

Découvrez un ensemble de documents, scientifiques ou techniques,
dans la base Archimer : <http://www.ifremer.fr/docelec/>

ifremer

Direction des Ressources Vivantes

DRV-86.002 RH/Nantes

Les méthodes delta en halieutique

**Évaluation des sensibilités,
approximation des biais et variances
à l'aide de développements limités**

par

Alain Laurec

INSTITUT FRANÇAIS DE RECHERCHE POUR L'EXPLOITATION DE LA MER

IFREMER
Centre de Nantes
Rue de l'Ile d'Yeu
B.P. 1049
44037 - NANTES cedex 01

DIRECTION DES RESSOURCES VIVANTES
DEPARTEMENT RESSOURCES HALIEUTIQUES
LABORATOIRE ERHAL

9950

AUTEUR (S) : M. Alain LAUREC		CODE : DRV-86 02 RH/NANTES N°
TITRE : LES METHODES DELTA EN HALIEUTIQUE Evaluation des sensibilités, approximation des biais et variances à l'aide de développements limités.		date : 15.01.87 2è tirage-nb = 60 Nb pages : 64 Nb figures : 10 Nb photos : 0
CONTRAT (intitulé) N°		DIFFUSION libre <input checked="" type="checkbox"/> restreinte <input type="checkbox"/> confidentielle <input type="checkbox"/>

RÉSUMÉ : Ce rapport a pour vocation une introduction aux méthodes dites "delta", reposant sur les développements limités, comme outil d'analyse des problèmes de sensibilité. Il comporte des rappels mathématiques et statistiques portant sur les développements limités eux-mêmes, les moments de variables aléatoires, notamment dans le cadre de problèmes multivariés. L'application des développements d'ordre 1 et 2 aux estimations des biais et variances fait l'objet d'une présentation détaillée. Destiné aux halieutes, ce rapport est illustré par une application aux calculs de rendements par recrue faisant suite à une analyse des cohortes de JONES (1974).

ABSTRACT : This report presents an introduction to so called "delta methods", associated to the use of Taylor's expansions, as a tool for sensitivity analyses. It starts with a mathematical and statistical summary about Taylor's expansion and moments of random variates. Special attention is paid to multivariate problems. The application of order 1 and 2 expansions to estimate variances and biases is exposed in great details. This report dedicated to fisheries scientists, is finally illustrated by an example associated to yield per recruit calculations, based upon JONE'S length cohort analysis.

mots-clés : SENSIBILITE - METHODE DELTA - RENDEMENT PAR RECRUE - ANALYSE DES COHORTES -

key words : SENSITIVITY - DELTA METHOD - YIELD PER RECRUIT - LENGTH COHORT ANALYSIS - v . P . A .

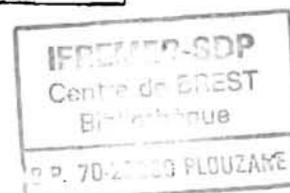
© IFREMER - Institut Français de Recherche pour l'Exploitation de la Mer, 1985.



IFREMER-Bibliothèque de BREST



OBR29996



46516

INTRODUCTION

Pendant longtemps les halieutes ont vécu en paix avec leur conscience en offrant ce qui leur paraissait la meilleure estimation possible, sans chercher à en apprécier la fiabilité. La nécessité d'offrir vite des éléments de décision a longtemps fait écarter un examen approfondi de cette fiabilité. Il est vrai par ailleurs que le problème n'est pas d'une extrême simplicité. Il n'est pourtant pas possible d'écarter indéfiniment la question. Rester dans l'ignorance de la fiabilité d'un pronostic, fondé sur une procédure donnée d'échantillonnage et d'ajustement des modèles, crée trois risques (liés) :

- affirmer ce qui en réalité n'est pas assuré, et courir ainsi le risque d'être démenti par les faits et/ou faire prendre une décision erronée ;

- à l'opposé disposer d'une précision "excessive", au prix d'un effort coûteux de collecte des données, alors qu'une précision inférieure eut été suffisante ;

- ne pas optimiser la stratégie de collecte des données et d'estimation des paramètres : si l'on ne peut évaluer la précision des résultats obtenus par deux filières, on ne pourra comparer leurs rapports qualité-prix. A cet égard la floraison des méthodes originales que connaissent actuellement certains domaines (Cf. techniques fondées sur les distributions de longueur) risque de mener à bien des débats stériles, chaque créateur de technique en assurant la promotion, si l'on ne peut objectivement en évaluer les performances.

Le souci de parvenir, même au prix de simplifications et d'approximations, à une évaluation de la fiabilité des diagnostics et pronostics devient en halieutique de plus en plus net. Il n'est d'ailleurs qu'un volet d'un mouvement, amorcé depuis un peu plus de dix ans, pour apporter plus de rigueur aux évaluations, faire bénéficier l'halieutique des outils et concepts développés en statistique et mathématiques appliquées, et notamment en biométrie.

