisé en présence d'ondes d'inertie-gravité.

Enfin, dans le cas d'un milieu non tournant et dans l'hypothèse d'un faible nombre de Froude et d'un faible rapport d'énergie onde/vortex, Bühler et McIntyre (2003) montrent analytiquement que l'écoulement moyen (dans ce cas un vortex) est soumis à une force due à la réfraction des ondes par le vortex.

Dans le cadre d'une interaction de type *dissipative* cette fois-ci, Bühler et McIntyre (2000) constate que la dissipation des ondes d'inertie-gravité, dissipation visqueuse comme dans McIntyre et Norton (1990), mais aussi dissipation par déferlement ou formation de chocs, induit transport et création de vorticité potentielle.

L'argument de Klein et al. (2003) est lui d'une autre nature. Ils ne considèrent pas l'effet de la dissipation des ondes inertielles sur le mode lent mais plutôt l'effet des ondes inertielles sur la dissipation du mode lent. Ils paramétrisent la diffusion du mode lent par un coefficient proportionnel à l'énergie cinétique des NIO dont la propagation dans l'écoulement quasi-géostrophique est modélisé parallèlement (selon les équations de Young et Ben Jelloul (1997)). En conséquence, dans les endroits où les ondes se concentrent (i.e. les régions anticycloniques), le coefficient de diffusion est augmenté et inversement. On constate alors une prédominance des cyclones, moins soumis à la diffusion. Cette asymétrie n'apparaît pas dans le cas d'un coefficient de diffusion homogène.

En conclusion, l'effet du mode lent sur le mode rapide est encore largement incompris. Beaucoup d'études p chent par leur non-applicabilité à l'océan réel. De nombreux efforts restent à fournir dans ce domaine. Néanmoins, il semble que généralement, cet effet reste assez faible.

1.4.4 Effets de la vorticité du mode lent sur le mode rapide

Les principaux résultats concernant la propagation des NIO dans l'océan sont présentés sous forme d'un récapitulatif des travaux antérieurs à Kunze (1985) et d'une revue critique de quatre articles qui nous paraissent, à nos yeux, avoir eu un rôle déterminant dans l'évolution de notre compréhension de la dispersion des ondes inertielles.

Récapitulatif des travaux antérieurs à Kunze (1985)

Longtemps, on crut que la clé de l'hétérogénéité spatiale de l'énergie inertielle résidait dans l'hétérogénéité du forçage. Mais alors que les échelles spatiales atmosphériques sont généralement comprises entre 100 et 1000 kms, les longueurs d'ondes inertielles issues de mesures s'avérèrent de l'ordre de quelques dizaines de kilomètres (Webster (1968), Pinkel (1983), Kunze et Sandford (1984, 1986), D'Asaro et Perkins (1984)). Quelle était donc la source de cette hétérogénéité spatiale ?

Face à ce problème, Weller (1982) démontra que dans le cas d'un modèle à couche, il pouvait obtenir une forte hétérogénéité spatiale des courants inertiels dans la couche de mélange avec un vent uniforme. Il expliqua cette variabilité par le fait que la vortacité mésoéchelle modifiait la fréquence des ondes inertielles. En particulier, il trouva déjà que les NIO oscillaient à $\omega = f + \frac{\xi}{2}$ où ξ est la vortacité géostrophique. En fait, Weller appliqua exactement le même type de calculs que Stern (1965) et Niiler (1969) à la partie *haute* fréquence de la réponse océanique, alors que ces derniers s'étaient intéressés à la partie *basse* fréquence (transport d'Ekman). L'idée derrière ces calculs est de prendre en compte les interactions dans les termes non-linéaires entre le courant géostrophique et la réponse au forçage atmosphérique, soit les ondes inertielles dans le cas de Weller, soit le transport d'Ekman dans le cas de Stern et Niiler.

A vrai dire, le décalage de la fréquence des ondes inertielles calculé par Weller (1982) avait déjà été observé par Fomin (1973), Mooers (1975) et Maggaard (1968). Et Perkins (1976) rapporta les preuves d'un tel décalage lors du passage d'un tourbillon d'eau chaude.

Propagation d'ondes inertielles dans un cisaillement géostrophique : l'apport de Kunze (1985)

Alors que Weller (1982) avait étudié l'effet des courants géostrophiques sur les vitesses inertielles dans le cas d'un modèle à une couche et demie. Kunze (1985) appliqua le même type de calculs dans le cas plus général des équations primitives. Se basant sur l'hypothèse WKB (qui stipule que l'échelle spatiale de variation des NIO est inférieure à celle de variation des vitesses mésoéchelles) afin de simplifier les équations, il obtient l'équation de dispersion suivante pour la fréquence intrinsèque des ondes inertielles :

$$\omega_0 = w - \vec{k} \cdot \vec{V} \sim f_{eff} + \frac{N^2 k_h^2}{2f k_z^2}$$

où $f_{eff} = f + \frac{\xi}{2}$, k_h et k_z sont les nombres d'onde horizontal et vertical.

La formule de Kunze implique que les NIO sont expulsées des structures cycloniques et se concentrent dans les structures anticycloniques dans l'hémisphère nord (inverse dans l'hémisphère sud). On peut, afin de comprendre simplement ce phénomène essentiel, raisonner en termes de bandes passantes pour les ondes inertielles. On sait en effet que la fréquence d'une onde inertielle ω_0 est conservée lors de sa propagation. Le terme f_{eff} varie en fonction de la latitude et de la vortacité ambiante et le terme $\frac{N^2 k_h^2}{2f k_z^2}$ s'ajuste de façon à conserver ω_0 . Or le terme $\frac{N^2 k_h^2}{2f k_z^2}$ est supérieur ou égal à 0. Donc l'onde ne peut aller que dans des zones où f_{eff} est inférieure ou égale à sa fréquence initiale. On voit donc que les mouvements vers les pôles (ou l'amplitude de la fréquence de Coriolis est maximale, voir paragraphe sur l'effet- β) et les zones de trop forte vortacité positive seront interdits. Les zones de vortacité négative seront donc favorisées par rapport aux zones de vortacité positive, et les NIO auront tendance à s'y concentrer.

Kunze évoque également une autre explication. Partant de l'expression de la vitesse inertielle $u = u_0 \sin((f + \frac{\xi}{2})t)$, il fait un développement limité de la vortacité :

$\xi = \xi_0 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot x$. La vitesse inertielle devient alors :

$$u = u_0 \sin\left(\left(f + \frac{\xi_0}{2}\right)t - kx\right)$$

avec

$$k = -\frac{1}{2} \frac{\partial \xi}{\partial x} t$$

On voit l'apparition d'un nombre d'onde dépendant du temps dirigé vers les zones de vorticité négative et hors des zones de vorticité positive (voir figure 1.6). D'après, cette expression, ce nombre d'onde devrait tendre vers l'infini mais les termes de dispersion dûs au gradient de pression négligé ici empêcheront ce phénomène.

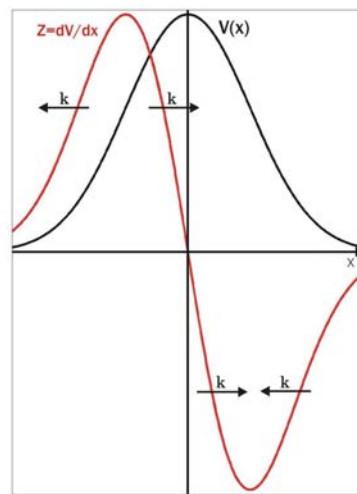


FIG. 1.6 – Vitesse (en noire) et vorticité (en rouge) associées à un jet. Le nombre d'onde $k = -\frac{1}{2} \frac{\partial \xi}{\partial x} t$ associée à une onde inertielle initialement homogène est représenté à un instant $t > 0$.

Les travaux de Kunze (1985) seront une avancée importante dans la compréhension de la dispersion des ondes inertielles. Malgré tout, la principale objection qu'on pourrait leur opposer est qu'en raison de l'utilisation de l'hypothèse WKB, ils ne s'appliquent qu'aux structures d'échelle horizontale assez grande, de type tourbillons ou fronts peu intenses.

Dispersion d'ondes inertielles induites par le vent au sein d'un jet barotrope, Klein et Tréguier (1995b)

L'approche de Klein et Tréguier (1995b) est de considérer l'influence de la vorticité relative d'un jet barotrope sur les différents modes baroclines associés aux ondes inertielles. Contrairement à Kunze, ils ne font pas d'hypothèse WKB a priori, et prennent en compte les effets non-linéaires dans la deuxième partie de l'article. Ils calculent une équation de dispersion pour chacun des modes qui fait intervenir

le rayon de déformation du mode considéré. Chaque mode est donc régi par une équation différentielle et aura par conséquent un comportement qui lui est propre.

Deux types de régimes sont mis en évidence en fonction du rapport entre le rayon de déformation du mode et l'échelle caractéristique transversale du jet $\frac{R_n}{L}$. Lorsque ce rapport est faible, les effets de dispersion sont peu importants et les ondes inertielles "ont le temps" d'être affectées par la vortacité du jet. L'énergie inertielle se concentre alors dans les zones de vortacité négative. Par contre, quand ce rapport est d'ordre 1 ou plus grand (c'est-à-dire pour les modes bas), les effets importants de dispersion surpassent les effets de vortacité, ce qui engendre une faible variabilité spatiale des ondes inertielles.

Outre ces résultats sur la propagation horizontale des ondes inertielles, Klein et Tréguier (1995b) ont analysé les conséquences de cette propagation horizontale propre à chaque mode sur la propagation verticale des ondes inertielles, de façon similaire à ce que fait Gill (1984). En effet, si initialement, tous les modes verticaux sont en phase et engendrent une vitesse homogène dans la couche de mélange et nulle en dessous, le comportement propre à chacun des modes fait qu'au fil du temps, ceux-ci vont se déphaser légèrement et engendrer des vitesses non nulles sous la couche de mélange. Klein et Tréguier (1995b) notent l'apparition de deux maxima de subsurface de chacun des côtés du jet, l'un situé à 100 m de profondeur dans la région de vortacité positive et l'autre situé à 150 m de profondeur dans la région de vortacité négative (voir figure 1.7)

La formulation de Young et Ben Jelloul (1997)

Young et Ben Jelloul eurent en 1997 une approche très différente. Par une méthode de séparation d'échelles de temps, ils obtinrent une formulation pour la partie subinertielle du mouvement inertiel :

$$M_{zzt_2} + \frac{\partial(\Psi, M_{zz})}{\partial(x, y)} + i(\beta y + \frac{1}{2}\nabla^2\Psi)M_{zz} + \frac{i}{2}(N^2 + \Psi_{zz})\nabla^2 M - 4i\Psi_{z\xi}M_{z\xi^*} = 0$$

où les notations complexes sont utilisées avec : $\epsilon = \frac{N_0\lambda_V}{f_0\lambda_H} \ll 1$ (λ_V et λ_H sont les longueurs d'ondes verticale et horizontale respectivement des NIO)

$$t_2 = \epsilon^2 f_0 t$$

$$u + iv = M_z e^{if_0 t}$$

Ψ est la fonction de courant du champ de vitesses géostrophiques mésoéchelles

Il est à noter qu'aucune approximation d'échelles (de type WKB par exemple) n'a été faite ici. Seuls les termes non-linéaires ont été négligés.

Dans le cas où l'échelle verticale du courant géostrophique est supposée plus grande que celle des NIO (hypothèse généralement admise), on obtient une formulation simplifiée :

$$LA_t + \frac{\partial(\Psi, LA)}{\partial(x, y)} + i(\beta y + \frac{1}{2}\nabla^2\Psi)LA + \frac{i}{2}f_0\nabla^2 LA = 0$$

où $LA = (\frac{f_0^2}{N^2}A_z)_z$ et $\frac{f_0^2}{N^2}A_z = M$

Sur cette équation, on reconnaît les trois termes qui vont influencer la propagation des NIO :

– le terme d'advection : $\frac{\partial(\Psi, LA)}{\partial(x, y)}$

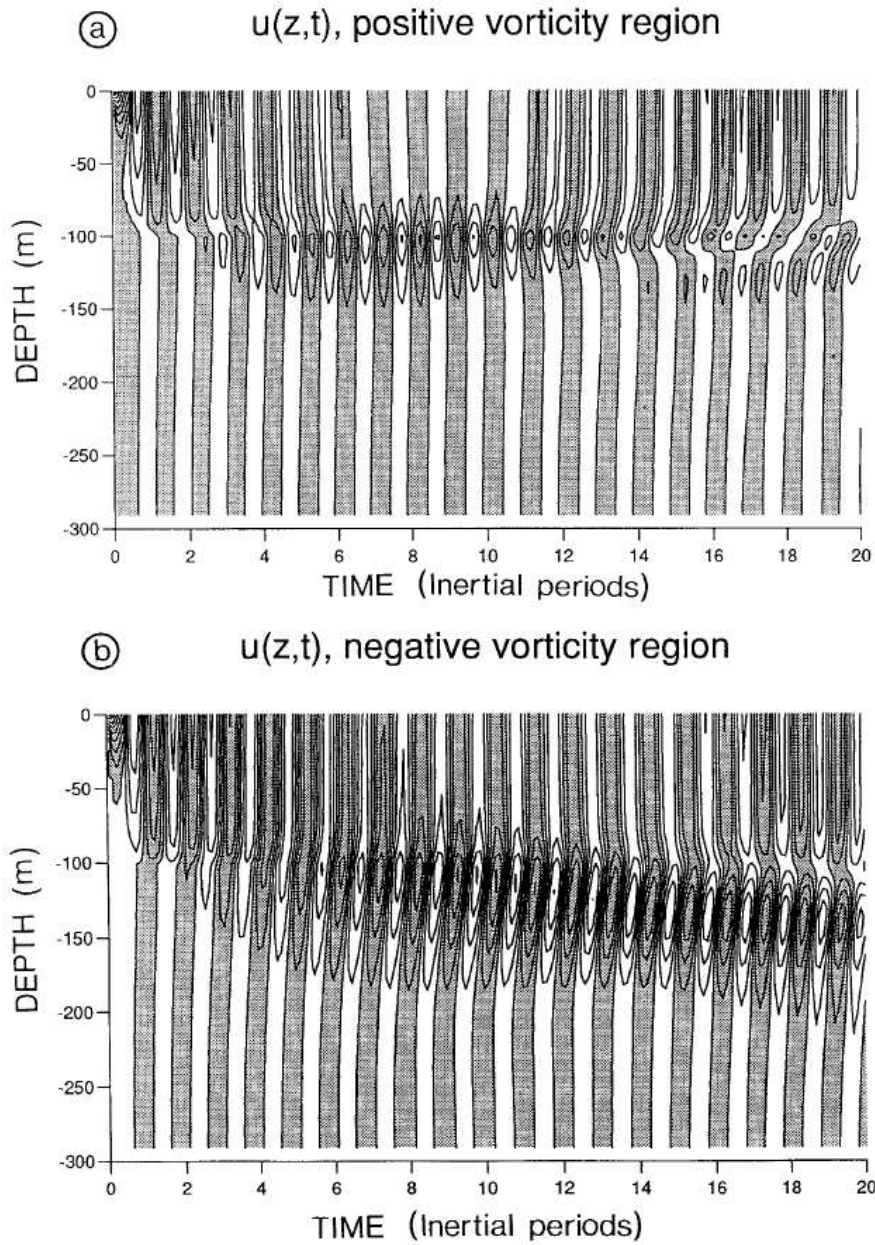


FIG. 1.7 – Evolution temporelle du profil de vitesse inertielle perpendiculaire au jet (a) dans la région de vorticité positive (b) dans la région de vorticité négative. Les vitesses positives sont en gris. L'intervalle entre deux contours est de 0.05 m s^{-1} (extrait de Klein et Tréguier (1995b))

- le terme de réfraction par la vorticité mésoéchelle ainsi que par l'effet- β : $i(\beta y + \frac{1}{2}\nabla^2\Psi)LA$
- le terme de dissipation : $\frac{i}{2}f_0\nabla^2LA$

Dans leur article, Young et Ben Jelloul (1997) examinent en particulier le cas non-exploré par Kunze(1985) : celui où l'échelle horizontale des NIO est supérieure à celle du champ turbulent dans lequel elles se propagent, qui remet en cause l'hypothèse WKB. Ils constatent alors une propagation verticale de l'énergie inertielle qui croît avec la densité d'énergie turbulente.

Toutefois, ils n'étudient pas le cas d'un spectre d'énergie turbulente "réaliste".

Young et Ben Jelloul (1997) ne font pas de découverte spectaculaire concernant la propagation des NIO. Par contre, ils mettent en place un formalisme nouveau, approprié à l'étude de la dispersion des NIO au sein d'un milieu turbulent complexe, et qui va servir de base à de nombreuses études.

Organisation de l'énergie inertielle par un champ turbulent, Klein et al. (2004b)

S'appuyant sur les travaux de Young et Ben Jelloul (1997), Klein et al. (2004b)   tudient l'organisation de l'énergie inertielle associée à un mode donné au sein d'un champ pleinement turbulent. Leur principal résultat est que l'hétérogénéité de l'énergie inertielle n'est pas associée à la vorticité (comme dans Kunze (1985)) ou à la fonction de courant (comme le suggère Young et Ben Jelloul (1997)), mais au *laplacien de la vorticité*. En outre, pour chaque mode vertical, le maximum d'énergie est situé à un nombre d'onde k_c qui diminue avec le temps.

$$\frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}_0} = \max\left\{\frac{fR_d^2t^2}{8}\nabla^2 Z_T, -1\right\}$$

où R_d est le rayon de déformation du mode considéré, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}'$ est l'amplitude de l'énergie inertielle associée à ce mode et $\nabla^2 Z_T$ est le laplacien de la vorticité tronqué de façon à retenir seulement les nombres d'onde inférieurs à $k_c = \sqrt{\frac{2\pi}{fR_d^2t}}$.

Pour arriver à ce résultat, ils ont fait deux hypothèses principales : tout d'abord, le champ mésoéchelle est supposé barotrope, ensuite, ils supposent que la pente associée au spectre de vorticité est inférieure à 4, c'est-à-dire que $|\hat{Z}_k|^2 = \alpha^2 k^{-n}$ avec $n < 4$ et où \hat{Z} est la transformée de Fourier de la vorticité.

1.4.5 Effets des autres composantes du champ de déformation mésoéchelle

La quasi-totalité des études mentionnées ci-dessus font l'hypothèse que le champ mésoéchelle dans laquelle se propagent les ondes inertielles est barotrope, ou en tout cas que son échelle verticale est très grande par rapport à l'échelle verticale des ondes. Peu d'études s'intéressent à l'effet de la divergence du champ mésoéchelle sur la propagation des ondes. L'étude de Plougonven et Snyder (2005) nous paraît particulièrement intéressante à cet égard.

Beaucoup d'études s'intéressant aux ondes d'inertie-gravité émises par les jets atmosphériques se concentrent sur les mécanismes de génération de ces ondes, et

considèrent que c'est à ce moment-là que les caractéristiques des ondes sont fixées. A l'inverse, Plougonven et Snyder (2005) s'intéressent aux mécanismes de propagation de ces ondes, et cherchent à comprendre comment les caractéristiques des ondes peuvent être modifiées pendant la phase de propagation.

Pour cela, comme Kunze (1985), ils appliquent une méthode de *ray-tracing* (Lighthill (1978)), c'est-à-dire d'étude de la propagation de paquets d'ondes. Dans le cas idéalisé où le courant est la somme d'un champ de déformation horizontale et d'un cisaillement vertical, ils démontrent que le nombre d'onde s'oriente dans la direction de l'axe de contraction, avec une inclinaison selon la verticale liée au cisaillement vertical. Puis la longueur d'onde décroît, la vitesse de groupe du paquet d'ondes s'annule et est advectée selon l'axe de dilatation où l'énergie s'accumule : les ondes y sont alors piégées. Ce mécanisme n'est pas nouveau : il a été identifié initialement par Badulin et Shrira (1993) et remis au goût du jour par Bühler et McIntyre (2005) qui le nomme "capture d'onde".

A l'aide de simulations numériques d'instabilité barocline d'un jet, Plougonven et Snyder (2005) vérifient la pertinence de leurs calculs analytiques.

L'approche de Straub (2003) est toute autre. C'est une étude théorique sur l'instabilité de perturbations tridimensionnelles au sein d'écoulements 2D non-divergents (contrairement à Plougonven et Snyder (2005)).

Tout écoulement 2D non-divergent peut s'écrire comme la somme d'une rotation pure et d'un étirement pure. Si la majorité des études s'intéresse à l'effet de la partie rotationnelle du champ de vitesses sur la propagation des NIO car c'est l'effet dominant, Straub s'intéresse à l'effet de l'étirement sur la propagation.

Dans notre cas, on peut associer les perturbations 3D à des ondes d'inertie-gravité de faible amplitude.

Partant de la constatation que, dans la limite irrotationnelle et non-stratifiée, les équations linéarisées gouvernant une perturbation 3D présentent une structure similaire aux équations gouvernant le gradient de traceur ou un élément linéaire, Straub (2003) dresse des analogies entre ces trois systèmes. Quand l'écoulement 2D de base est chaotique, les gradients de traceurs ainsi que les éléments linéaires sont caractérisés par une forte croissance, ce qui suggère qu'il en est de même pour les perturbations 3D. Straub complexifie le problème petit à petit, considérant d'abord le cas non-rotationnel et non stratifié au sein d'un écoulement simplifié stationnaire, puis s'intéresse au cas d'un écoulement chaotique, et rajoute enfin la rotation puis la stratification. Il conclut que, excepté dans certains cas bien spécifiques, les écoulements chaotiques sont globalement instables. En outre, il développe un critère de type Okubo-Weiss (voir Okubo (1970) et Weiss (1981)) modifié afin de situer ces régions instables.

Comme on peut le constater, les études s'intéressant aux effets des composantes du champ de vitesse autres que la vorticité sur la propagation des ondes d'inertie-gravité sont encore rares. De nombreux efforts restent à fournir dans ce domaine.

1.4.6 Effet- β sur la propagation des NIO

De la même façon que les gradients de vorticité relative, les gradients de la vorticité planétaire f vont influencer la propagation des NIO. Plus précisément, la variation de f avec la latitude va entraîner un comportement asymétrique des NIO selon la direction méridienne. La démonstration peut-être faite en termes de bande passante, comme avec la vorticité. En effet, on sait que la fréquence intrinsèque d'une onde ω_0 est conservée lors de sa propagation. D'après Kunze (1985), celle-ci s'écrit

$$\omega_0 = \omega - \vec{k} \cdot \vec{V} \sim f_{eff} + \frac{N^2 k_h^2}{2f k_z^2} = f_0 + \beta y + \frac{\xi}{2} + \frac{N^2 k_h^2}{2f k_z^2}$$

dans l'approximation du plan- β et où N désigne la fréquence de Brunt Väisälä, k_h et k_z sont respectivement les nombres d'ondes horizontal et vertical. Le terme $\frac{N^2 k_h^2}{2f k_z^2}$ étant positif, on voit que seules les latitudes $f \leq \omega_0$ seront permises. L'onde est ainsi libre de se propager vers l'équateur mais son mouvement vers les pôles est entravé, et on observera une réflexion de l'onde à la latitude y_c telle que $f(y_c) = \omega_0$.

Cette propagation favorisée vers l'équateur est connue depuis longtemps (Anderson et Gill (1979)). Gill (1984) l'observe en particulier dans ses simulations numériques représentant l'effet d'une tempête sur un plan β . Récemment, Alford (2003b) a pu calculer l'amplitude et la direction des flux d'énergie inertielle à partir de données de mouillages en différents points de l'océan, et constater que ceux-ci étaient, dans leur très grande majorité, orientés vers l'équateur.

Toutefois, les mouvements vers l'équateur ne sont pas, eux non plus, totalement libres. Certains, tels Nagasawa et al. (2000), pensent que les ondes vont se propager jusqu'à ce que leur fréquence propre soit égale à deux fois la fréquence de Coriolis locale, où elles s'effondreront en raison de l'instabilité paramétrique subharmonique (notée PSI pour *Parametric Subharmonic Instability*). La PSI est une instabilité due aux termes non-linéaires des équations du mouvement, par laquelle une triade entre en résonance : une onde de fréquence ω fournissant son énergie à deux ondes "filles" de fréquence $\frac{\omega}{2}$ (voir McComas et Müller (1981) pour plus de précisions sur la PSI dans l'océan). Néanmoins, les preuves de l'existence d'un tel mécanisme dans l'océan sont rares et Garrett (2001) affirme que les ondes auraient le temps de se réfléchir plusieurs fois sur le fond avant de connaître cette instabilité.

Une meilleure compréhension de la PSI et de ses conséquences sur la propagation méridienne des NIO due à l'effet β est aujourd'hui nécessaire.

Chapitre 2

Une nouvelle méthode d'extraction du signal inertiel. Comparaison avec deux autres méthodes

Pour étudier la propagation d'ondes inertielles générées par le vent, il faut d'abord une méthode capable de séparer dans l'écoulement total la partie "lente" due à l'écoulement mésoéchelle de la partie inertielle. Nous exposons ici trois méthodes, ayant chacune leurs avantages et leurs inconvénients. Ces trois méthodes s'attachent à calculer la partie basse-fréquence de l'écoulement ; on obtient alors la partie haute fréquence par soustraction avec l'écoulement total. Dans la première partie, nous détaillons la méthode que nous avons mise au point, qui est nouvelle par rapport à la littérature existante bien qu'inspirée des travaux de Muraki et d'Allen. Dans la seconde partie, nous calculons l'erreur commise par cette méthode. Dans la troisième partie, nous présentons deux autres méthodes d'extraction du signal inertiel et enfin, dans la quatrième partie, nous comparons les résultats des trois méthodes.

2.1 Description de la nouvelle méthode

Nous allons détailler dans cette partie la théorie mathématique à l'origine de la méthode d'extraction du signal haute fréquence que nous avons mise au point (notée méthode DK pour Danioux-Klein). Elle part du principe que les ondes d'inertie-gravité n'ont pas de signature sur la vorticité potentielle d'Ertel (cf Muller (1995)) et donc, qu'en inversant cette dernière, on peut reconstituer l'écoulement basse fréquence.

   l'ordre zéro, la méthode DK est une inversion "classique" de vorticité potentielle QG.

Au premier ordre, elle est largement inspirée des travaux sur le modèle QG+1 de Muraki, Rotunno et Snyder (cf Muraki et al. (1999) , Rotunno et al. (2000)) avec toutefois la différence notable que notre méthode est valable dans le cas d'une stratification variable alors que la méthode développée dans Muraki et al. (1999), prévue pour la stratosphère, est valable uniquement dans le cas d'une stratification constante. Dans le cas d'une stratification variable, de nouveaux termes apparaissent.

Enfin, au deuxième ordre, la méthode DK s'inspire des travaux de Allen (1993)

sur les modèles géostrophiques itératifs.

Après avoir présenté les équations et leur technique d'adimensionnalisation, la méthode sera développée uniquement avec les variables adimensionnées pour plus de simplicité.

2.1.1 Equations de base et adimensionnalisation

Les équations de base utilisées ici sont les équations primitives sous les hypothèses hydrostatique, adiabatique et inviscide. L'approximation de Boussinesq est également faite. Les équations du moment, de chaleur, hydrostatique et de continuité donnent :

$$u_t + uu_x + vv_y + wu_z - fv = -\frac{1}{\rho_0}p_x \quad (2.1)$$

$$v_t + uv_x + vv_y + wv_z + fu = -\frac{1}{\rho_0}p_y \quad (2.2)$$

$$\rho_t + u\rho_x + v\rho_y - \frac{\rho_0}{g}N^2w = 0 \quad (2.3)$$

$$p_z = -\rho g \quad (2.4)$$

$$u_x + v_y + w_z = 0 \quad (2.5)$$

u , v et w sont respectivement les composantes zonale, méridienne et verticale de la vitesse. p et ρ représentent les perturbations de pression et de densité. Elles sont liées à la pression et la densité totales p_{tot} et ρ_{tot} par les formules suivantes :

$$p_{tot}(x, y, z, t) = \bar{p}(z) + p(x, y, z, t)$$

$$\rho_{tot}(x, y, z, t) = \rho_0 + \bar{\rho}(z) + \rho(x, y, z, t)$$

où ρ_0 est la densité moyennée sur tout le domaine (selon x, y, z), $\bar{\rho}(z)$ est la partie variable avec z de la densité initiale et $\bar{p}(z) = p_0 - \rho_0 z + \int_z^0 \bar{\rho}(z') dz'$ où $p_0 = \bar{p}(z=0)$ est une constante indépendante de x, y . $N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}$ décrit la stratification de l'état de base, N est appelée fréquence de Brunt-Väisälä. f est la fréquence de Coriolis, supposée constante sur l'ensemble du domaine (hypothèse du plan- f).

La vorticité potentielle d'Ertel notée Q , grandeur associée à la partie lente du mouvement, se calcule par la formule suivante : $Q = (f\vec{k} + \vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot \vec{\nabla}(\bar{\rho} + \rho)$

Les équations (2.1) à (2.5) vont maintenant être adimensionnalisées à l'aide des grandeurs suivantes : L l'échelle horizontale caractéristique, U l'échelle caractéristique des vitesses horizontales, $\frac{L}{U}$ l'échelle de temps (lente), $H = \frac{fL}{N_0}$ l'échelle verticale où $N_0 = \frac{1}{H_0} \int_{-H_0}^0 N(z) dz$ est la fréquence de Brunt-Väisälä moyennée sur toute la colonne d'eau de profondeur H_0 .

$$\begin{aligned} \{x, y\} &= L\{\tilde{x}, \tilde{y}\} & z &= H\tilde{z} & t &= \frac{L}{U}\tilde{t} & p &= f\rho_0 UL\tilde{p} \\ \{u, v\} &= U\{\tilde{u}, \tilde{v}\} & w &= \epsilon \frac{HU}{L}\tilde{w} & \rho &= -\frac{\rho_0 UN_0}{g}\tilde{\rho} \end{aligned}$$

$\epsilon = \frac{U}{fL}$ est le nombre de Rossby, supposé très petit devant 1 dans cette méthode (hypothèse quasi-géostrophique)

Les équations adimensionnelles s'écrivent alors :

$$\epsilon(\tilde{u}_{\tilde{t}} + \tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{v}\tilde{u}_{\tilde{y}} + \tilde{w}\tilde{u}_{\tilde{z}}) - v = -\tilde{p}_{\tilde{x}}$$

$$\epsilon(\tilde{v}_{\tilde{t}} + \tilde{u}\tilde{v}_{\tilde{x}} + \tilde{v}\tilde{v}_{\tilde{y}} + \tilde{w}\tilde{v}_{\tilde{z}}) + u = -\tilde{p}_{\tilde{y}}$$

$$\tilde{\rho}_{\tilde{t}} + \tilde{u}\tilde{\rho}_{\tilde{x}} + \tilde{v}\tilde{\rho}_{\tilde{y}} + \frac{1}{\Lambda^2(\tilde{z})}\tilde{w} = 0$$

$$\tilde{p}_{\tilde{z}} = \tilde{\rho}$$

$$\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{v}_{\tilde{y}} + \tilde{w}_{\tilde{z}} = 0$$

$\Lambda(z) = N_0/N(z)$ est supposé proche de 1 (i.e. on suppose que N varie peu autour de N_0)

L'anomalie de vorticité potentielle d'Ertel (= la vorticité potentielle totale moins la vorticité potentielle associée à l'état de base) s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= \tilde{v}_{\tilde{x}} - \tilde{u}_{\tilde{y}} + \Lambda^2\tilde{\rho}_{\tilde{z}} + \epsilon\Lambda^2\tilde{\rho}_{\tilde{z}}(\tilde{v}_{\tilde{x}} - \tilde{u}_{\tilde{y}}) + \\ &\epsilon\Lambda^2\tilde{\rho}_{\tilde{y}}(\tilde{u}_{\tilde{z}} - \epsilon\mu^2\tilde{w}_{\tilde{x}}) - \epsilon\Lambda^2\tilde{\rho}_{\tilde{x}}(\tilde{v}_{\tilde{z}} - \epsilon\mu^2\tilde{w}_{\tilde{y}}) \end{aligned}$$

que l'on peut remplacer par

$$\tilde{q} \simeq \tilde{v}_{\tilde{x}} - \tilde{u}_{\tilde{y}} + \Lambda^2\tilde{\rho}_{\tilde{z}} + \epsilon\Lambda^2\{\tilde{\rho}_{\tilde{z}}(\tilde{v}_{\tilde{x}} - \tilde{u}_{\tilde{y}}) + \tilde{\rho}_{\tilde{y}}\tilde{u}_{\tilde{z}} - \tilde{\rho}_{\tilde{x}}\tilde{v}_{\tilde{z}}\}$$

car le rapport d'aspect $\mu = \frac{H}{L}$ est généralement très inférieur à 1.

2.1.2 Description de la méthode

Présentation des équations principales. Développements en ϵ .

Par souci de simplicité, on omet désormais les tildes sur les variables adimensionnelles.

En effectuant une décomposition 3D d'Helmholtz (comme dans Muraki et al. (1999)), on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} v \\ -u \\ \rho \end{bmatrix} = \vec{\nabla}\phi + \epsilon\vec{\nabla} \times \vec{\chi} \quad (2.6)$$

avec $\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}$ où ϕ est le potentiel gradient (il représente la partie rotationnelle ou non-divergente de la vitesse) et χ est le potentiel rotationnel 3D (il représente la partie divergente de la vitesse).

On note :

$$\epsilon\vec{\nabla} \times \vec{\chi} = \epsilon \begin{bmatrix} v_a \\ -u_a \\ \rho_a \end{bmatrix}$$

Par conséquent

$$v_{ax} - u_{ay} + \rho_{az} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\chi}) = 0 \quad (2.7)$$

L'importance relative des parties rotationnelle et divergente $\vec{\nabla}\phi$ et $\epsilon\vec{\nabla} \times \vec{\chi}$ peut se comprendre à l'aide des équations de moment et hydrostatique :

$$\begin{bmatrix} v \\ -u \\ \rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x + \epsilon \frac{Du}{Dt} \\ p_y + \epsilon \frac{Dv}{Dt} \\ p_z \end{bmatrix}$$

Le vecteur $(\epsilon \frac{Du}{Dt}, \epsilon \frac{Dv}{Dt}, 0)$ peut avoir une partie rotationnelle et une partie divergente, mais dans tous les cas, la partie divergente sera plus petite d'un ordre en ϵ que (p_x, p_y, p_z) qui est purement rotationnelle, ce qui justifie la décomposition 2.6.

On développe alors chaque variable comme une série en puissances de ϵ , sauf p que l'on ne connaît pas.

$$\phi = \phi^{(0)} + \epsilon\phi^{(1)} + \epsilon^2\phi^{(2)} + O(\epsilon^3)$$

$$u_a = u_a^{(1)} + \epsilon u_a^{(2)} + O(\epsilon^2)$$

$$v_a = v_a^{(1)} + \epsilon v_a^{(2)} + O(\epsilon^2)$$

$$\rho_a = \rho_a^{(1)} + \epsilon \rho_a^{(2)} + O(\epsilon^2)$$

Ainsi :

$$\begin{array}{lcl} u & = & -\phi_y^{(0)} - \epsilon\phi_y^{(1)} - \epsilon^2\phi_y^{(2)} + \epsilon(u_a^{(1)} + \epsilon u_a^{(2)}) + O(\epsilon^3) \\ v & = & \phi_x^{(0)} + \epsilon\phi_x^{(1)} + \epsilon^2\phi_x^{(2)} + \epsilon(v_a^{(1)} + \epsilon v_a^{(2)}) + O(\epsilon^3) \\ \rho & = & \underbrace{\phi_z^{(0)} + \epsilon\phi_z^{(1)} + \epsilon^2\phi_z^{(2)}}_{\text{partie rotationnelle}} + \underbrace{\epsilon(\rho_a^{(1)} + \epsilon\rho_a^{(2)})}_{\text{partie divergente}} + O(\epsilon^3) \end{array}$$

Avec ces notations, l'anomalie de vorticité potentielle d'Ertel devient :

$$\begin{aligned} q &= \nabla_h^2 \phi^{(0)} + \Lambda^2 \phi_{zz}^{(0)} \\ &+ \epsilon \{ \nabla_h^2 \phi^{(1)} + \Lambda^2 \phi_{zz}^{(1)} + (\Lambda^2 - 1)\rho_{az}^{(1)} + \Lambda^2 [(\phi_{xx}^{(0)} + \phi_{yy}^{(0)})\phi_{zz}^{(0)} \\ &\quad - (\phi_{xz}^{(0)})^2 - (\phi_{yz}^{(0)})^2] \} \\ &+ \epsilon^2 \{ \nabla_h^2 \phi^{(2)} + \Lambda^2 \phi_z^{(2)} + (\Lambda^2 - 1)\rho_{az}^{(2)} \\ &\quad + \Lambda^2 [(\phi_{xx}^{(0)} + \phi_{yy}^{(0)})(\phi_{zz}^{(1)} + \rho_{az}^{(1)}) \\ &\quad + \phi_{zz}^{(0)}(\phi_{xx}^{(1)} + \phi_{yy}^{(1)} + v_{ax}^{(1)} - u_{ay}^{(1)}) \\ &\quad - 2\phi_{xz}^{(0)}\phi_{xz}^{(1)} - 2\phi_{yz}^{(0)}\phi_{yz}^{(1)} - \phi_{xz}^{(0)}(\rho_{ax}^{(1)} + v_{az}^{(1)}) \\ &\quad - \phi_{yz}^{(0)}(\rho_{ay}^{(1)} - u_{az}^{(1)}) + (\phi_{xx}^{(0)} + \phi_{yy}^{(0)})\rho_{az}^{(1)} + (v_{ax}^{(1)} - u_{ay}^{(1)})\phi_{zz}^{(0)}] \} \\ &+ O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\text{où } \vec{\nabla}_h = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix}$$

L'idée de la méthode DK est de résoudre **récurivement** l'équation 2.8 en considérant qu'à l'ordre 0, $\nabla_h^2 \phi^{(0)} + \Lambda^2 \phi_{zz}^{(0)} = q$ puis qu'ensuite le membre de droite de l'équation 2.8 est nul à tous les ordres suivants.

Nous allons donc calculer :

- d'abord $\phi^{(0)}$,
- puis $\phi^{(1)}$ et $(u_a^{(1)}, v_a^{(1)}, \rho_a^{(1)})$,
- et enfin $\phi^{(2)}$ et $(u_a^{(2)}, v_a^{(2)}, \rho_a^{(2)})$.

Méthode aux ordres zéro et 1 en ϵ

Calcul de $\phi^{(0)}$

On calcule $\phi^{(0)}$ en résolvant l'équation :

$$\nabla_h^2 \phi^{(0)} + \Lambda^2 \phi_{zz}^{(0)} = q \quad (2.9)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \phi_z^{(0)}(z=0) = \rho_{obs}(z=0) \\ \phi_z^{(0)}(z=-H) = \rho_{obs}(z=-H) \end{cases} \quad (2.10)$$

où ρ_{obs} est la perturbation totale de densité (contenant les composantes basse et haute fréquence). En toute logique, cela devrait être seulement la partie "lente" de la perturbation de densité qui devrait apparaître dans les conditions aux limites 2.10, mais des tests ont montré que ϕ_0 était peu sensible au fait que l'on prenne la densité totale ou seulement sa partie "lente". C'est pourquoi nous ne chercherons pas par exemple à filtrer temporellement ρ_{obs} afin de calculer rigoureusement les conditions aux limites 2.10 et nous nous contenterons de la perturbation totale de densité ρ_{obs} .

