

4
 MODELE TRIDIMENSIONNEL DE CIRCULATION ET DE DISPERSION.

THOUVENIN B. *, SALOMON J.C. *.

1. Introduction

Le régime des courants marins en Baie de Seine est influencé par la forme du fond, des côtes et par les différences de densité que provoquent les apports fluviaux dans la partie est. Ceci leur confère un caractère tridimensionnel que l'on passe souvent sous silence parce que difficile à observer et à étudier.

Pourtant, les moyens de calcul modernes permettent d'étudier cette question sous l'angle de la modélisation numérique :

. Leendertse et Liu (1975, 1978) ont abordé ce problème par des modèles à couches multiples.

. Forristall (1974), Heaps (1971, 1980), Nihoul (1977), Davis et Owen (1979) et Le Hir (1980) ont découplé le calcul de la structure verticale de celui du champ moyen horizontal.

. On peut aussi séparer les modes barotropes et baroclines, ce qu'ont fait Sheng *et al.* (1978) ou Blumberg et Mellor (1980).

Nous avons choisi de résoudre directement les équations de l'hydrodynamique en utilisant la technique présentée par Hamilton (1975-1976) pour traiter les conditions aux limites supérieures et inférieures. Un modèle bidimensionnel en plan vertical (x,z) de ce type avait déjà été appliqué avec succès sur plusieurs sites littoraux (Hamilton, 1975, sur le canal de Rotterdam ; de Borne de Grandpré, 1979, sur l'estuaire de la Gironde ; Salomon, 1981, sur l'estuaire de la Seine ; de Borne de Grandpré *et al.*, 1981, sur l'estuaire du Saint Laurent).

Nous avons repris cette méthode générale, et développé le modèle sur la coordonnée transversale y.

2. Formulation mathématique

Le modèle résoud les équations de Navier-Stokes, qui s'écrivent de la manière suivante, dans le repère orthonormé direct (0,x,y,z) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv + ag (\zeta - z) \frac{\partial \bar{S}}{\partial x} + g \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{\rho} \left[N'_{xx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + N'_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(N'_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \quad (1)$$

* Laboratoire d'Océanographie Physique, Université de Bretagne occidentale, 29283 Brest Cedex.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu + ag(\zeta - z) \frac{\partial \bar{S}}{\partial y} + g \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{\rho} \left[N'_{yx} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + N'_{yy} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(N'_{yz} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial S}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial S}{\partial y} \right)$$

$$- \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial S}{\partial z} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (5)$$

$$\rho = \rho_0 (1 + aS) \quad a = 0,78 \cdot 10^{-3} \quad (6)$$

Dans ces équations, on a fait les hypothèses suivantes :

- approximation hydrostatique ;
- approximation de Boussinesq ;
- incompressibilité de l'eau ;
- forces astrales négligeables ;
- paramètre de Coriolis constant.

(u, v, w) sont les composantes de la vitesse selon les 3 axes (l'axe vertical étant dirigé vers le haut), f est le paramètre de Coriolis, S est la salinité, ζ l'élévation de la surface et ρ_0 la masse volumique de l'eau douce. Les coefficients $N'/\rho = N$ et K sont les coefficients de viscosité et de diffusion turbulente qui paramètrent les échanges turbulents selon les trois axes. On considère les coefficients horizontaux constants dans l'espace et dans le temps.

Les gradients horizontaux de pression dans les équations (1) et (2) sont exprimés à partir de l'équation hydrostatique (5) et de l'équation d'état (6) en fonction de la pente de la surface et du gradient horizontal de la salinité moyenne S sur la verticale.

L'équation de la continuité (3) est transformée par le biais de deux intégrations différentes pour obtenir les variations de la surface de l'eau et la valeur de la vitesse verticale à chaque profondeur.

Par intégration entre le fond (-h) et la surface (ζ), il vient :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

avec :

$$\bar{U} = \int_{-h}^{\zeta} u dz \quad \bar{V} = \int_{-h}^{\zeta} v dz$$

De la même manière, il vient :

$$w(x,y,z) = - \int_{-h}^z \frac{\partial u}{\partial x} dz - \int_{-h}^z \frac{\partial v}{\partial y} dz \quad (8)$$

On obtient ainsi 5 équations 1, 2, 4, 7, 8 que l'on résout directement en conservant les termes non linéaires. Une approximation supplémentaire a été introduite à ce stade pour simplifier les calculs : les salinités moyennes $\bar{S}(x,y)$ sont approximées en salinités ponctuelles $S(x,y,z)$, ce qui restreint les applications du modèle à des estuaires peu stratifiés ou dont les profils verticaux de salinité sont peu différents sur l'horizontale. Cette restriction pourrait aisément être levée en incorporant au modèle le calcul de l'intégrale des salinités sur la verticale.

Les intégrales de chaque composante u et v et les débits d'eau U et V sont calculés en considérant chaque variable comme une fonction continue de la profondeur. Les intégrales peuvent alors être évaluées de façon précise à l'aide de fonctions splines à une dimension rejoignant les points de calcul et satisfaisant les conditions aux limites à la surface et au fond. Cette procédure permet également d'extrapoler leurs valeurs en des points virtuels extérieurs au domaine d'intégration qui sont utilisés dans les expressions en différences finies lorsque deux colonnes d'eau voisines n'ont pas le même nombre de points sur la verticale. Cette technique, qui fait l'originalité de ce modèle tridimensionnel, permet de résoudre les équations en tenant compte de la forme réelle du domaine et de ses variations temporelles.