En ce qui concerne les études de sensibilité, divers outils existent, dont une intéressante et très accessible revue a été faite pour l'halieutique par Majkowski (1982). Il convient de bien connaître les différents outils pour les choisir et combiner à bon escient. Les techniques de simulation, au sens le plus large, couvrant les méthodes usuelles de Monte-Carlo comme les techniques de rééchantillonnage (bootstrap, validation croisée et jackknife ; Efron, 1982 ; Efron et Gong, 1983), apportent des outils précieux. C'est un autre volet qui va être couvert ici avec les méthodes reposant sur les développements limités, parfois appelées méthodes delta.

Le but du présent document est donc une sensibilisation aux méthodes delta. Elles utilisent un arsenal mathématique qui n'est pas très sophistiqué, mais qui est indispensable. Quelques rappels constituent ainsi le paragraphe I. Dans un second paragraphe on en déduit des applications à l'étude des conséquences de modifications des valeurs attribuées à un ou plusieurs paramètres. Il devient alors facile de savoir "à moindre frais" si, par exemple, un diagnostic d'augmentation de rendement par recrue par modification du régime d'exploitation reste ou non vrai lorsque la valeur supposée pour M (mortalité naturelle) varie sur une plage donnée. Il est certes toujours possible dans pareil cas de renouveler tous les calculs en modifiant la valeur de M , mais les développements limités offrent souvent d'excellentes approximations. Ils permettent en outre de définir des coefficients de sensibilité, qui synthétisent la plus ou moins grande vulnérabilité d'un diagnostic vis-à-vis de différents paramètres.

Lorsque, faute de connaître exactement un ou plusieurs paramètres, on ne dispose que d'estimations, il se peut que, mieux qu'une plage de valeurs possibles, plus ou moins empiriquement définie, on dispose d'éléments sur la distribution des estimateurs utilisés. On souhaiterait alors pouvoir évaluer comment, par exemple, une certaine variance dans l'estimation d'un paramètre pourra engendrer biais et variance dans l'estimation de la grandeur sur laquelle se fonde le diagnostic (par exemple un rendement par recrue). Là encore les développements limités pourront être utiles, et ce sera même leur plus intéressante application. Reste que pour pouvoir comprendre les calculs correspondants il faudra disposer d'un minimum de connaissances sur les moments de variables aléatoires. Le paragraphe III est ainsi consacré aux rappels nécessaires.

Le paragraphe IV pourra ainsi exposer comment on peut, au prix d'approximations, bâtir des inférences sur des fonctions de paramètres dont la distribution statistique est connue ou estimée.

Tout au long de ce document référence sera souvent faite à un problème classique : l'évaluation des changements de rendement par recrue consécutifs à une modification du régime d'exploitation. Dans le paragraphe V ce problème sera repris, et illustré numériquement à partir d'un exemple classique, relatif à un stock de langoustine en Mer du Nord. Une autre illustration en halieutique pourra être trouvée chez Rivard(1983), qui fit oeuvre de précurseur en matière d'application des méthodes delta dans notre domaine.

I - RAPPEL SUR LES DEVELOPPEMENTS LIMITES

I-1 - Développements limités d'ordre 1

La manipulation de fonctions linéaires, du type $Y = ax + b$ est suffisamment simple pour que l'on cherche à s'y ramener, au besoin, au prix d'approximations. Soit, ainsi une fonction dérivable $\phi(x)$. On souhaiterait l'approcher "au mieux" par une fonction linéaire. Au voisinage d'un point (x_0, y_0) cette meilleure approximation linéaire correspond à la tangente à la courbe représentant la fonction ϕ .