Ensuite, pour calculer $\phi^{(1)}$, on doit connaître $\phi^{(0)}$ **et** $\rho_a^{(1)}$ en général. Dans le cas d'une stratification constante (i.e. quand N ne dépend pas de z : $\Lambda(z) = 1$), qui est le cas traité par Muraki et al. (1999), il est seulement nécessaire de connaître $\phi^{(0)}$ afin de calculer $\phi^{(1)}$.

Calcul de $\rho_a^{(1)}$

Récapitulons :

$$\begin{bmatrix} v \\ -u \\ \rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x + \epsilon \frac{Du}{Dt} \\ p_y + \epsilon \frac{Dv}{Dt} \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_x + \epsilon v_a \\ \phi_y - \epsilon u_a \\ \phi_z + \epsilon \rho_a \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

La première égalité est donnée par les équations du moment et hydrostatique, la seconde est la décomposition 3D de Helmholtz.

En égalisant les deux derniers membres de la double-équation 2.11 et en utilisant les développements en ϵ présentés auparavant, on trouve :

$$\epsilon \begin{bmatrix} v_a^{(1)} \\ -u_a^{(1)} \\ \rho_a^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (p - \phi^{(0)} - \epsilon \phi^{(1)})_x + \epsilon \frac{D^{(0)}u^{(0)}}{Dt} \\ (p - \phi^{(0)} - \epsilon \phi^{(1)})_y + \epsilon \frac{D^{(0)}v^{(0)}}{Dt} \\ (p - \phi^{(0)} - \epsilon \phi^{(1)})_z \end{bmatrix} + O(\epsilon^2) \quad (2.12)$$

avec $u^{(0)} = -\phi_y^{(0)}$, $v^{(0)} = \phi_x^{(0)}$ et $\frac{D^{(0)}}{Dt} = \partial_t + u^{(0)}\partial_x + v^{(0)}\partial_y$

En prenant le gradient de l'équation 2.12 et en utilisant la propriété de (u_a, v_a, ρ_a) (cf équation 2.7), on trouve à l'ordre 1 :

$$0 = -\nabla^2(p - \phi^{(0)} - \epsilon\phi^{(1)}) - \epsilon\left(\partial_x \frac{D^{(0)}u^{(0)}}{Dt} + \partial_y \frac{D^{(0)}v^{(0)}}{Dt}\right)$$

qui se simplifie :

$$\nabla^2(p - \phi^{(0)} - \epsilon\phi^{(1)}) = 2\epsilon J(u^{(0)}, v^{(0)}) \quad (2.13)$$

où $J(\cdot, \cdot)$ représente l'opérateur Jacobien ($J(A, B) = \partial_x A \partial_y B - \partial_x B \partial_y A$).

$(p - \phi^{(0)} - \epsilon\phi^{(1)})$ est souvent appelée pression agéostrophique d'ordre 1.

L'équation 2.13 est résolue avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \partial_z(p - \phi^{(0)} - \epsilon\phi^{(1)})(z = 0) = 0 \\ \partial_z(p - \phi^{(0)} - \epsilon\phi^{(1)})(z = -H) = 0 \end{cases}$$

Calcul de $\phi^{(1)}$

Connaissant désormais $\rho_a^{(1)} = \partial_z(p - \phi^{(0)} - \epsilon\phi^{(1)})$, on peut résoudre :

$$\nabla_h^2 \phi^{(1)} + \Lambda^2 \phi_{zz}^{(1)} = -(\Lambda^2 - 1)\rho_{az}^{(1)} + \Lambda^2 \{(\phi_{xz}^{(0)})^2 + (\phi_{yz}^{(0)})^2 - (\phi_{xx}^{(0)} + \phi_{yy}^{(0)})\phi_{zz}^{(0)}\} \quad (2.14)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \phi_z^{(1)}(z = 0) = 0 \\ \phi_z^{(1)}(z = -H) = 0 \end{cases}$$

Calcul de $(u_a^{(1)}, v_a^{(1)})$

Deux méthodes de calcul de $(u_a^{(1)}, v_a^{(1)})$ existent.

La première est prognostique et consiste à calculer $\frac{D^{(0)}u^{(0)}}{Dt}$ et $\frac{D^{(0)}v^{(0)}}{Dt}$. On en déduit alors $(u_a^{(1)}, v_a^{(1)})$ par la formule 2.12 avec le terme $O(\epsilon^2)$ mis à zéro. Mais cette méthode peut engendrer du bruit s'il subsiste même un faible signal haute fréquence dans $\phi^{(0)}$.

Par conséquent, une seconde méthode lui est préférée et celle-ci est purement diagnostique, de telle sorte qu'on n'a plus ce genre de problème. Cela commence par écrire la partie divergente de la vitesse horizontale sous la forme d'une décomposition 2D d'Helmholtz à chaque niveau en z :

$$\begin{bmatrix} v_a^{(1)} \\ -u_a^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x \psi + \partial_y \pi \\ \partial_y \psi - \partial_x \pi \end{bmatrix}$$

Par définition de $(u_a^{(1)}, v_a^{(1)}, \rho_a^{(1)})$:

$$v_{ax}^{(1)} - u_{ay}^{(1)} = -\rho_{az}^{(1)} = -(p - \phi^{(0)} - \epsilon\phi^{(1)})_{z^2}$$

i.e.

$$\nabla_{2D}^2 \psi = -(p - \phi^{(0)} - \epsilon\phi^{(1)})_{z^2}$$

De plus, l'équation de continuité donne :

$$u_{ax}^{(1)} + v_{ay}^{(1)} = -w_z^{(1)}$$

i.e.

$$\nabla_{2D}^2 \pi = -w_z^{(1)}$$

Ainsi, la recherche de $(u_a^{(1)}, v_a^{(1)})$ revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \nabla_{2D}^2 \psi = -\rho_{az}^{(1)} \\ \nabla_{2D}^2 \pi = -w_z^{(1)} \end{cases} \quad (2.15)$$

où $w^{(1)}$ est calculé en résolvant l'équation omega :

$$\nabla_h^2 w^{(1)} + \Lambda^2 w_{zz}^{(1)} = -2\Lambda^2 \vec{\nabla}_h \cdot \vec{Q}$$

avec

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} J(\phi_x^{(0)}, \phi_z^{(0)}) \\ J(\phi_y^{(0)}, \phi_z^{(0)}) \end{bmatrix}$$

On connaît donc désormais les vitesses d'ordre 1 :

$$(u^{(1)}, v^{(1)}) = (-\phi_y^{(1)} + u_a^{(1)}, \phi_x^{(1)} + v_a^{(1)})$$

avec

$$(u_a^{(1)}, v_a^{(1)}) = (\partial_x \pi - \partial_y \psi, \partial_y \pi + \partial_x \psi)$$

ainsi que la densité d'ordre 1 :

$$\rho^{(1)} = \phi_z^{(1)} + \rho_a^{(1)}$$

Méthode au troisième ordre en ϵ

Calcul de $(u_a^{(2)}, v_a^{(2)}, \rho_a^{(2)})$

Comme précédemment, on calcule d'abord $\rho_a^{(2)}$ en résolvant l'équation sur la pression géostrophique du second ordre en ϵ .

Commençons par écrire l'équation sur $(u_a^{(1)} + \epsilon u_a^{(2)}, v_a^{(1)} + \epsilon v_a^{(2)}, \rho_a^{(1)} + \epsilon \rho_a^{(2)})$ comme nous l'avons fait pour $(u_a^{(1)}, v_a^{(1)}, \rho_a^{(1)})$ dans l'équation 2.12 :

$$\epsilon \begin{bmatrix} v_a^{(1)} + \epsilon v_a^{(2)} \\ -u_a^{(1)} - \epsilon u_a^{(2)} \\ \rho_a^{(1)} + \epsilon \rho_a^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (p - \phi^{(0)} - \epsilon \phi^{(1)} - \epsilon^2 \phi^{(2)})_x + \epsilon \frac{D^{(1)}(u^{(0)} + \epsilon u^{(1)})}{Dt} \\ (p - \phi^{(0)} - \epsilon \phi^{(1)} - \epsilon^2 \phi^{(2)})_y + \epsilon \frac{D^{(1)}(v^{(0)} + \epsilon v^{(1)})}{Dt} \\ (p - \phi^{(0)} - \epsilon \phi^{(1)} - \epsilon^2 \phi^{(2)})_z \end{bmatrix} + O(\epsilon^3) \quad (2.16)$$

où $\epsilon u^{(1)} = -\epsilon \phi_y^{(1)} + \epsilon u_a^{(1)}$, $\epsilon v^{(1)} = \epsilon \phi_x^{(1)} + \epsilon v_a^{(1)}$

et $\frac{D^{(1)}}{Dt} = \partial_t + (u^{(0)} + \epsilon u^{(1)})\partial_x + (v^{(0)} + \epsilon v^{(1)})\partial_y + \epsilon w^{(1)}\partial_z$

À ce niveau, même si nous ne connaissons pas p , il est plus facile de développer p en ϵ pour mieux comprendre la méthode : $p = p^{(0)} + \epsilon p^{(1)} + \epsilon^2 p^{(2)} + O(\epsilon^3)$.

En utilisant l'expression de $(u_a^{(1)}, v_a^{(1)}, \rho_a^{(1)})$ donnée par l'équation 2.12 et la décomposition de p , on obtient :

$$\epsilon^2 \begin{bmatrix} v_a^{(2)} \\ -u_a^{(2)} \\ \rho_a^{(2)} \end{bmatrix} = \epsilon^2 \begin{bmatrix} -(p^{(2)} - \phi^{(2)})_x + DTu \\ -(p^{(2)} - \phi^{(2)})_y + DTv \\ -(p^{(2)} - \phi^{(2)})_z \end{bmatrix} + O(\epsilon^3) \quad (2.17)$$

avec $DTu = u_t^{(1)} + u^{(0)}u_x^{(1)} + u^{(1)}u_x^{(0)} + v^{(0)}u_y^{(1)} + v^{(1)}u_y^{(0)} + w^{(1)}u_z^{(0)}$
et $DTv = v_t^{(1)} + u^{(0)}v_x^{(1)} + u^{(1)}v_x^{(0)} + v^{(0)}v_y^{(1)} + v^{(1)}v_y^{(0)} + w^{(1)}v_z^{(0)}$

Le gradient de l'équation 2.17 donne :

$$\nabla^2(p^{(2)} - \phi^{(2)}) = \partial_x DTu + \partial_y DTv \quad (2.18)$$

que l'on résout avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \partial_z(p^{(2)} - \phi^{(2)})(z = 0) = 0 \\ \partial_z(p^{(2)} - \phi^{(2)})(z = -H) = 0 \end{cases}$$

A cette ordre en ϵ , la méthode DK est *prognostique* car $\partial_t(u_x^{(1)} + v_y^{(1)}) \neq 0$ contrairement à 2.13 où $\partial_t(u_x^{(0)} + v_y^{(0)}) = 0$. Il n'est plus possible de s'affranchir du calcul de dérivées temporelles.

Après avoir calculé DTu et Dtv , on déduit donc $(u_a^{(2)}, v_a^{(2)}, \rho_a^{(2)})$ par l'expression 2.17.

Calcul de $\phi^{(2)}$

Enfin, connaissant $\phi^{(0)}, \phi^{(1)}, (u_a^{(1)}, v_a^{(1)}, \rho_a^{(1)})$ et $\rho_a^{(2)}$, on calcule $\phi^{(2)}$ en résolvant l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \nabla_h^2 \phi^{(2)} + \Lambda^2 \phi_{zz}^{(2)} &= -(\Lambda^2 - 1)\rho_{az}^{(2)} \\ &+ \Lambda^2 [-(\phi_{xx}^{(0)} + \phi_{yy}^{(0)})(\phi_{zz}^{(1)} + \rho_{az}^{(1)}) \\ &- (\phi_{xx}^{(1)} + \phi_{yy}^{(1)} + v_{ax}^{(1)} - u_{ay}^{(1)})\phi_{zz}^{(0)} \\ &+ 2\phi_{xz}^{(0)}\phi_{xz}^{(1)} + 2\phi_{yz}^{(0)}\phi_{yz}^{(1)} + \phi_{xz}^{(0)}(\rho_{ax}^{(1)} + v_{az}^{(1)}) \\ &+ \phi_{yz}^{(0)}(\rho_{ay}^{(1)} - u_{az}^{(1)})] \end{aligned}$$

On connaît donc désormais les vitesses d'ordre 2 :

$$(u^{(2)}, v^{(2)}) = (-\phi_y^{(2)} + u_a^{(2)}, \phi_x^{(2)} + v_a^{(2)})$$

ainsi que la densité d'ordre 2 :

$$\rho^{(2)} = \phi_z^{(2)} + \rho_a^{(2)}$$

2.2 Evaluation de l'erreur commise par la méthode d'inversion de vorticité potentielle

Nous allons effectuer des simulations sans vent à l'aide du modèle SPEM et évaluer la capacité de la méthode DK à recouvrir le champ total. En effet, sans vent,

la partie haute-fréquence est négligeable dans SPEM : elle est composée d'ondes internes d'inertie-gravité de très faible amplitude, généralement émises par ajustement géostrophique. On fait donc l'hypothèse que le champ total est égal à sa partie basse fréquence dans ce cas.

La méthode DK est écrite en langage fortran et se présente comme un module indépendant du code SPEM, donc facilement utilisable et applicable à des sorties d'autres modèles (ROMS par exemple). Elle prend en entrée les champs de vitesse horizontale et de densité sortis par SPEM, nécessaires afin de calculer la vorticité potentielle d'Ertel ainsi que les conditions aux limites 2.10. Par conséquent, la résolution horizontale et verticale ainsi que les dimensions du domaine sont les mêmes dans SPEM et la méthode DK. Les deux modèles représentent un canal périodique selon x (l'axe zonal) de dimensions $L_x \times L_y = 1000 \text{ km} \times 2000 \text{ km}$. La résolution horizontale est proche de 6 km, la profondeur du canal est de 4000 m et il y a 33 niveaux stretchés sur la vertical, avec un pas de grille variant de $dz \simeq 5 \text{ m}$ en surface à $dz \simeq 500 \text{ m}$ en profondeur. Les approximations de toit rigide et fond plat sont faites. Un champ turbulent est obtenu dans SPEM par instabilité d'un jet zonal. La fréquence de Coriolis locale est $f_0 = 1.031 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, correspondant à une période inertielle de 16h55min.

Toutes les équations elliptiques présentées dans la méthode DK sont résolues par les solveurs elliptiques bidimensionnel mud2 et tridimensionnel mud3, téléchargeables gratuitement à l'adresse suivante :

http : //www.scd.ucar.edu/css/software/mudpack.

Ces solveurs ont prouvé leur efficacité par le passé, d'ailleurs mud2 est déjà utilisé dans SPEM pour calculer la fonction de courant barotrope.

La stratification utilisée est représentée sur la figure 2.1. On voit sur cette figure que la fréquence de Brunt-Väisälä varie beaucoup, ce qui est contraire à l'hypothèse $N \sim N_0$ faite dans la méthode DK. Cette hypothèse a été faite par rigueur mathématique mais des tests ont montré que le modèle converge toujours même lorsqu'on s'écarte de cette hypothèse.

Les résultats sont présentés sur les figures 2.2(a) et 2.4. La figure 2.2(a) représente l'erreur standard commise par la méthode aux ordres 0 (en bleu), 1 (en vert) et 2 (en rouge). L'erreur standard est calculée comme suit :

$$err_n(z) = \left[\frac{1}{L_x L_y} \iint_{L_x \times L_y} (u - u_n)^2 + (v - v_n)^2 dx dy \right]^{1/2}$$

où (u, v) sont les vitesses horizontales totales sorties par SPEM et (u_n, v_n) l'approximation de (u, v) à l'ordre n calculée par la méthode DK :

$$\begin{aligned} (u_0, v_0) &= (-\phi_y^{(0)}, \phi_x^{(0)}) \\ (u_1, v_1) &= (u_0, v_0) + (-\phi_y^{(1)} + u_a^{(1)}, \phi_x^{(1)} + v_a^{(1)}) \\ (u_2, v_2) &= (u_1, v_1) + (-\phi_y^{(2)} + u_a^{(2)}, \phi_x^{(2)} + v_a^{(2)}) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé les notations présentées au paragraphe 2.1.2.

La méthode à l'ordre 1 apporte une amélioration non négligeable par rapport à la méthode à l'ordre 0 : l'erreur est divisée par 2 environ sur une bonne partie des

1000 premiers mètres. Toutefois, en profondeur (dans la région 2000 - 4000 m qui ne représente que 4 points de grille en raison du "stretching"), les erreurs commises par les 2 méthodes sont équivalentes et très faibles. Cela ne constitue pas un gros problème car, comme nous le verrons plus tard, l'énergie cinétique inertielle reste majoritairement concentrée dans les 500 premiers mètres. Ainsi, il convient surtout que l'ordre 1 apporte une amélioration dans cette région, ce qui est le cas au vu de la figure 2.2(a).

Par contre, il n'y a quasiment pas d'amélioration apportée par l'ordre 2 par rapport à la méthode à l'ordre 1. Nous imputons ce résultat à la faiblesse des nombres de Rossby utilisés dans cette simulation (cf figure 2.3(a)).

Pour vérifier cette hypothèse, nous effectuons une nouvelle simulation à l'aide de SPEM conduisant à des nombres de Rossby bien plus élevés, et testons de nouveau la capacité de la méthode à reconstituer le signal total aux différents ordres. Cette simulation est dite "à Rossby élevé", par opposition à la simulation précédente qui est dite "à Rossby faible". Elle consiste également en un jet se déstabilisant mais cette fois-ci, la stratification est quasi-constante, ce qui génère des taux de croissance très élevés. Au bout de 40 jours, il apparaît des nombres de Rossby supérieurs à 5 par endroits! Par conséquent, pour avoir des nombres de Rossby de l'ordre de 1, il faut se placer vers le 25ème jour, quand l'instabilité ne s'est pas encore totalement développé. Cela explique la structure de la vorticité apparaissant sur la figure 2.3(b), qui peut paraître   tange    première vue. *Note* : Au bout de 40 jours, quand le nombre de Rossby atteint la valeur 5 par endroits, la méthode DK diverge à tous les ordres (rappel : le nombre de Rossby est supposée $\ll 1$ dans la méthode DK).

L'erreur commise par la méthode dans cette simulation "   Rossby fort" est représentée sur les figures 2.2(b) et 2.5. La figure 2.2(b) montre clairement une amélioration de l'ordre 1 par rapport à l'ordre 0 sur toute la colonne d'eau, ainsi que de l'ordre 2 par rapport à l'ordre 1 dans les 2000 premiers mètres. En outre, il a été vérifié que l'amélioration apportée par l'ordre 2 par rapport à l'ordre 1 n'est pas dû au fait que l'hypothèse $N \sim N_0$ est mieux respectée dans cette simulation mais qu'elle s'explique par l'existence de nombres de Rossby plus élevés : plus tôt dans la simulation, quand le nombre de Rossby est faible, l'ordre 2 n'apporte pas d'amélioration sensible par rapport à l'ordre 1.

Pour conclure, ces tests de validation des 3 ordres de la méthode confirment les améliorations successives apportées par les différents ordres, avec toutefois un bémol concernant l'amélioration de l'ordre 2 par rapport à l'ordre 1 qui n'apparaît clairement que pour des nombre de Rossby   lev  s. L'erreur commise sur la vitesse est très faible, inférieure à 10% (cf figures 2.2(b), 2.4 et 2.5) mais pour que cette erreur sur le signal basse fréquence ne se confonde pas avec les vitesses inertielles, on aura intérêt à avoir des vitesses inertielles de l'ordre des vitesses mésoéchelles.

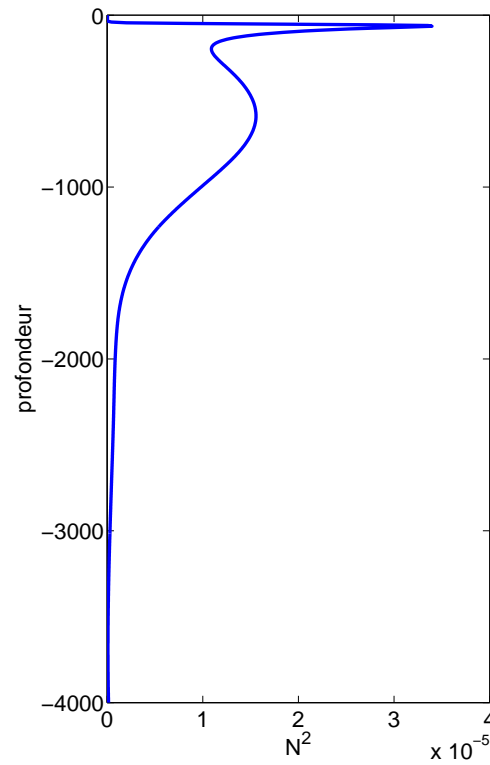


FIG. 2.1 – N^2 utilisé pour les tests de la méthode où N est la fréquence de Brunt Väisälä.

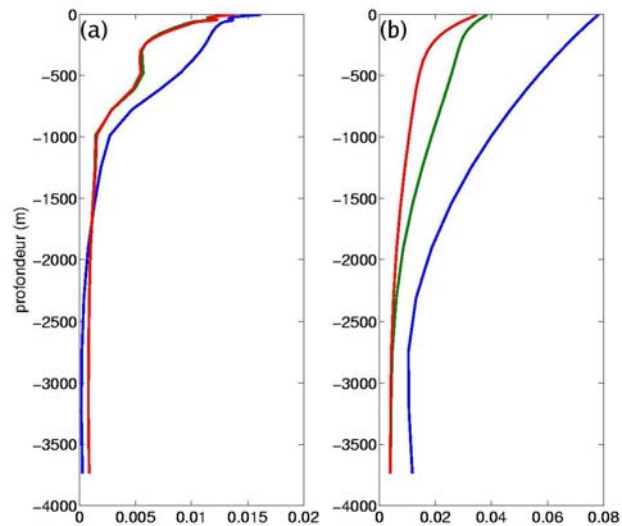


FIG. 2.2 – Erreur standard commise (a) dans la simulation "à Rossby faible" (b) dans la simulation "à Rossby fort" par la méthode DK à l'ordre 0 (bleu), à l'ordre 1 (vert) et à l'ordre 2 (rouge).

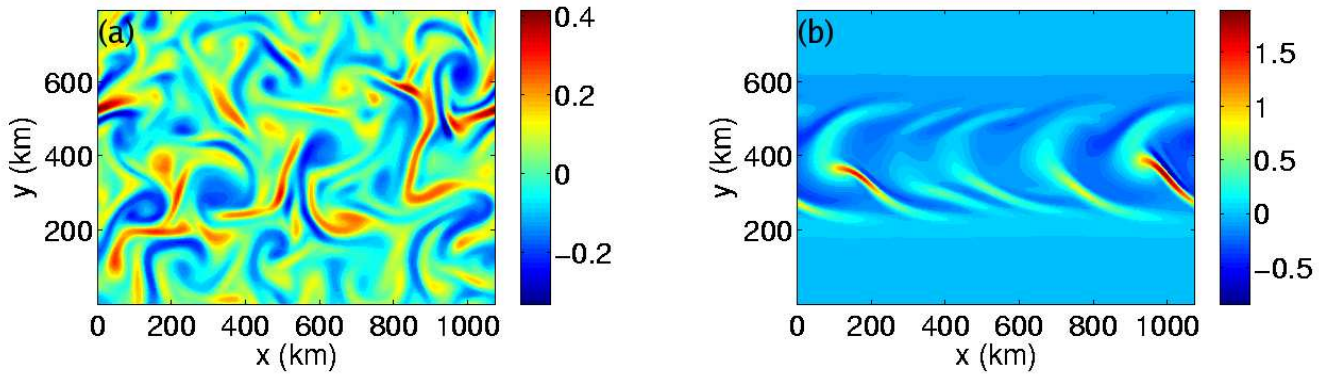


FIG. 2.3 – Vorticité de surface divisée par f_0 (a) dans la simulation "à Rossby faible" (b) dans la simulation "à Rossby fort"

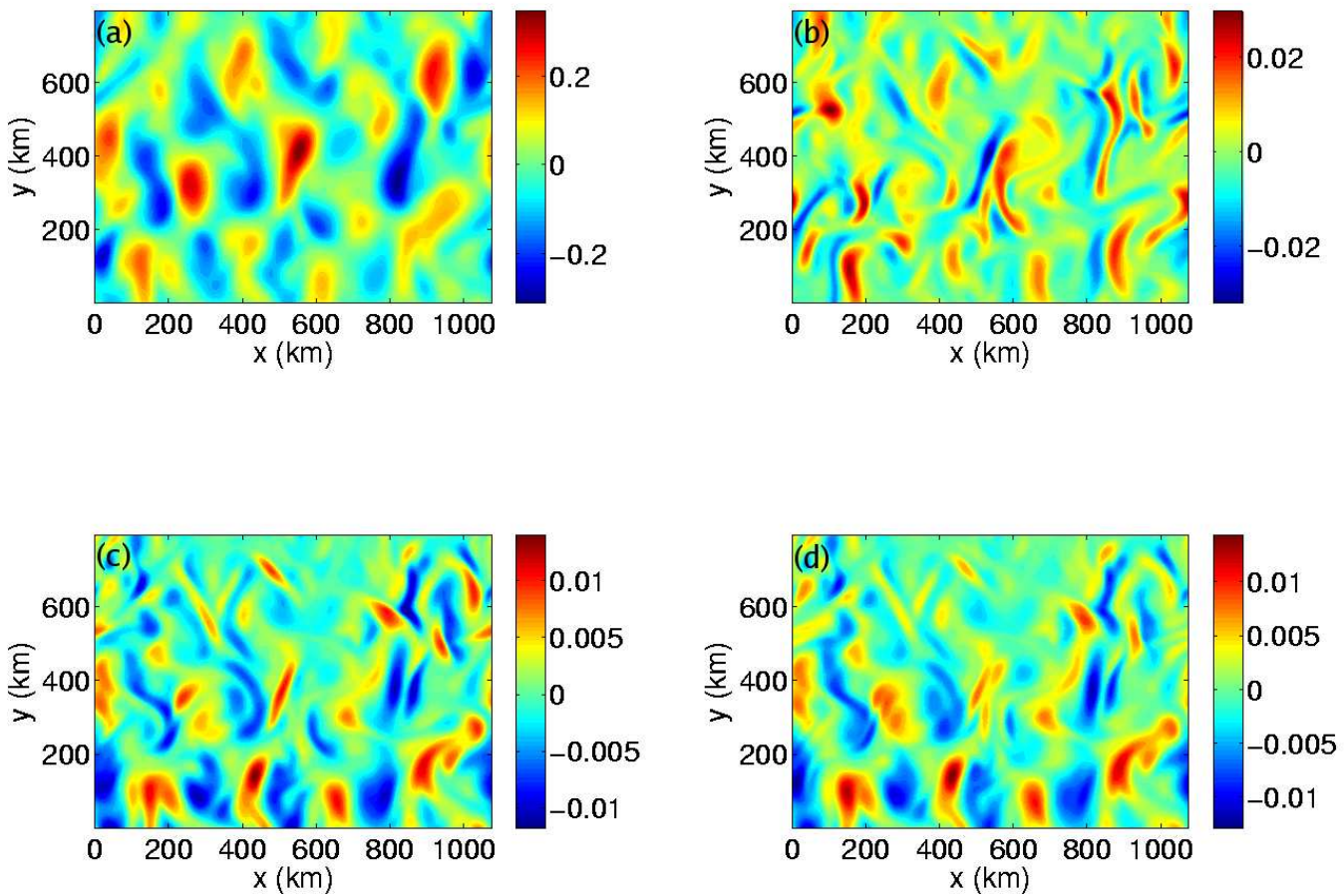


FIG. 2.4 – (a) v (b) $v - v_0$ (c) $v - v_1$ (d) $v - v_2$ dans la simulation "à Rossby faible".

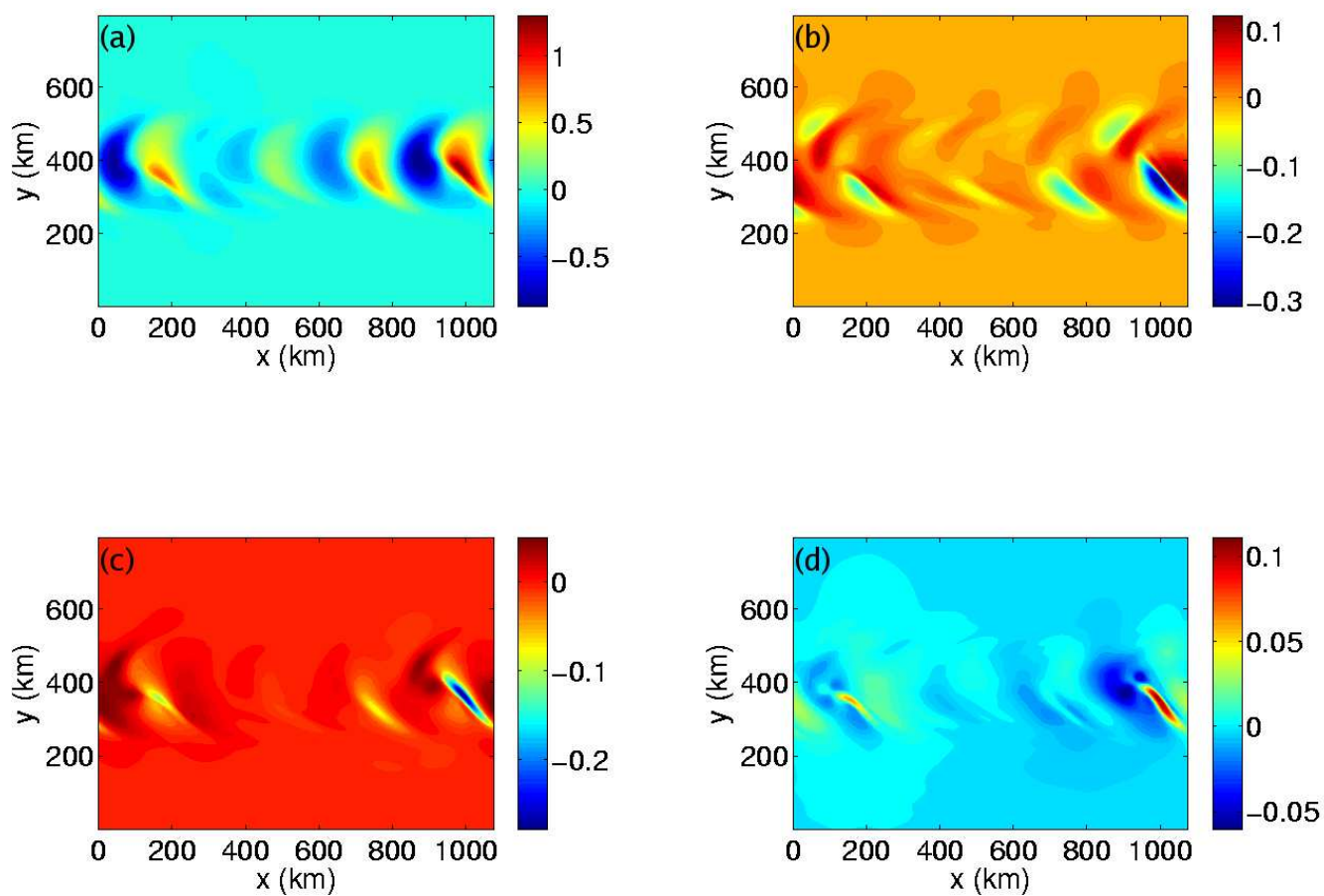


FIG. 2.5 – (a) v (b) $v - v_0$ (c) $v - v_1$ (d) $v - v_2$ dans la simulation "à Rossby fort".

2.3 Présentation des deux autres méthodes

Les deux autres méthodes employées afin d'extraire la partie basse fréquence du signal sont bien moins complexes et plus intuitives que la méthode DK. Elles sont détaillées ci-dessous.

2.3.1 Méthode de moyenne

La méthode dite "de moyenne", n'est autre qu'un filtre temporel réglé pour éliminer les ondes de fréquence f ou un multiple de f . Elle consiste à calculer le champ moyen sur une période inertielle de durée $T_f = \frac{2\pi}{f} = 16h55mn$ au centre du domaine. La différence entre le champ total et ce champ moyen est alors égale à l'ensemble des ondes de fréquence f ou un multiple de f quand il n'y a que ce type d'ondes présentes. Quand il y a d'autres ondes de fréquence différente de f ou un multiple de f , la méthode ne marche pas, car ces ondes n'ont pas une moyenne nulle sur la période T_f .

La variation de f avec la latitude n'est pas prise en compte dans cette méthode, comme dans la méthode DK.

2.3.2 Méthode de soustraction

La méthode dite de soustraction consiste, après avoir fait tourner le modèle sans vent jusqu'au temps t , à effectuer une première simulation avec vent à partir des données à t , et une deuxième sans vent. On fait alors l'hypothèse que la différence entre les champs des deux runs est égale à la partie haute fréquence de la simulation avec vent (ondes inertielles + éventuellement ondes internes d'inertie-gravité de fréquence $2f$, cf chapitre 4).

Il est important de se limiter à des vents de moyenne nulle dans cette méthode car sinon, il apparaît un courant d'Ekman qui fausse les résultats (en effet, la différence des deux champs n'est alors plus seulement les NIO, mais la somme des NIO et du transport d'Ekman).

2.4 Comparaison des trois méthodes

2.4.1 Bilan des avantages et des inconvénients des 3 méthodes

	AVANTAGES	INCONVENIENTS
Méthode DK	<ul style="list-style-type: none"> - peu de données nécessaires : aux ordres 0 et 1, besoin de connaître (u, v, ρ) à l'instant t seulement (méthode diagnostique); à l'ordre 2, besoin de les connaître à 3 instants proches (pour calculer les dérivées temporelles) 	<ul style="list-style-type: none"> - l'amélioration apportée par l'ordre 2 par rapport à l'ordre 1 n'est pas évidente pour des Rossby modérés - méthode assez complexe (nombreux calculs, appels à des solveurs elliptiques, etc) - contraintes numériques
Méthode de moyenne	<ul style="list-style-type: none"> - méthode simple - méthode applicable à l'analyse de données réelles 	<ul style="list-style-type: none"> - besoin d'un grand nombre de données dans le temps afin d'avoir une moyenne précise - ne prend pas en compte la modification de la période des NIO par la vorticité ($\omega = f + \frac{\zeta}{2} + \dots$, cf Kunze (1985)) \Rightarrow quand ζ est grand, la "partie lente" calculée peut être biaisée - idem pour la variation de f avec la latitude - la méthode ne fonctionne plus quand il y a d'autres ondes de fréquences différentes de $\omega = n\frac{2\pi}{T}$ où n est un entier et T la période de la moyenne
Méthode de soustraction	<ul style="list-style-type: none"> - méthode simple - besoin de peu de données : un champ avec vent, un champ sans vent 	<ul style="list-style-type: none"> - méthode non applicable à l'analyse de données : dans la réalité, il n'y a pas de run virtuel sans vent - hypothèse implicite que la partie lente du mouvement n'est pas affectée par la partie rapide \Rightarrow méthode inadaptée à l'étude de la rétroaction des NIO sur le champ mésoéchelle - limitée à des vents de moyenne nulle

2.4.2 Résultats

Pour comparer les capacités des trois méthodes à recouvrir la partie basse fréquence de l'écoulement et ainsi extraire la partie haute fréquence (par soustraction avec l'écoulement total), nous allons faire souffler du vent sur le champ déjà utilisé pour tester la méthode DK, et dont certaines caractéristiques sont représentées sur les figures 2.1 (stratification) et 2.3(a)(vorticité divisée par f_0). Afin d'avoir une énergie inertielle importante, nous mettons à profit les résultats sur la résonance (cf paragraphe 1.2.3) et utilisons une tension de vent de la forme :

$$(\tau_x, \tau_y) = \begin{cases} (\tau_0 \cos(f_0 t), -\tau_0 \sin(f_0 t)) & \text{si } 0 \leq t \leq T_f \\ (0, 0) & \text{sinon} \end{cases}$$

où $T_f = \frac{2\pi}{f_0}$, f_0 est la fréquence de Coriolis au centre du domaine et τ_0 est pris égal à $5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, ce qui consiste en un vent à 10 m de la surface de la mer de l'ordre de $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. En outre, un tel vent, de moyenne temporelle nulle, permet de s'affranchir de problèmes liés au transport d'Ekman.

On eût aimé comparer les énergies inertielles calculées par les 3 méthodes avec l'énergie inertielle réelle mais, à l'instar de l'assimilation de données, l'"état réel" de l'énergie inertielle est ici inconnu. On n'a d'autre choix alors que de comparer ces trois énergies inertielles entre elles : on considérera que si deux méthodes donnent des résultats similaires et différents de ceux rendus par la troisième, alors les deux premières méthodes sont plus justes que la troisième.

Les notations suivantes sont utilisées :

- (u, v) est le champ de vitesses horizontales totales (haute+basse fréquences)
- (u_s, v_s) est le champ de vitesses horizontales de la simulation sans vent (partie basse fréquence de la méthode de soustraction)
- (\bar{u}, \bar{v}) est le champ de vitesses horizontales moyennées sur une période inertielle (partie basse fréquence de la méthode de moyenne)
- (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont respectivement les parties basse fréquence à l'ordre 1 et 2 calculées par la méthode DK (mêmes notations employées que dans la partie 2.2)

On note également :

- $EI_1 = \frac{1}{2}[(u - u_s)^2 + (v - v_s)^2]$ l'énergie inertielle calculée par la méthode de soustraction
- $EI_2 = \frac{1}{2}[(u - \bar{u})^2 + (v - \bar{v})^2]$ l'énergie inertielle calculée par la méthode de moyenne
- $EI_3 = \frac{1}{2}[(u - u_2)^2 + (v - v_2)^2]$ l'énergie inertielle calculée par la méthode DK à l'ordre 2
- $EI_4 = \frac{1}{2}[(u - u_1)^2 + (v - v_1)^2]$ l'énergie inertielle calculée par la méthode DK à l'ordre 1

Les figures 2.6 et 2.7 sont des cartes de l'énergie inertielle calculée par les 4 méthodes à $t = 10T_f$, et $z = 0$ et -200 m. Les figures 2.8 et 2.9 représentent, quant à elles, l'énergie inertielle moyennée horizontalement calculée par les 4 méthodes ainsi que les différentes corrélations spatiales entre les 4 types d'énergie. La diminution dans le temps de l'énergie inertielle est expliquée dans la partie 3.4.

Au vu de ces 4 figures, on en déduit que (1) en général, les quatre méthodes donnent des résultats relativement similaires (corrélations généralement supérieures

à 0.9 sur les 1000 premiers mètres) (2) toutefois, 2 méthodes présentent des corrélations encore supérieures (> 0.95) : les méthodes de moyenne et de soustraction (3) la méthode DK donne des résultats très semblables à l'ordre 1 et à l'ordre 2 (cf figure 2.9), ce qui s'explique par les faibles nombres de Rossby utilisés (cf paragraphe 2.2).

2.4.3 Conclusion

En conclusion, les méthodes de moyenne, de soustraction et DK à l'ordre 2 peuvent être utilisées indifféremment car elles donnent des résultats relativement semblables. Toutefois, si le choix entre ces 3 méthodes est permis (comme ce fut le cas dans cette thèse), on préférera les méthodes de soustraction ou de moyenne en raison de leur simplicité. Mais ce choix n'est pas toujours possible car ces 2 méthodes présentent de fortes contraintes (cf paragraphe 2.4.1). Enfin, si l'on doit utiliser la méthode DK et que le nombre de Rossby reste faible sur le domaine, on peut se limiter à l'ordre 1 car l'ordre 2 n'apporte pas d'amélioration sensible.