La méthode d'intégration numérique a été décrite en détail par Thouvenin (1983) et Thouvenin *et al.* (1984).

3. Tests de validation

Pour vérifier le fonctionnement correct du modèle, on a réalisé plusieurs essais de validation dans des cas schématiques pour lesquels on disposait soit de solutions analytiques, soit de résultats d'autres modèles. On a envisagé successivement : l'effet du vent sur un océan infini, les mouvements d'inertie, les courants de densité dans un bassin rectangulaire, la propagation et la réflexion d'une onde de type Kelvin, et l'effet d'un sillon oblique dans un canal. Ces essais sont détaillés dans les publications citées plus haut.

Le modèle a, ensuite, été appliqué à la Baie de Seine pour reproduire les champs de courant tridimensionnels et l'advection/dispersion du sel.

4. Application à la Baie de Seine

Certaines caractéristiques de la marée dans la Baie rendent sa modélisation particulièrement délicate :

- le rapport marnage/profondeur est important ;
- la courbe des niveaux est fortement déformée, elle présente à la fois un front raide et une "tenue de plein" ;
- les profondeurs varient beaucoup entre l'ancienne vallée de la Seine (45 m) et les petits fonds de l'estuaire et du Sud de la Baie ;
- la frontière ouverte est très longue.

La limite de la zone a été choisie sur le parallèle joignant Antifer à Barfleur.

Les pas d'espace sont de 4 km dans le plan horizontal et de 4 m dans le plan vertical (Fig. 1).

Les conditions aux limites et les conditions initiales, pour les courants et les niveaux, sont fournies par le modèle bidimensionnel horizontal de la Baie (Salomon, 1985 dans ce même recueil), dont le pas d'espace est de 2 km.

Les conditions initiales de salinité sont issues de mesures sur le site.

La situation que nous avons choisie correspond à la journée du 3 octobre 1978 dans une période de vives eaux, le débit fluvial de la Seine étant égal à 450 m³/s.

- DE BORNE DE GRANDPRE C., EL SABH M.I. et SALOMON J.C. (1981).- A two-dimensional numerical model of the vertical circulation of tides in the Saint-Lawrence estuary. Estuarine, Coastal Shelf Sci., 12 : 375-387.
- FORRISTALL G.Z. (1974).- Three dimensional structure of storm generated currents. J. Geophys. Res., 79 : 2721-2729.
- HAMILTON P. (1975).- A numerical model of the vertical circulation of tidal estuaries and its application of the Rotterdam Waterway. Geophys. J.R. Astron. Soc., 40 : 1-21.
- HAMILTON P. (1976).- On the numerical formulation of a time dependent multi-level model of an estuary, with particular reference to boundary conditions. Estuarine Processes, 2, Martin Wiley ed.
- HEAPS N.S. (1971).- On the numerical solution of the three dimensional hydrodynamical equations for tides and storm surges. Mem. Soc. R. Sci., Liège, 6, 2 : 143-180.
- HEAPS N.S. (1980).- Spectral method for the numerical solution of the three dimensional hydrodynamic equations for tides and surges. In : Notes on coastal and estuarine studies, mathematical modelling of estuarine physics, edited by J. Sundermann et al., Springer-Verlag, Berlin, 75-89.
- LEENDERTSE J.J. et LIU S.K. (1975).- Three dimensional flow simulation in estuaries. The Rand Paper Series, 5452.
- LEENDERTSE J.J. et LIU S.K. (1978).- A three dimensional turbulent energy model for non homogeneous estuaries and coastal sea systems. In : Hydrodynamics of estuaries and fjords, edited by J.C.J. Nihoul, Elsevier, Amsterdam, 387-405.
- LE HIR P. (1980).- Calcul par modélisation numérique de la structure verticale des courants et application à la baie de Seine. Thèse de 3ème Cycle, Université de Bretagne Occidentale, 122 p.
- NIHOUL J.C.J. (1977).- Three dimensional model of tides and storm surges in a shallow well mixed continental sea. In : Dynamics in atmosphere and oceans, 2, edited by J.C.J. Nihoul, Elsevier, Amsterdam, 29-47.
- SALOMON J.C. (1981).- Modelling the turbidity maximum in the Seine estuary. In : Ecohydrodynamics, edited by J.C.J. Nihoul, Elsevier, Amsterdam.
- SALOMON J.C. et LE HIR P. (1981).- Etude de l'estuaire de la Seine. Modélisation numérique des phénomènes physiques. Université de Bretagne Occidentale, 286 p.
- SHENG Y.P., LICK W., GEDNEY R.T. et MOLLS F.B. (1978).- Numerical computation of three dimensional circulation in lake Erie. A comparison of a free-surface model and a rigid-lid model. J. Geophys. Oceanogr., 8 : 713-727.
- THOUVENIN B. (1983).- Modèle tridimensionnel de circulation et de dispersion pour des régions côtières à marée. Thèse de 3ème Cycle, Université de Bretagne Occidentale, 269 p.
- THOUVENIN B. et SALOMON J.C. (1984).- Modèle tridimensionnel de circulation et de dispersion en zone côtière à marée. Oceanologica Acta, Vol. 7, N° 4 : 417-429.