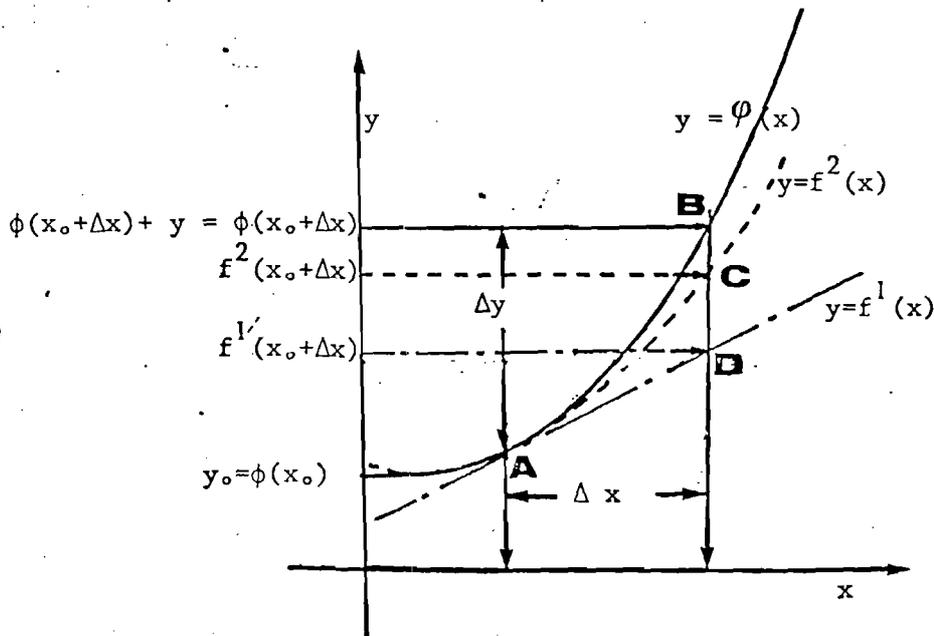


Figure 1 : Approximation d'une courbe par une tangente $y=f_1^1(x)$ ou une parabole $y=f_2^2(x)$

Cette tangente varie évidemment selon les points. Pour $x = 0$ la tangente a pour pente $\frac{d\phi(0)}{dx}$, valeur de la fonction dérivée $\frac{d\phi}{dx}$ pour $x = 0$.

Son équation s'écrit donc :

$$(1) \quad Y = \frac{d\phi(0)}{dx} x + \phi(0)$$

Pour des valeurs x proches de 0, on approchera la "vraie" valeur $\phi(x)$ à l'aide de la tangente⁽¹⁾ par :

$$\frac{d\phi(0)}{dx} x + \phi(0)$$

Cela correspond à un développement limité, dit d'ordre 1, parce qu'il ne comprend qu'un terme linéaire. L'approximation est évidemment d'autant moins bonne que l'on s'écarte de $x = 0$.

De façon générale, la tangente pour une valeur x^0 de l'abscisse aura pour équation :

$$(2) \quad \boxed{y - \phi(x^0) = \frac{d\phi(x^0)}{dx} (x - x^0)} \quad \text{pour approcher } \phi(x) \text{ par } f^1(x) \text{ à v}$$

$$(3) \quad \boxed{f^1(x) = x \frac{d\phi(x^0)}{dx} + \phi(x^0) - x^0 \frac{d\phi(x^0)}{dx}}$$

Là encore, l'approximation ne sera valide que pour des valeurs de x proche de x^0 . On notera couramment Δx l'écart entre x et x^0 , et $\Delta\phi$ l'écart $\phi(x) - \phi(x^0)$.

L'équation (2) amène ainsi à approcher $\Delta\phi$ par $\frac{d\phi(x^0)}{dx} \Delta x$.

On écrira ainsi :

$$(4) \quad \boxed{\Delta\phi \# \frac{d\phi(x^0)}{dx} \Delta x}$$

étant le symbole correspondant à "peu différent de".

Ces considérations sont illustrées par la figure 1.

I-2 - Développements limités d'ordre 2

L'approximation par une droite de la courbe représentant la fonction $\phi(x)$ est souvent médiocre dès que Δx est grand, et ce, d'autant plus que la courbure est forte au point x . Cette courbure est liée mathématiquement à la dérivée seconde $\frac{d^2\phi}{dx^2}$.

(1) En mathématique, on définit précisément la dérivée $\frac{d\phi}{dx}$ comme la limite, quand Δx tend vers 0, de $\frac{\phi(x + \Delta x) - \phi(x)}{\Delta x}$.

Pour prendre en compte la courbure, au lieu d'effectuer les approximations par une droite, on utilisera une parabole .

Il sera ainsi fait appel à la fonction $f^2(x) = a_{xx} x^2 + a_x x + a$.

Pour qu'au voisinage de $x = 0$ une telle parabole s'ajuste "au mieux" à la courbe $Y = \phi(x)$, il conviendra que :

- $\phi(0) = a$.
- les dérivées premières coïncident, c'est-à-dire que $\frac{d\phi(0)}{dx} = a_x$ puisque la dérivée première de $a_{xx}x^2 + a_x x + a$ est égale à $2a_{xx}x + a_x$, soit a_x pour $x = 0$
- les dérivées secondes coïncident elles aussi, c'est-à-dire que $\frac{d^2\phi(0)}{dx^2} = 2a_{xx}$ puisque la dérivée seconde est égale à $2a_{xx}$.

La parabole recherchée aura donc pour équation :

$$Y = \left(\frac{1}{2} \frac{d^2\phi(0)}{dx^2}\right) x^2 + \frac{d\phi(0)}{dx} x + \phi(0)$$

De façon générale, au voisinage du point x^0 , où l'on considère des écarts Δx , on approchera $\phi(x^0 + \Delta x)$ par $f^2(x)$ avec :

$$(5) \quad \phi(x^0 + \Delta x) \approx \phi(x^0) + \frac{d\phi(x^0)}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2\phi(x^0)}{dx^2} (\Delta x)^2$$

Lorsque Δx est petit, le terme d'ordre 2 est faible vis à vis du terme d'ordre 1 (si, par exemple, $\Delta x = 1/100$, $(\Delta x)^2 = 1/10\ 000$).