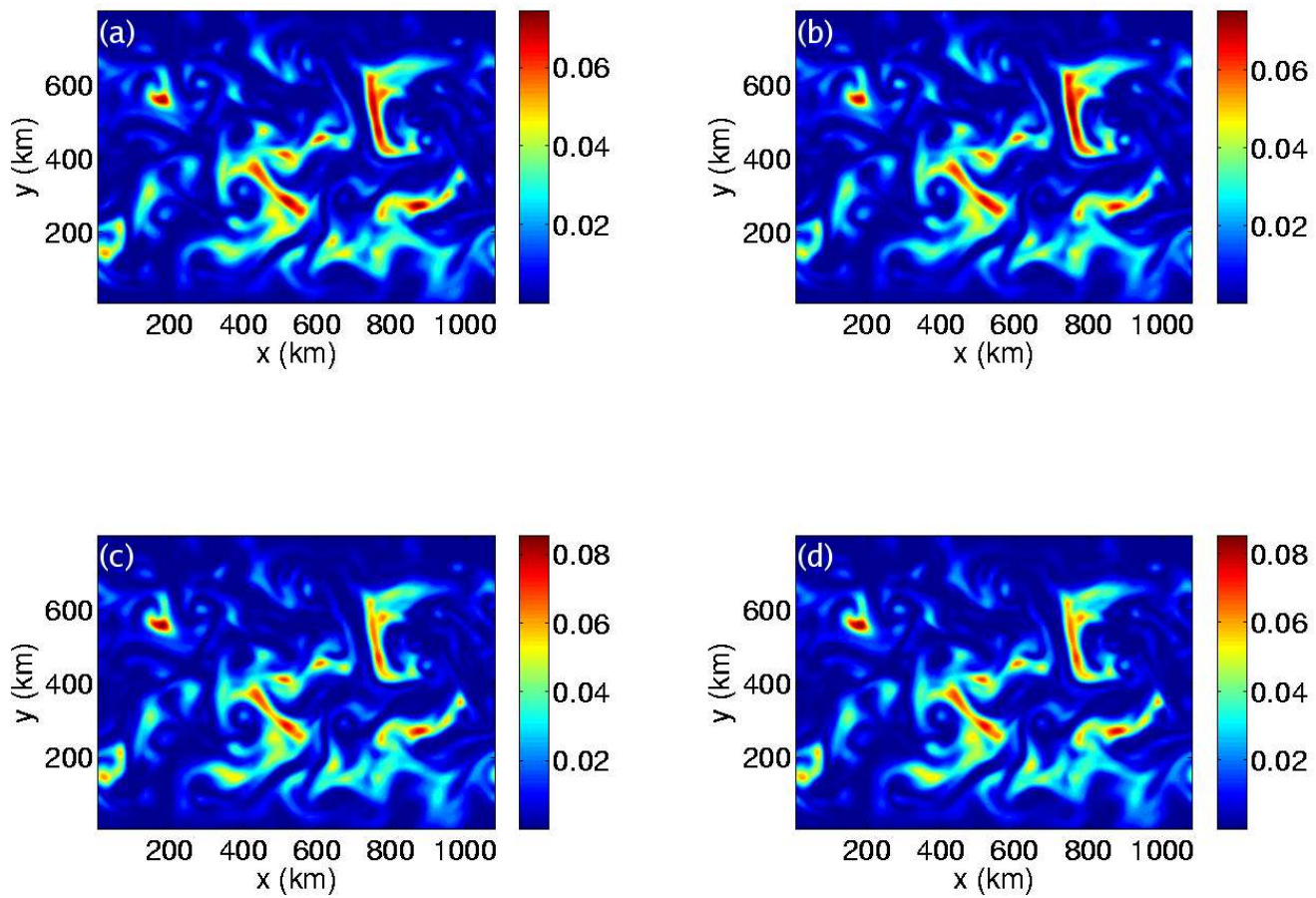


FIG. 2.6 – Energie inertielle calculée en surface, 9 périodes inertielles après l'arrêt du vent. (a) EI_1 (b) EI_2 (c) EI_3 (d) EI_4 .

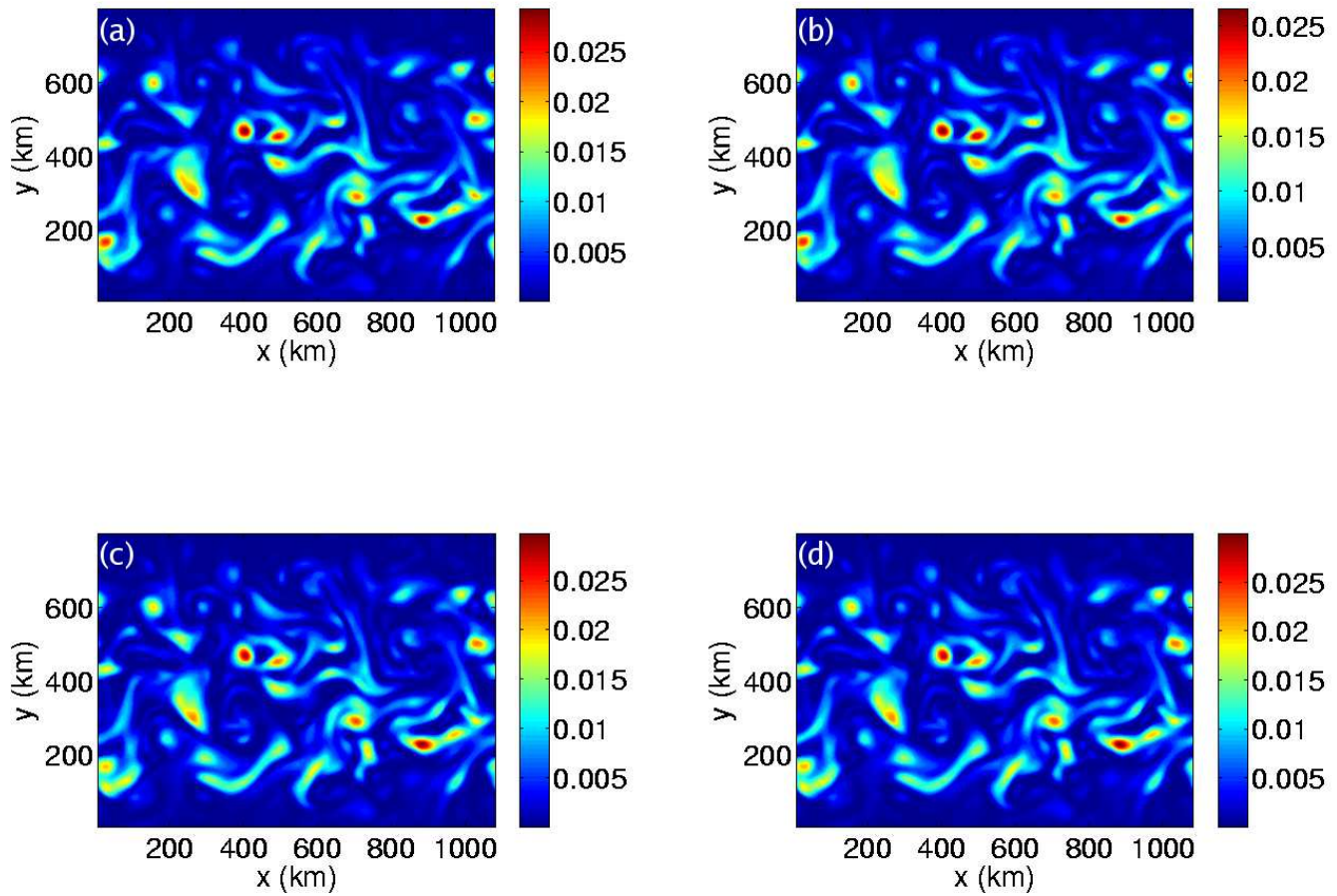


FIG. 2.7 – Energie inertielle calculée à $z=-200$ m, 9 périodes inertielles après l'arrêt du vent. (a) EI_1 (b) EI_2 (c) EI_3 (d) EI_4 .

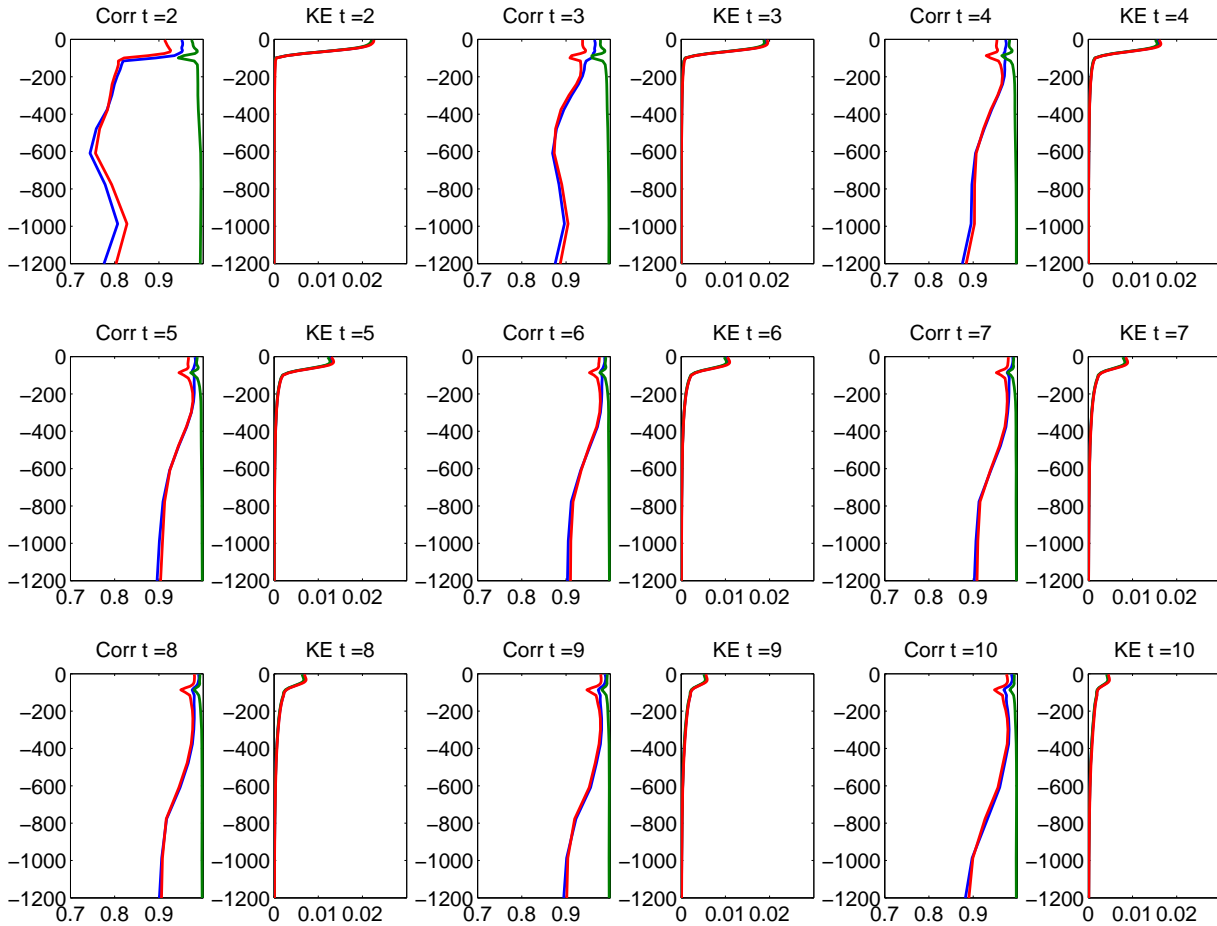


FIG. 2.8 – Corrélations spatiales entre méthodes et énergies inertielles moyennées horizontalement en fonction du temps (exprimé en périodes inertielles après le début du coup de vent) et de la profondeur, (en ordonnée). A **gauche** : $\text{corr}(EI_1, EI_3)$ (bleu), $\text{corr}(EI_1, EI_2)$ (vert), $\text{corr}(EI_2, EI_3)$ (rouge). A **droite** : $\frac{1}{L_x L_y} \iint_{L_x \times L_y} EI_1 dx dy$ (bleu), $\frac{1}{L_x L_y} \iint_{L_x \times L_y} EI_2 dx dy$ (vert), $\frac{1}{L_x L_y} \iint_{L_x \times L_y} EI_3 dx dy$ (rouge).

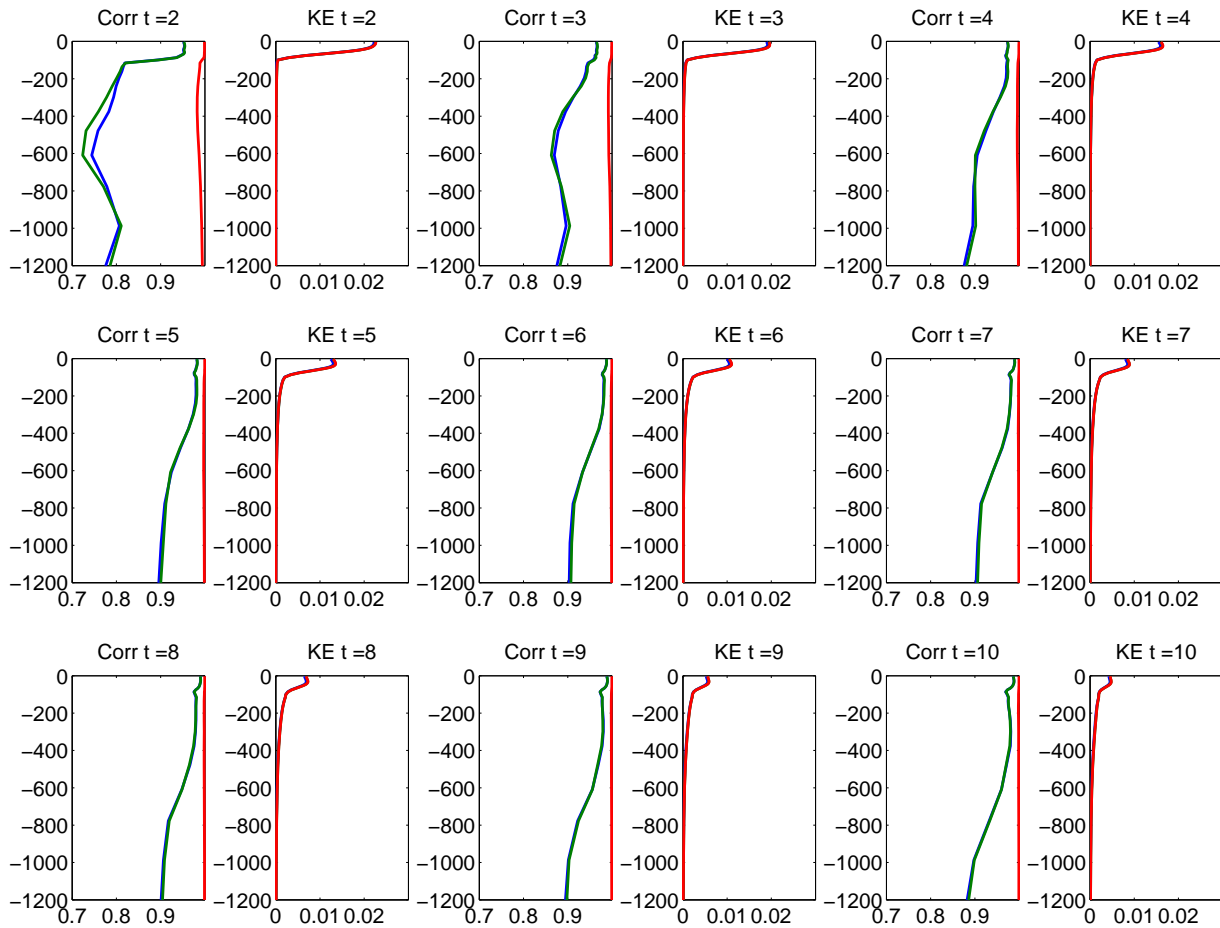


FIG. 2.9 – Corrélations spatiales entre méthodes et énergies inertielles moyennées horizontalement en fonction du temps (exprimé en périodes inertielles après le début du coup de vent) et de la profondeur, (en ordonnée). A **gauche** : $\text{corr}(EI_1, EI_3)$ (bleu), $\text{corr}(EI_1, EI_4)$ (vert), $\text{corr}(EI_3, EI_4)$ (rouge). A **droite** : $\frac{1}{L_x L_y} \iint_{L_x \times L_y} EI_1 dx dy$ (bleu), $\frac{1}{L_x L_y} \iint_{L_x \times L_y} EI_3 dx dy$ (vert), $\frac{1}{L_x L_y} \iint_{L_x \times L_y} EI_4 dx dy$ (rouge).

Chapitre 3

Structure de l'énergie inertielle horizontale et verticale

La majorité des résultats importants concernant la propagation de l'énergie inertielle horizontale et verticale est résumée dans l'article qui suit, à soumettre.

Néanmoins, la concision étant de rigueur dans ce type de publication scientifique, il nous a paru nécessaire de préciser dans ce chapitre certains points n'ayant pu être abordés dans l'article.

C'est pourquoi on trouvera à la suite de l'article trois paragraphes : le premier fournit une explication à la structure verticale de l'énergie inertielle horizontale dans les régions anticycloniques, le second concerne la partie moyenne des vitesses verticales inertielles (point non abordé dans l'article), enfin le troisième propose un bilan énergétique.

3.1 Propagation of wind energy into the deep ocean through mesoscale eddies

Eric Danioux, Patrice Klein and Pascal Rivière. *To be submitted*

Abstract

We analyse the horizontal and vertical propagation of wind-forced inertial motions in a fully turbulent mesoscale eddy field with a primitive equations numerical model. The most important result is that the vertical kinetic energy of the inertial motions penetrates in the ocean interior more quickly and much deeper than the horizontal kinetic energy. Specifically, two maxima of vertical inertial velocity (with r.m.s. value of 40m/day) appear, one around 100m and the other one around 1700m. The shallower maximum involves motions with the inertial frequency (f) and a spatial heterogeneity that resembles the eddy vorticity gradient field. The deeper maximum involves a conspicuous frequency of twice the inertial frequency and smaller space scales. Analysis of inertial motions in terms of vertical normal modes indicates that the emergence of the two maxima results from the decoupling - induced by mesoscale eddies - of the lower modes from the higher modes. More

specifically the maximum at 1700m (100m) is entirely explained by the lower (higher) mode contributions. The conspicuous $2f$ frequency of the inertial motions at 1700m is related to a resonance mechanism associated with the lower vertical modes. Characteristics of this deep maximum make the parametric subharmonic instability a likely mechanism to convert vertical inertial energy into vertical turbulent diffusion. If only 10% of this energy is converted, a scaling analysis gives an approximate value of $10^{-4}\text{m}^2\text{s}^{-1}$ for the vertical diffusion coefficient near 1700m.

3.1.1 Introduction

Wunsch and Ferrari (2004) indicate that the ocean circulation is essentially a mechanically controlled system involving the general circulation, mesoscale eddies and the internal waves field near the surface as the principal wind-driven reservoirs. These authors list some complex questions still to answer concerning the circulation energetics. Among them is the source of energy driving the deep mixing required to resupply the potential energy removed by the overturning and eddy-generating process. A potential source of mechanical energy available for mixing is the wind-forced inertial motions. But how much of this energy penetrates into the ocean interior is still a puzzle, which leads to the question : what is the route to mixing from the surface to the deep interior? Our hypothesis is that the presence of mesoscale eddies may significantly favours the penetration of wind-forced inertial motions in the deep interior.

Indeed, inertial motions may spread both horizontally and vertically in the interior only when their horizontal scale is small enough (Gill (1984)), in fact much smaller than the wind scales. This requires mechanisms to significantly reduce the initially large scales of these high-frequency wind-driven motions. The β -effect is one of these mechanisms that enables the near-inertial energy generated at a particular latitude to freely propagate equatorward (Garrett (2001)). Kunze (1985) argued that near-inertial waves propagating in geostrophic shear are subject not only to the planetary vorticity gradient but principally to the absolute vorticity gradient, i.e. including the eddy vorticity effects. This makes the effects of the relative vorticity gradients, associated to mesoscale eddies, a much more efficient mechanism to generate small scales, since these gradients are usually much larger than β . This mechanism actually polarizes the inertial motions and makes them to be expelled from cyclonic structures and trapped within anticyclonic ones (Kunze (1985), D'Asaro (1995), Young and Ben Jelloul (1997), Klein et al. (2004b)). However no thorough study except those by Van Meurs (1998) and Zhai et al. (2005) involving a few eddies have estimated the vertical penetration of the inertial motions through mesoscale eddies. There is still a need to fully understand this vertical propagation in a turbulent mesoscale eddy field.

The pertinence of this approach relies on the remarkable coincidence of regions with strong mesoscale variability (stormtracks) in both the atmosphere and the ocean (Zhai et al. (2005)). The atmospheric stormtracks are indeed the regions where the wind energy input to the ocean at near-inertial frequencies is the strongest (Alford (2001), Watanabe and Hibiya (2002)). This coincidence strongly suggests that the transfer of near-inertial energy out of the surface layer into the deep ocean should not be studied without considering the inhomogeneity of the absolute vorticity field

associated with mesoscale eddies.

In the present study the results from numerical simulations with a Primitive Equations model are used to analyse the statistical properties of the dynamics of the surface oceanic layers and in the interior. Next section presents the basic mechanisms involved and section 3 describes the numerical simulations performed. Sections 4, 5 and 6 discuss the results, in both the physical and spectral spaces, to better characterize the differences between the surface and interior dynamics. More specifically, section 4 concerns the horizontal and vertical propagation of the horizontal inertial energy, and sections 5 and 6 describe the propagation of the vertical inertial energy. Discussion and conclusions are proposed in section 7.

3.1.2 Physical mechanisms

Before presenting and discussing the results of our study, it is useful to briefly review the mechanisms by which oceanic mesoscale eddies trigger the penetration of inertial motions in the ocean interior. These mechanisms are understood within the framework of the normal mode analysis developed by Gill (1984). Let us expand u , v and w , the horizontal and vertical inertial velocity components, in terms of the vertical normal modes solutions, $F_n(z)$

$$\{u, v\}(x, y, z, t) = \sum_n \{u_n, v_n\}(x, y, t) F_n(z), \quad (3.1)$$

$$w(x, y, z, t) = \sum_n \left[\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} \right] \int_z^0 F_n dz'. \quad (3.2)$$

(3.2) uses the continuity equation. The eigenfunctions F_n satisfy the classical Sturm-Liouville problem

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial F_n}{\partial z} = -\frac{1}{r_n^2} F_n \quad (3.3)$$

r_n is the Rossby radius of deformation for mode n . It can be shown that the functions $(\int_z^0 F_n dz')$ constitute an orthogonal basis for the scalar product $\langle A|B \rangle = \int N^2 AB dz$. Typical vertical profiles of mode contributions corresponding to the vertical stratification N^2 used in this study are shown on fig 1.

Initially, just after a uniform wind pulse, all u_n, v_n are in phase and uniform such that (because of the F_n profiles) they add up within the mixed-layer and cancel out underneath. However the inertial motions feel the Earth rotation but also the rotation of the mesoscale eddies (although the latter is usually much weaker). The latter mechanism affects the phase of these motions, which can be written for the 1-D example of fig.3.1 as (using a first order Taylor series expansion) :

$$u_n(x, t) \approx u_{on} \sin(ft + \frac{\zeta}{2}t) \approx u_{on} \sin(ft + \frac{\zeta_o}{2}t - kx);$$

with $k = -\frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{t}{2}$ (Kunze (1985)).

Thus inertial motions become spatially heterogeneous and then dispersion effects can work. Consequently, as illustrated on fig.3.1, the sign of k is such that inertial motions are expelled from cyclonic structures and trapped within anticyclonic ones. These dispersion effects are usually measured by $r_n^2 f$ (Klein et al. (2004b)). Thus

the eddy vorticity affects not only the phase but also the amplitude of the inertial motions of a given baroclinic mode. The subsequent dispersion effects are much faster for the lower baroclinic modes (with large r_n) than for the higher modes (with small r_n). This indicates that the lower modes quickly decouple from the higher ones, which makes the inertial motions to penetrate in the ocean interior (Gill (1982)).

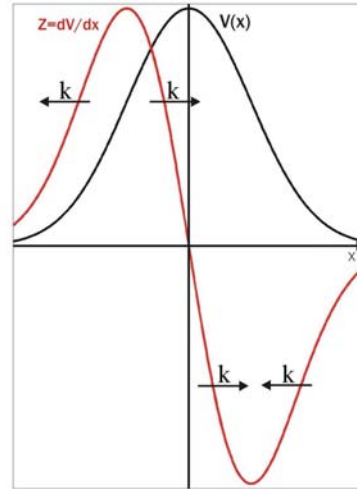


FIG. 3.1 – Schematic representation of the propagation of near inertial waves induced by a one dimensional jet $V(x)$. The velocity $V(x)$ (in black) and the vorticity $Z=dV/dx$ (in red) are shown. The wavenumbers $k = -\frac{\partial Z}{\partial x} \frac{t}{2}$ are represented by black arrows.

A more precise solution can be obtained by discarding the WKB approximation used in many studies, since it is usually not valid : the length scale of the inertial motions is generally close to that of mesoscale eddies. Within this context Klein et al. (2004b), using the insightful methodology developed by Young and Ben Jelloul (1997), have proposed a detailed solution over the whole spectral range. Main features of this solution are reviewed in the appendix.

3.1.3 Primitive Equations simulations

The mesoscale eddy field

The mesoscale eddy field results from the nonlinear baroclinic instability of a westerly jet in a zonal β -plane channel centered at 45°N . The parameter settings resembles that used by Karsten et al. (2002) and Rivière et al. (2004). Characteristics of the numerical simulation are close to those in Lapeyre and Klein (2006). The domain size is $1000\text{km} \times 2000\text{km}$ and its depth is 4000m . The numerical resolution that is $6\text{km} \times 6\text{km}$ on the horizontal and involves 33 levels on the vertical with a vertical grid spacing ranging from 5m near the surface to 500m near the bottom. The vertical profile of the mean Brunt-Väisälä frequency (fig.3.2a) involves a main thermocline located at a depth around 600m . The first four Rossby radius

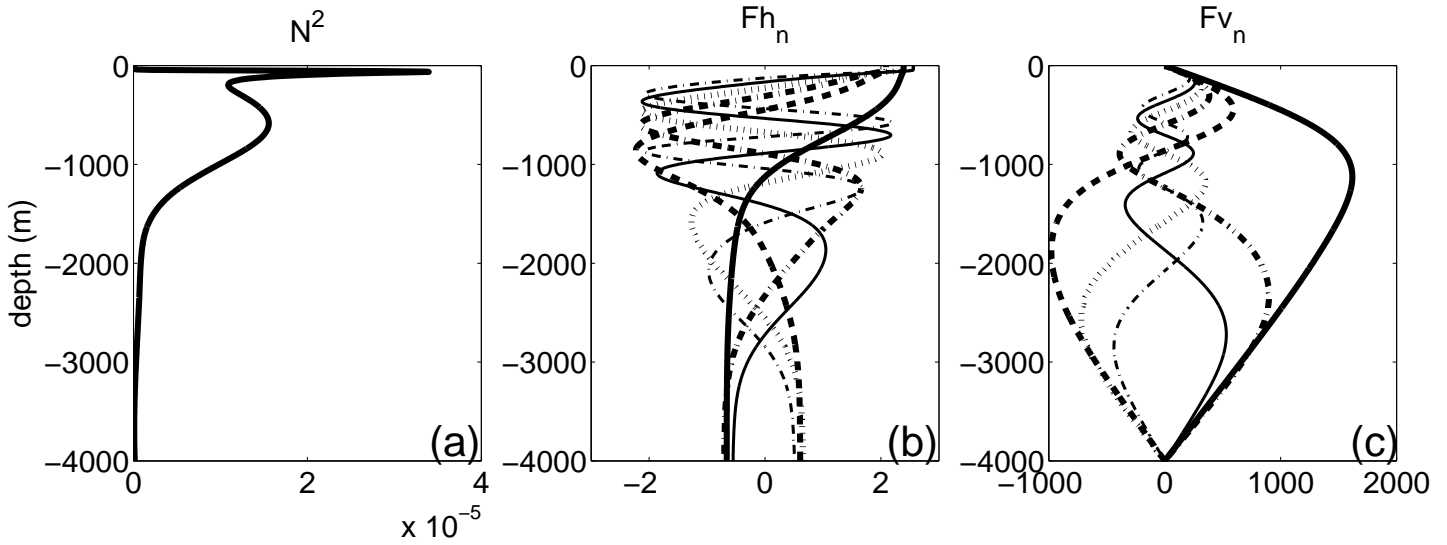


FIG. 3.2 – Vertical profiles of N^2 (a), the first six eigenfunctions $F_n(z)$ given by eq.3.3 (b) and the first six functions $\int_z^0 F_n dz'$ (c).

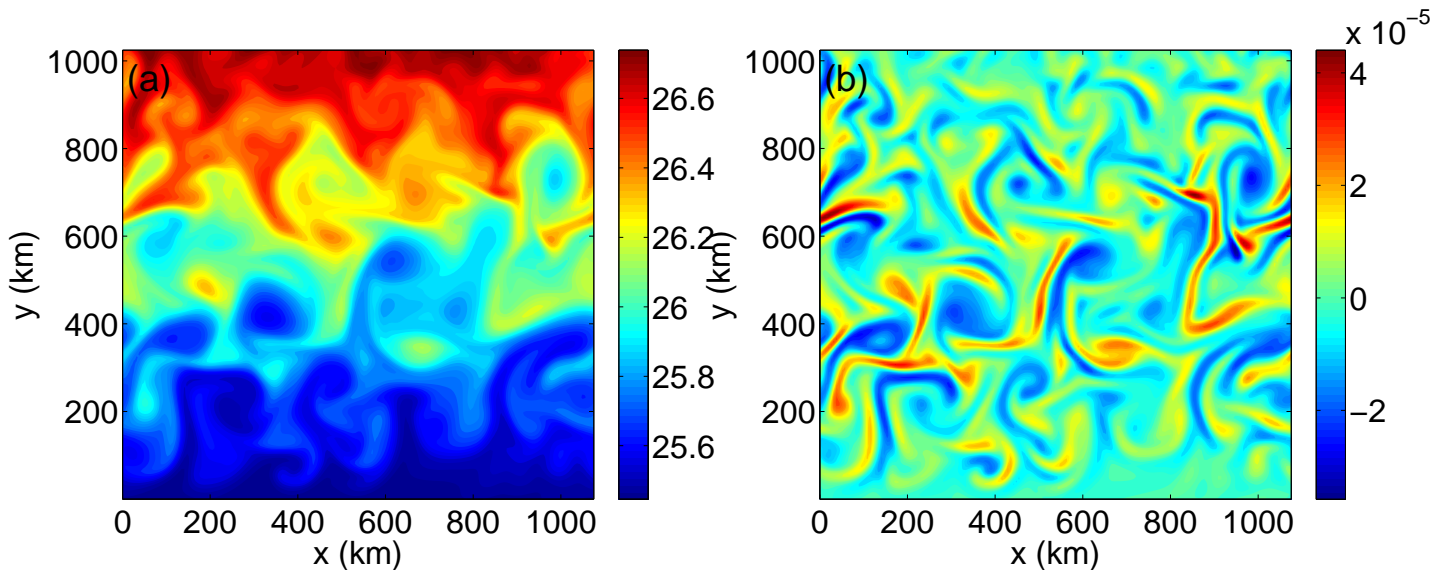


FIG. 3.3 – Snapshots of the surface density (a) and the relative vorticity (b) at equilibrium.

of deformation corresponding to this N^2 -profile are respectively 24km, 10km, 7km and 5km. The vertical profiles of the first six eigenfunctions $F_n(z)$ ($\int_z^0 F_n dz'$) have already been shown (fig.3.2b,c). The mesoscale eddy turbulence is forced by using a relaxation of the zonally averaged velocity and density fields to a basic state that corresponds to the initial state. While adjusting the mean zonal flow, such forcing does not damp the eddy field.

After a spin-up of 300 days, the total kinetic energy (integrated over the whole domain) equilibrates and does not vary much during the next 300 days. The mean Rossby number associated with the equilibrated eddy field is $Ro = \sqrt{\langle \zeta^2 \rangle} / f_0 \approx 0.10$ where $\langle \rangle$ is the horizontal averaging operator and ζ the eddy relative vorticity. Relative vorticity reaches values as strong as $0.4f_0$. The Burger number equals $Bu = N^2 H^2 / f_0^2 L^2$. Using $W/H = \sqrt{\langle (\nabla_H \cdot u_H)^2 \rangle}$ and using the Omega equation and thermal wind balance, it is easy to show that $W/H = V^2 f_0 / H N^2 = f_0 Ro^2 Bu^{-1}$ so that $Bu = Ro^2 f_0 / \sqrt{\langle (\nabla_H \cdot u_H)^2 \rangle} \approx 2.4$. The mesoscale eddy field is therefore close to quasi-geostrophic assumptions and in particular involves time scales much larger than the Coriolis period. A surface mixed-layer is then created as the result of a strong solar radiation acting alone first, then compensated for by a surface cooling with the same amplitude (such that the net surface heat forcing is zero) for a period duration of 15 days.

Figs.3.3ab show snapshots of the density and relative vorticity fields at the surface at the end of the spin-up period. Density field is characterized by large-scale meridional gradients. The relative vorticity field exhibits a much larger number of smaller-scale structures including small-scale vortices as well as wavy or unstable thin filaments. The vorticity spectrum has a slope close to k^{-2} for a wavenumber range corresponding to length scales equal or smaller than 200 km. As depth increases the Rossby number slowly decreases from 0.10 at the surface down to 0.02 at 800m.

Results discussed below concern simulations whose initial state corresponds to this equilibrated eddy field with a 60m deep mixed-layer.

The Atmospheric forcing

We study the response of the ocean to a resonant wind forcing in presence of mesoscale eddies. The chosen forcing scenario consists in a wind of constant amplitude rotating clockwise at exactly the inertial frequency during one inertial period. Then the wind is stopped. The resonant atmospheric forcing used is therefore :

$$\tau(t) = \tau_0 \times \begin{cases} \exp(-ift) & 0 < t \leq \frac{2\pi}{f} \\ 0 & t > \frac{2\pi}{f} \end{cases} \quad (3.4)$$

where $\tau = \tau_x + i\tau_y$ is the windstress at the surface. The magnitude τ_0 (equal to $5 \cdot 10^{-4} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) corresponds to a wind speed of $16 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. This forcing is uniform over the whole domain. There is no surface net heat flux.

This resonant wind scenario is similar to the passage of an occluding midlatitude atmospheric cyclone. It furthermore provides a maximum wind energy input to the ocean in a short time and ensures that the Ekman transport component is zero. Since this forcing is uniform, the inertial motions driven by this forcing are spatially quasi-uniform at $t = \frac{2\pi}{f}$ and entirely trapped within the mixed-layer.

The inertial motions field

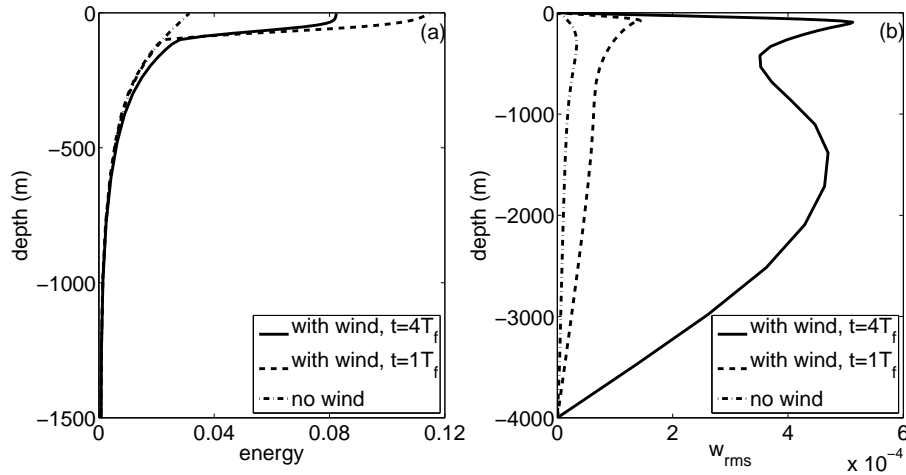


FIG. 3.4 – Vertical profiles of the total horizontal kinetic energy averaged over the whole horizontal domain (a) and r.m.s. (root mean square) of the total vertical velocity (defined as $\langle w^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ where $\langle . \rangle$ represents the average over the whole horizontal domain) (b). Dotted-dashed curves are the profiles without wind forcing and dashed and solid curves are the profiles with wind forcing at $t=1IP$ and $t=4IP$ respectively. Note : $t=1IP$ represents the moment just after the wind pulse.

Two numerical simulations have been performed during ten inertial periods using as the initial state the equilibrated mesoscale eddy field described in section 3a. The first one uses the wind pulse forcing (3.4) and the second is run without wind forcing. The differences between vertical profiles of horizontal and vertical kinetic energy with and without wind forcing (figs.3.4) emphasize the significant impact of the eddy field on the vertical propagation of the wind-forced inertial motions. At $t=1$ inertial period (IP), differences between the horizontal kinetic energy with and without wind indicate that inertial energy is trapped within the mixed-layer. However during the next inertial periods, the horizontal inertial energy (fig.3.4a) appears to slowly propagate downward whereas the vertical inertial kinetic energy (fig.3.4b) quickly penetrates down to the deep interior.

The understanding of the 3-D dynamics of the inertial motions requires to separate this high-frequency field from the low-frequency one associated with the mesoscale eddies. We have used two methods. The first one makes use of a low pass filter to get the low frequency field, i.e. :

$$\overline{X}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} X dt \quad (3.5)$$

with X any variables and T the Coriolis period. The inertial motions field in that case is just the difference between the total field and the low frequency field. The second method takes advantage of the absence of an Ekman transport component and consists of subtracting the instantaneous 3-D field with wind forcing from the corresponding one with no wind forcing. Surprisingly the inertial motions fields

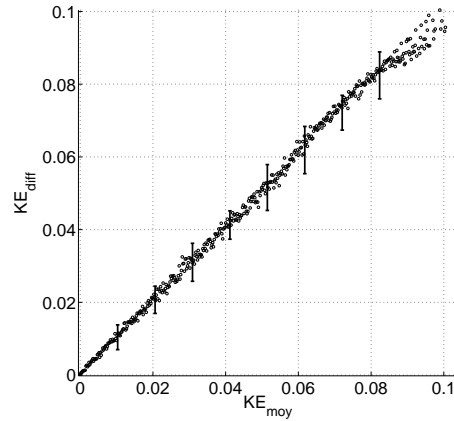


FIG. 3.5 – Scatterplot between the surface inertial energies obtained with the first method (KE_{moy}) and with the second method (KE_{diff}). Each point represents the average over each grid point on the abscissa (that has a total of 500 grid points) and vertical lines show standard deviation around the averages.

obtained from these two methods are quite similar as indicated by the scatterplot of (fig.3.5). Furthermore the good comparison (described in the next sections) of the observed inertial motions field with the analytical solutions of Klein et al. (2004b) confirms a posteriori the pertinence of these separation methods for the specific wind forcing of this study. The total kinetic energy of the inertial motions has been found to slowly decrease with time after the wind pulse : the ratio of the inertial motions energy to the mesoscale energy, decreases from 0.36 just after the wind pulse down to 0.24 after 10 inertial periods. A detailed kinetic energy budget has shown that this decrease is entirely due to the effects of the horizontal mixing associated with the horizontal numerical diffusivity. This mixing is small for the mesoscale eddies but it becomes significant for the inertial motions since their spatial heterogeneity involves energetic small scales (see section 3.1.6).

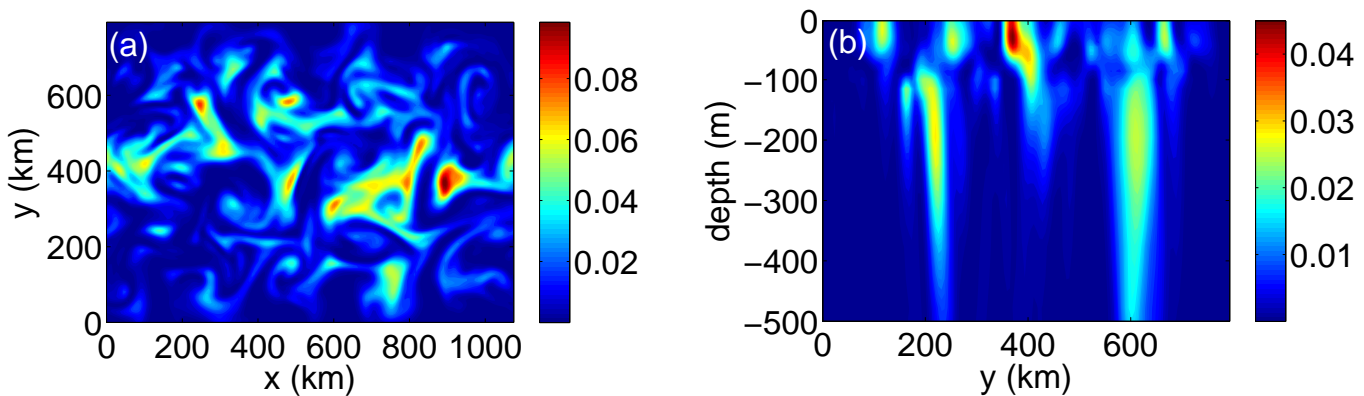


FIG. 3.6 – Snapshot at $t=9IP$ of the surface inertial kinetic energy (a) and vertical section for a given longitude of the inertial kinetic energy (b).

3.1.4 Inertial motions : horizontal kinetic energy

Although uniform and trapped within the 60m deep mixed-layer just after the wind pulse, the horizontal inertial motions display at a later time a significant vertical propagation. After 9 inertial periods (IP), the horizontal kinetic energy extends down to 1000m (fig.3.7a). Its vertical penetration is much deeper in negative vorticity regions (fig.3.7b) than in positive ones (fig.3.7c), which clearly emphasizes the eddy vorticity effects. Thus in terms of mixing, the inertial motions should affect differently anticyclonic and cyclonic structures. Note the remarkable similarity between fig.3.7b and Lee and Niiler (1998)'s figs.5b,c and d. In physical space the horizontal inertial energy displays a complex distribution (figs.3.6a,b).

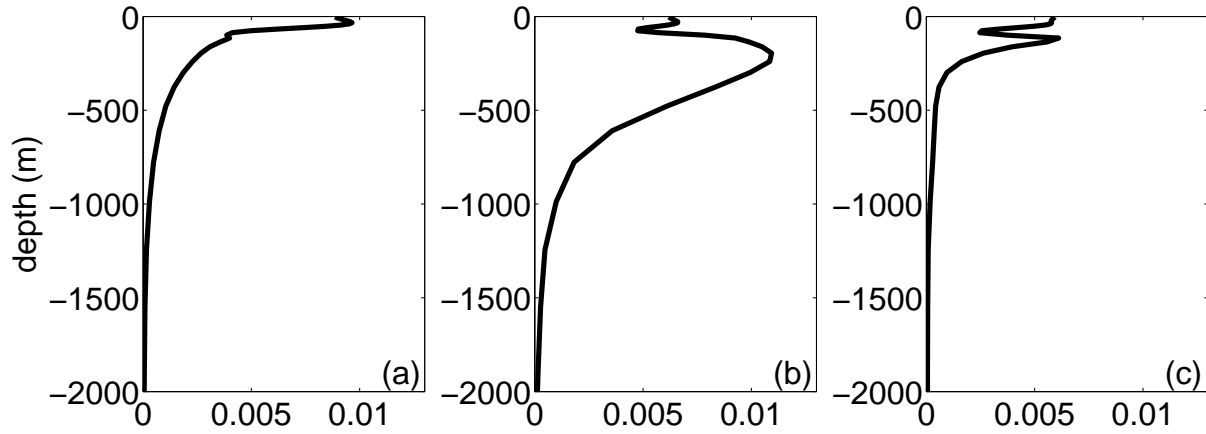


FIG. 3.7 – Vertical profiles at $t=9IP$ of the horizontal inertial energy (a) averaged over the whole domain, (b) averaged over areas where $\zeta < -2.10^{-5} s^{-1}$ and (c) averaged over areas where $\zeta > 2.10^{-5} s^{-1}$.

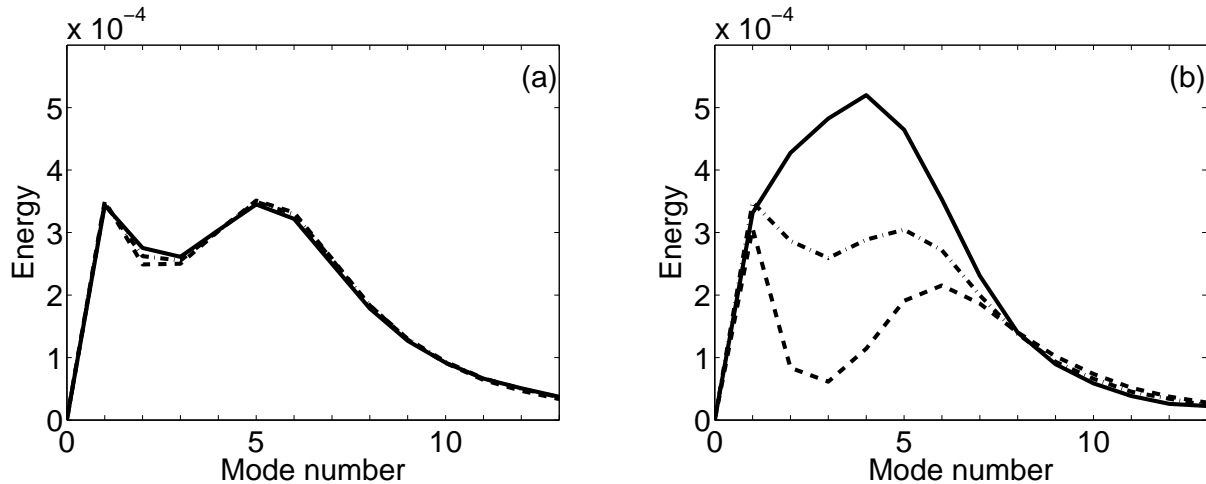


FIG. 3.8 – Vertical mode spectrum of the horizontal inertial velocity field ($\sqrt{u^2 + v^2}$) at $t=1IP$ (a) and $t=4IP$ (b) in regions where $\zeta < -2.10^{-5} s^{-1}$ (solid lines), $\zeta > 2.10^{-5} s^{-1}$ (dashed lines) and $-2.10^{-5} s^{-1} < \zeta < 2.10^{-5} s^{-1}$ (dotted-dashed lines)

One important aspect of our study is to decipher the prominent mechanisms that drive the time and space evolution of the inertial motions. We have found that

these mechanisms are remarkably well identified and quantified within the framework of the normal modes analysis. When the inertial motions are decomposed into vertical normal modes (following (3.1)), the vertical mode spectrum of these motions (figs.3.8) reveals a significant time evolution of the magnitude of the different modes, related to the eddy vorticity. At $t=1\text{IP}$ fig.3.8a indicates that the horizontal inertial motions have the same spectrum whatever the eddy vorticity sign is. However, fig.3.8b clearly displays that at $t=4\text{IP}$, the intermediate modes (at least modes 3 to 5) have been expelled from cyclonic structures and trapped within anticyclonic ones, the lower and higher modes being apparently much less affected. The explanation of fig.3.8b is that, as indicated in section 2, the intermediate modes have been significantly affected by the dispersion effects. The higher modes on the other hand have not had time to significantly disperse (since their Rossby radius of deformation r_n is smaller than that for the intermediate modes). At last, the lower modes, whose Rossby radius is larger than that for the intermediate modes, have had time to disperse over larger areas than the cyclonic and anticyclonic structures. Examination of the phase of the inertial motions associated to each baroclinic mode is coherent with this explanation : this phase (not shown) is well correlated with vorticity for the higher modes at $t=4\text{IP}$, which means that these modes have not dispersed beyond the cyclonic and anticyclonic regions. On the other hand no such relation exists anymore for the lower modes, which means that these modes have dispersed over much larger areas. The same figures (not shown) as fig.3.8b at an earlier (later) time reveal similar results but for lower (higher) modes asymmetrically dispersed, the other modes being apparently almost unaffected.

Klein et al. (2004b) were able to correlate quite precisely the spatial heterogeneity of the horizontal inertial KE, associated to a given baroclinic mode, to some characteristics of the eddy field. As summarized in the appendix, for a given baroclinic mode, the horizontal inertial energy should resemble the Laplacian vorticity field truncated so as to retain only scales larger than a critical length scale $l_c = r_n \sqrt{2\pi ft}$ (corresponding to a critical wavenumber $k_c = \sqrt{2\pi/ft}/r_n$). We have checked whether these analytical results apply to the inertial motion field of our study. Fig.3.9 reveals that the horizontal inertial energy of mode 3 is well correlated to the eddy Laplacian vorticity field for wavenumbers smaller than the critical horizontal wavenumber, k_c given by Klein et al. (2004b). Since this critical wavenumber decreases with time, this means that the inertial energy field of mode 3 involves structures with larger and larger scales at time goes on. Results for the other modes display the same agreement with the analytical solution of Klein et al. (2004b), with the critical length scale being larger (smaller) for lower (higher) modes. Figs.3.10 further confirm this good agreement. From fig.3.10a, the inertial energy at $t=5\text{IP}$, associated to mode 3, does not seem to be well correlated to the eddy vorticity Laplacian. However when the eddy vorticity Laplacian is truncated so as to retain only scales larger than $l_c = r_3 \sqrt{2\pi ft}$, this field appears remarkably well correlated to the inertial energy (fig.3.10b). The same confirmation has also been obtained for the other modes.

Thus the dynamics of the inertial motions embedded in a fully turbulent eddy field appears much more understandable when these motions are decomposed into vertical normal modes. The dynamics of each mode remarkably follows the analytical solutions of Klein et al. (2004b). These modes evolve differently because of their

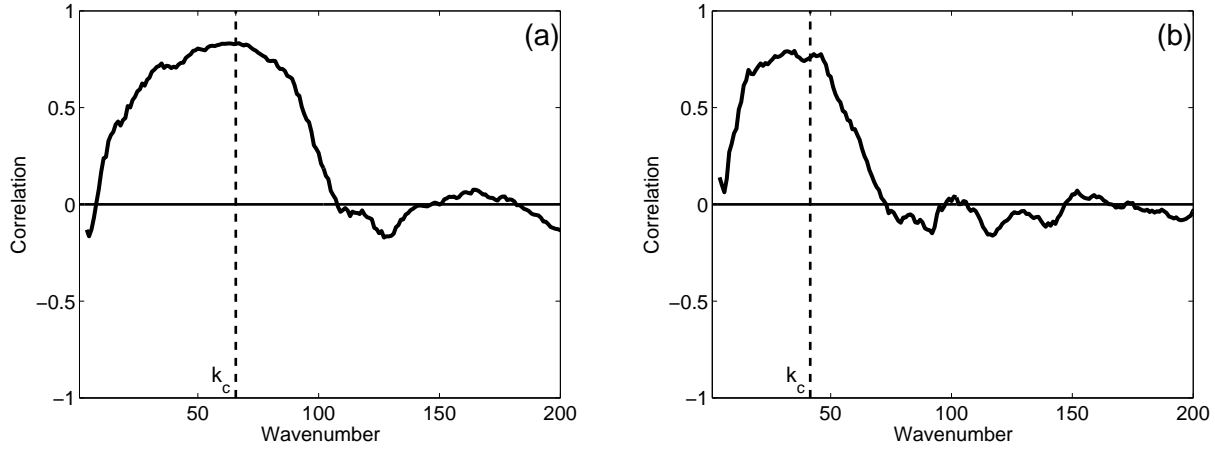


FIG. 3.9 – Correlation coefficient between spectral coefficients averaged along circular rings in horizontal wavenumber space of the kinetic inertial energy of vertical mode 3 and the Laplacian of the surface eddy vorticity at $t=2\text{IP}$ (a) and $t=5\text{IP}$ (b). Horizontal wavenumber k_c is a critical horizontal wavenumber given by $k_c = \sqrt{2\pi/ft}/r_3$.

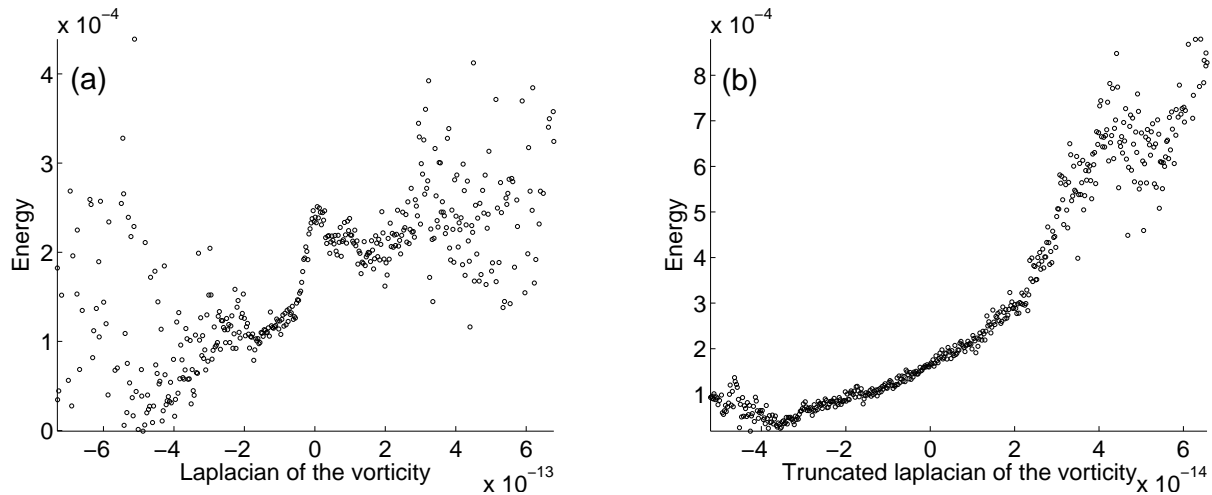


FIG. 3.10 – Scatterplot of the kinetic inertial energy of mode 3 and the Laplacian of the surface vorticity (a) and the kinetic inertial energy of vertical mode 3 and the Laplacian of the surface vorticity truncated so as to retain scales larger than $l_c = r_3\sqrt{2\pi ft}$ (b).

different Rossby radius of deformation r_n . The complex spatial heterogeneity of the horizontal inertial KE (displayed on figs.3.6) can thus be explained in terms of the eddy vorticity and dispersion effects onto these vertical modes and actually results from the competition between the different modes : assuming that just after the wind pulse all modes are in phase and spatially uniform (and therefore coupled together), the time evolution during the next 8 inertial periods quickly affects the lowest modes that aggregate within small-scale vorticity structures and progressively disperse over larger and larger areas. Such time evolution also affects the intermediate modes but on a longer time scale whereas the highest modes have not time to aggregate although their phase is significantly affected by the eddy vorticity. The resulting decoupling of the different vertical modes makes the horizontal inertial motions to vertically propagate in the interior.

3.1.5 Inertial motions : vertical kinetic energy

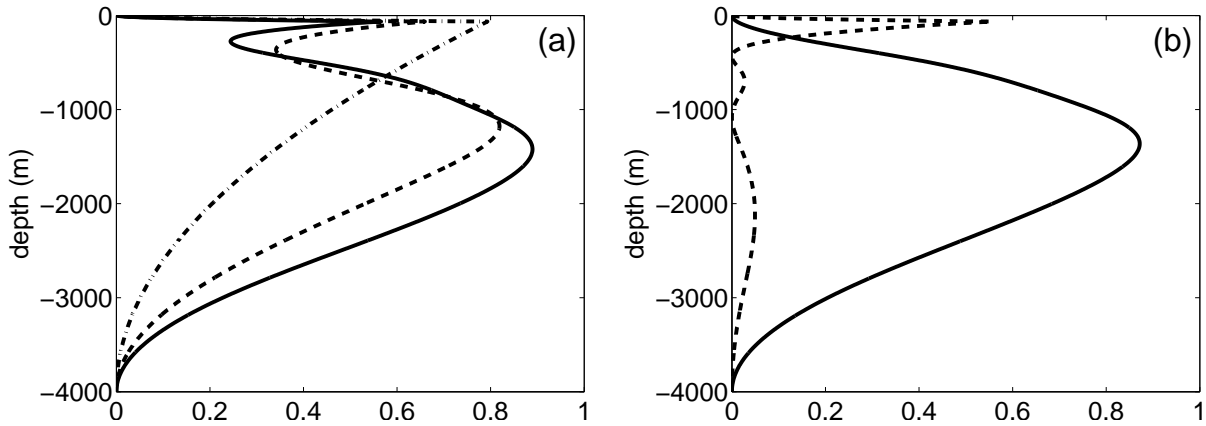


FIG. 3.11 – (a) Vertical profile of $\langle w^2 \rangle$ using $w_n = au_{no}$ for all n with a a constant, when (dotted-dashed profile) $\langle w_m w_n \rangle \neq 0$ for all m and n , when (dashed profile) $\langle w_1 w_n \rangle = 0$ for $n \geq 2$ and when (solid profile) $\langle w_1 w_n \rangle = 0$ with $n \geq 2$ and $\langle w_2 w_n \rangle = 0$ for $n \geq 3$. (b) Specific contributions to the solid profile in (a) of modes 1 and 2, i.e. $\langle w_1^2 \rangle \left[\int_z F_1 dz \right]^2 + \langle w_2^2 \rangle \left[\int_z F_2 dz \right]^2$ (solid curve), and of the higher modes, i.e. $\langle \left[\sum_{n \geq 3} w_n \int_z F_n dz' \right]^2 \rangle$ (dashed curve).

Vertical inertial energy reveals unexpected and conspicuous evolution. We have found that after the wind pulse the vertical inertial energy penetrates in the interior more quickly and much deeper than the horizontal inertial energy. At $t=4IP$, a maximum of w -variance (or $\langle w^2 \rangle$ with $\langle \cdot \rangle$ the average operator over the whole horizontal domain) not surprisingly appears below the mixed-layer - at 100m. However another significant maximum of $\langle w^2 \rangle$ unexpectedly appears at a much larger depth, around 1700m (fig.3.4b). Both maxima correspond to a RMS value of the order of 40m per day with extrema of 100m per day. The one at 100m may increase the stirring and mixing already associated to the mesoscale motions whose energy is large at this level. However the one at 1700m, i.e. where mesoscale motions (and the associated mixing) are very much weaker, may be potentially more important.

Indeed if all the inertial w -variance at that level is converted into vertical turbulent diffusion K_z , we obtain using a scaling analysis (i.e. $K_z \approx \langle w^2 \rangle / f$) an upper limit of $10^{-3} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$. Thus even if only 10% of the inertial vertical kinetic energy is converted into vertical turbulent diffusion, the corresponding diffusion coefficient ($10^{-4} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$) would be close to the one required to match the observed need for large mixing at large depth (Wunsch and Ferrari (2004)).

It is important to explain the emergence, and detail the characteristics, of these two maxima related to the inertial motions and in particular of the deeper one. This can be done again within the framework of the normal mode analysis and using the results for u_n and v_n of the preceding section. From (3.2), the vertical velocity variance can be written as

$$\begin{aligned} \langle w^2 \rangle &= \left\langle \left[\sum_n w_n \int_z^0 F_n dz' \right]^2 \right\rangle \\ &= \sum_n \langle w_n^2 \rangle \left[\int_z^0 F_n dz' \right]^2 + \\ &\quad \sum_{n \neq m} \langle w_n w_m \rangle \int_z^0 F_n dz' \int_z^0 F_m dz', \end{aligned} \quad (3.6)$$

with

$$w_n = \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y}. \quad (3.7)$$

Thus w directly depends on the time evolution of u_n and v_n and in particular of their spatial heterogeneity. Results of the preceding section have shown that time and spatial characteristics of a given baroclinic mode depends on the Rossby radius of deformation associated to this mode and follow the analytical solutions of Klein et al. (2004b). Use of these results provides an explanation for the appearance of the two maxima of $\langle w^2 \rangle$ that is sketched below.

Just after the wind pulse ($t' = 0$), inertial velocities are zonal, horizontally homogeneous and trapped within the mixed layer. This leads to

$$\{u, v\}(t' = 0) = \sum_n \{u_{n0}, 0\} F_n(z),$$

with u_{n0} x and y -independent. At short time after the wind pulse ($t' \ll 2\pi/f$), dispersion mechanisms have not worked yet, so the amplitude of the inertial velocities is still homogeneous, but their phase evolves and is related to the vorticity. Consequently, the solution at short time can be written

$$\begin{aligned} \{u, v\}(t') &= \sum_n u_{n0} \left\{ \cos\left(f + \frac{\zeta}{2}\right)t', \right. \\ &\quad \left. - \sin\left(f + \frac{\zeta}{2}\right)t' \right\} F_n(z). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Equation (3.7) combined with (3.8) gives

$$w_n = -\frac{t' |\nabla_H \zeta|}{2} \sin\left(\left(f + \frac{\zeta}{2}\right)t' + \alpha\right) u_{n0}, \quad (3.9)$$

where the horizontal vorticity gradient is written as $(\frac{\partial\zeta}{\partial x}, \frac{\partial\zeta}{\partial y}) = |\nabla_H\zeta|(\cos\alpha, \sin\alpha)^1$. Inserting (3.9) into (3.2) shows that, at short time after the wind pulse, the amplitude of the total vertical velocity is related to the horizontal vorticity gradient and increases linearly with time. In that case, all cross-correlations, $\langle w_n w_m \rangle$ in (3.6) are non-zero. The resulting vertical structure of $\langle w^2 \rangle$ at short time after the wind pulse is represented by the dotted-dashed curve on fig.3.11a where, for the sake of simplicity the factor of u_{n0} in (3.9) has been replaced by a constant a . This vertical structure of $\langle w^2 \rangle$ is actually very close to the vertical profile of w_{rms} just after the wind pulse represented on fig.3.4b (dashed line).

Dispersion mechanisms affect differently lower and higher modes as mentioned before. So, later on, horizontal motions associated with the first baroclinic mode should disperse and concentrate within anticyclonic structures whose length scale increases with time, whereas dispersion have not yet affected the higher modes. Consequence is that, as shown in the appendix (see (3.19)), the mode component, w_1 , although still increasing linearly with time, should be no more correlated to the total vorticity gradient field, but to the vorticity gradient truncated so as to retain only scales larger than $l_1 = r_1\sqrt{2\pi ft}$. On the other hand all the higher mode components should still at that time verify (3.9). This means that w_1 has now a spatial heterogeneity significantly different from w_n (for $n \geq 1$) and therefore $\langle w_1 w_n \rangle \approx 0$ with $n \geq 2$. Then $\langle w^2 \rangle$ in that case can be written as

$$\begin{aligned} \langle w^2 \rangle \approx & \langle w_1^2 \rangle \left[\int_z F_1 dz \right]^2 + \\ & \left\langle \left[\sum_{n \geq 2} w_n \int_z F_n dz' \right]^2 \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Using in (3.10) $w_n = au_{no}$ (instead of the more complex relations (3.9) and (3.19), again for the sake of simplicity) leads to the vertical profile for $\langle w^2 \rangle$ represented by the dashed line on fig.3.11a and exhibiting two maxima - one at 100m and the other one around 1200m. This vertical structure is similar to the solid profile (involving also two maxima) on fig.3.4b.

If mode 2 later on also decouples from the higher modes, the same arguments leading to the additional decorrelation $\langle w_2 w_n \rangle \approx 0$ with $n \geq 3$ produce a maximum in the interior that further deepens (as sketched on fig.3.11a by the solid profile). The depth of this deep maximum is now closer to that exhibited by the solid profile on fig.3.4b. When the respective mode contributions are plotted in the situation where w_1 and w_2 are decoupled from the higher modes (fig.3.11b), it immediately appears that the shallower maximum is explained by the higher modes and the deeper maximum by the low modes. This simple explanation clearly indicates that it is the decoupling between lower and higher modes that leads to a strong maximum in the deep interior.

To check whether this schematic explanation applies to our numerical results, we have plotted (figs.3.12) at 2 levels (100m and 1700m) the scatterplots of the total vertical velocity, w , with the contribution of only the 3 lowest modes and with only the higher modes. Remarkably w at 100m is almost entirely explained by the

¹It should be noted that for very short times (3.19) resembles (3.9) (see the appendix for the explanations).

contribution of the higher modes (fig.3.12c) and not at all by the contribution of the lowest modes (fig.3.12a). On the other hand, at 1700m, w is entirely explained by the lowest modes (fig.3.12b) and not at all by the higher modes (fig.3.12d). Furthermore the spectral correlations displayed on figs.3.13a,b confirm that, as time goes on, the low frequency part of the higher modes (as w_8 on figs.3.13a,b) keep well correlated with the vorticity gradient field over a large spectral range whereas the low modes (as w_2 on figs.3.13) quickly decorrelate with the vorticity gradient in a spectral range that increases starting from the small scales. This means that the spatial heterogeneity of the lower modes (involving only large scales) quite differ from that of the higher modes (involving energetic small scales).

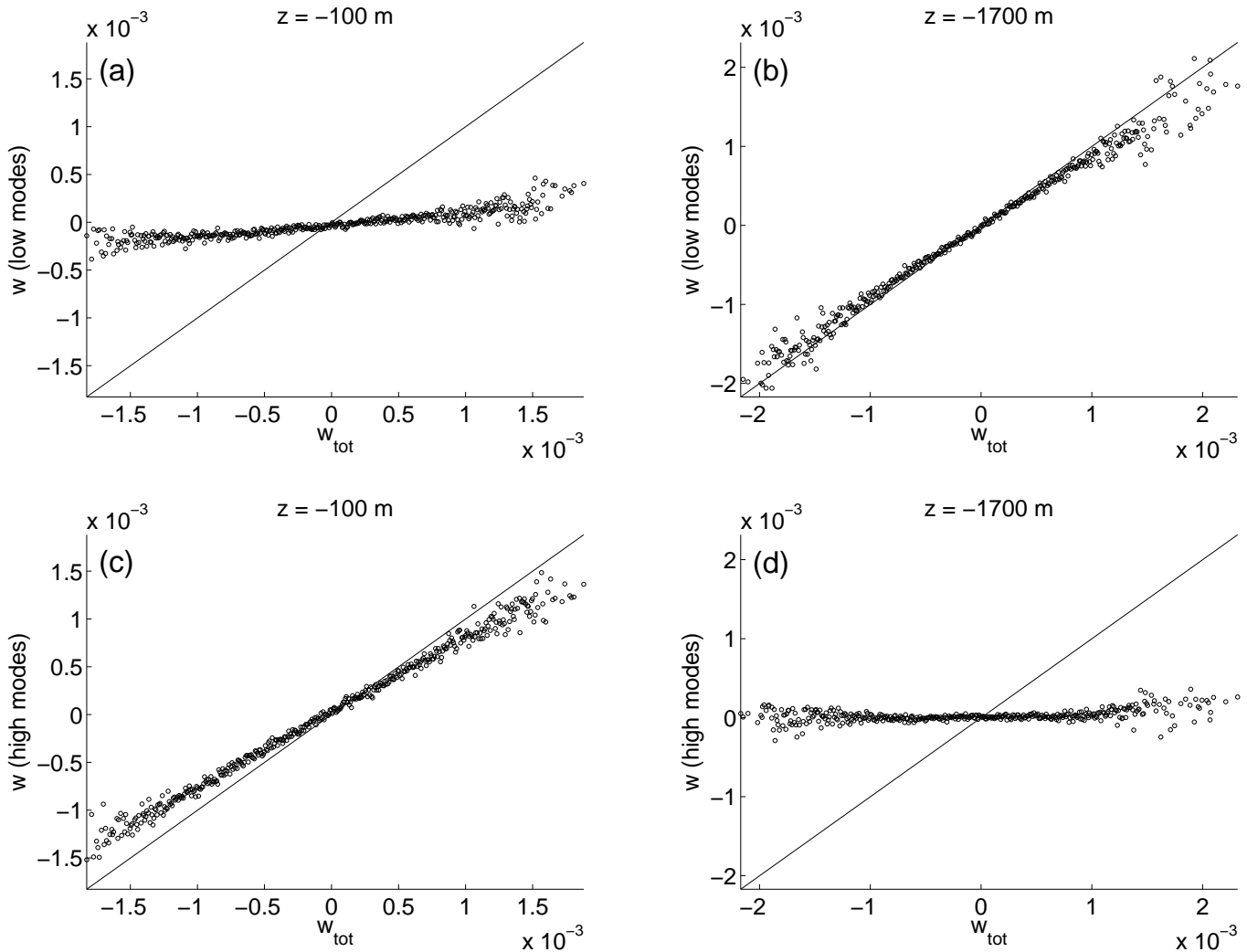


FIG. 3.12 – Scatterplots at $t=6IP$ of the total vertical velocity (w_{tot}) with the low vertical modes contribution (modes 1 to 3) (a and b) and with the higher modes contribution (c and d) at $z=-100$ m (a and c) and $z=-1700$ m (b and d).

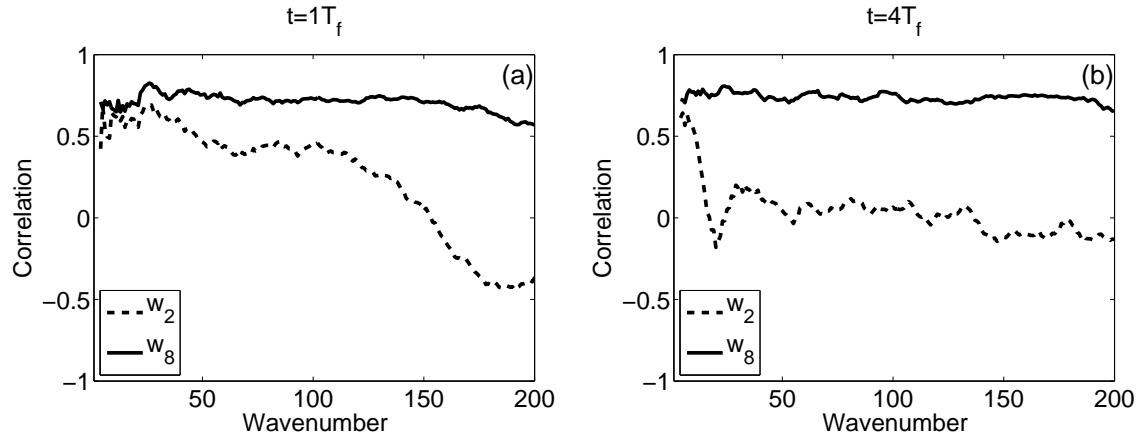


FIG. 3.13 – Correlation coefficient between spectral coefficients averaged along circular rings in horizontal wavenumber space of the low frequency part of w_2 (dashed line) or w_8 (solid line) and the eddy vorticity gradient at $t=1\text{IP}$ (a) and $t=4\text{IP}$ (b).

3.1.6 Characteristics of the two w -maxima

We now focus on the spatial and temporal characteristics of the w -maxima at 100m and 1700m. The w -field at 100m (fig3.14a) displays small-scale elongated structures that seem similar to the vorticity gradient field. This is confirmed by the spectral correlation (not shown) between the w -field at 100m and the vorticity gradient field which is actually close to that displayed on fig.3.13b for the contribution of mode 8 (w_8). The wavenumber spectrum of w at 100m (fig3.15a) displays a plateau extending to the small scales and has the same shape as each of the higher modes (see fig3.16b). The frequency spectrum shows that the w -field at 100m (dashed line on fig3.17) mostly oscillates at the inertial frequency. The results are in agreement with the conclusions of the preceding section indicating that w at this depth is principally captured by the higher modes, which at that time resemble the total vorticity gradient field.

On the other hand snapshot of the w -field at 1700m (fig3.14b), captured by the lower modes, reveals that this field is dominated by much smaller scales than at 100m. More precisely its wavenumber spectrum (fig3.15a) displays a conspicuous narrow peak at a particular wavenumber, $k_1 = \sqrt{3}/r_1$, and a secondary peak at a wavenumber $k_2 = \sqrt{3}/r_2$ with again r_1 and r_2 respectively the Rossby radius of deformation of mode 1 and mode 2. Surprisingly the frequency spectrum reveals that the dominant frequency of the w -field at this depth (solid line on fig3.17) is $2f$ and no more the inertial frequency as for the maximum at 100m. These characteristics depart from those indicated by the analytical solutions of Klein et al. (2004b) for the low modes that would predict a spatial heterogeneity characterized by scales much larger than those at 100m (captured by higher modes) and a dominant frequency close to the inertial frequency. But these characteristics are quite close to those related to a resonance mechanism described in Danioux and Klein (2007) that works only after the inertial motions have dispersed over length scales larger than the Rossby radius of deformation, i.e. for $t > 1/(2\pi f)$. For a given mode n , this resonance mechanism excites a particular wavenumber $k_n = \sqrt{3}/r_n$, oscillating at frequency

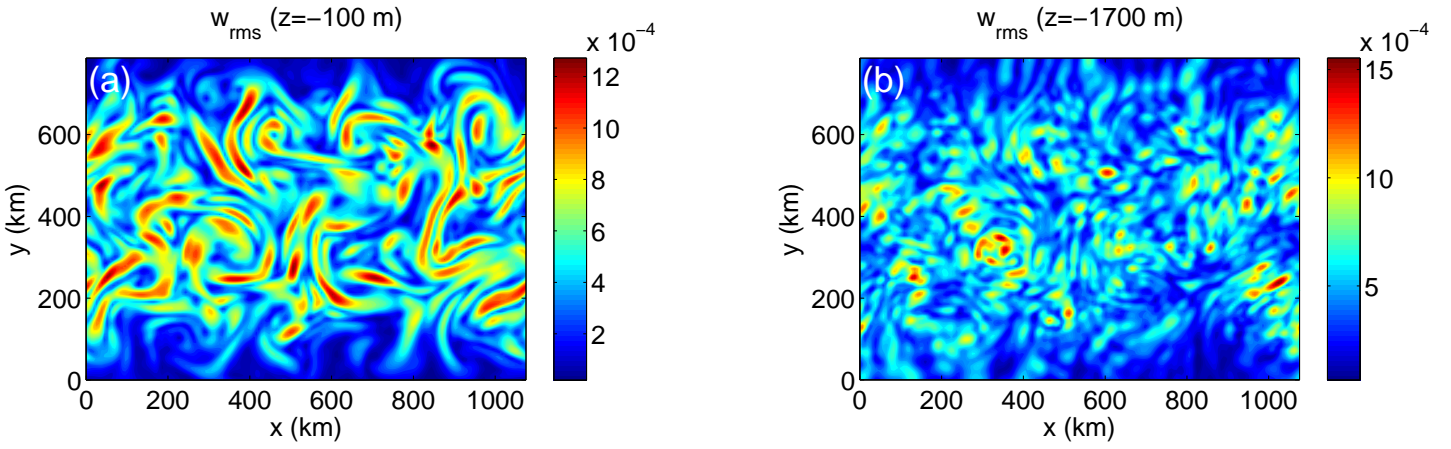


FIG. 3.14 – Snapshots at $t=6\text{IP}$ of the temporal RMS value of the vertical velocity $w_{rms} = \sqrt{\overline{w^2}}$ (where $\overline{\quad}$ represents the temporal mean over one inertial period) at $z=-100\text{m}$ (a) and $z=-1700\text{m}$ (b).

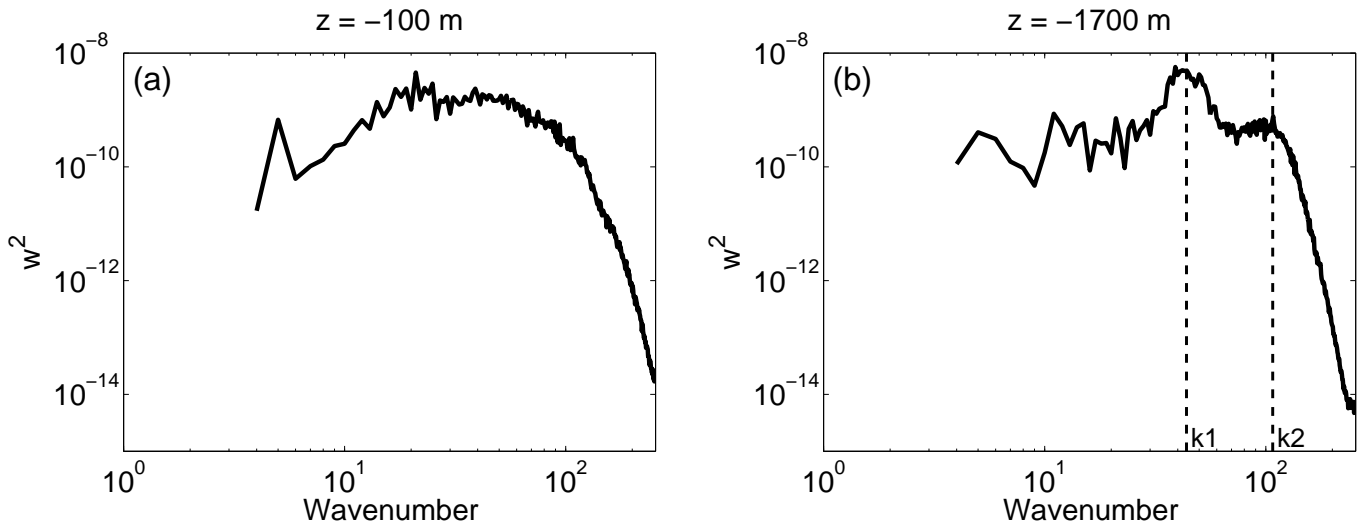


FIG. 3.15 – Wavenumber spectrum at $t=6\text{IP}$ of w at $z=-100\text{m}$ (a) and $z=-1700\text{m}$ (b). $k_1 = \frac{\sqrt{3}}{r_1}$ and $k_2 = \frac{\sqrt{3}}{r_2}$ are indicated.