I-3 - Extension à plusieurs variables

Soit donc une fonction $\phi(x,y)$. Pour chaque variable, on pourra raisonner comme précédemment. De ce fait, si l'on considère des accroissements Δx et Δy à partir d'un point (x^0, y^0) , on approchera $\phi(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y)$ à l'aide de la relation :

$$(6) \quad \phi(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y) \approx \frac{\partial\phi(x^0, y^0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial\phi(x^0, y^0)}{\partial y} \Delta y + \phi(x^0, y^0)$$

$\frac{\partial \phi(x^0, y^0)}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial \phi(x^0, y^0)}{\partial y}$) désigne la dérivée partielle, y (resp. x) étant constant, au point (x^0, y^0) .

Les développements limités d'ordre 2 se généralisent en faisant appel aux dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} ; \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x \partial y} ; \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2}$$

Le développement limité d'ordre 2 conduit alors à l'approximation

$$(7) \quad \phi(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y) \approx \phi(x^0, y^0) + \frac{\partial \phi(x^0, y^0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \phi(x^0, y^0)}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(x^0, y^0)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 \phi(x^0, y^0)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(x^0, y^0)}{\partial y^2} (\Delta y)^2$$

$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$ n'est pas précédé du coefficient $\frac{1}{2}$ car l'on devrait avoir deux termes : $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$ et $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}$ mais que, classiquement, $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}$

On vérifie que cela équivaut à approcher la surface $Z = \phi(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y)$ par le paraboloïde d'équation :

$$Z = a_0 + a_x (\Delta x) + a_y (\Delta y) + a_{xx} (\Delta x)^2 + a_{xy} \Delta x \Delta y + a_{yy} (\Delta y)^2$$

avec,

$$a_0 = \phi(x^0, y^0) ; a_x = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \dots \text{etc} \dots$$

Ce paraboloïde est tangent à la surface et présente les mêmes "courbures". en (x^0, y^0)

Si l'on considère non plus deux variables, mais I variables θ_i ($i=1, \dots, I$), on aboutit à des formules analogues. Soient ainsi les valeurs de départ θ_i^0 , $i = 1, \dots, I$, et considérons des écarts $\Delta \theta_i^0$, menant aux nouvelles valeurs $\theta_i^0 + \Delta \theta_i^0$.

$$\Delta \phi = \phi(\theta_1^0 + \Delta \theta_1^0, \dots, \theta_I^0 + \Delta \theta_I^0) - \phi(\theta_1^0, \dots, \theta_I^0).$$

Un développement limité d'ordre 1 conduit à la relation :

$$\Delta\phi \approx \sum_{i=1}^I \frac{\partial\phi}{\partial\theta_i} \Delta\theta_i = \sum_{i=1}^I a_i \Delta\theta_i$$

si (8)

$$a_i = \frac{\partial\phi(\theta_1^0, \dots, \theta_i^0, \dots, \theta_I^0)}{\partial\theta_i}$$

A l'ordre 2 apparaît de même :

$$\Delta\phi = \sum_i \frac{\partial\phi}{\partial\theta_i} \Delta\theta_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta_i \partial\theta_j} \Delta\theta_i \Delta\theta_j$$

Les différentes dérivées premières et secondes étant calculées au point $(\theta_1^0 \dots \theta_n^0)^{(1)}$

Comme $\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta_i \partial\theta_j} = \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta_j \partial\theta_i}$ cela peut encore s'écrire :

$$\Delta\phi \approx \sum_{i=1}^I \frac{\partial\phi}{\partial\theta_i} \Delta\theta_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta_i^2} \Delta\theta_i^2 + \sum_{i>j} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta_i \partial\theta_j} \Delta\theta_i \Delta\theta_j$$

La sommation du dernier terme s'effectue seulement sur la moitié des couples (i,j) où $i \neq j$, puisque seul celui où $i > j$ est retenu. Cela explique la disparition du facteur $\frac{1}{2}$, comme dans l'équation (7) pour le terme en $\Delta x \Delta y$.