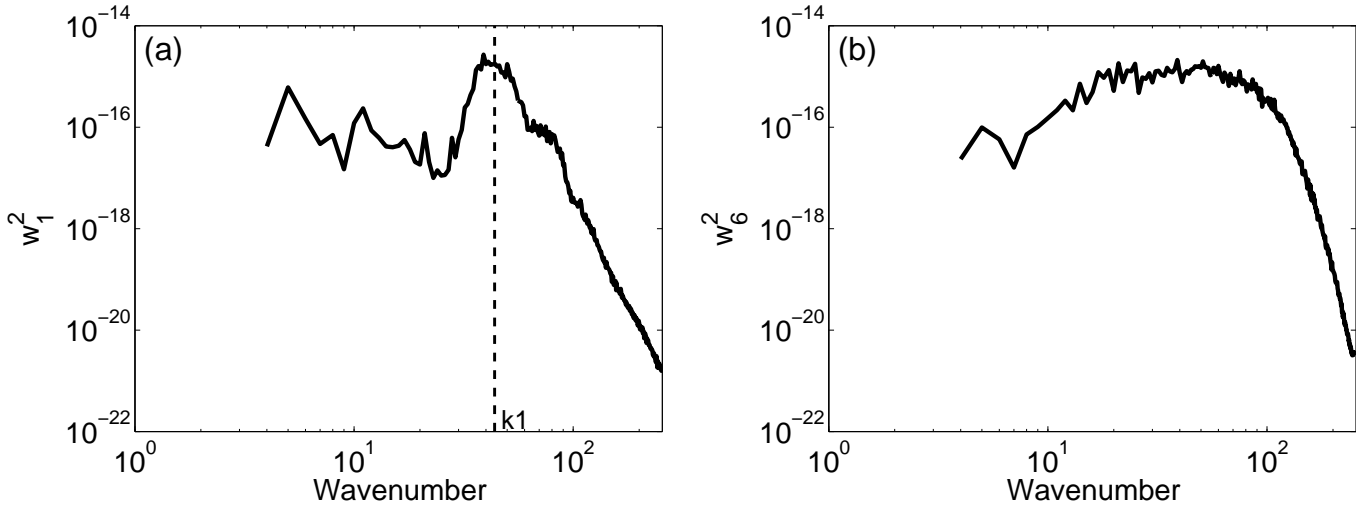


FIG. 3.16 – Wavenumber spectrum at $t=6IP$ of vertical mode w_1 (a) and w_6 (b). $k_1 = \frac{\sqrt{3}}{r_1}$ is indicated.

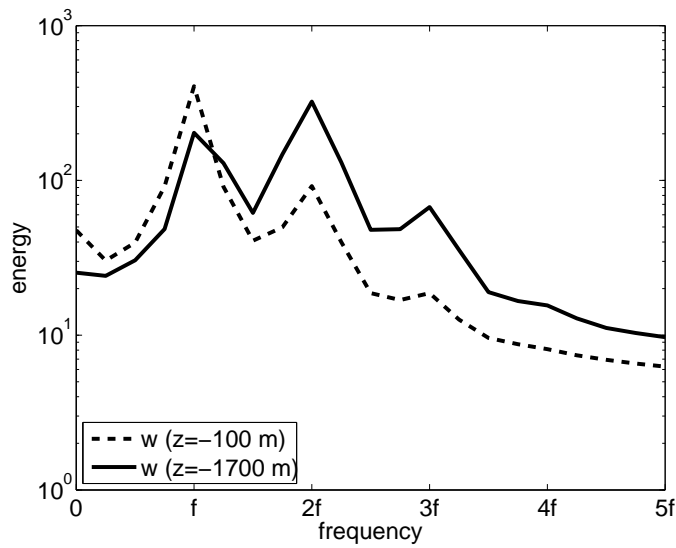


FIG. 3.17 – Frequency spectrum at $t=6IP$ of w at $z=-100$ m (dashed line) and $z=-1700$ m (solid line).

2f. Danioux and Klein (2007) demonstrate that the strength of this resonance is proportional to the component of the Fourier transform of the vorticity, $\hat{\zeta}(k)$, at the resonant wavenumber k_n . Since the vorticity spectrum has a k^{-2} slope, $\hat{\zeta}$ is larger for the lower modes which explains why the resonance essentially appears for the lower modes. At last, this mechanism does not change the very weak correlations between the low modes of the w -field and the higher ones, so the explanations given in section 5 for the appearance of a maximum in depth of the variance $\langle w^2 \rangle$ are still correct.

3.1.7 Discussion and conclusion

We have analysed the 3-D propagation of wind-forced inertial motions in a fully turbulent mesoscale eddy field. The most important result is that, quickly after a large-scale wind pulse, two maxima of vertical inertial velocity appear, one around 100m and the other one around 1700m. The shallower maximum involves mostly inertial motions (with the inertial frequency (f)) and a spatial heterogeneity that resembles the eddy vorticity gradient field. On the other hand the deeper maximum principally involves supra-inertial motions, with a frequency twice the inertial frequency, characterized by smaller space scales than the maximum at 100m. The dynamics of the penetration of these wind-forced inertial motions embedded in a mesoscale eddy field has been understood within the framework of vertical normal mode analysis. Dynamics of each mode is strongly affected by the eddy relative vorticity and the subsequent dispersion of the inertial motions of the different modes actually follows the analytical solutions proposed in previous studies. The *2f* frequency of the high-frequency motions at 1700m is related to a resonance mechanism associated with the lower vertical modes that works once the inertial motions for these modes have been dispersed by the eddy vorticity. Characteristics of the deeper maximum make the parametric subharmonic instability (P.S.I.) a likely mechanism to convert the vertical kinetic energy oscillating at frequency $2f$ into vertical turbulent diffusion (Staquet and Sommeria (2002), MacKinnon and Winters (2005)). As such the presence of this deep maximum of high-frequency motions, its characteristics and the different mechanisms that explain them, reveal a pathway by which the wind energy quickly penetrates in the deep interior and potentially participates to the vertical mixing in this region. A quick scaling analysis indicates a value of $K \approx 10^{-3} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ for this maximum. This means that even if only 10% of the inertial vertical energy is converted into energy available for mixing through P.S.I., the corresponding value, much larger than the $10^{-6} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ molecular value, should match that necessary for mixing in the deep interior. Consequently these results call for further studies on these mechanisms. Such studies would require first to use a more realistic high-frequency wind-forcing such as those used in Watanabe and Hibiya (2002) and Klein et al. (2004a). Also a much higher spatial resolution both in the horizontal and vertical directions should be employed. Furthermore it is equally important to fully evaluate the efficiency of the P.S.I. mechanisms for the characteristics of the supra-inertial energy present in the deep interior. These studies require computing resources much larger than those available for the present study.

Acknowledgments

This work is supported by the CNRS and IFREMER (FRANCE). Numerical

simulations reported here were done at the IDRIS Orsay, France.

APPENDIX : Analytical solutions associated to one baroclinic mode

A - Horizontal motions

We first summarize the results of Klein et al. (2004b) about the time and space evolution of horizontal near-inertial oscillations (NIOs) associated to a given baroclinic mode embedded in a fully turbulent eddy field. Subscript n that refers to the mode number is now omitted for the sake of simplicity.

Young and Ben Jelloul (1997) proposed a theoretical procedure that, unlike WKB theory, does not assume a priori a horizontal scale separation between NIOs and the background mesoscale flow. This procedure leads to equations for the subinertial part ($\mathcal{R}e^{i\theta}$) defined by

$$u + iv = \mathcal{R}e^{i\theta} e^{-ift} \quad (3.11)$$

where $i^2 = -1$, (u, v) is the horizontal velocity of near-inertial oscillations (NIOs). θ is the phase and $\mathcal{R} > 0$ the amplitude. Note that $\mathcal{R}^2 = u^2 + v^2$ is the total horizontal inertial energy. This procedure assumes that the mesoscale eddy field is quasigeostrophic (QG) with a Rossby number $\epsilon \ll 1$. The horizontal length scale of the NIOs (L) is the same as that of the eddy field. The Rossby radius of deformation of the NIOs baroclinic mode is r with $(r/L)^2 = \mathcal{O}(\epsilon)$.

Klein et al. (2004b) used the simplest equations derived by Young and Ben Jelloul (1997) that involve two main dynamical quantities : the QG vorticity, $Z \equiv \nabla^2 \phi$, where ∇ is the two-dimensional gradient operator, and a dispersivity parameter $h = fr^2$. Subsequent analysis of Klein et al. (2004b) focuses on the time evolution of the spatial heterogeneity of \mathcal{R}' and θ' , the small departures of \mathcal{R} and θ from the initially uniform values \mathcal{R}_0 and θ_0

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R} - \mathcal{R}_0.$$

$$\theta' = \theta - \theta_0.$$

whose resulting linearized coupled equations are

$$\frac{\partial \mathcal{R}'}{\partial t} = -\frac{h}{2} \mathcal{R}_0 \nabla^2 \theta', \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} = -\frac{Z}{2} + \frac{h}{2} \left[\frac{\nabla^2 \mathcal{R}'}{\mathcal{R}_0} \right]. \quad (3.13)$$

Because the eddy field is characterized by a continuous wavenumber spectrum, the integration of (3.12) and (3.13) in physical space is too difficult to treat exactly. An alternative is to work in Fourier space to obtain a solution for each wavenumber k , and then to come back to physical space. Using

$$X(x, y, t) = \sum_{p=-N}^{p=N} \sum_{q=-N}^{q=N} \hat{X}_{pq}(t) e^{i(px+qy)},$$

with X any variable, \hat{X}_{pq} the Fourier transform of X , p and q the horizontal wavenumbers and N the total number of horizontal Fourier modes, final solutions in spectral space are (Klein et al. (2004b))

$$\frac{\widehat{\mathcal{R}}'_k}{\mathcal{R}_0} = -\frac{T_k \hat{Z}_k}{4\pi} \left[1 - \cos \frac{2\pi t}{T_k} \right], \quad (3.14)$$

$$\hat{\theta}'_k = -\frac{T_k \hat{Z}_k}{4\pi} \sin \frac{2\pi t}{T_k}. \quad (3.15)$$

with $k^2 = p^2 + q^2$ and $T_k = 4\pi/(k^2 h)$. Discussions of (3.14) and (3.15) in Klein et al. (2004b) reveal the existence of a *scale selection* at a given time t determined by a critical wavenumber $k_c = \sqrt{2\pi/(ht)}$ (which corresponds to $t = T_{k_c}/2$): \mathcal{R}'_k is maximum for $k = k_c$. For $k \ll k_c$, the \mathcal{R}' -spectrum has a positive slope and resembles the $\nabla^2 Z$ -spectrum (since $|\widehat{\nabla^2 Z}_k|^2 = k^4 |\hat{Z}_k|^2$). This part of the spectrum increases with time like t^4 . For $k \gg k_c$ the \mathcal{R}' -spectrum has a steep negative slope and resembles the streamfunction spectrum (since $|\hat{\phi}_k|^2 = k^{-4} |\hat{Z}_k|^2$). Since the total inertial kinetic energy is equal to the integration of the \mathcal{R}' -spectrum over the wavenumber range, a simple calculation clearly shows that the first part of the spectrum ($k < k_c$) is the dominant contribution.

Then an estimation of the solution for \mathcal{R} in physical space can be derived by taking only the most energetic part, corresponding to $k < k_c$, of the spectrum. From Klein et al. (2004b), this solution in physical space is

$$\frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}_0} = \max\left\{ \frac{ht^2}{8} \nabla^2 Z_T, -1 \right\} \quad (3.16)$$

with $\nabla^2 Z_T$ the Laplacian vorticity field truncated so as to retain only space scales larger than $l_c = r\sqrt{2\pi ft}$. It is important to stress that this analytical solution strongly differs from those proposed by previous studies: it involves the Laplacian of the vorticity and not the vorticity (Kunze (1985)), the streamfunction (Young and Ben Jelloul (1997)) or the vorticity gradient (Van Meurs (1998)).

These results indicate that just after a wind pulse, \mathcal{R}' for all baroclinic modes should be close to the untruncated Laplacian vorticity field (since t and therefore $l_c = r\sqrt{2\pi ft}$ is small for the whole range of r -values). However after some inertial periods, whereas l_c is still quite small for the higher modes (because of their small r -values), it becomes non-negligible for the lower modes (because of their larger r -values). Thus at this time the higher modes still resemble the untruncated Laplacian vorticity field but the lower modes should resemble the Laplacian vorticity field truncated so as to retain only the large scales. This means that lower and higher modes are now spatially decorrelated and therefore decoupled.

B - Vertical motions

The vertical velocity w for a given baroclinic mode is expressed in terms of the horizontal motions of the same mode (again subscript n that refers to the mode number is dropped for the sake of simplicity)

$$w(x, y, t) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (3.17)$$

(See equation 3.2). Let us find the expression of \hat{w}_k , the Fourier transform of $w = -[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}]$ from eqs. (3.11) and (3.14–3.15). Using $(k_x, k_y) = k(\cos \alpha, \sin \alpha)$, we end up with the following expression :

$$\hat{w}_k = ik \frac{T_k \hat{Z}_k}{2\pi} R_o \sin \frac{\pi t}{T_k} \sin(ft(1 + \frac{k^2 r^2}{4}) - \theta_o + \alpha). \quad (3.18)$$

We focus on the low frequency part of \hat{w}_k , i.e. $\hat{W}_k = ik \frac{T_k \hat{Z}_k}{\pi} R_o \sin \frac{\pi t}{T_k}$. Remarkably the same analysis as for $\hat{\mathcal{R}}'_k$ involving the same critical wavenumber, $k_c = \sqrt{2\pi/(ht)}$ can be done for \hat{W}_k . Using (3.18), it is easy to show that the dominant part of the w spectrum again concerns the spectral range $k < k_c$ and resembles the eddy vorticity gradient within this range. Furthermore if the eddy vorticity spectrum slope is equal or shallower than k^{-2} , then \hat{W}_k has its largest magnitude in structures whose scales are close to k_c^{-1} .

In other words, the vertical velocity field in physical space should resemble the eddy vorticity gradient field truncated so as to retain spatial scales larger than $l_c = r\sqrt{2\pi ft}$. The resulting expression in physical space for the low frequency part (\mathcal{W}) of the vertical velocity would be

$$\frac{\mathcal{W}}{\mathcal{R}_0} = \frac{t}{2} |\nabla Z_T|. \quad (3.19)$$

with ∇Z_T the horizontal gradient of the vorticity field truncated so as to retain only space scales larger than $l_c = r\sqrt{2\pi ft}$. Then the same conclusions as for the horizontal motions can be inferred : just after a wind pulse, the low frequency part of the vertical inertial motions (\mathcal{W}) should be, for all baroclinic modes, close to the untruncated vorticity gradient field. But after some inertial periods, the higher modes contributions should still resemble the untruncated vorticity gradient field and the lower modes should resemble the vorticity gradient field truncated so as to retain only the large scales. This means that lower and higher modes are now spatially decorrelated and therefore decoupled.

3.2 Propagation verticale de l'énergie cinétique inertielle horizontale

3.2.1 Observations

Au bout d'un certain temps (environ 6 périodes inertielles après un coup de vent), on observe dans certaines zones un approfondissement de l'énergie cinétique inertielle et l'apparition d'un maximum vers -200m (cf figure 3.18).

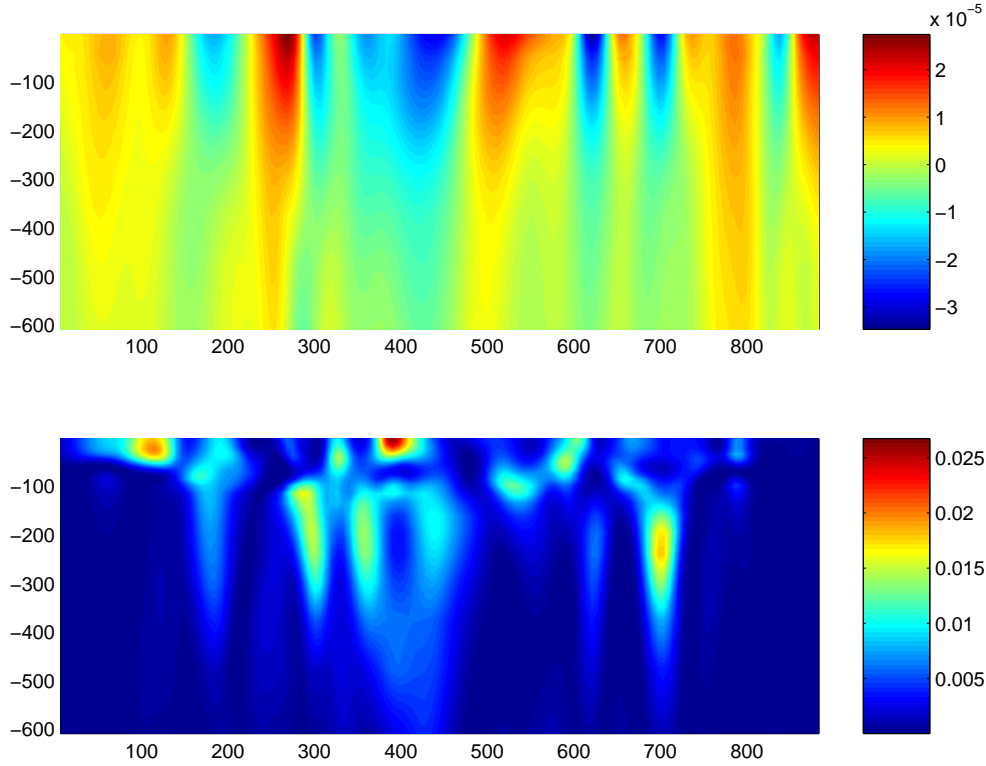


FIG. 3.18 – Coupes méridionales de la vorticité (en haut) et de l'énergie inertielle (en bas) au bout de 9 périodes inertielles à la même longitude. En ordonnée : la profondeur, en abscisse : la distance en km selon l'axe méridien.

En y regardant de plus près, les régions où l'énergie inertielle s'approfondit sont pour la plupart des régions de vorticité négative. Ceci est confirmé par la figure 3.19. Sur cette figure, nous avons représenté le profil moyen de l'énergie inertielle dans trois types de régions :

- les régions où la vorticité de surface est négative et inférieure à un certain seuil : $\xi < -a$
- les régions où la vorticité de surface est positive et supérieure à un certain seuil : $\xi > a$
- les régions intermédiaires où la vorticité de surface est faible : $|\xi| < a$

Pour la figure 3.19, nous avons pris $a=2.10^{-5}s^{-1} \simeq 0.2f$. Cet approfondissement de l'énergie inertielle n'est pas négligeable puisque les régions où $|\xi| > a$ occupent plus de 11% de la surface. En prenant pour $a=1.5.10^{-5}s^{-1}$, on observe toujours l'apparition d'un maximum d'énergie à 200m de profondeur dans les zones de vorticité

inférieure à $-a$, mais cette fois-ci, les régions telles que $|\xi| > a$ occupent environ 21% de la surface !

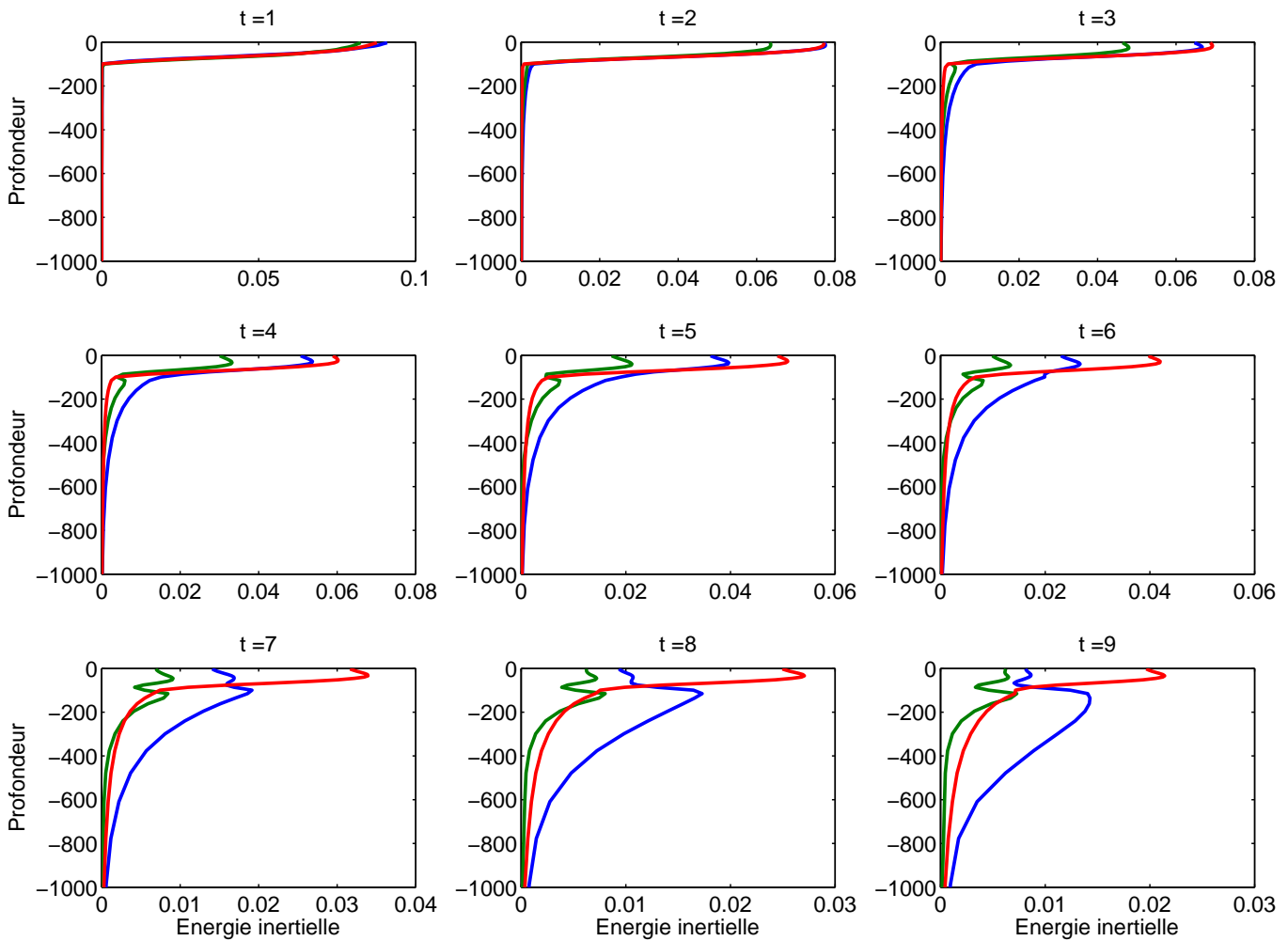


FIG. 3.19 – Evolution en fonction du temps (t est exprimé en périodes inertielles) du profil vertical moyen de l'énergie inertielle dans trois types de régions : $\xi < -a$ (bleu), $\xi > a$ (vert) et $|\xi| < a$ (rouge).

3.2.2 Explication

Analyse des sorties SPEM

Une première idée pour comprendre les différents profils verticaux de l'énergie inertielle est de s'attacher à suivre au cours du temps une particule en surface (de vorticité relative négative, positive ou faible) et de représenter le profil vertical de l'énergie inertielle en ce point ainsi que les différentes contributions des modes verticaux $\vec{u}_n = (u_n, v_n)$.

$\vec{u} = (u, v)$ est le vecteur vitesse inertielle On projette ces vitesses sur les modes

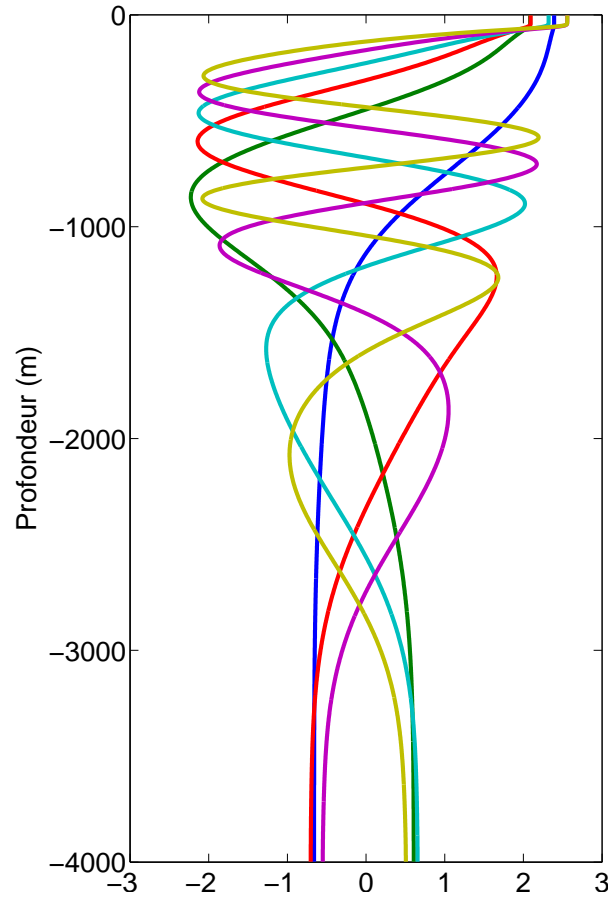


FIG. 3.20 – Profils verticaux des 6 premiers modes baroclines

propres du problème de Sturm Liouville (cf Gill (1982)) :

$$(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, v_n) F_n(z)$$

Les 6 premiers modes baroclines sont représentés sur la figure 3.20 (note : les F_n sont tous pris positifs en surface).

Les figures 3.21, 3.22, 3.23 et 3.24 représentent l'évolution de l'énergie inertielle ainsi que les contributions des différents modes en un point où la vorticité est soit "très" négative, soit "très" positive, soit faible. Les figures 3.21, 3.22 et 3.23 montrent que chaque mode vertical a sa propre phase, différente des autres modes. En revanche, dans le cas d'un point de vorticité faible, il semble que les différents modes verticaux aient tous approximativement la même phase (cf figure 3.24).

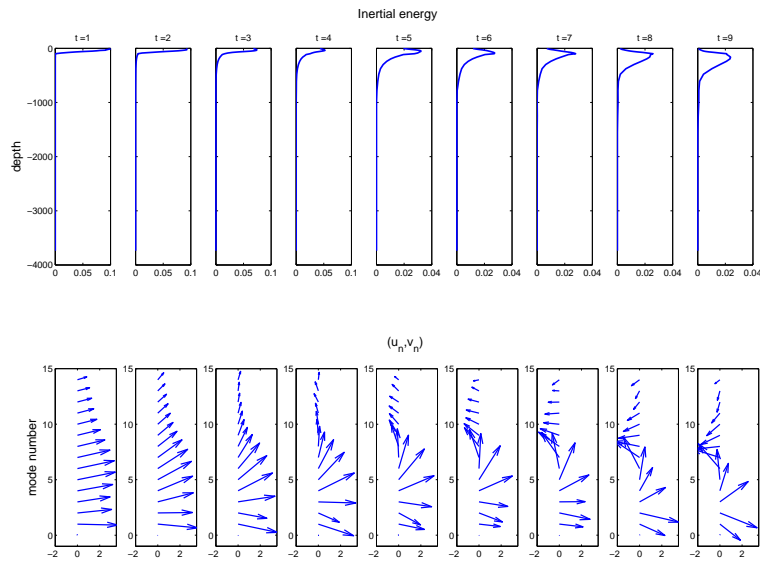


FIG. 3.21 – Evolution dans le temps (en périodes inertielles) du profil vertical de l'énergie inertielle et de la contribution des différents modes verticaux en un point de vorticité proche de $-2.5 \cdot 10^{-5} s^{-1}$

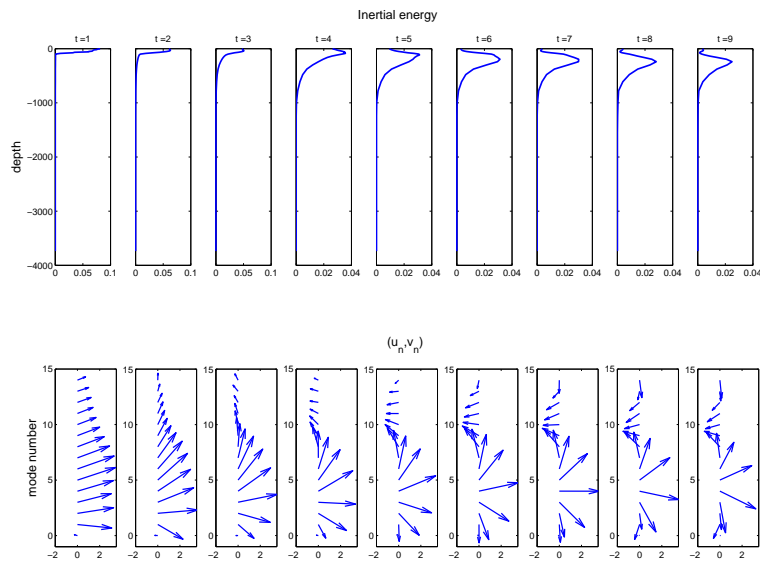


FIG. 3.22 – Evolution dans le temps (en périodes inertielles) du profil vertical de l'énergie inertielle et de la contribution des différents modes verticaux en un point de vorticité proche de $-3.5 \cdot 10^{-5} s^{-1}$

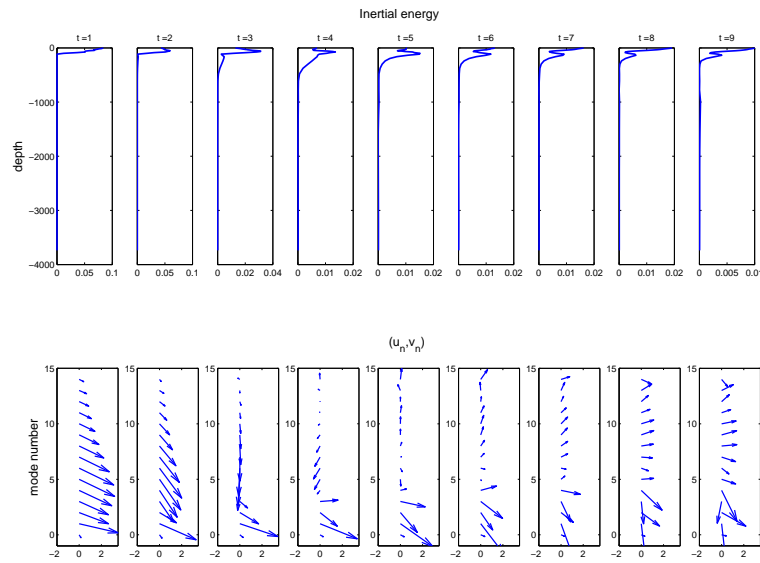


FIG. 3.23 – Evolution dans le temps (en périodes inertielles) du profil vertical de l'énergie inertielle et de la contribution des différents modes verticaux en un point de vorticité proche de $4.5 \cdot 10^{-5} s^{-1}$

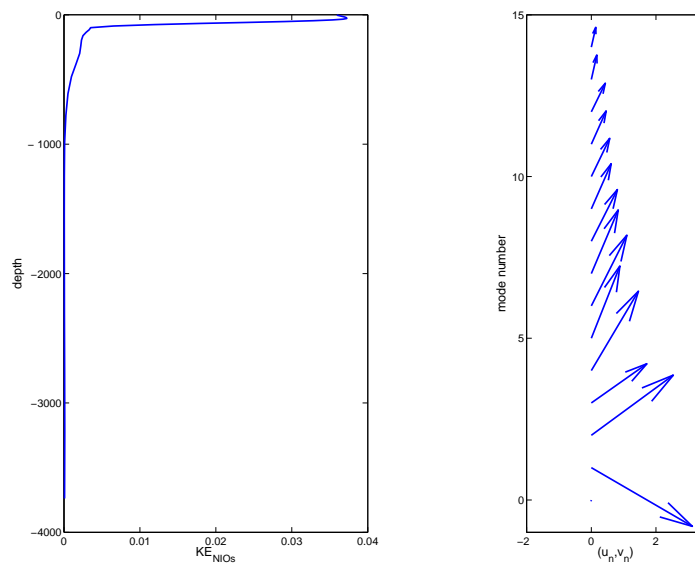


FIG. 3.24 – Profil vertical de l'énergie inertielle et contribution des différents modes verticaux en un point de vorticité faible à $t=9$ périodes inertielles.

A ce stade, il est également nécessaire de rappeler que, outre la phase, l'amplitude des différents modes verticaux varie également (ce que l'on voyait également sur les figures 3.21, 3.22 et 3.23). En témoigne la figure 3.25 qui représente l'énergie de chaque mode vertical à 3 instants différents. Sur cette figure, il apparaît clairement qu'à $t=4$ P.I., les modes verticaux 2 à 6 se sont propagés : ils sont concentrés dans les régions de vorticité négative et ont fui les régions de vorticité positive. Un peu plus tard, à $t=8$ P.I., les modes 7 à 9 ont fait de même.

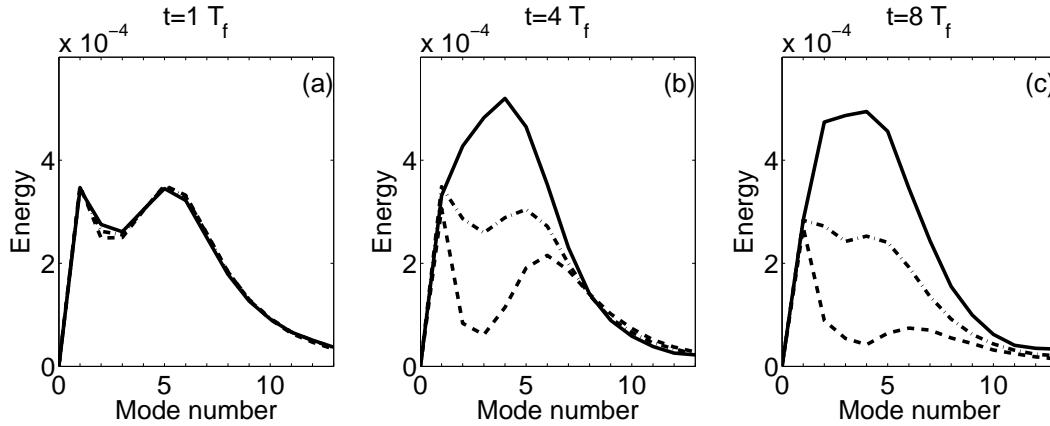


FIG. 3.25 – Spectres moyens de l'énergie inertielle en fonction des modes verticaux à (a) $t=1$ P.I., (b) $t=4$ P.I. et (c) $t=8$ P.I. (P.I.= périodes inertielles) dans les régions telles que $\zeta < -a$ (trait plein), $\zeta > a$ (tirets) et $|\zeta| < a$ (tirets-points).

Mais plus qu'une question d'amplitude des modes, il semble que ce soit davantage leurs déphasages respectifs les uns par rapport aux autres qui expliquent l'apparition d'un maximum de subsurface dans les régions de vorticité négative. En effet, les modes les plus énergétiques (cf figure 3.25(a)) soit présentent un maximum situé en surface, soit ont une valeur en surface très proche de la valeur de leur maximum ($F_n(z=0)/\max(F_n(z)) > 0.93$ pour $n \leq 9$). Par conséquent, étant donné qu'initialement tous les modes s'ajoutent dans la couche de mélange et se retranchent en-dessous, si *seule* leur amplitude change au cours du temps (et donc qu'ils ne changent pas de signe), alors l'énergie restera maximale en surface. Pour avoir apparition d'un maximum en subsurface, il faut donc qu'un certain nombre de modes, qui initialement s'additionnaient en surface et se retranchaient en dessous, désormais se retranchent en surface et s'additionnent en-dessous. Ce problème a déjà été abordé par Klein et Tréguier (1995b) mais la question du "responsable" (amplitude ou phase ?) de l'apparition du maximum de subsurface dans les régions de vorticité négative n'avait pas été clairement tranchée. Dans leur modèle simplifié, les modes bas ne se propagent quasiment pas et oscillent à f , les modes élevés se concentrent dans les zones de vorticité négative et oscillent à $f + \zeta/2$.

Ici, nous affirmons que les variations d'énergie des différents modes baroclines ne peuvent à elles seules expliquer le maximum de sursurface : un déphasage des modes est nécessaire.

Cette idée est confirmée par les figures 3.21 et 3.22 : il semble que, de façon très simplifiée, les modes bas (0 à 3) et élevés (4 à 12) soient au bout d'un certain temps en opposition de phase. Alors, les contributions des modes bas et élevés qui

initialement s'ajoutaient en surface et se retranchaient en subsurface finissent par se retrancher en surface et s'ajouter en subsurface comme l'explique le schéma de la figure 3.26.

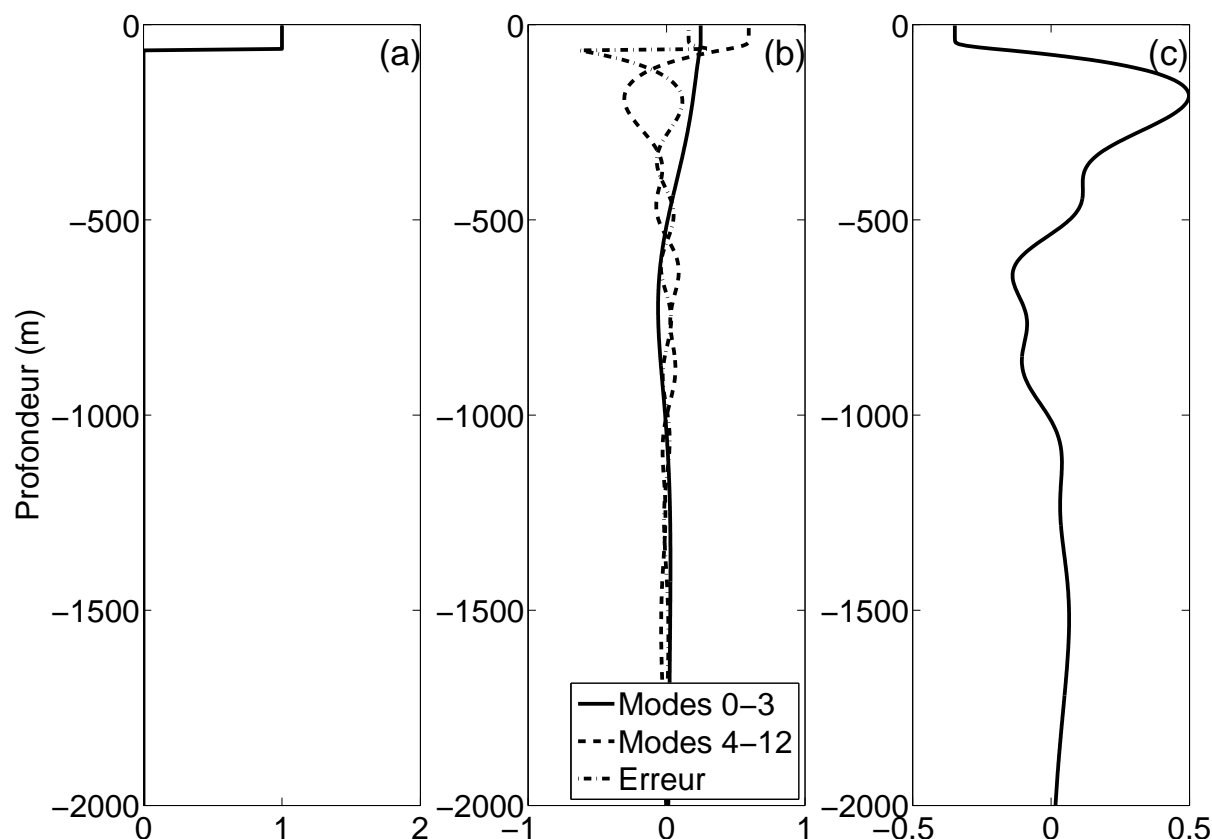


FIG. 3.26 – (a) Profil initial de l'énergie inertielle. (b) Contribution des différents modes. (c) Profil de la vitesse inertielle quand les modes bas (0-3) sont en opposition de phase avec les modes élevés (4-12).