II - LES COEFFICIENTS DE SENSIBILITE

II-1. Généralités

A partir des observations, on peut calculer l'estimation $\hat{\theta}_1^*$ d'un paramètre θ_1 , ou plus généralement les estimations $\hat{\theta}_1^* \dots \hat{\theta}_I^*$ d'un ensemble de I paramètres⁽²⁾. Si l'on s'intéresse à une fonction ϕ des I paramètres, on en déduit une estimation $\hat{\phi}^* = \phi(\hat{\theta}_1^*, \dots, \hat{\theta}_I^*)$ de la vraie valeur $\phi(\theta_1, \dots, \theta_I) = \hat{\phi}$. A titre d'exemple, on peut chercher à estimer les variations de rendements par recrue liées à un changement de régime d'exploitation. L'ancien rendement par recrue est Y_r^1 , le nouveau Y_r^2 . La fonction de gain/perte est alors

(1) Une sommation sur plusieurs indices sera indiquée par un sigma majuscule en caractères gras

(2) La présence d'un accent circonflexe indique qu'il est question d'un estimateur. Un tel estimateur donne naissance à des estimations, qui recevront outre un accent, un astérisque. La vraie valeur, inconnue, du paramètre sera notée avec un tilde. La valeur courante ne comportera aucun signe distinctif.

définie par $\phi = 100 \left(\frac{Y_r^2}{Y_r^1} - 1 \right)$. ϕ quantifie en pourcentages, le gain ou la perte en termes de rendement par recrue.

Les paramètres sont en général inconnus, et l'on ne dispose ainsi que d'une estimation \hat{M}^* , dont on déduit une estimation des rendements par recrue, \hat{Y}_r^2 et \hat{Y}_r^1 et donc une estimation $\hat{\phi}^*$ de ϕ , avec :

$$\hat{\phi}^* = 100 \cdot \left(\frac{\hat{Y}_r^2}{\hat{Y}_r^1} - 1 \right)$$

L'estimation des paramètres est, en général, entachée d'incertitudes. Pour en explorer les conséquences sur les conclusions, liées à la valeur estimée $\hat{\phi}^*$, on peut examiner si, par exemple, des variations de M modifient, de façon importante, la valeur de ϕ . Lorsque l'on s'écarte de ce qui paraît la meilleure estimation \hat{M}^* , tout en restant dans la gamme des valeurs plausibles, selon les cas, $\phi(M)$ sera plus ou moins variable. Cela pourra donc invalider ou non un diagnostic tel que l'accroissement de rendement par recrue par augmentation du maillage. Il est, en général, possible de reprendre tous les calculs, pour un ensemble de valeurs $\{M\}$ de M . En utilisant des développements limités on commettra cependant souvent des erreurs d'approximation modérées, tout en disposant de formules beaucoup plus simples, raccourcissant les calculs, permettant d'utiliser par exemple les logiciels de tabulation usuels. Le calcul des dérivées permet, en outre, des calculs statistiques qui seront abordés dans le paragraphe III, et permet souvent d'"expliquer" la sensibilité par examen des formules obtenues.

II-2. Coefficients d'ordre 1

On souhaite souvent disposer d'un critère global de sensibilité vis-à-vis des différents paramètres. Les développements limités permettent ainsi de définir des coefficients de sensibilité. Dans le cas de la mortalité naturelle, le développement de ϕ en fonction de M , au voisinage de la valeur

(1) M désigne comme à l'accoutumée le coefficient instantané de mortalité naturelle.

M^0 conduit à l'ordre 1 à :

$$\Delta\phi \approx \frac{d\phi(M^0)}{dM} (M - M^0)$$

ou
$$\Delta\phi \approx \frac{d\phi(M^0)}{dM} \Delta M$$

si
$$\Delta M = M - M^0$$

Le terme $\frac{d\phi(M^0)}{dM}$ joue comme un coefficient multiplicatif. Selon qu'il est plus ou moins grand, pour une même valeur de ΔM , il en résulte un écart (approché) pour ϕ plus ou moins fort.

$\frac{d\phi(M^0)}{dM}$ est défini comme un coefficient de sensibilité absolue. Il convertit, de façon approchée, un écart absolu ΔM en un autre écart absolu $\Delta\phi$.

Il est fréquent que l'on souhaite plutôt considérer des variations relatives, et chercher pour un écart relatif $\frac{\Delta M}{M^0}$ une approximation de l'écart relatif $\frac{\Delta\phi}{\phi^0}$. Pour ce faire on repartira de la relation : $\Delta\phi \approx \frac{d\phi(M^0)}{dM} \Delta M$, dont on déduit, en divisant les 2 termes par $\phi(M^0)$

$$\frac{\Delta\phi}{\phi(M^0)} \approx \frac{1}{\phi(M^0)} \frac{d\phi(M^0)}{dM} \Delta M = \left(\frac{M^0}{\phi(M^0)} \frac{d\phi(M^0)}{dM} \right) \frac{\Delta M}{M^0}$$

Le coefficient recherché est ainsi égal à :

$$\frac{M^0}{\phi(M^0)} \frac{d\phi(M^0)}{dM}$$

C'est un coefficient de sensibilité relative. Comme il est plus couramment utilisé que le coefficient de sensibilité absolue, $\frac{d\phi(M)}{dM}$, lorsque l'on parle de coefficient de sensibilité c'est très généralement lui qui est en cause. En pratique, disposant d'une estimation \hat{M}^0 de \tilde{M} , les coefficients de sensibilité seront calculés pour $M^0 = \hat{M}^0$.

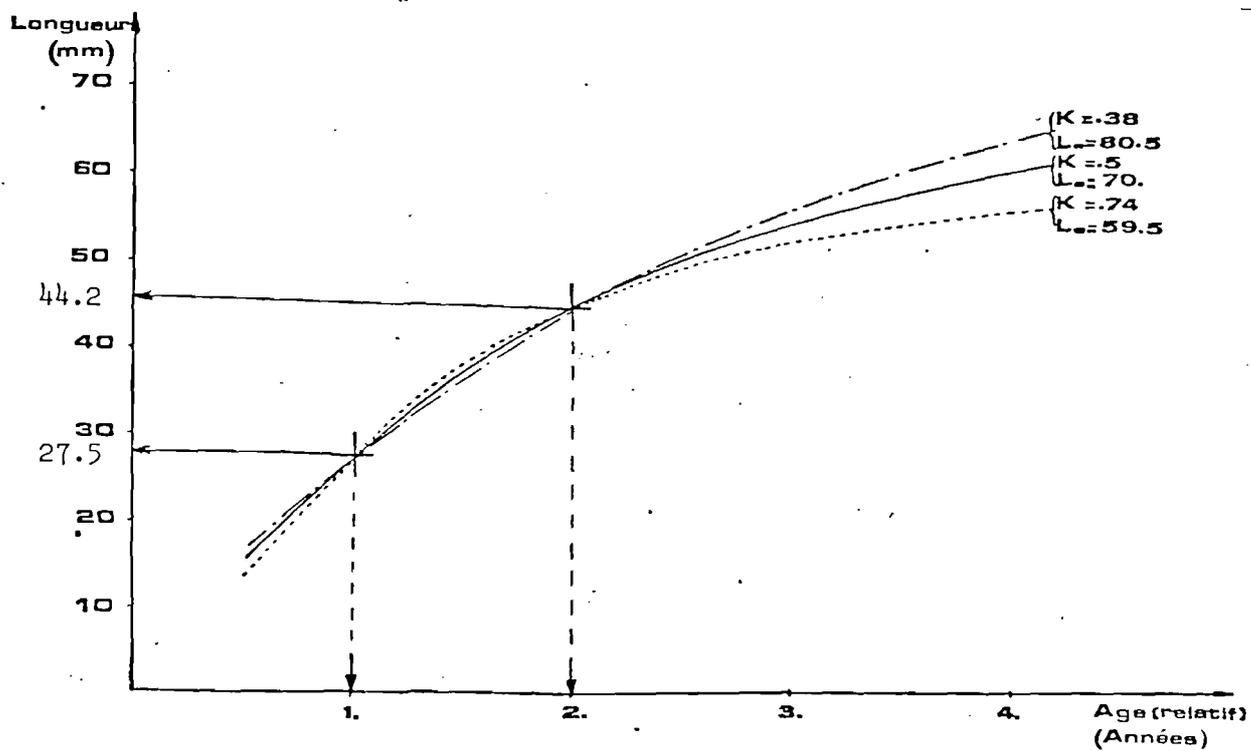


Figure 2 : Recouvrement de différentes courbes de Von Bertalanffy

Si l'on revient au cas général, où ϕ est liée à la valeur de I paramètres ($\theta_1, \dots, \theta_I$), pour chacun d'entre eux on définira un coefficient relatif de sensibilité donné par :

$$(8') \quad \alpha_i = \frac{\theta_i^\circ}{\phi(\theta_1^\circ, \dots, \theta_I^\circ)} \frac{\partial \phi(\theta_1^\circ, \dots, \theta_I^\circ)}{\partial \theta_i} \quad i = 1, \dots, I$$

La valeur de référence étant $\theta_1^\circ \dots \theta_I^\circ$

Ce coefficient relatif, α_i , est à rapprocher du coefficient absolu a_i (Cf. (8)). La valeur de référence étant $\theta_1^\circ \dots \theta_I^\circ$, les coefficients varient avec la valeur de référence. En pratique, les calculs s'effectueront avec pour valeur de référence la "meilleure" estimation $\{\hat{\theta}_i\}$ des $\{\theta_i\}$.

Ces coefficients apparaissent souvent comme une bonne quantification des sensibilités. Lorsque les dérivations sont impossibles, ou trop complexes, on cherchera ainsi à les approcher, en considérant des accroissements $\Delta\theta_i$, et en approchant $\frac{\partial \phi}{\partial \theta_i}$ par $\frac{1}{\Delta\theta_i} [\phi(\theta_1^\circ, \dots, \theta_i^\circ + \Delta\theta_i, \dots, \theta_I^\circ) - \phi(\theta_1^\circ, \dots, \theta_i^\circ, \dots, \theta_I^\circ)]$.