Cette figure est très schématique car, d'une part, elle ne prend pas en compte l'évolution de l'amplitude des différents modes (on considère que l'amplitude reste constante en fonction du temps, ce qui est faux, cf figure 3.25). D'autre part, on considère que les modes bas (0 à 3) ont gardé la même phase les uns par rapport aux autres, tout comme les modes élevés. Par contre, on considère que les modes bas sont en opposition de phase avec les modes élevés. Cette vision est très simplifiée puisque les figures 3.21 et 3.22 montrent bien de légers déphasages entre tous les modes. Mais, malgré ces approximations grossières, elle explique bien le mécanisme à l'origine de l'apparition d'un maximum d'énergie à 200m.

La question immédiate est alors : **Pourquoi les différents modes baroclines se déphasent-ils entre eux jusqu'à finir par s'opposer au bout d'un certain temps ?**

Théorie

La théorie analytique issue de Klein et al. (2004b) donne l'expression suivante pour la composante θ_k de la transformée de Fourier horizontale de l'anomalie de

phase du mode n des ondes inertielles :

$$\hat{\theta}_k = -\frac{T_k \hat{Z}_k}{4\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{T_k}\right)$$

$$\text{où } T_k = \frac{4\pi}{k^2 f R_n^2}$$

Note : c'est la partie subinertielle de la phase. Pour avoir la phase totale, il faut donc lui rajouter ft .

On peut tout d'abord faire la majoration suivante :

$$|\hat{\theta}_k| \leq \left| \frac{\hat{Z}_k}{k^2 f R_n^2} \right|$$

On peut donc s'attendre à ce que, pour les grands nombres d'onde et les grands rayons de déformation (modes bas), $\hat{\theta}_k$ soit proche de zéro. Les modes bas oscilleraient donc à une fréquence proche de f , ce que l'on voit par exemple sur la figure 3.21 et qui est en accord avec la théorie analytique de Klein et Tréguier (1995b) dans le cas $\frac{R_n}{L} \gg 1$.

Dans le cas $t \ll T_k$, on peut faire un développement limité de $\hat{\theta}_k$. On trouve alors :

$$\hat{\theta}_k \simeq -\frac{\hat{Z}_k t}{2} + \frac{\hat{Z}_k t^3}{3} k^4 f^2 R_n^4$$

Le premier terme du membre de droite est la partie principale et a déjà été mis en évidence par Kunze (1985). Il est le même quel que soit le mode considéré. Le second terme est faible par rapport au premier, mais au contraire du premier, il varie en fonction du mode considéré. Ainsi, il augmente quand le rayon de déformation augmente et de plus, il est de signe opposé au premier terme. Le léger décalage en phase entre les modes intermédiaires visible sur les figures 3.21 ou 3.22 est, à notre sens, dû à ce terme.

En outre, dans les régions de vorticité faible, \hat{Z}_k est proche de zéro, ce qui implique que $\hat{\theta}$ est lui aussi proche de zéro. Dans ces régions, tous les modes sont censés osciller en phase, à la fréquence f , ce que l'on observe approximativement sur la figure 3.23. On n'observe pas de variation significative du profil vertical d'énergie inertielle dans ces régions.

En conclusion et de façon très simplifiée, les modes bas oscillent à f , les modes (très)  lev s à $f + \frac{\xi}{2}$, et les modes intermédiaires entre les 2.

Une estimation du temps t au bout duquel les modes bas sont en opposition de phase avec les modes élevés est donnée par l'équation $((f + \frac{\xi}{2}) - f)t = \pi$, ce qui donne $t = \frac{f}{\xi} \frac{2\pi}{f}$ (le même raisonnement est fait dans Klein et Tréguier (1995b)). Ainsi, en un point de vorticité proche de $-0.25f$, on peut s'attendre à voir un maximum de subsurface apparaître vers $t = 5T_f$ (puisque à $t = 1T_f$, tous les modes sont en phase et homogènes). C'est ce que l'on observe sur la figure 3.21.

Il est à noter que nos résultats sur la propagation sont très similaires à ceux de Lee et Niiler (1998) sur la "cheminée inertielle" : pour eux, les anticyclones (dans

l'hémisphère Nord) jouent le rôle de "conduits" permettant la propagation en profondeur de l'énergie inertielle générée en surface par le vent. A l'aide d'un modèle aux équations primitives, ils observent un maximum d'énergie inertielle en subsurface dans les régions anticycloniques mais ne fournissent pas d'explication physique à ce phénomène. Les figures 3.27(a) et 3.27(b) extraites de Lee et Niiler (1998) sont très ressemblantes à notre figure 3.19 à $t=9$ périodes inertielles.

En conclusion, l'apparition d'un maximum d'énergie inertielle en subsurface, vers 200 m de profondeur, dans les régions de vortacité négative est dû au déphasage apparaissant après quelques périodes inertielles entre les modes baroclines bas et élevés. Pour les mêmes raisons, il apparaît également un maximum de subsurface dans les régions de vortacité positive, mais celui-ci est bien moins énergétique car une grande partie des modes baroclines ont fui ces régions (cf figure 3.25).

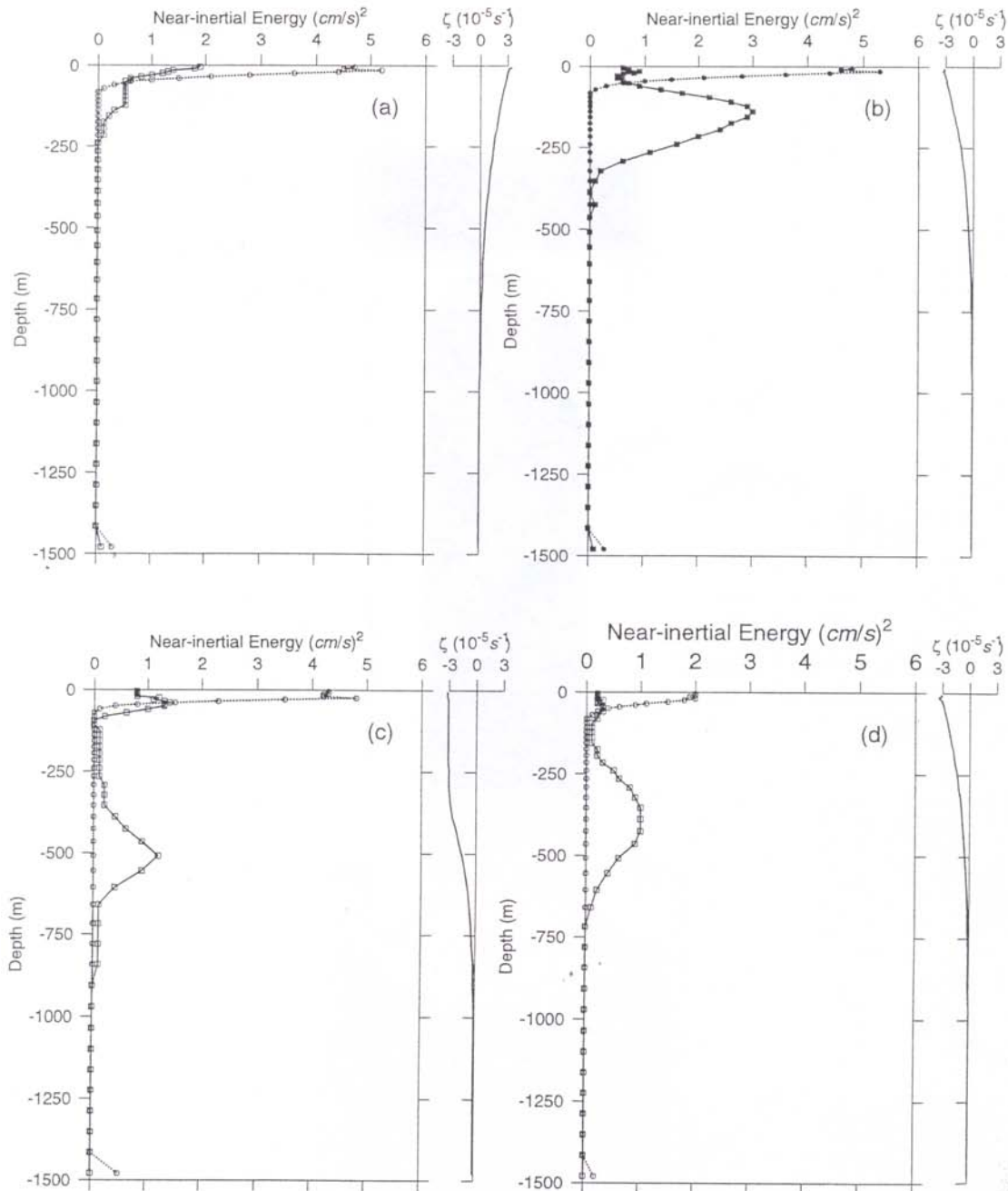


FIG. 3.27 – Profils d'énergie inertielle au centre des tourbillons (lignes solides avec des carrés) et en dehors des tourbillons (pointillés avec des cercles) pour (a) un tourbillon cyclonique subtropical, (b) un tourbillon anticyclonique subtropical, (c) un tourbillon anticyclonique californien et (d) un tourbillon anticyclonique du Gulf Stream. La vorticité relative pour les quatre cas est également dessinée. Figure tirée de Lee et Niiler (1998).

3.3 Vitesses verticales inertielles moyennes

3.3.1 Introduction

L'article Danioux et al. (2007) décrit et explique l'apparition de 2 maxima de la variance des vitesses verticales inertielles, l'un vers 100 m de profondeur, l'autre vers 1700 m. Partant du système d'équations traité par Klein et Tréguier (1995a), nous développons ici un calcul concernant le maximum à 100 m, capturé par les modes élevés. Celui-ci indique que les vitesses verticales inertielles présentent une partie moyenne (non oscillatoire). Ce résultat est intéressant car ces vitesses verticales vont statistiquement dans le même sens que les vitesses verticales mésoéchelles.

3.3.2 Solution analytique

Rubenstein et Roberts (1986) étudient la dispersion d'ondes inertielles par un jet géostrophique. Ils constatent un approfondissement (rétrécissement) systématique de la couche de mélange dans les régions de vortacité négative (positive). Toutefois, Klein et Tréguier (1995a) démontrent, dans le cas d'un modèle Shallow Water, que cet effet est dû à l'absence (non justifiée) d'un terme non-linéaire de leur équation du moment. En conservant tous les termes non-linéaires, cet effet n'est plus visible. Nous démontrons ici que si, dans le cas d'une dispersion nulle ($g' = 0$), la couche de mélange oscille autour de sa position d'équilibre, il n'en est pas de même de la vitesse verticale $w = -\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial t} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} h$: celle-ci présente une partie moyenne positive dans les régions de vortacité négative, et inversement.

Nous reprenons le système d'équations étudié par Klein et Tréguier (1995a). C'est un modèle Shallow Water à une couche et demie qui représente la propagation d'ondes inertielles au sein d'un jet barotrope géostrophique orienté selon l'axe des y , $V(x)$. Sur un plan- f , dans le cas d'une dispersion nulle, le système d'équations devient dans sa version adimensionnalisée (se reporter à l'article Klein et Tréguier (1995a) pour l'adimensionnalisation) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - v + \epsilon u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \omega^2 u + \epsilon u \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0$$

où $\omega^2(x) = 1 + \frac{\zeta(x)}{f}$ et ϵ est le nombre de Rossby associé aux ondes inertielles. On note $w = -\frac{dh}{dt}$ la vitesse verticale associée aux ondes inertielles. Les conditions initiales sont $(u, v, h, w) = (0, 1, 1, 0)$.

Chaque variable ϕ est alors développée en fonction du petit paramètre ϵ : $\phi = \phi_0 + \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2 + \dots$

La solution à l'ordre zéro est

$$(u_0, v_0, h_0, w_0) = (\sin(\omega t)/\omega, \cos(\omega t), 1, 0)$$

Klein et Tréguier (1995a) montrent que

$$h_1 = -\frac{t}{\omega^2} \frac{\partial \omega}{\partial x} \sin(\omega t) - 2 \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{(\cos(\omega t) - 1)}{\omega^3}$$

$$u_1 = \frac{t}{2\omega^3} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \text{des termes oscillatoires}$$

Il est alors facile de montrer que (cela n'a pas été fait dans Klein et Tréguier (1995a)) :

$$w_2 = -\frac{dh_2}{dt} = -\frac{\partial h_2}{\partial t} - u_0 \frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + h_1 \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

$$w_2 = -\frac{2t}{\omega^4} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \frac{t}{2\omega^3} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \text{des termes oscillatoires} \quad (3.20)$$

Si le nombre de Rossby associé au jet barotrope est supposé faible (i.e. $\epsilon_m = \frac{\zeta}{f} \ll 1$), alors le premier terme du membre de droite de l'équation 3.20 est inférieure d'un ordre en ϵ_m au second terme. Dans ce cas, on peut écrire

$$\bar{w}_2 \simeq \frac{t}{2\omega^3} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \simeq \frac{t}{2} \Delta \zeta \quad (3.21)$$

où \bar{w}_2 représente la partie non-oscillatoire de w_2 .

(3.21) indique que \bar{w}_2 est positif dans les régions où le laplacien de la vorticité est positif (qui correspondent approximativement aux régions de vorticité négative), et inversement. Par conséquent, \bar{w}_2 va dans le même sens que les vitesses verticales mésoéchelles : en effet, Hakim et al. (2002) démontrent qu'en situation de frontogénèse, les vitesses verticales QG sont statistiquement positives dans les régions de vorticité négative (et inversement).

Nous rappelons que nous avons négligé ici la dispersion ($g' = 0$). Par conséquent, ce calcul s'applique essentiellement aux modes élevés, pour lesquels la dispersion est faible. Néanmoins, au bout d'un certain temps, ces modes vont finir par se propager, et une dynamique tout à fait différente va prendre le relais, limitant la croissance de la vitesse verticale w_2 (sans quoi, celle-ci augmenterait indéfiniment). Pour les modes bas, se propageant rapidement, il est probable que l'on ne trouve pas de corrélation entre \bar{w}_2 et la vorticité ou son laplacien.

Note : Dans l'article Danioux et Klein (2007) présenté au chapitre 4, on suppose que $Bu = 0(1)$, i.e. on s'intéresse à la partie du spectre des NIO dont les échelles associées sont proches du rayon de déformation. Dans le calcul présenté ci-dessus, on a supposé $g' = 0$, i.e. $B_u = (R_n/L)^2 \ll 1$. Pour un mode donné (de rayon de déformation R_n), cela revient à s'intéresser à la partie du spectre telle que $L \gg R_n$. Etant donné la forme du spectre du laplacien de la vorticité (présentant beaucoup d'énergie aux petites échelles), ce calcul marchera d'autant mieux que l'on s'intéresse à des modes élevés.

3.3.3 Observations

A partir de la même simulation que celle présentée dans l'article de Danioux et al. (2007), nous avons calculé la partie moyenne des vitesses verticales inertielles

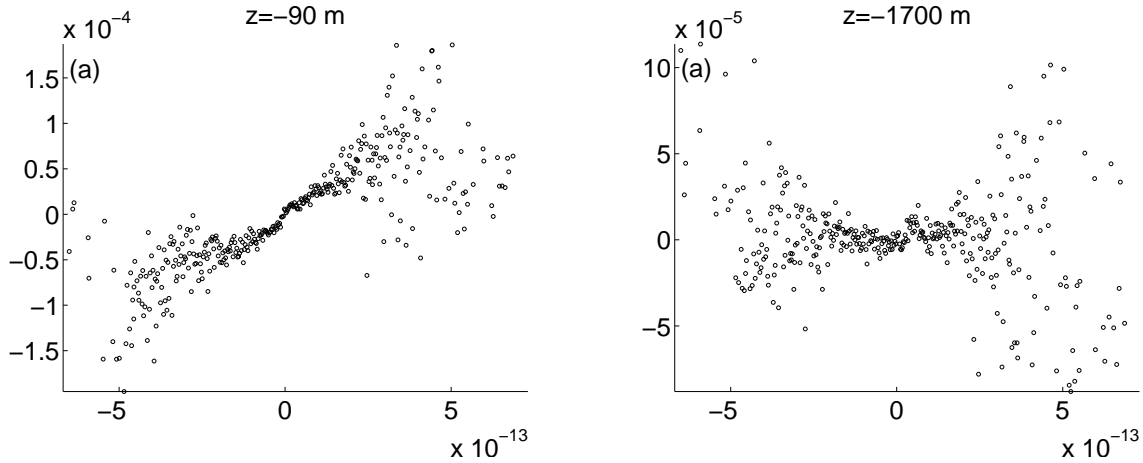


FIG. 3.28 – Scatter plot du laplacien de la vorticité de surface (en abscisse) et de la vitesse verticale inertielle moyenne (en ordonnée) (a) à $z = -90$ m (b) à $z = -1700$ m, 4 périodes inertielles après la fin du pulse de vent. $z = -90$ m et $z = -1700$ m correspondent aux profondeurs des 2 maxima de w_{rms} (cf article Danioux et al. (2007)).

totales ainsi que la partie moyenne de chaque composante w_n . La vitesse inertielle est calculée ici par la méthode de soustraction (cf chapitre 2). En effet, la méthode dite de moyenne classerait ces vitesses moyennes verticales dues au vent dans la partie basse fréquence. Cette méthode est donc inadaptée à ce problème.

La figure 3.28 montre clairement que la vitesse verticale inertielle moyenne à $z = -90$ m est positive (respectivement négative) dans les régions où le laplacien de la vorticité est positif (respectivement négatif). Par contre, en profondeur, au niveau du second maximum de la vitesse verticale, il n'y a pas de corrélation entre sa partie moyenne et le laplacien de la vorticité.

La figure 3.29 représente des scatter plots entre le laplacien de la vorticité de surface et la partie moyenne de w_n , la projection de w sur les fonctions $(c_n \frac{1}{N^2} \frac{\partial F_n}{\partial z}) = (1/c_n \int_z^0 F_n dz')$. Si l'on observe une bonne corrélation pour les modes élevés entre les régions où le laplacien de la vorticité est positif et les régions où la vitesse verticale moyenne w_n est positive, cette corrélation devient nettement plus faible pour les modes bas.

Le lien entre les figures 3.28 et 3.29 se trouve dans Danioux et al. (2007). En effet, dans cet article, il est démontré que la vitesse verticale de subsurface est capturée par les modes élevés, modes dont la partie moyenne \bar{w}_n présente une bonne corrélation avec le laplacien de la vorticité de surface. Au contraire, la vitesse verticale en profondeur est capturée par les modes bas, modes dont la partie moyenne \bar{w}_n présente une faible corrélation avec le laplacien de la vorticité de surface. Ceci explique donc la bonne corrélation entre la vitesse verticale moyenne totale à $z = -90$ m et le laplacien de la vorticité de surface, ainsi que la faible corrélation en profondeur.

La partie moyenne des vitesses verticales inertielles est certes d'un ordre inférieure à la partie oscillante à $z = -90$ m, mais est du même ordre que les vitesses verticales quasi-géostrophiques dues à la mésoéchelle (cf figure 3.30). Par conséquent, elle ne doit pas être négligée car, outre l'effet qu'elle peut avoir sur le mélange de subsurface, elle crée un transport vertical net contrairement à la partie oscillante. De

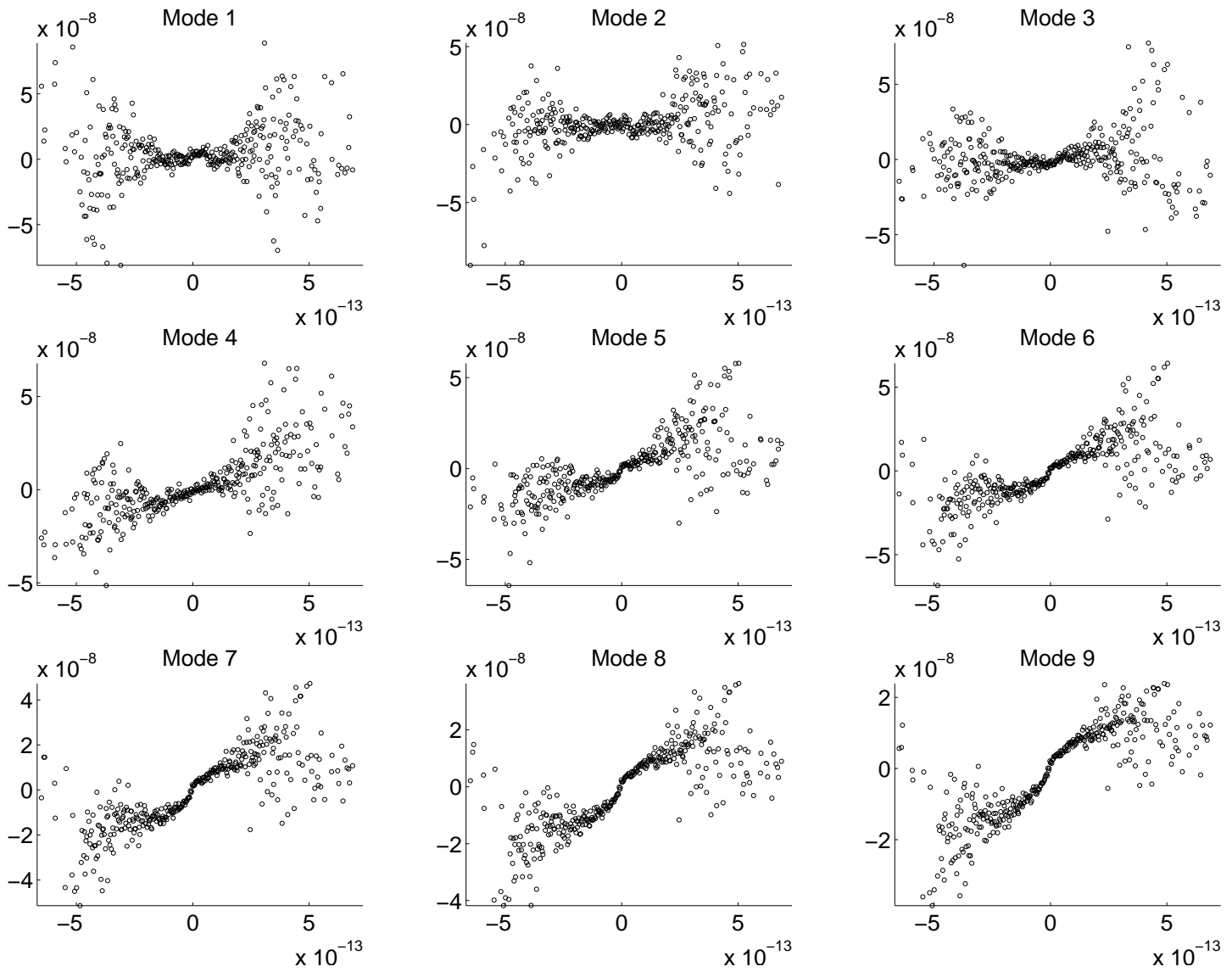


FIG. 3.29 – Scatter plot du laplacien de la vorticité de surface (en abscisse) et de la partie moyenne de la composante w_n de la vitesse verticale inertielle, n variant de 1 à 9, 4 périodes inertielles après la fin du pulse de vent.

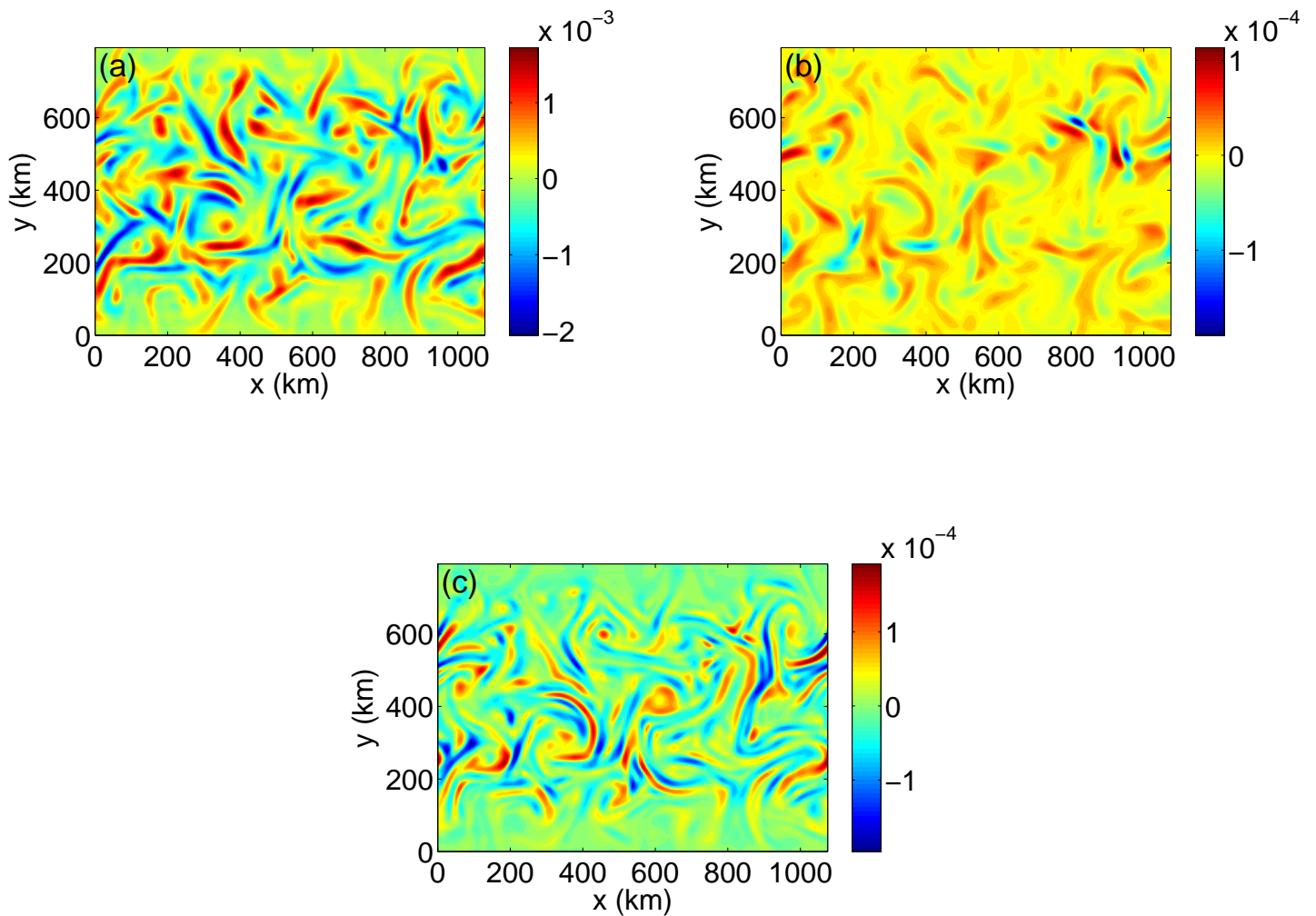


FIG. 3.30 – (a) Vitesse verticale totale de la simulation avec vent (b) vitesse verticale totale de la simulation sans vent (c) vitesse verticale inertielle moyenne à $z=-90\text{m}$ et à $t=5$ périodes inertielles

plus, ce transport va dans le même sens que celui générées par les vitesses verticales mésoéchelles.

3.4 Conservation de l'énergie mécanique

Nous avons voulu faire un bilan énergétique de la simulation avec vent, après le pulse de vent. Étonnamment, il est apparu que l'énergie cinétique totale de cette simulation oscille à la fréquence f , mais pas l'énergie inertielle. De plus, ces deux énergies diminuent, de façon non négligeable. Ces résultats sont décrits et expliqués dans ce paragraphe.

Rappel : les équations sur u et v résolues par SPEM sont les suivantes (l'approximation de Boussinesq est faite) :

$$\begin{cases} \frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \nu \nabla^4 u \\ \frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \nu \nabla^4 v \end{cases} \quad (3.22)$$

où $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$ et $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$

κ est le coefficient de diffusion verticale, calculé par un modèle de Mellor et Yamada de niveau 2, et ν le coefficient de dissipation horizontale. La présence d'un opérateur de diffusion biharmonique n'a pas de sens physique : il est introduit afin d'éviter l'accumulation d'énergie aux petites échelles. Dans nos simulations, il est pris égal à $1.10^{10} m^4 s^{-1}$.

En multipliant la première équation du système (3.22) par u et la seconde par v , puis en intégrant sur l'ensemble du canal la somme des deux équations ainsi obtenues, on trouve l'équation suivante pour l'énergie cinétique horizontale :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \frac{1}{2} (u^2 + v^2) dV}_{\Delta KE} = - \underbrace{\frac{g}{\rho_0} \iiint_V \rho w dV}_T + \underbrace{\iiint_V \left[u \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial u}{\partial z} \right) + v \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] dV}_{D_v} + \underbrace{\nu \iiint_V \left[u \nabla^4 u + v \nabla^4 v \right] dV}_{D_h} \quad (3.23)$$

$$\Delta KE = -T + D_v + D_h$$

On a utilisé ici l'hypothèse hydrostatique.

ΔKE est la variation instantanée de l'énergie cinétique, T représente la transformation d'énergie cinétique en énergie potentielle disponible, D_v est la perte d'énergie due à la diffusion verticale et D_h la perte d'énergie due à la diffusion horizontale. $\int_{t'=0}^t T dt'$ est l'énergie potentielle disponible (APE). On note $KE = \iiint_V \frac{1}{2} (u^2 + v^2) dV$ l'énergie cinétique, $E_h = \int_{t'=0}^t D_h dt'$ l'énergie dissipée par l'opérateur biharmonique de diffusion horizontale et $E_v = \int_{t'=0}^t D_v dt'$ l'énergie dissipée par diffusion verticale.

Nous avons représenté sur la figure 3.31 l'évolution au cours du temps des différentes énergies KE , APE , E_h et E_v dans les simulations avec et sans vent ainsi que l'énergie cinétique inertielle (rappel : dans la simulation avec vent, le vent souffle entre $t=0$ et $t=1$ période inertielle).

De façon inattendue, la figure 3.31(a) montre une oscillation de fréquence f de l'énergie cinétique horizontale dans la simulation avec vent. Par contre, l'énergie cinétique inertielle n'oscille pas. Cette oscillation n'apparaît plus quand on considère

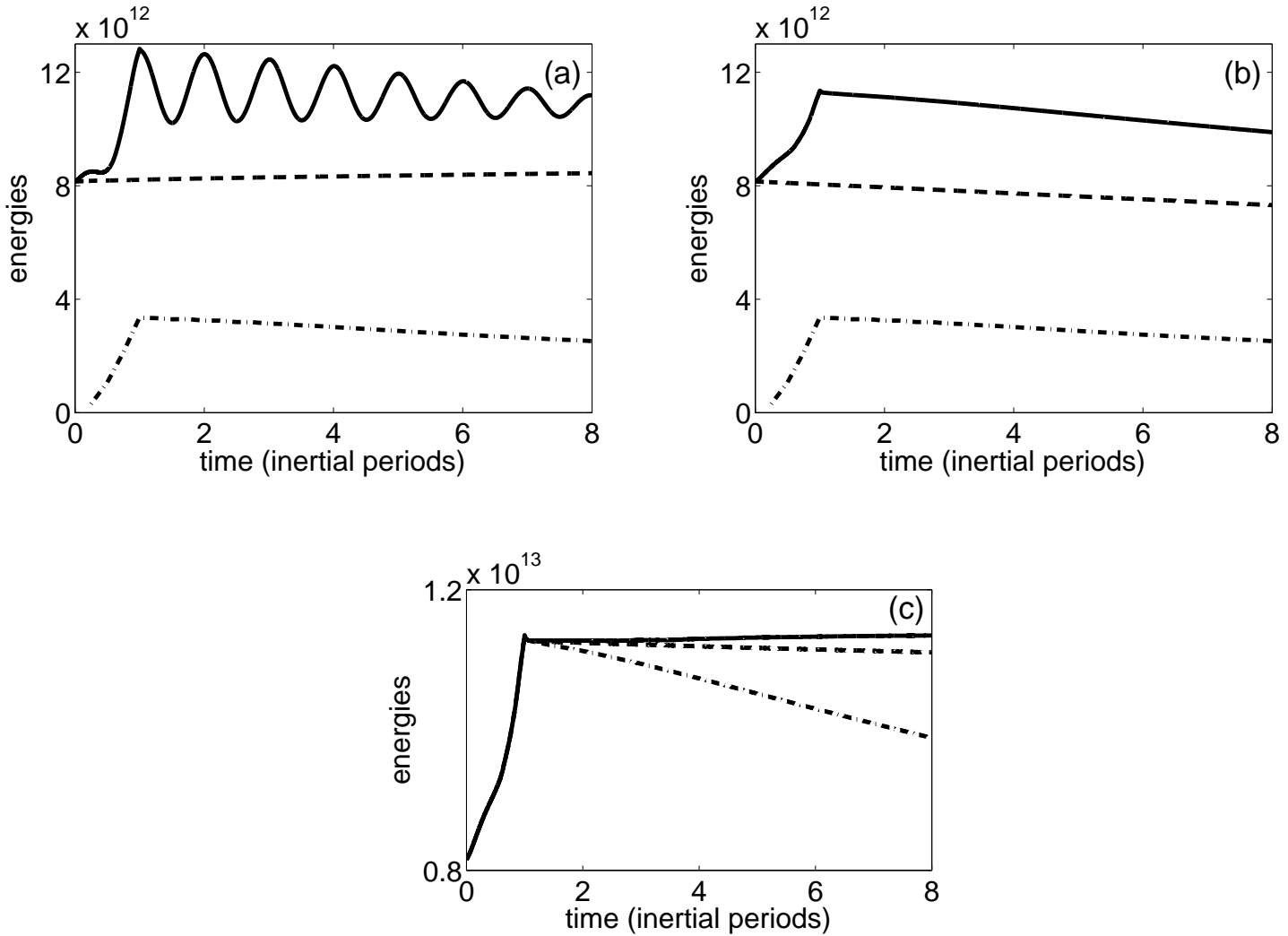


FIG. 3.31 – (a) Energie cinétique horizontale (i) de la simulation avec vent (—) (ii) de la simulation sans vent (---) (iii) inertielle (-·-·) (b) énergie cinétique horizontale (KE) + énergie potentielle disponible (APE) (i) de la simulation avec vent (—) (ii) de la simulation sans vent (---) et (iii) énergie cinétique inertielle (-·-·) (c) dans la simulation avec vent : (i) $KE + APE$ (-·-·), (ii) $KE + APE - E_h$ (---), (iii) $KE + APE - E_h - E_v$ (—).

la somme de l'énergie cinétique horizontale et de l'énergie potentielle disponible. On en déduit l'existence d'un transfert oscillatoire de fréquence f entre ces deux formes d'énergie.

L'explication de ce transfert réside dans l'existence d'un gradient méridien de densité moyenne. Supposons négligeables les variations selon x , on peut donc écrire : $\rho_{tot}(y, z) = \bar{\rho}(z) + \rho'(y, z)$ avec ρ' nulle au centre du domaine (donc $\rho' > 0$ au nord et $\rho' < 0$ au sud pour un jet vers l'est). On fait l'approximation dans un premier temps que l'énergie inertielle est concentrée et homogène dans la région $[y = -L/2, y = L/2]$ où L est l'extension méridienne du vent. Cette hypothèse est très grossière mais va nous permettre de comprendre la physique des oscillations visibles sur la figure 3.31(a). L'explication qui suit est représentée sur le schéma 3.32. Supposons qu'à $t = n$ périodes inertielles (P.I.) (où n est un entier), les vitesses inertielles soient zonales (voir figure 3.32(a)), alors à $t = n + 0.25$ P.I., elles sont orientées vers le sud (dans l'hémisphère Nord). Puisque, hors de la région $[y = -L/2, y = L/2]$, les vitesses inertielles sont nulles, des mouvements de convergence et de divergence vont apparaître au nord et au sud de cette région, engendrant des vitesses verticales. A $t = n + 0.25$ P.I., on aura des vitesses verticales négatives au sud et positives au nord. Par conséquent, étant donné le profil de ρ , le terme $\frac{g}{\rho_0} \iiint_V \rho_{tot} w dV = \frac{g}{\rho_0} \iiint_V \rho' w dV$ est positif à $t = n + 0.25$ P.I. et, pour les mêmes raisons, négatif à $t = n + 0.75$ P.I. Ceci explique la diminution de l'énergie inertielle aux temps $t = n + 0.25$ P.I. et son augmentation aux temps $t = n + 0.75$ P.I. visibles sur la figure 3.31(a).

Dans la réalité, l'énergie inertielle est hétérogène en raison de la présence de tourbillons et de filaments, en plus d'un gradient méridien moyen de densité. Toutefois, cette énergie présente une partie grande échelle associée au premier mode barocline. En effet, le spectre de l'énergie inertielle associée au premier mode barocline des ondes inertielles présente deux pics : un maximum au nombre d'onde k_c (cf Klein et al. (2004b)) et un maximum secondaire au nombre d'onde de résonance $k_r = \sqrt{3}/R_1$ où R_1 est le rayon de déformation du premier mode barocline (cf chapitre 4). Le spectre de cette énergie est représentée sur la figure 3.33. Pour le premier mode barocline, k_c est très petit car ce mode se disperse très vite à de grandes échelles. Par conséquent, l'énergie de ce mode ressemble plus ou moins à une bande zonale (cf figure 3.34). Ce sont les vitesses verticales situées aux extrémités nord et sud de cette bande qui génèrent des oscillations de fréquence f de l'énergie cinétique, par interaction avec le gradient méridien moyen de densité, de façon similaire à l'explication schématique de la figure 3.32. La diminution dans le temps de l'amplitude de ces oscillations (cf figure 3.31(a)) s'explique par le décalage progressif de cette bande au sud du jet, où la vorticité est négative mais le gradient méridien de densité moins fort.

Ce mécanisme peut se retrouver dans l'océan réel quand une tempête souffle sur un gradient de densité moyen, mais il n'a, à notre connaissance, jamais été mesuré et pour cause : il faudrait calculer avec une très bonne résolution temporelle (tous les quarts de période inertielle pourrait être une première tentative) l'énergie cinétique intégrée sur un grand domaine !

Ainsi, nous avons expliqué les oscillations de fréquence f auxquelles est soumise l'énergie cinétique totale de la simulation avec vent. Nous en avons déduit que la forme correcte de l'énergie mécanique à considérer est non pas l'énergie cinétique, mais la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle disponible ($KE +$

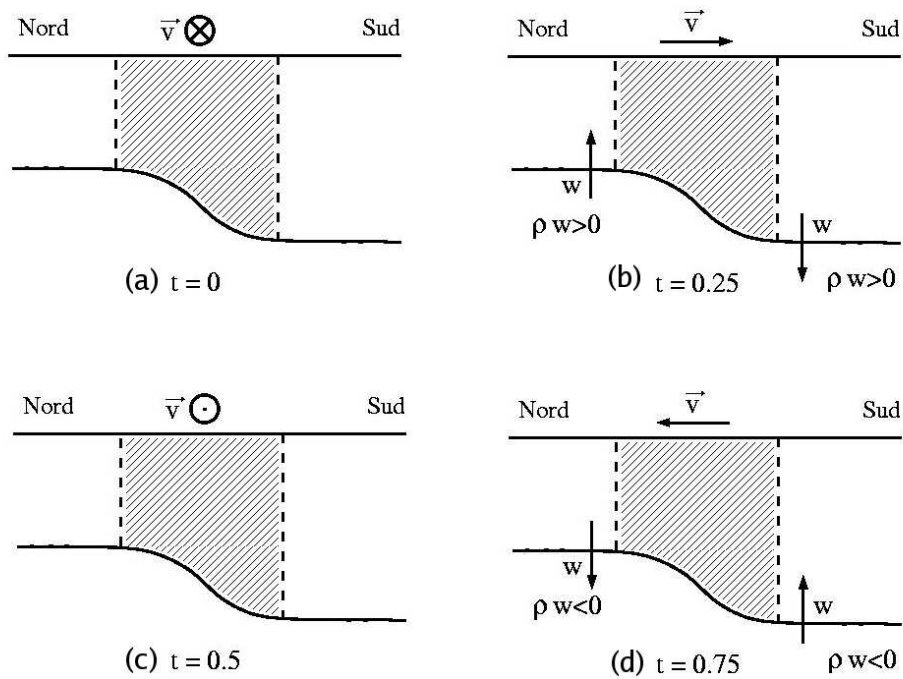


FIG. 3.32 – Figure schématique du mécanisme à l’origine des oscillations de fréquence f de l’énergie cinétique dans la simulation avec vent à quatre instants séparés d’un quart de période inertielle. L’instant $t=0$ correspond à la situation juste après le coup de vent, quand les vitesses inertielles sont purement zonales. La région hachurée correspond à la région sur laquelle s’est exercée la tension de vent. Sont représentées les vitesses inertielles horizontales (vecteur \vec{v}) et verticales. Est également donné le signe de $\rho'w$.

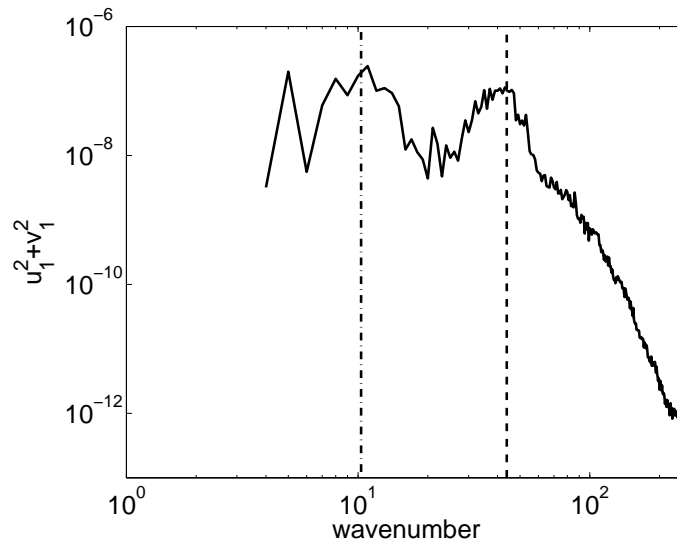


FIG. 3.33 – Spectre horizontal de l'énergie associée au mode 1 des ondes inertielles 4 périodes inertielles après la fin du pulse de vent. Le spectre présente un maximum à $k_c(R_1, t = 5\text{P.I.})$ (cf Klein et al. (2004b)) repéré par une ligne en tirets-pointillés et un maximum secondaire au nombre d'onde de résonance $k_r = \sqrt{3}/R_1$ (cf chapitre 4) repéré par une ligne en tirets.

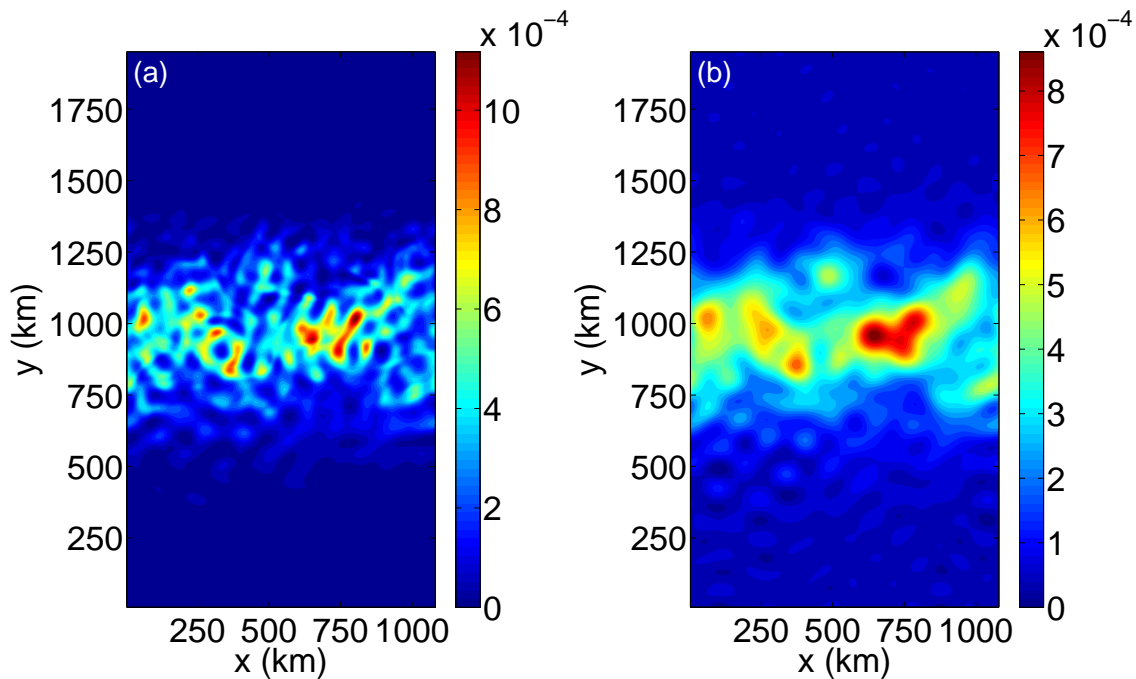


FIG. 3.34 – (a) Energie du premier mode barocline associé aux ondes inertielles 4 périodes inertielles après la fin du pulse de vent (b) La même chose mais filtrée de façon à éliminer le phénomène de résonance (cf chapitre 4)

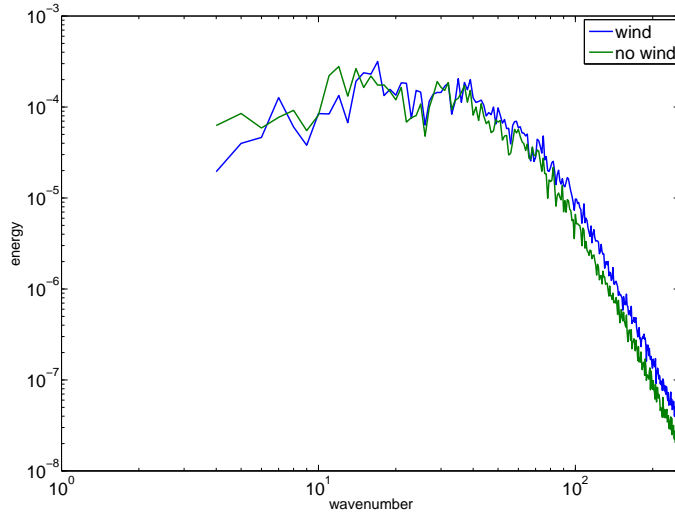


FIG. 3.35 – Spectre de l'énergie dans la simulation avec vent (en bleu) et dans la simulation sans vent (vert). Le nombre d'onde $k=10$ correspond à la longueur d'onde $L \simeq 400$ km.

APE).

Toutefois, une nouvelle question est soulevée par l'examen de $KE + APE$: la diminution de $KE + APE$ est deux fois plus importante dans la simulation avec vent que dans la simulation sans vent (cf figure 3.31(b)), une diminution à mettre en parallèle avec une baisse de 30% de l'énergie inertielle en 9 P.I.

La figure 3.31(c) démontre que cette diminution de l'énergie mécanique est imputable pour la majeure partie à la diffusion horizontale. En effet, le terme D_h est environ deux fois supérieur dans la simulation avec vent (non montré). Ceci est dû, à notre sens, à l'existence, dans la simulation avec vent, d'ondes inertielles très énergétiques dans les petites échelles (où s'exerce majoritairement la diffusion horizontale), en raison notamment du mécanisme de résonance (cf chapitre 4). Les spectres présentés en figure 3.35 montrent que, pour les grands nombres d'onde, l'énergie cinétique totale est plus grande dans la simulation avec vent que dans la simulation sans vent.

En conclusion, la forte diminution dans le temps de l'énergie inertielle (30% en 9 périodes inertielles) est dû à la diffusion horizontale et n'a pas de sens physique.

Remarque : la légère augmentation dans le temps de la somme $KE + APE - E_h - E_v$ (figure 3.31(a)) est due au fait que les équations ne conservent pas tout à fait l'énergie en raison du rappel à une climatologie - qui n'est autre que le jet initial, non indiqué dans le système d'équations 3.22.

Chapitre 4

Un nouveau mécanisme de résonance généré par les ondes inertielles

L'article scientifique suivant reste à soumettre. Il explique l'émergence d'échelles particulières visibles par exemple sur les figures 3.15(b) ou 3.33.

A resonance mechanism leading to wind-forced supra-inertial motions with a $2f$ frequency

Abstract

The present note revisits the mechanisms that cause uniform wind-forced inertial motions embedded in an oceanic turbulent mesoscale eddy field to be spatially organized. We put into evidence a new and efficient resonance mechanism activated by mesoscale structures and forced by nonlinear terms that were omitted in previous studies. This resonance leads to a scale selection involving the $2f$ frequency (with f the Coriolis frequency) and a specific length scale. Such characteristics suggest that parametric subharmonic instability may work, which indicates a potential “route to mixing” for wind energy within a mesoscale eddy field.

4.1 Introduction

Motivation for this note comes from unexpected and stimulating results from Primitive Equations simulations performed to study the 3-D propagation of wind-forced inertial motions embedded in a fully turbulent mesoscale eddy field. When expanded into vertical normal modes Gill (1982), it was found that wavenumber spectra of high-frequency motions associated to the lowest modes display a narrow peak at a particular wavenumber $k = \sqrt{3}/r$ with r the Rossby radius of deformation of the vertical mode considered. This peak is a secondary peak for the high frequency part of the horizontal velocity, but is the dominant peak for vertical velocity. More conspicuously, the frequency associated to this peak is not the inertial frequency but

is twice the inertial frequency.

Such characteristics - that emerge because of the presence of a fully turbulent eddy field - suggest that parametric subharmonic instability (PSI) may be a likely potential mechanism to subsequently transfer wind-forced inertial motions into turbulent mixing (Hibiya et al. (1998), Koudella and Staquet (2006)). Since the wind-forced inertial energy is larger in regions with strong mesoscale oceanic variability (due to the coincidence of the location of atmospheric and oceanic stormtracks Zhai et al. (2005)), these specific characteristics may indicate an intriguing and compelling “route to mixing”. It is therefore important to understand what mechanisms lead to their emergence. This is the focus of the present note. Description and analysis of the Primitive Equations simulations mentioned before will be reported in a soon forthcoming paper.

We show in the next section that these specific characteristics come from a resonance mechanism that was missed by previous studies because of their omission of nonlinear terms in the momentum and density equations. For the sake of simplicity the analytical calculations carried out in section 2 use a shallow water model (that mimics the dynamics of a single baroclinic mode). We show in section 3 that this resonance mechanism still works with several baroclinic modes, which broadens the wavenumber and frequency peaks of the inertial motions. Conclusions are offered in the last section.

4.2 Resonance in a Shallow Water model

This section focuses on the mechanisms that cause uniform wind-forced inertial motions embedded in an oceanic mesoscale eddy field to get the specific characteristics pointed out in the introduction.

4.2.1 The model used and its nondimensionalization

As in Klein and Tréguier (1995a), we consider a barotropic geostrophic jet, $U(y)$, independent of x and steady. Effects of the jet on inertial motions are assessed using a 1 1/2-layer model, which consists of an upper layer (with velocities $\tilde{u} = u + U$, $\tilde{v} = v$) of depth $\tilde{h} = h + H_0$ capping an abyssal layer where the only motion considered is the jet velocity. Since the only spatial heterogeneity comes from the geostrophic jet $U(y)$, variations in x are assumed negligible. The resulting equations for u , v and h are :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} - (f + \zeta)v = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g' \frac{\partial h}{\partial y} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h + H_0)v}{\partial y} = 0 \quad (4.3)$$

where f is the Coriolis parameter (assumed to be constant), g the gravitational acceleration, $g' = g\Delta\rho/\rho$ the reduced gravity ($\Delta\rho > 0$ is the density difference between the two layers) and $\zeta = -\partial U/\partial y$ the jet vorticity. The initial conditions

are : $u(t = 0) = U_0$, $v(t = 0) = 0$, $h(t = 0) = 0$. The jet profile is taken as follows : $U(y) = \frac{U_m}{\cosh^2(y/L_m)}$. We introduce w , the vertical velocity at the base of the surface layer. Integration of the continuity equation over the surface layer gives $w = (h + H_0) \frac{\partial v}{\partial y}$.

The system (4.1) - (4.3) is now nondimensionalized. We note U_0 and L respectively the amplitude and horizontal length scale of the inertial velocity and U_m and L_m respectively the amplitude and horizontal length scale of the barotropic jet. The Rossby numbers $\epsilon_i = \frac{U_0}{fL}$ and $\epsilon_m = \frac{U_m}{fL_m}$ associated with the inertial current and the jet are assumed to be small and equal ($\epsilon = \epsilon_i = \epsilon_m \ll 1$). Moreover, we assume $h/H_0 = \mathcal{O}(\epsilon)$. The chosen time scale is $1/f$. The Burger number is noted $Bu = (\frac{r}{L})^2$, with $r = \frac{\sqrt{g'H_0}}{f}$ the Rossby deformation radius.

Then (4.1) - (4.3) becomes (nondimensional variables are noted by an asterisk)

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \epsilon v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} - (1 + \epsilon \zeta^*) v^* = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \epsilon v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + u^* = -B_u \frac{\partial h^*}{\partial y^*} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \frac{\partial v^*(1 + \epsilon h^*)}{\partial y^*} = 0 \quad (4.6)$$

4.2.2 Asymptotic analysis

Reduction of (4.4)-(4.6) leads to

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v^*}{\partial t^2} + (1 + \epsilon \zeta^*) v^* - B_u \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2} = \\ & \epsilon \left[B_u \frac{\partial^2 h^* v^*}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial t} (v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*}) + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Klein and Tréguier (1995b) and Klein et al. (2004b) used the same system of equations but with the nonlinear terms (present on the right-hand side of (4.7)) set to zero. The limits $B_u \ll 1$ and $B_u \gg 1$ have been studied by these authors. When $B_u \ll 1$, dispersion effects are small. Waves frequency is shifted by the jet vorticity and is equal to $f + \frac{\zeta}{2}$. Inertial kinetic energy leaves the positive vorticity regions and concentrates in the negative vorticity regions. On the contrary, when $B_u \gg 1$, dispersion effects are strong and waves are spread out over much larger areas. So the eddy vorticity effects are scrambled, which explains that the wave frequency is close to f . The case studied in this paper is $B_u = \mathcal{O}(1)$. This means that inertial motions have a length scale close to the Rossby radius of deformation. To simplify, we set $B_u = 1$. In this case, as long as nonlinear terms are not effective, we should find results similar to Klein et al. (2004b) for the part $k \gg k_c$ (where $k_c = \sqrt{2\pi/(fr^2t)}$ is the wavenumber associated with the maximum of inertial energy in their theory), since very quickly (precisely for $t > \frac{1}{2\pi f}$), $l_c = 2\pi/k_c$ is larger than r .

For any variable φ , we use the following perturbation expansion in ϵ

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \epsilon \varphi^{(1)} + \epsilon^2 \varphi^{(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (4.8)$$

with $\varphi = (u^*, v^*, h^*, w^*)$. We are now going to solve recursively the system (4.4) - (4.6) to find the expressions for u^* , v^* , h^* and w^* . We drop asterisks for the sake of simplicity.

At zero-order, with the initial conditions $(u^{(0)}, v^{(0)}, h^{(0)}) = (1, 0, 0)$, (4.4) - (4.6) leads to the straightforward solution

$$(u^{(0)}, v^{(0)}, h^{(0)}, w^{(0)}) = (\cos t, -\sin t, 0, 0).$$

At first order, (4.4) - (4.6) becomes

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} - v^{(1)} = \zeta v^{(0)} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} + u^{(1)} = -\frac{\partial h^{(1)}}{\partial y} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial h^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} = 0 \quad (4.11)$$

so the equation for v is

$$\frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial t^2} + v^{(1)} - \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial y^2} = -\zeta v^{(0)} \quad (4.12)$$

with the initial conditions $(u^{(1)}, v^{(1)}, h^{(1)}) = 0$ at $t=0$. Owing to the spatial homogeneity of $(u^{(0)}, v^{(0)}, h^{(0)})$, nonlinear terms do not appear in (4.9)-(4.11) (see (4.7) and (4.12)). This system is actually that considered in Klein et al. (2004b). To solve this system, it is convenient to write each variable φ as $\varphi(y, t) = \sum_k \hat{\varphi}(k, t)e^{iky}$ with $\varphi = (u, v, h, w)$ and $\zeta(y) = \sum_k \hat{\zeta}(k)e^{iky}$. Then the solutions for $\hat{u}^{(1)}$, $\hat{v}^{(1)}$ and $\hat{h}^{(1)}$ are

$$\begin{aligned} \hat{u}^{(1)}(k, t) &= \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\hat{\zeta} \cos t \\ &\quad + \frac{\hat{\zeta}}{\omega^2 k^2} \cos(\omega t) - \frac{\hat{\zeta} k^2}{\omega^2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\hat{v}^{(1)}(k, t) = \frac{\hat{\zeta}}{k^2} \left(\sin t - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right) \quad (4.14)$$

$$\hat{h}^{(1)}(k, t) = \frac{i\hat{\zeta}}{k} \left(\cos t - \frac{1}{\omega^2} \cos(\omega t) \right) - \frac{ik\hat{\zeta}}{\omega^2} \quad (4.15)$$

where $\omega = \sqrt{1 + k^2}$.

$\hat{v}^{(1)}$ resembles the streamfunction $(\frac{\hat{\zeta}}{k^2})$, a result similar to Klein and Tréguier (1995b) for $r \gg L$ or Klein et al. (2004b) for $k \gg k_c$. The constants appearing in the expressions of $\hat{u}^{(1)}$ and $\hat{h}^{(1)}$ correspond to a zonal transport in geostrophic balance, added to satisfy initial conditions but which has no consequence on the resonance mechanism detailed afterwards. Given the expressions of $v^{(1)}$ and $h^{(1)}$, we deduce : $w^{(1)} = \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y}$ which implies $\hat{w}^{(1)}(k, t) = ik\hat{v}^{(1)}(k, t)$. Thus, so far, the vertical velocity field has length scales close to those for the horizontal motions and a frequency close to the inertial frequency f .

At second order, (4.4)-(4.6) becomes

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + v^{(0)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} - v^{(2)} = \zeta v^{(1)} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial v^{(2)}}{\partial t} + v^{(0)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} + u^{(2)} = -\frac{\partial h^{(2)}}{\partial y} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial h^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y} + v^{(0)} \frac{\partial h^{(1)}}{\partial y} = 0 \quad (4.18)$$

and the equation for v is

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial t^2} + v^{(2)} - \frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial y^2} = & -\zeta v^{(1)} - \frac{\partial}{\partial t} \left(v^{(0)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} \right) + \\ & v^{(0)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} + v^{(0)} \frac{\partial^2 h^{(1)}}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Thus at second order, all nonlinear terms included in (4.7) are now present. (4.19) leads to the following equation for $\hat{v}^{(2)}$

$$\frac{\partial^2 \hat{v}^{(2)}}{\partial t^2} + \omega^2 \hat{v}^{(2)} = F(k, t) \quad (4.20)$$

with

$$F(k, t) = -\zeta \hat{v}^{(1)} - ik \frac{\partial(v^{(0)} \hat{v}^{(1)})}{\partial t} + ikv^{(0)} \hat{u}^{(1)} - k^2 v^{(0)} \hat{h}^{(1)}.$$

Let us define $a_1 = -\zeta \hat{v}^{(1)}$, $a_2 = -ik \frac{\partial(v^{(0)} \hat{v}^{(1)})}{\partial t}$, $a_3 = ikv^{(0)} \hat{u}^{(1)}$ and $a_4 = -k^2 v^{(0)} \hat{h}^{(1)}$. Expressions of a_1 , a_2 , a_3 and a_4 are

$$a_1(k) = \left[\sum_{l+m=k} \frac{\hat{\zeta}(l) \hat{\zeta}(m)}{m^2} \right] \sin t + \sum_{l+m=k} \frac{-\hat{\zeta}(l) \hat{\zeta}(m)}{m^2 \sqrt{1+m^2}} \sin(\sqrt{1+m^2}t),$$

$$a_2(k) = \frac{i\hat{\zeta}}{k} \sin(2t) + \frac{i\hat{\zeta}(\omega-1)}{2\omega k} \sin(\omega-1)t - \frac{i\hat{\zeta}(\omega+1)}{2\omega k} \sin(\omega+1)t,$$

$$a_3(k) = \frac{i\hat{\zeta}}{2} \left(\frac{1}{k} - k \right) \sin(2t) + \frac{i\hat{\zeta}}{2\omega^2 k} \sin(\omega-1)t - \frac{i\hat{\zeta}}{2\omega^2 k} \sin(\omega+1)t + \frac{i\hat{\zeta} k^3}{\omega^2} \sin t,$$

$$a_4(k) = \frac{ik\hat{\zeta}}{2} \sin(2t) + \frac{ik\hat{\zeta}}{2\omega^2} \sin(\omega-1)t - \frac{ik\hat{\zeta}}{2\omega^2} \sin(\omega+1)t - \frac{ik^3\hat{\zeta}}{\omega^2} \sin t,$$

and the expression of the sum of a_1 , a_2 , a_3 and a_4 is

$$\begin{aligned} F(k, t) = & \left[\sum_{l+m=k} \frac{\hat{\zeta}(l) \hat{\zeta}(m)}{m^2} \right] \sin t + \frac{3i\hat{\zeta}}{2k} \sin 2t + \frac{i\hat{\zeta}(2\omega-1)}{2\omega k} \sin(\omega-1)t \\ & - \frac{i\hat{\zeta}(2\omega+1)}{2\omega k} \sin(\omega+1)t + \sum_{l+m=k} \frac{-\hat{\zeta}(l) \hat{\zeta}(m)}{m^2 \sqrt{1+m^2}} \sin(t\sqrt{1+m^2}) \end{aligned} \quad (4.21)$$

As revealed in the next section, the nonlinear terms a_2 , a_3 and a_4 are critical to force the oscillator highlighted in (4.20).

4.2.3 The resonance mechanism

The role of the nonlinear terms as forcing a resonance mechanism is highlighted from the examination of $F(k, t)$. We can write $\hat{v}^{(2)}(k, t) = \sum_{\Omega} \check{v}^{(2)}(k, \Omega)e^{i\Omega t}$ and $F(k, t) = \sum_{\Omega} \check{F}(k, \Omega)e^{i\Omega t}$. Then, (4.20) becomes, for each Ω ,

$$(-\Omega^2 + \omega^2)\check{v}^{(2)} = \check{F}(k, \Omega). \quad (4.22)$$

(4.22) is the equation of an oscillator of frequency $\omega = \sqrt{1 + k^2}$ forced by the right hand side. Resonance will occur when $\Omega = \omega$, provided $\check{F}(k, \omega)$ is not zero.

From (4.21), for a given wavenumber k , $F(k, t)$ contains the following frequencies $\Omega : 1, 2, \omega - 1, \omega + 1$ and all the frequencies $\sqrt{1 + m^2}$ for $m \neq k$ (since $\hat{\zeta}(k = 0) = 0$, i.e. the mean vorticity is zero). The frequencies $1, \omega - 1, \omega + 1$ and $\sqrt{1 + m^2}$ for $m \neq k$ cannot generate resonance since they cannot be equal to ω . On the contrary, the frequency 2 can force resonance at a specific wavenumber verifying $\omega = 2$, i.e. $k = \sqrt{3}$, provided that $\hat{\zeta}(k = \sqrt{3}) \neq 0$. Resonance is thus a local phenomenon, appearing at wavenumber $k = \sqrt{3}$, excited by the vorticity at the same wavenumber through the nonlinear terms. It does not depend on the dynamics of the inertial motions at other length scales.

More precisely, it is only the nonlinear term $v \frac{\partial h}{\partial y}$ in the equation of h that creates resonance since the coefficient in front of $\sin 2t$ in a_4 is non-zero at the resonant wavenumber $k = \sqrt{3}$. Indeed the coefficient in front of $\sin 2t$ in $a_2 + a_3$ is zero at $k = \sqrt{3}$, which means that the effects of the nonlinear terms $v \frac{\partial u}{\partial y}$ and $v \frac{\partial v}{\partial y}$ cancel each other at the resonant wavenumber. This has been verified by solving the system composed of equations (4.1) and (4.2) and the linearized version of (4.3) : in that case, the resonance does not appear anymore (not shown).

In dimensional variables, the resonant wavenumber is $k_r = \frac{\sqrt{3}}{r}$, implying a length scale $l_r = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}r \simeq 3.63r$ for the resonant wavelength.

We perform numerical simulations with the following characteristics : $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, the velocity at the center of the jet is $U = 0.3 \text{ m/s}$ and its width is $L_m = 40 \text{ km}$, implying a Rossby number $\epsilon = 0.07$. Initially, inertial velocities are uniform and equal to 0.3 m/s . The Rossby radius of deformation is 25 km . Figure 4.1 represents spectra of v and w as numerical solutions of the linear system (in blue) and the nonlinear system (in red). The main difference between blue and green curves is the presence of a peak in nonlinear simulations at $k_r = \sqrt{3}/r$. Interestingly, another peak, much less energetic, can also be seen at $k'_r = \sqrt{8}/r$. It comes from the interaction, at third order, between frequencies f and $2f$. This interaction generates frequency $3f$, which in turn implies a resonance mechanism at the wavenumber k'_r verifying $(3f)^2 = f^2 + g'h_0k'^2_r$.

In physical space, the resonance mechanism at k_r takes the form of inertia-gravity waves of frequency $2f$ with wavenumber $\sqrt{3}/r$ that are continuously excited and emitted from the jet (figure 4.2c).

The resonance mechanism requires that vorticity spectral component at k_r is non zero (i.e. $\hat{\zeta}(k_r) \neq 0$). Assuming the vorticity to have a full spectrum, this last condition is always verified. Usually the eddy vorticity spectrum has a k^{-1} slope (Hua and Haidvogel (1986), Klein et al. (2004b)) which indicates that vorticity spectral component have larger amplitude for smaller wavenumber. This means that, for such

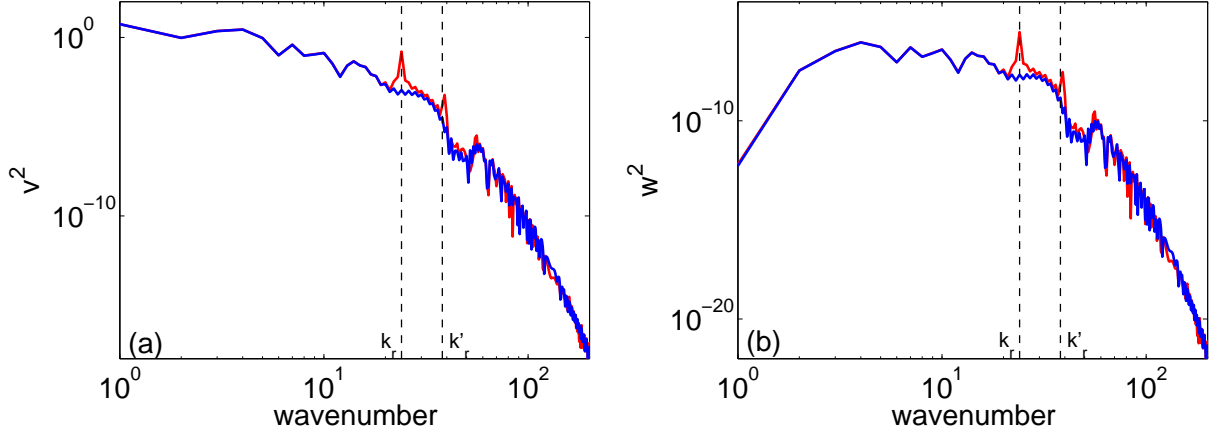


FIG. 4.1 – Spectra of (a) v and (b) w after 8 inertial periods. Blue curves correspond to solutions of the linear system (where all the nonlinear terms have been dropped) and red curves correspond to solutions of the nonlinear system. Dashed lines represent the resonant wavenumbers $k_r = \sqrt{3}/r$ and $k'_r = \sqrt{8}/r$. The initial velocity is $u_0=0.3$ m/s and the maximum jet speed and half-width are respectively 0.3 m/s and 20 km.

an eddy vorticity spectrum, the resonance is mostly efficient for the lowest modes whose corresponding k_r is the smallest.

4.3 Generalization to Primitive Equations

The model (4.1)-(4.3) corresponds to the idealized case where the inertial velocity projects on only one isolated baroclinic mode. But generally, inertial velocities project a multitude of baroclinic modes, interacting one with each other, owing to the nonlinear terms. This is the configuration studied in this section.

4.3.1 Theory

The 2D-primitive equations system describing the effect of a jet $U(y)$ on inertial oscillations is

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f_e v = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\rho_0}{g} N^2 w = 0 \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (4.26)$$

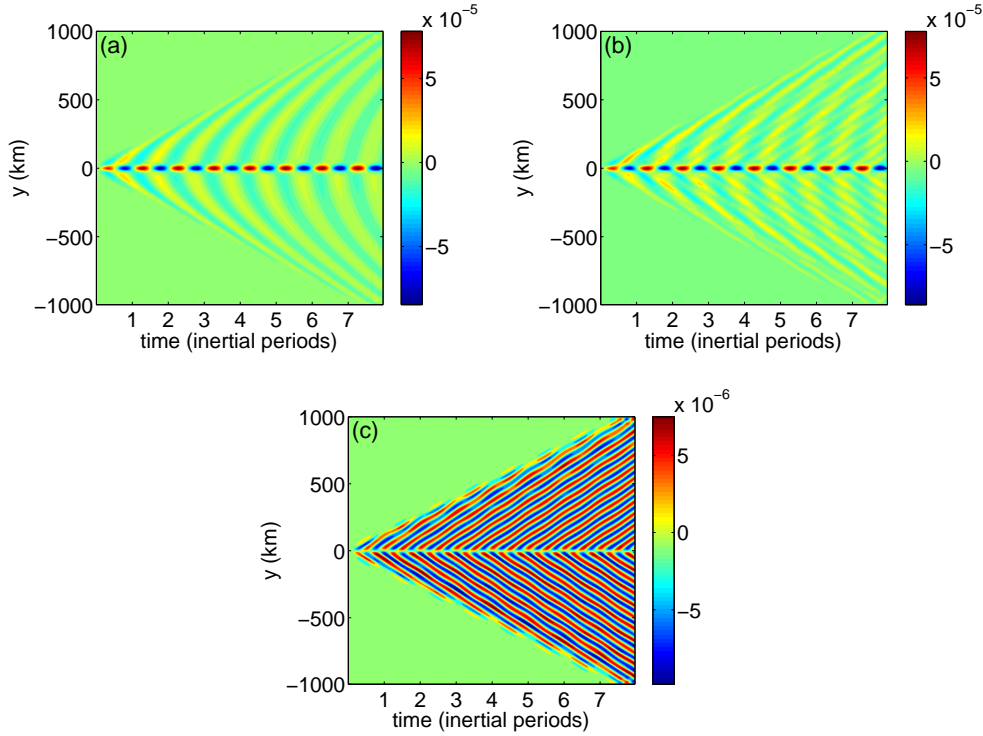


FIG. 4.2 – (a) Solution for w of the linear system (b) Solution for w of the nonlinear system (c) Difference between (b) and (a).

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.27)$$

where $f_e = f + \zeta$, $\zeta = -\frac{\partial U}{\partial y}$, ρ_0 the mean density and N the Brunt-Väisälä frequency. p and ρ are the pressure and density perturbations. The initial velocity is supposed to be zonal and horizontally homogeneous. v , w , p and ρ are zero at $t=0$.

Assuming the jet to be barotropic, (4.23)-(4.27) combine to give the following equation for v :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f f_e \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{N^2} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial (v \frac{\partial v}{\partial y})}{\partial t} - f v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{g}{\rho_0 N^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

Again, all the nonlinear terms, potentially critical for the resonance mechanism, are summed on the right-hand side. Let us expand u , v and ρ in terms of the vertical normal mode solutions of the classical Sturm-Liouville problem (Gill (1982)) :

$$\{u(y, z, t), v(y, z, t)\} = \sum_{n=1}^{\infty} \{u_n(y, t), v_n(y, t)\} F_n(z) \quad (4.29)$$

$$\rho(y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(y, t) G_n(z) \quad (4.30)$$

with F_n solutions of the Sturm-Liouville problem

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{N^2} \frac{\partial F_n}{\partial z} \right) = \frac{-1}{r_n^2 f^2} F_n$$

and $G_n = r_n f \frac{\partial F_n}{\partial z}$. r_n is the Rossby radius of deformation associated with mode n .

Using this expansion (4.28) gives for v_n

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) v_n - r_n^2 f^2 \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} = -f \zeta v_n \\ & + \sum_{i,j} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(v_i \frac{\partial v_j}{\partial y} \right) \delta_{i,j,n} - f v_i \frac{\partial u_j}{\partial y} \delta_{i,j,n} \right. \\ & \quad \left. - \frac{g c_n}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(v_i \frac{\partial \rho_j}{\partial y} \right) \Delta_{i,j,n} \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

where

$$\delta_{i,j,n} = \int_{z=-H}^{z=0} F_i F_j F_n dz$$

and

$$\Delta_{i,j,n} = \int_{z=-H}^{z=0} \frac{1}{N^2} F_i G_j G_n dz.$$

Supposing that the scalings presented in section 2 apply for the most energetic modes n (which is equivalent to assuming that the Rossby deformation radii of the most energetic modes are not too far), an expansion in terms of the Rossby number ϵ can be done again following (4.8). Then the same procedure as that used in section 3 can be followed to get solutions.

For any n , solution at zero order is

$$\{u_n^{(0)}, v_n^{(0)}\} = U_n \{\cos(ft), -\sin(ft)\} \quad (4.32)$$

$$\rho_n^{(0)} = 0 \quad (4.33)$$

where $U_n = \int_{-H}^0 u(z, t=0) F_n(z) dz$ is the projection of the initial velocity on the vertical mode n .

At first order we get

$$\begin{aligned} \hat{u}_n^{(1)}(k, t) &= \left(1 - \frac{1}{r_n^2 k^2} \right) \frac{\hat{\zeta} U_n}{f} \cos(ft) + \\ & \quad \frac{f \hat{\zeta} U_n}{\omega_n^2 r_n^2 k^2} \cos(\omega_n t) - \frac{f r_n^2 k^2}{\omega_n^2} \hat{\zeta} U_j \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\hat{v}_n^{(1)}(k, t) = \frac{\hat{\zeta} U_n}{f r_n^2 k^2} (\sin(ft) - \frac{f}{\omega_n} \sin(\omega_n t)) \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_n^{(1)}(k, t) &= -\frac{i \hat{\zeta} U_n \rho_0}{g f r_n k} (\cos(ft) - \frac{f^2}{\omega_n^2} \cos(\omega_n t)) \\ & \quad + \frac{i k \hat{\zeta} U_n \rho_0 f r_n}{g \omega_n^2} \end{aligned} \quad (4.36)$$

with $\omega_n^2 = f^2(1 + r_n^2 k^2)$. We have used

$$(u_n^{(1)}, v_n^{(1)}, \rho_n^{(2)}) = \sum_k (\hat{u}_n^{(1)}, \hat{v}_n^{(1)}, \hat{\rho}_n^{(2)}) e^{iky}.$$

At second order, the equation for v_n becomes

$$\frac{\partial^2 \hat{v}_n^{(2)}}{\partial t^2} + \omega_n^2 \hat{v}_n^{(2)} = F(k, t) \quad (4.37)$$

with

$$F(k, t) = -f\zeta \hat{v}_n^{(1)} + ik \sum_{i,j} \left[\frac{\partial}{\partial t} (v_i^{(0)} \hat{v}_j^{(1)}) \delta_{i,j,n} - f v_i^{(0)} \hat{u}_j^{(1)} \delta_{i,j,n} + \frac{gk^2 r_n f}{ik \rho_0} v_i^{(0)} \hat{\rho}_j^{(1)} \Delta_{i,j,n} \right] \quad (4.38)$$

(4.37) is quite similar to (4.19) (more precisely to its dimensional equivalent form) for the 1 1/2 layer model, except that it now allows interactions between the different vertical modes through the coefficients $\delta_{i,j,n}$ and $\Delta_{i,j,n}$.

Let us have a careful look at equation (4.38). When $j = n$, the effects of the nonlinear terms are similar to those described in section 4, generating resonance with the emergence of oscillations with characteristics $(2f, \sqrt{3}/r_n)$. Again, nonlinear terms $v\partial v/\partial y$ and $v\partial u/\partial y$ cancel out at the resonant wavenumber, so resonance is due exclusively to the nonlinear term $\rho\partial u/\partial y$ (ρ is the equivalent of h for the 1 1/2 layer model). When $j \neq n$, the following frequencies are present on the right-hand side of (4.37) : $f, 2f, \omega_j + f, \omega_j - f$ (see (4.21)). The frequency $2f$ is going to reinforce the preceding resonance mechanism at $\sqrt{3}/r_n$. But other new resonance mechanisms should also appear, due to the frequencies $\omega_j \pm f$ that were unable to generate resonance when $j = n$. This should lead to the emergence of frequencies and wavenumbers satisfying $\omega_n = \omega_j \pm f$. We believe that these additional resonance mechanisms are going to broaden the frequency and wavenumber bands around the main resonance at $(k, \omega) = (\sqrt{3}/r_n, 2f)$.

4.3.2 Numerical simulations

Time and space evolution of the fast component of the oceanic motions after a wind burst is analyzed using results from 3D primitive equation simulations. These simulations are similar to those performed by Lapeyre and Klein (2006) and Rivière et al. (2004) to obtain a turbulent mesoscale eddy field. The domain geometry is a periodic channel of 1000 km \times 2000 km, with a depth of 4000 m. The numerical resolution is 6 km \times 6 km on the horizontal and involves 33 levels stretched on the vertical. Two runs, with a time duration of eight inertial periods, are performed from the restart files obtained after 280 days simulation (i.e. when the turbulent eddy field is in equilibrium) : one with a clockwise rotating strong wind lasting just one inertial period, and another with no wind. The difference between the two runs is considered as the fast component (related to the inertial motions) of the run

with wind. This method for extracting the fast component has shown very good agreement with other methods and will be reported in a forthcoming paper as well as the details of these simulations. We just focus here on the characteristics of the fast component of the velocity field.

This fast component (u, v, w) is expanded in terms of the vertical normal modes solutions of the Sturm-Liouville problem using (4.29) for u, v and

$$w(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x, y, t) \Lambda_n(z)$$

for w , with $w_n = (\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y})$ and $\Lambda_n(z) = \int_{z'=z}^0 F_n(z') dz'$. The Rossby radii of the first four modes are $r_1 = 24.5$ km, $r_2 = 10.0$ km, $r_3 = 6.7$ km, $r_4 = 5.1$ km.