Lorsque plusieurs paramètres sont en cause, il faut toutefois prendre garde aux possibles risques d'interprétation "séparée" des différents coefficients, quand les incertitudes relatives à différents paramètres sont liées. Ainsi, lorsque l'on considère les paramètres de croissance que sont K et L^∞ , très souvent diverses courbes, associées à autant de valeurs pour le couple (K, L^∞) , paraissent presque aussi satisfaisantes. Il convient alors, pour passer d'une courbe à l'autre, de diminuer K lorsque l'on accroît L^∞ et inversement, comme le montre l'exemple de la figure 2.

Les dérivées partielles ont bien été indiquées comme se calculant pour une variable, les autres étant à valeur constante. Lorsque les incertitudes sont liées il n'est pas raisonnable d'interpréter séparément les coefficients issus de telles dérivées partielles. Cela équivaut à ne pas prendre en compte le lien entre les sources d'incertitude.

II-3. Coefficients de sensibilité d'ordre 2

La poursuite jusqu'à l'ordre 2 des développements limités amène des termes quadratiques. Pour chaque paramètre θ_i apparaît ainsi le terme :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(\theta_1^\circ, \dots, \theta_i^\circ, \dots, \theta_I^\circ)}{\partial \theta_i^2} (\theta_i - \theta_i^\circ)^2$$

On notera :

$$(9) \quad a_{ii} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(\theta_1^0, \dots, \theta_i^0)}{\partial \theta_i^2} \quad \text{Coefficient absolu}$$

$$(9') \quad \alpha_{ii} = \frac{1}{2} \frac{\theta_i^0{}^2}{\phi(\theta_1^0, \dots, \theta_i^0, \dots, \theta_I^0)} \frac{\partial^2 \phi(\theta_1^0, \dots, \theta_i^0, \dots, \theta_I^0)}{\partial \theta_i^2} \quad \text{Coefficient relatif}$$

Apparaîtront aussi des termes croisés du type :

$$\frac{\partial^2 \phi(\theta_1^0, \dots, \theta_I^0)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} (\theta_i - \theta_i^0) (\theta_j - \theta_j^0)$$

qui donneront naissance à des coefficients tels que :

$$(10) \quad a_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(\theta_1^0, \dots, \theta_I^0)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \quad (\text{coefficient absolu})$$

$$(10') \quad \alpha_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\theta_i^0 \theta_j^0}{\phi(\theta_1^0, \dots, \theta_i^0, \dots, \theta_I^0)} \frac{\partial^2 \phi(\theta_1^0, \dots, \theta_i^0, \dots, \theta_I^0)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \quad (\text{coefficient relatif})$$

On fera aussi parfois appel aux coefficients b_{ij} et β_{ij} avec $b_{ii} = a_{ii}$, $\beta_{ii} = \alpha_{ii}$ d'une part et $b_{ij} = 2a_{ij}$ et $\beta_{ij} = 2\alpha_{ij}$ pour $i \neq j$ d'autre part. De façon similaire $a_i = b_i$ et $\alpha_i = \beta_i$. Avec ces notations on approchera $\Delta\phi$ par :

$$\sum_{i=1}^I a_i \Delta\theta_i + \sum_{i,j=1}^I a_{ij} \Delta\theta_i \Delta\theta_j = \sum_{i=1}^I b_i \Delta\theta_i + \sum_{i=1}^I \beta_i (\Delta\theta_i)^2 + \sum_{i>j} b_{ij} \Delta\theta_i \Delta\theta_j$$

et de même l'écart relatif $\frac{\Delta\phi}{\phi}$ par :

$$\sum_{i=1}^I b_i \frac{\Delta\theta_i}{\theta_i^0} + \sum_{i,j=1}^I \beta_{ij} \frac{\Delta\theta_i}{\theta_i^0} \frac{\Delta\theta_j}{\theta_j^0} = \sum_{i=1}^I \beta_i \frac{\Delta\theta_i}{\theta_i^0} + \sum_{i=1}^I \beta_{ii} \left(\frac{\Delta\theta_i}{\theta_i^0}\right)^2 + \sum_{i>j} \beta_{ij} \frac{\Delta\theta_i}{\theta_i^0} \frac{\Delta\theta_j}{\theta_j^0}$$

Les coefficients d'ordre 2 sont plus difficiles à interpréter directement. Ils sont pourtant utiles pour l'approximation des biais. (Cf. §IV) Par ailleurs, lorsque les fonctions ϕ présentent une forte non linéarité, ils en constitueront les révélateurs.

III - RAPPELS DE PROBABILITE.

III-1. Moments et relations entre moments

III-1.1. Cas univarié

Soit une variable aléatoire x .⁽¹⁾ On appelle moment d'ordre k l'espérance mathématique (la valeur moyenne) de x^k . Le moment d'ordre 1 n'est autre que la moyenne classique $E(x)$.

On définit encore les moments centrés en considérant les variables $(x - E(x))^k$. Le moment centré d'ordre 2 n'est ainsi autre chose que la variance: $E(x - E(x))^2$.