Results, five inertial periods after the wind burst, are shown on figure 4.3 for modes 1 and 2. For mode 1, a conspicuous broad peak around $k_{r_1} = \frac{\sqrt{3}}{r_1}$ is clearly identifiable on the horizontal velocity spectrum (fig.4.3a) and on the vertical velocity spectrum (fig.4.3c) where it is the dominant peak. For mode 2, the same peak is present around $k_{r_2} = \frac{\sqrt{3}}{r_2}$ (fig.4.3b), but is not yet the dominant peak on the vertical velocity spectrum (fig.4.3d). Frequency spectra of the vertical velocity are presented on fig.4.4. Frequency spectrum for mode 1 has a main peak at $\omega = 2f$ and two secondary peaks at f and $3f$. So the frequency spectrum includes energetic frequencies equal and also larger than $2f$. Frequency spectrum for mode 2 has two peaks of similar energy at f and $2f$. The decrease of energy at the resonant peak for the second mode (compare figs.4.3a and b) is explained by the smaller Rossby radius of deformation of mode 2 and that we are here in the decreasing part of the vorticity spectrum, which means $\hat{\zeta}(\frac{\sqrt{3}}{r_2}) < \hat{\zeta}(\frac{\sqrt{3}}{r_1})$ where r_1 and r_2 are respectively the first and second deformation radii.

These results thus confirm and extend to a more complex situation those of the previous sections about the efficiency of the resonance mechanism.

4.4 Conclusion

The present note has revisited the mechanisms that make uniform wind-forced inertial motions to be spatially reorganized because of the presence of a turbulent mesoscale eddy field. A new and efficient resonance mechanism has been explicated. Analytical calculations, carried out using a shallow water model and the simplest mesoscale structure (a geostrophic jet), have revealed that this resonance mechanism is due to the effects of nonlinear terms that were missed in previous studies. It is triggered by the vorticity of the mesoscale structures and leads to a specific scale selection involving a $2f$ frequency and a length scale of $2\pi r/\sqrt{3}$, with r the Rossby radius of deformation associated to the inertial motions. This mechanism is confirmed by numerical simulations for this simple case and also by simulations involving more complex situations.

Efficiency of this mechanism requires the existence of mesoscale structures with a length scale that matches that related to the resonance mechanism. Such condition generally prevails since mesoscale eddy fields are typically characterized by a continuous velocity spectrum over a large range of scales. The generalization of the

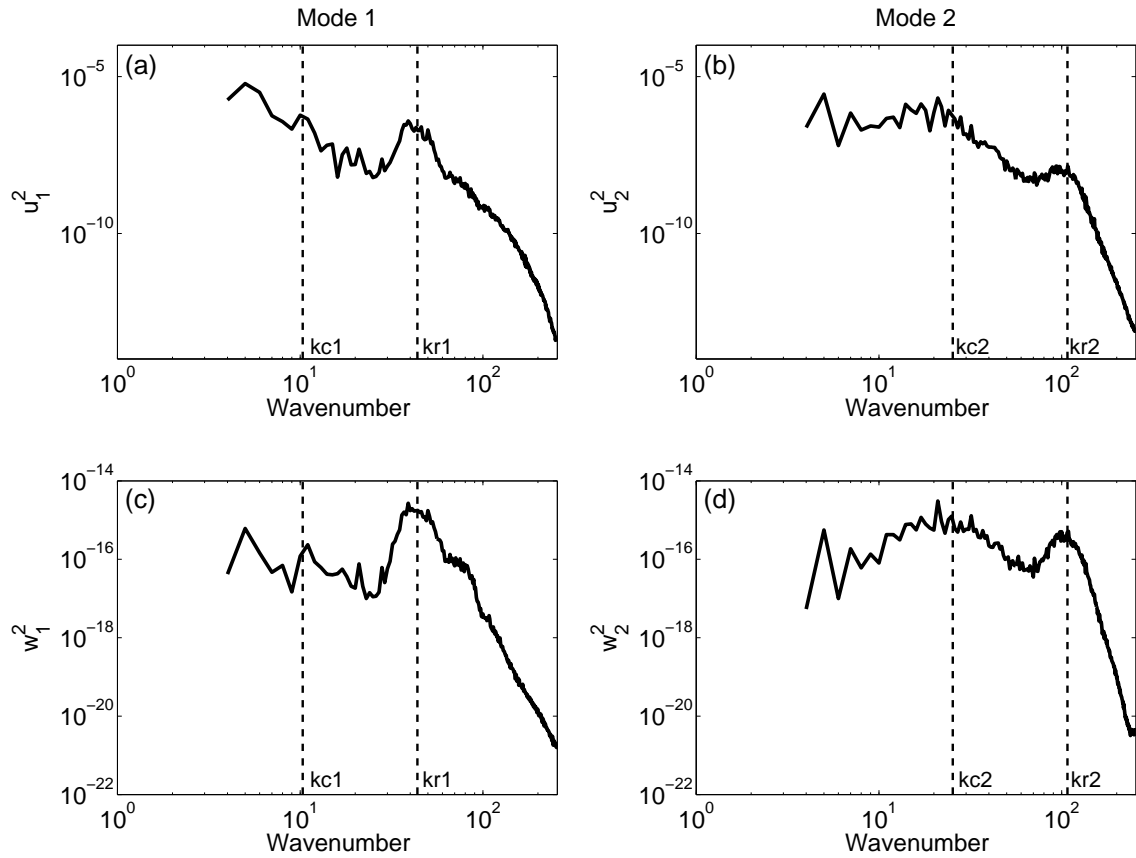


FIG. 4.3 – Spectra of u ((a) and (b)) and w ((c) and (d)) for the first ((a) and (c)) and second ((b) and (d)) baroclinic modes, 5 inertial periods after the wind burst. $k_{rn} = \frac{\sqrt{3}}{r_n}$ (noted k_{r1} and k_{r2} for respectively the first and second baroclinic modes) and $k_{cn}(r_n, t = 5 I.P.)$ (noted $kc1$ and $kc2$) are represented by dashed lines. $k_{cn}(r_n, t)$ is the wavenumber corresponding to maximum of kinetic energy following the theory of Klein et al. (2004b).

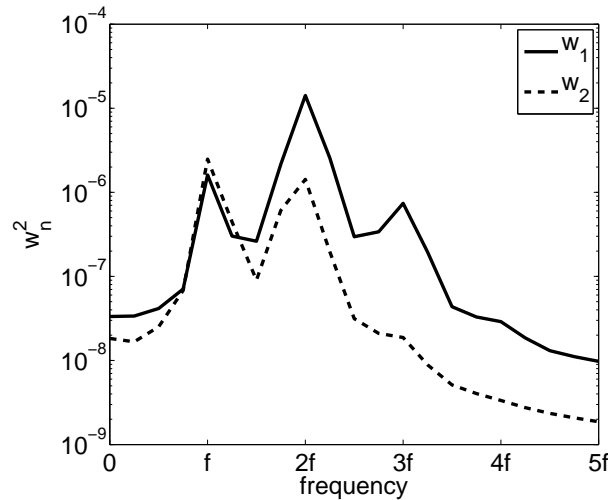


FIG. 4.4 – Temporal spectra of w_1 (solid line) and w_2 (dashed line).

present results to a fully turbulent eddy field is therefore immediate. The corresponding wavenumber and frequency peaks of the resulting supra-inertial motions is broadened when several baroclinic modes are considered.

Characteristics of these small-scale supra-inertial waves - with a frequency close to $2f$ - are compelling and potentially important. They suggest that parametric sub-harmonic instability could be invoked as a mechanism to transfer energy from these waves to energy available for mixing (Hibiya et al. (1998), Koudella and Staquet (2006)). The consequence is that the oceanic stormtracks at mid-latitude (characterized by the presence of a turbulent mesoscale eddy field) are areas highly favourable for the wind energy to be transferred to small-scale mixing. Consequently this resonance mechanism may be a key factor to understand the “route” to small-scale mixing in the ocean.

Conclusion générale

Au cours de cette thèse, nous nous sommes attachés à comprendre les mécanismes de la propagation tridimensionnelle d'ondes inertielles générées en surface par le vent au milieu d'un champ turbulent mésoéchelle. L'intérêt porté aux ondes inertielles s'explique par le rôle majeur que celles-ci jouent au sein de la circulation thermohaline. En effet, cette dernière, loin d'être une "machine thermique", dépend essentiellement de l'intensité du mélange vertical profond, mélange nécessaire afin de faire remonter les eaux froides ayant plongé par convection en Atlantique Nord. Deux sources d'énergie sont généralement invoquées pour expliquer ce mélange profond : d'une part, les marées internes générées par interaction de la marée barotrope avec la topographie et, d'autre part, les ondes inertielles créées par le vent en surface. Toutefois, les mécanismes conduisant ces ondes générées aux frontières au mélange profond (la "route" menant jusqu'au mélange) restent encore obscures. Notre étude est un premier pas dans la compréhension de ces mécanismes. L'autre intérêt de l'étude de la propagation des ondes inertielles est encore une fois lié au mélange mais, cette fois-ci, de subsurface. Les NIO (Near Inertial Oscillations, ondes quasi inertielles), par les fortes vitesses verticales de subsurface qu'elle engendrent ainsi que le cisaillement vertical de vitesses horizontales, entraînent une augmentation du mélange dans les couches supérieures. Ce mélange, permettant la remontée de nutriments dans des couches soumises à la lumière du soleil, y génère une augmentation de la production primaire. L'étude de la propagation des NIO est donc importante pour l'analyse et la compréhension des images satellites infra-rouges et de couleur de la mer.

La pertinence de cette étude de propagation d'ondes inertielles *au sein* d'un champ tourbillonnaire énergétique est liée à la remarquable coïncidence existant entre les régions de forte turbulence océanique et celle de forte turbulence atmosphérique (cf Zhai et al. (2005)), ces dernières étant celles où l'énergie inertielle injectée à l'océan est maximale. La vorticité relative mésoéchelle est primordiale pour la propagation 3D des NIO. En effet, les gradients de vorticité mésoéchelle, à l'image de l'effet- β (Gill (1984)), créent de petites échelles spatiales horizontales dans le champ de NIO (cf Kunze (1985)). Une fois ces échelles spatiales cr ees, chaque mode vertical associé aux ondes inertielles va se propager, à une vitesse dépendant de son rayon de déformation r_n . On comprend dès lors que les différents modes verticaux, qui initialement s'additionnaient dans la couche de mélange et s'annulaient en-dessous, vont se déphaser, générant des vitesses inertielles en profondeur.

L'approche employée dans cette thèse est expérimentale. Elle consiste à analyser les sorties d'un modèle numérique dans lequel nous avons fait souffler du vent pour générer des ondes inertielles. Le travail principal est ensuite de rationaliser ces

résultats à l'aide, notamment, de résultats connus sur la propagation 2D des NIO.

La première étape de cette étude a été de se doter d'un outil capable d'extraire le signal inertiel. Trois méthodes distinctes ont été utilisées, chacune d'elle présentant des avantages et des inconvénients récapitulés en page 40. La première est une nouvelle méthode d'inversion de vorticité potentielle, inspirée des travaux de Muraki et al. (1999) et Allen (1993). A cette première méthode, qui dans certains cas peut s'avérer la seule applicable, sont généralement préférées deux autres méthodes plus simples à mettre en oeuvre : les méthodes dites de soustraction et de moyenne. La méthode de soustraction est typiquement l'exemple de méthode applicable à des simulations virtuelles mais pas à l'océan réel : elle consiste à effectuer, à partir des sorties à un instant t , deux runs, l'un avec vent et l'autre sans vent. La différence entre ces deux runs est supposée égale à la partie haute-fréquence générée par le vent. L'hypothèse implicite de cette méthode est que la partie basse-fréquence n'est pas modifiée en présence d'ondes inertielles. La méthode de moyenne, elle, consiste à moyenner les sorties du run avec vent sur une période inertielle et de considérer que l'on obtient ainsi la partie lente du mouvement. La différence avec le champ total est alors supposée égale au champ d'ondes inertielles. Cette méthode, contrairement à la méthode de soustraction, diverge dès lors que d'autres ondes, de fréquence différentes de $n2\pi/T$ où n est un entier et T la période de la moyenne, sont présentes.

Après avoir testé ces méthodes d'extraction du signal inertiel et constaté qu'elles rendaient des résultats sensiblement identiques, nous avons pu nous attaquer à l'étude de la propagation 3D des NIO.

Quels sont les résultats nouveaux et majeurs de cette thèse ?

A notre sens, ils concernent principalement la mise en évidence de mécanismes relatifs à l'émergence de deux maxima de vitesse verticale et de leurs caractéristiques. Ces deux maxima sont situés en subsurface, vers 100 m de profondeur, et dans l'océan profond, vers 1700 m. Ils impliquent des vitesses verticales relativement importantes, de l'ordre de 40 m/jour en valeur RMS, avec des valeurs extrêmes allant jusqu'à 100 m/jour ! Leur apparition très rapide s'explique par le découplage entre les modes verticaux bas et élevés des vitesses inertielles, découplage lié à la dispersion différentielle des modes (celle-ci est forte pour les modes bas et faible pour les modes élevés). Les vitesses verticales en profondeur sont essentiellement capturées par les modes bas, et celles de subsurface par les modes élevés. Les résultats de Klein et al. (2004b) ont démontré leur robustesse à prévoir la propagation horizontale des différents modes et nous ont beaucoup aidé dans la compréhension de l'émergence de ces deux maxima.

La question qui se posait alors logiquement était comment relier ces fortes vitesses verticales en profondeur au mélange de petite échelle. Mais un résultat étonnant, issu de nos simulations numériques, en contradiction apparente avec les résultats de Klein et al. (2004b), s'est imposé comme une propriété physique solide. Les vitesses verticales profondes, associées aux modes bas, oscillent non seulement à la fréquence inertielle f , mais également à la fréquence $2f$. Par ailleurs, leurs échelles spatiales font apparaître une longueur précise, proche de $3.63r_n$, où r_n est le rayon de déformation du mode (bas) considéré. Cette sélection d'échelles spatiale et temporelle a nécessité une étude analytique plus précise. Nous avons trouvé que ces caractéristiques s'expliquent par un mécanisme de résonance forcé par des termes non-linéaires généralement omis dans les études précédentes. Ce mécanisme nécessite imp rati-

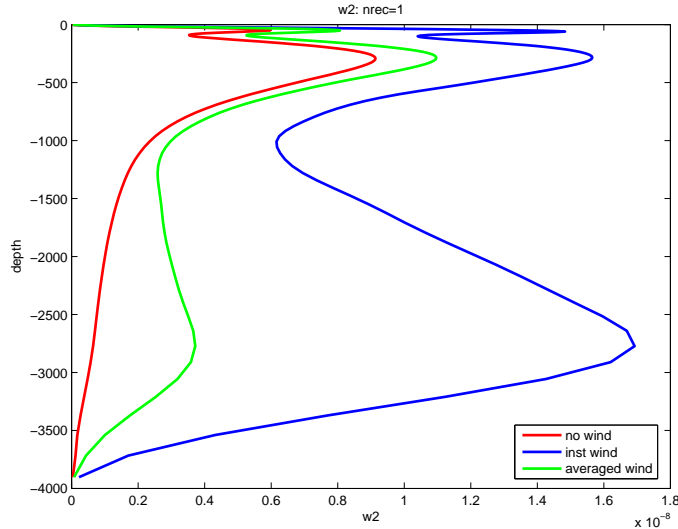


FIG. 4.5 – Profil vertical de la variance de la vitesse verticale $\langle w^2 \rangle$ dans une simulation avec un vent réel (courbe bleue), avec un vent moyenné toutes les 24H (courbe verte) et sans vent (courbe rouge).

vement la présence d'énergie du champ mésoéchelle à cette longueur particulière de $3.63r_n$. Ceci explique également pourquoi les études précédentes, même en conservant tous les termes non-linéaires (Klein et Tréguier (1995b)), mais ne considérant que des structures mésoéchelles isolées (jets) de taille très inférieure à cette longueur, soient passées à côté de ce mécanisme. En présence d'un champ turbulent caractérisé par un spectre continu, ce genre de problèmes n'est plus possible.

Les caractéristiques propres aux vitesses verticales en profondeur (fréquence $2f$, petites échelles horizontales) suscitent un grand intérêt car elles suggèrent que l'instabilité paramétrique subharmonique (PSI) peut être un mécanisme possible transformant cette énergie cinétique en mélange (Hibiya et al. (1998), Staquet et Sommeria (2002), Koudella et Staquet (2006), MacKinnon et Winters (2005)). Hibiya et al. (1998) montre que la PSI est un mécanisme de transfert efficace lorsque des ondes inertielles générées aux moyennes latitudes se propagent vers l'équateur sous l'effet- β tout en conservant leur fréquence propre, et se dissipent quand celle-ci devient égale à 2 fois la fréquence de Coriolis locale. Au vu de nos résultats, la PSI, pourrait être un mécanisme vers le mélange efficace, non plus seulement aux latitudes basses, mais également aux latitudes moyennes et élevées. En outre, une analyse d'échelles indique que si 10% de l'énergie cinétique verticale est convertie en diffusion verticale turbulente, on peut obtenir des coefficients de diffusion verticale de l'ordre de 10^{-4} m²/s, c'est-à-dire du même ordre que le coefficient nécessaire au maintien de la circulation thermohaline.

Toutefois, on se peut se demander si le cadre très simple utilisé dans nos simulations numériques (du point de vue, notamment, de la résolution) n'a pas mis en exergue des caractéristiques qui deviennent négligeables avec une résolution plus élevée. En ce sens, des résultats très récents de simulations similaires aux runs présentés dans ce rapport, mais réalisées au Earth Simulator (Yokohama, Japon) avec une résolution de 2 km sur l'horizontale et 100 niveaux sur la verticale, et utilisant un vent réel permanent échantillonné toutes les 3H, confirment les résultats obtenus

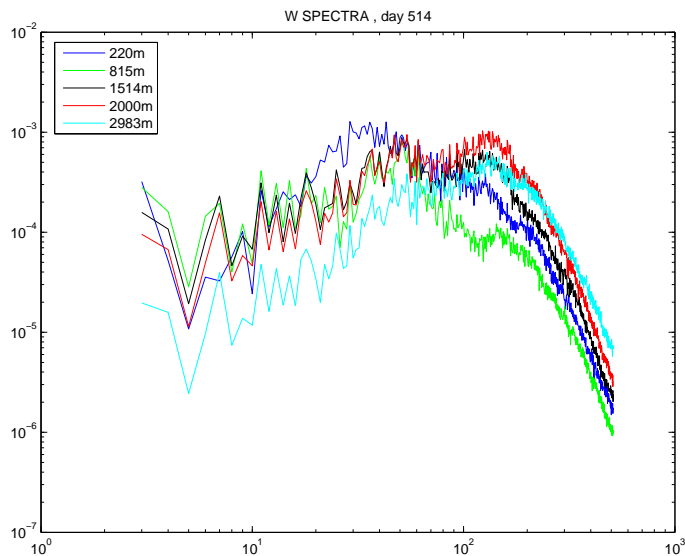


FIG. 4.6 – Spectres horizontaux de la vitesse verticale dans la simulation avec un vent réel à différentes profondeurs : $z = -220$ m (courbe bleue foncée), $z = -815$ m (courbe verte), $z = -1514$ m (courbe noire), $z = -2000$ m (courbe rouge) et $z = -2983$ m (courbe bleue claire).

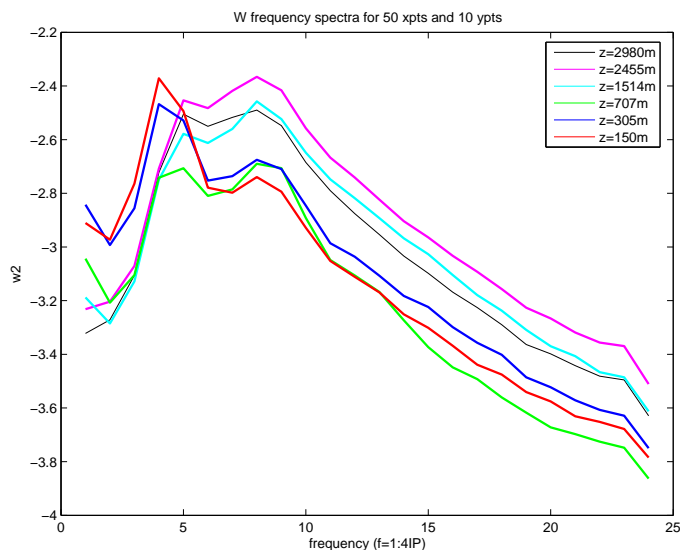


FIG. 4.7 – Spectres temporels de la vitesse verticale à différentes profondeurs : $z = -150$ m (courbe rouge), $z = -305$ m (courbe bleue foncée), $z = -707$ m (courbe verte), $z = -1514$ m (courbe bleue claire), $z = -2455$ m (courbe magenta), $z = -2980$ m (courbe noire).

pendant cette thèse. Les figures 4.5, 4.6 et 4.7 sont issues de ces dernières simulations. La figure 4.5 montre la présence d'un maximum de variance de la vitesse verticale vers -3000 m dans la simulation avec vent réel. La figure 4.6 présentent des spectres horizontaux de la vitesse verticale inertielle à différentes profondeurs. On constate que plus la profondeur augmente, plus les petites échelles sont énergétiques. Ainsi, à 2000 m de profondeur, on note la présence de deux pics : l'un vers $k = 40$ (soit une longueur d'onde d'environ 100 km) que l'on peut relier au phénomène de résonance du mode 1, et un second plus large vers $k = 130$ (correspondant à une longueur d'onde d'environ 30 km), lié à la résonance des modes 2 et 3. Enfin, conformément à nos attentes, la figure 4.7 démontre une prédominance de la fréquence $2f$ en profondeur. Les différences entre ces résultats et ceux obtenus dans cette thèse sont imputables à trois facteurs : la durée de la simulation plus élevée, la résolution horizontale et verticale plus forte et enfin la prise en compte d'un vent réel, le reste des paramètres initiaux étant similaires en tout point. Des tests ont montré qu'un tel vent est équivalent à une série de pulses tels que celui utilisé dans cette thèse se produisant tous les 5 jours. La présence d'un maximum de vitesse verticale plus profond sur la figure 4.5 s'explique par le fait que le premier pulse de la série de vent utilisée remonte à plusieurs semaines, laissant ainsi plus de temps aux modes élevés pour se disperser et donc au maximum de $\langle w^2 \rangle$ pour s'approfondir, alors que la majorité des figures présentées au chapitre 4 ont été faites au maximum 5 jours après le début du pulse de vent. De plus, la résolution très élevée de ces simulations réalisées au Earth Simulator met en exergue une dynamique assez différente de celle à basse résolution, caractérisé par un spectre d'énergie moins pentu dans les grands nombres d'onde (en $k^{-5/3}$). Ceci peut expliquer la prédominance en profondeur du pic lié à la résonance des 2ème et 3ème modes par rapport au premier mode sur la figure 4.6 (rappel : l'intensité de la résonance est proportionnelle à $\hat{\zeta}(\sqrt{3}/r_n)$, cf chapitre 4).

Ces résultats récents de haute résolution et les caractéristiques du maximum de vitesse verticale en profondeur (avec encore plus d'énergie dans les petites échelles) viennent renforcer, selon nous, l'hypothèse que l'instabilité paramétrique subharmonique soit une "route" possible vers le mélange. Des investigations plus poussées en ce sens doivent être entreprises. Une première expérience serait de modéliser directement la PSI dans les simulations à l'aide de modèles numériques non hydrostatiques. En outre, des simulations numériques à l'échelle de bassins, dans des configurations réalistes et utilisant des données de vent réel permettraient de se faire une idée plus précise de l'énergie cinétique verticale totale présente en profondeur. Enfin, si quelques observations mentionnent la présence de mouvements à des fréquences supra-inertiels en profondeur (Rudnick et Weller (1993), Lenn et al. (2003)), des efforts de mesures bien plus importants doivent être faits pour mettre en évidence les vitesses verticales énergétiques profondes trouvées dans cette thèse, ainsi que la fréquence $2f$.

Bibliographie

- Alford, M. H., 2001 : Internal swell generation : the spatial distribution of energy flux from the wind to mixed-layer near-inertial motions. *J. Phys. Oceanogr.*, **31**, 2359–2368.
- Alford, M. H., 2003a : Improved global maps and 54-year history of wind-work on ocean inertial motions. *Geophys. Res. Lett.*, **30(8)**, 1424 :doi,10.1029/2002GL016614.
- Alford, M. H., 2003b : Redistribution of energy available for ocean mixing by long-range propagation of internal waves. *Nature*, **423**, 159–162.
- Allen, J., 1993 : Iterated geostrophic intermediate models. *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 2447–2461.
- Allen, J., J.A.Barth, et P.A.Newberger, 1990 : On intermediate models for barotropic continental shelf flow fields. part i : Formulation and comparison of exact solutions. *J. Phys. Oceanogr.*, **20**, 1017–1042.
- Anderson, D., et Gill, A., 1979 : Beta-dispersion of inertial waves. *J. Geophys. Res.*, **84**, 1836–1842.
- Badulin, S., et Shrira, V., 1993 : On the irreversibility of internal waves dynamics due to wave-trapping by mean flow inhomogeneities. *J. Fluid Mech.*, **251**, 21–53.
- Bartello, P., 1995 : Geostrophic adjustment and inverse cascades in rotating stratified turbulence. *J. Atmos. Sc.*, **52**, 4410–4428.
- Bühler, O., et McIntyre, M., 2000 : On the vorticity transport due to dissipating or breaking waves in shallow water flow. *J. Fluid Mech.*, **407**, 235–263.
- Bühler, O., et McIntyre, M., 2003 : Remote-recoil : a new wave-mean interaction effect. *J. Fluid Mech.*, **492**, 207–230.
- Bühler, O., et McIntyre, M., 2005 : Wave capture and wave-vortex duality. *J. Fluid Mech.*, **534**, 67–95.
- Charney, J., 1947 : On the scale of atmospheric motions. *J. Meteor.*, **4**, 135–163.
- Charney, J., 1948 : On the scale of atmospheric motions. *Geophys. Publ. Oslo*, **17(2)**, 1–17.

- Crawford, G., et Large, W., 1996 : A numerical investigation of resonant inertial response of the ocean to wind forcing. *J. Phys. Oceanogr.*, **26**, 873–891.
- Danioux, E., et Klein, P., 2007 : A resonance mechanism leading to wind-forced supra-inertial motions with a $2f$ frequency. *to be submitted*.
- Danioux, E., Klein, P., et Rivière, P., 2007 : Propagation of wind energy into the deep ocean through mesoscale eddies. *to be submitted*.
- D'Asaro, E. A., 1985 : The energy flux from the wind to near-inertial motions in the surface mixed layer. *J. Phys. Oceanogr.*, **15**, 1043–1059.
- D'Asaro, E. A., 1995 : Upper-ocean inertial currents forced by a strong storm. part iii : Interaction of inertial currents and mesoscale eddies. *J. Phys. Oceanogr.*, **25**, 2953–2958.
- D'Asaro, E. A., et Perkins, H., 1984 : The near-inertial internal wave spectrum in the late summer sargasso sea. *J. Phys. Oceanogr.*, **14**, 489–505.
- Davis, C. A., et Emmanuel, K. E., 1991 : Potential vorticity diagnosis of cyclogenesis. *Mon. Weather Rev.*, **119**, 1929–1953.
- Dewar, W., et Killworth, P., 1995 : Do fast gravity waves interact with geostrophic motions? *Deep-Sea Res.*, **42**, 1063–1081.
- Farge, M., et Sadourny, R., 1989 : Wave-vortex dynamics in rotating shallow water. *J. Fluid Mech.*, **206**, 443–462.
- Fomin, L., 1973 : Inertial oscillations in a horizontally inhomogeneous current velocity field. *Izv. Atmos. Ocean. Phys.*, **9**, 75–83.
- Garratt, J., 1977 : Review of drag coefficients over oceans and continents. *Mon. Weather Rev.*, **105**, 915–929.
- Garrett, C., 2001 : What is the "near inertial" band and why is it different from the rest of the internal wave spectrum? *J. Phys. Oceanogr.*, **31**, 962–971.
- Gent, P. R., et McWilliams, J. C., 1983 : Consistent balanced models in bounded and periodic domains. *Dyn. Atm. Oc.*, **7**, 67–93.
- Gill, A., 1982 : Atmosphere ocean dynamics. *Academic Press, New York*, 662pp.
- Gill, A., 1984 : On the behavior of internal waves in the wakes of storms. *J. Phys. Oceanogr.*, **14**, 1129 – 1151.
- Gonella, J., 1971 : A local study of inertial oscillations in the upper layer of the ocean. *Deep-Sea Res.*, **18**, 775 – 788.
- Graham, N., et Diaz, H., 2001 : Evidence for intensification of north pacific winter cyclones since 1948. *J. Climate*, **82**, 1869 – 1893.
- Hakim, G. J., Snyder, C., et Muraki, D. J., 2002 : A new surface model for cyclone-anticyclone asymmetry. *J. Atmos. Sc.*, **59**, 2405 – 2420.

- Hasumi, H., et Sugimoto, N., 1999 : Effects of locally enhanced vertical diffusivity over rough bathymetry on the world ocean circulation. *J. Geophys. Res.*, **104**, 23,367 – 23,374.
- Hibiya, T., Niwa, Y., et Fujiwara, K., 1998 : Numerical experiments of nonlinear energy transfer within the oceanic internal wave spectrum. *J. Geophys. Res.*, **103**, 18715–18722.
- Hoskins, B., McIntyre, M., et Robertson, W., 1985 : On the use and significance of isentropic potential vorticity maps. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **111**, 877 – 946.
- Hua, B., et Haidvogel, D., 1986 : Numerical simulations of the vertical structure of quasi-geostrophic turbulence. *J. Atmos. Sci.*, **43**, 2923 – 2936.
- Karsten, R., Jones, H., et Marshall, J., 2002 : The role of eddy transfer in setting the stratification and transport of a circumpolar current. *J. Phys. Oceanogr.*, **32**, 39–54.
- Klein, P., et Coantic, M., 1981 : A numerical study of turbulent processes in the marine upper layers. *J. Phys. Oceanogr.*, **11**, 849–863.
- Klein, P., Hua, B., et Carton, X., 2003 : Emergence of cyclonic structures due to the interaction between near-inertial waves and mesoscale eddies. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **129**, 1–13.
- Klein, P., et Hua, B. L., 1990 : The mesoscale variability of the sea surface temperature : an analytical and numerical model. *J. Mar. Res.*, **48**, 729–763.
- Klein, P., Lapeyre, G., et Large, W. G., 2004a : Wind ringing of the ocean in presence of mesoscale eddies. *Geophys. Res. Lett.*, **31**, L15306, doi : 10.1029/2004GL020274.
- Klein, P., Llewellyn-Smith, S., et Lapeyre, G., 2004b : Spatial organisation of inertial energy by an eddy field. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **130**, 1153–1166.
- Klein, P., et Tréguier, A., 1995a : Comments on "scattering of inertial waves by an ocean front". *J. Phys. Oceanogr.*, **25**, 1018–1022.
- Klein, P., et Tréguier, A., 1995b : Dispersion of wind-induced inertial waves by a barotropic jet. *J. Mar. Res.*, **53**, 1–22.
- Koudella, C., et Staquet, C., 2006 : Instability mechanisms. *J. Fluid Mech.*, **548**, 165–196.
- Kunze, E., 1985 : Near-inertial wave propagation in geostrophic shear. *J. Phys. Oceanogr.*, **15**, 544–565.
- Kuo, A., 1999 : Adjustment and wave-vortex interaction in rotating shallow water. *PhD thesis Columbia University*.
- Kuo, A., et Polvani, L., 1999 : Wave-vortex interaction in rotating shallow water. part 1. one space dimension. *J. Fluid Mech.*, **394**, 1–27.

- Lapeyre, G., et Klein, P., 2006 : Dynamics of the upper oceanic layers in terms of surface quasigeostrophy theory. *J. Phys. Oceanogr.*, **36**, 165–176.
- Large, W., et Pond, S., 1981 : Open ocean momentum flux measurements in moderate to strong winds. *J. Phys. Oceanogr.*, **11**, 324–36.
- Lee, D.-K., et Niiler, P. P., 1998 : The inertial chimney : the near inertial energy drainage from the ocean surface to the deep layer. *J. Geophys. Res.*, **103 (C4)**, 7579–7591.
- Lenn, Y.-D., Chereskin, T., et Glatts, R., 2003 : Seasonal to tidal variability in currents, stratification and acoustic backscatter in an antarctic ecosystem at deception island. *Deep-Sea Res.*, **50**, 1665–1683.
- Lighthill, J., 1978 : Waves in fluids. *Cambridge Univ. Press, New York*.
- Louazel, S., 2004 : Influence des ondes d’inertie-gravité sur la dynamique tourbillonnaire. *Thèse de doctorat*.
- MacKinnon, J., et Winters, K., 2005 : Subtropical catastrophe : significant loss of low-mode tidal energy at 28.9°. *Geophys. Res. Lett.*, **32**, L15605,doi :10.1029/2005GL023376.
- Magaard, L., 1968 : Ein betrag zur theorie der internen wellen as storungen geostrophischer stromungen. *Deutsche Hydrogr. Z.*, **21**, 241–278.
- McComas, C., et Müller, P., 1981 : The dynamic balance of internal waves. *J. Phys. Oceanogr.*, **11**, 970–986.
- McIntyre, M., et Norton, W., 1990 : Dissipative wave-mean interactions and the transport of vorticity orpotential vorticity. *J. Fluid Mech.*, **212**, 403–435.
- McWilliams, J., et Gent, P., 1980 : Intermediate models of planetary circulations in the atmosphere and oceans. *J. Atmos. Sc.*, **37**, 1657–1678.
- Mooers, C., 1975 : Several effects of a baroclinic current on the cross-stream propagation of inertial-internal waves. *Geophys. Fluid. Dyn.*, **6**, 245–275.
- Muller, P., 1995 : Ertel’s potential vorticity theorem in physical oceanography. *Rev. Geophys.*, **33,1**, 67–97.
- Munk, W., et Wunsch, C., 1998 : Abyssal recipes ii : energetics of tidal and wind mixing. *Deep-Sea Res.*, **45**, 1976–2009.
- Muraki, D. J., Snyder, C., et Rotunno, R., 1999 : The next order corrections to quasigeostrophic theory. *J. Atmos. Sc.*, **56**, 1547–1560.
- Nagasawa, M., Niwa, Y., et Hibiya, T., 2000 : Spatial and temporal distribution of wind-induced internal wave energy available for deep water mixing in the north pacific. *J. Geophys. Res.*, **105**, 13933 – 13943.
- Niiler, P. P., 1969 : On the ekman divergence in a oceanic jet. *J. Geophys. Res.*, **74**, 7048–7062.

- Okubo, A., 1970 : Horizontal dispersion of floatable particles in the vicinity of velocity singularities such as convergences. *Deep-Sea Res.*, **17**, 445–454.
- Perkins, H., 1976 : Observed effect of an eddy on inertial oscillations. *Deep-Sea Res.*, **23**, 1037–1042.
- Pinkel, R., 1983 : Doppler sonar observations of internal waves. *J. Phys. Oceanogr.*, **13**, 804–815.
- Plougonven, R., et Snyder, C., 2005 : Gravity waves excited by jets : propagation versus generation. *Geophys. Res. Lett.*, **32**, L18802.
- Pollard, R., et Millard, R., 1970 : Comparison between observed and simulated wind-generated inertial oscillations. *Deep-Sea Res.*, **17**, 153–175.
- Rivière, P., Tréguier, A.-M., et Klein, P., 2004 : Effects of bottom friction on nonlinear equilibration of an oceanic jet. *J. Phys. Oceanogr.*, **34**, 416–432.
- Rotunno, R., Muraki, D. J., et Snyder, C., 2000 : Unstable baroclinic waves beyond quasigeostrophic theory. *J. Atmos. Sc.*, **57**, 3285–3295.
- Rubenstein, D., et Roberts, G., 1986 : Scattering of inertial waves by an ocean front. *J. Phys. Oceanogr.*, **16**, 121–131.
- Rudnick, D., et Weller, R., 1993 : Observations of superinertial and near-inertial wind-driven flow. *J. Phys. Oceanogr.*, **123**, 2351–2359.
- Samelson, R., 1998 : Large-scale circulation with locally enhanced vertical mixing. *J. Phys. Oceanogr.*, **28**, 712–726.
- Sandström, J., 1908 : Dynamicsche versuche mit meerwasser. *Ann. Hydrogr. Martimen Meteorol.*, **36**, 6–23.
- Sandström, J., 1916 : Meteorologische studien in schwedischen hochgebirge. *Goteborgs Kungl. Vensk. Vitterh.-Samh. Handlingar*, **27**, 1–48.
- Skyllinstad, E., Smyth, W., et Crawford, G., 2000 : Resonant wind-driven mixing in the ocean boundary layer. *J. Phys. Oceanogr.*, **30**, 1866–1890.
- Stammer, D., et Wunsch, C., 1999 : Temporal changes in eddy energy of the oceans. *Deep-Sea Res.*, **46**, 77–108.
- Staquet, C., et Sommeria, J., 2002 : Internal gravity waves : from instabilities to turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **34**, 559–593.
- Stern, M., 1965 : Interaction of a uniform wind stress with a geostrophic vortex. *Deep-Sea Res.*, **12**, 355–367.
- Straub, D., 2003 : Instability of 2d flows to hydrostatic 3d perturbations. *Deep-Sea Res.*, **60**, 79–102.
- Van Haren, H., 2005 : Tidal and near inertial peak variations around the diurnal critical latitude. *Geophys. Res. Lett.*, **32**, L23611.

- Van Meurs, P., 1998 : Interactions between near-inertial mixed layer currents and the mesoscale : the importance of spatial variabilities in the vorticity field. *J. Phys. Oceanogr.*, **28**, 1363–1388.
- Vanneste, J., et Yavneh, I., 2004 : Exponentially small inertia-gravity waves and the breakdown of quasi-geostrophic balance. *J. Atmos. Sc.*, **61**, 211–223.
- Watanabe, M., et Hibiya, T., 2002 : Global estimates of the wind-induced energy flux to inertial motions in the surface mixed layer. *Geophys. Res. Lett.*, **29**, 80–1–80–4.
- Webb, D., et Suginohara, N., 2001 : Vertical mixing in the ocean. *Nature*, **409**, 37.
- Webster, F., 1968 : Observations of inertial-period motions in the deep sea. *Rev. Geophys.*, **6**, 473–490.
- Weiss, J., 1981 : The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional hydrodynamics. *Technical Report LJI-TN-121ss, La Jolla Inst., La Jolla, California, USA.*
- Weller, R., 1982 : The relation of near-inertial motions observed in the mixed layer during the jasin (1978) experiment to the local wind stress and the quasigeostrophic flow field. *J. Phys. Oceanogr.*, **12**, 1122–1136.
- Whitaker, J. S., 2002 : Global estimates of the wind-induced energy flux to inertial motions in the surface mixed layer. *Geophys. Res. Lett.*, **29**, 80–1–80–4.
- Williams, R., et Follows, M., 2003 : Physical transport of nutrients and the maintenance of biological production. *Ocean biogeochemistry : the role of the ocean carbon cycle in global change. Edited by M. Fasham. Springer.*, 19–51.
- Wunsch, C., 1998 : The work done by the wind on the oceanic general circulation. *J. Phys. Oceanogr.*, **28**, 2332–2340.
- Wunsch, C., et Ferrari, R., 2004 : Vertical mixing, energy and the general circulation of the ocean. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **36**, 281–314.
- Young, W., et Ben Jelloul, M., 1997 : Propagation of near-inertial oscillations through a geostrophic flow. *J. Mar. Res.*, **55**, 735–766.
- Zhai, X., Greatbach, R. J., et Zhao, J., 2005 : Enhanced vertical propagation of storm-induced near-inertial energy in an eddying ocean channel model. *Geophys. Res. Lett.*, **32**, L18602.