A l'ordre 2 il existe une relation simple entre moments centrés et non centrés :

$$\begin{aligned} \text{Var}(x) &= E((x) - E(x))^2 = E(x^2 - 2x E(x) + E^2(x)) \\ E(E^2(x)) &= E^2(x) \text{ car } E^2(x) \text{ est une constante.} \\ \text{En outre } E(-2x E(x)) &= -2 E(x) E(x) = -2 E^2(x) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$(11) \quad \boxed{\text{Var}(x) = E(x^2) - E^2(x)}$$

On peut aboutir à des relations analogues, quoique plus complexes, pour les moments d'ordre supérieur. On s'intéresse souvent plus aux moments centrés qu'aux moments non centrés, sachant qu'il est de toutes façons possible de déduire les seconds des premiers.

Pour une distribution quelconque de la variable aléatoire, il ne sera généralement pas possible de déduire les moments d'ordre supérieur des moments d'ordres 1 et 2. C'est cependant possible pour une distribution normale. La chose n'est pas surprenante puisque cette distribution est régie par la densité de probabilité :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{avec } \mu = E(x) \text{ et } \sigma^2 = \text{Var}(x).$$

(1) La notation en italique est attachée aux variables aléatoires.

Toutes les caractéristiques de la distribution sont naturellement fonction des deux seuls paramètres μ et σ^2 . Pour une distribution à un paramètre, comme la loi de Poisson, tous les moments peuvent s'exprimer en fonction d'un seul. On sait ainsi que pour cette loi :

$$\text{Var}(x) = E(x) = \mu.$$

Pour une loi binomiale, autre famille de distributions à un paramètre, correspondant à la probabilité p , et un échantillon de taille n , $E(x) = np$ et $\text{Var}(x) = np(1-p)$. On obtient la relation cherchée entre $\text{Var}(x)$ et $E(x)$ en remplaçant p par $E(x)/n$. Dans une distribution à trois paramètres, les moments pourront de même se déduire de trois d'entre eux.

Pour en revenir aux lois normales, il apparaît d'abord que tous les moments centrés d'ordre impair seront nuls : si $k = 2m + 1$, m étant un entier, $E\{(x - E(x))^k\} = 0$. Ce résultat tient simplement à la symétrie de la loi normale de part et d'autre de la moyenne.

Les moments centrés d'ordre pair, pour $k = 2m$, se déduisent de la variance par :

$$(12) \quad E\{(x - E(x))^m\} = \text{Var}^m(x) \frac{(2m)!}{2^m m!}$$

Le point d'exclamation correspond à la factorielle. Si $m = 2$, cette relation mène à :

$$(13) \quad E\{(x - E(x))^4\} = 3 \text{Var}^2(x)$$

III-1.2. Cas bivarié

Si l'on considère deux variables x et y on peut ainsi définir des moments croisés tels que $E(x^k y^l)$, k et l étant deux entiers, ou des moments croisés centrés $E\{(x - E(x))^k (y - E(y))^l\}$. Pour $k = l = 1$, on aboutit ainsi à la covariance usuelle entre x et y . On démontre aisément une relation analogue à celle donnée par l'équation (11) :

$$\text{Cov}(x,y) = E(xy) - E(x) E(y)$$

Dans le cadre d'une hypothèse de binormalité il est possible de déduire des moments d'ordre 2. les moments d'ordre supérieur. Soit donc une distribution normale bivariée du couple (x, y) . Supposons pour simplifier que :

$$E(x) = E(y) = 0 \quad \text{Var}(x) = \sigma_x^2, \quad \text{Var}(y) = \sigma_y^2, \quad \text{CoV}(x, y) = \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y,$$

ρ_{xy} étant donc le coefficient de corrélation. Pour des raisons de symétrie des distributions on montre que les moments d'ordre 3 sont là encore nuls :

$$E(x^3) = E(y^3) = E(x^2 y) = E(x y^2) = 0$$

La relation 12 montre alors pour les moments d'ordre 4 que :

$$E(x^4) = 3 (E(x^2))^2 \quad \text{et} \quad E(y^4) = 3 (E(y^2))^2$$

Restent les moments croisés. On montre que :

$$(14) \quad E(x^2 y^2) = \sigma_x^2 \sigma_y^2 (1 + 2\rho_{xy}^2)$$

$$(15) \quad E(x^3 y) = 3 \rho_{xy} \sigma_x^3 \sigma_y$$

et de même

$$(15') \quad E(x y^3) = 3 \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y^3$$

Si x et y ne sont pas centrés, les moments non centrés se calculent en écrivant systématiquement :

$x = E(x) + x - E(x)$, $y = E(y) + y - E(y)$ et en développant les produits.

III-1.3. Cas multivarié

On s'en tiendra en fait aux situations à quatre variables, dont l'étude suffit à celle des moments d'ordre 4. De tels moments ne peuvent en effet concerner simultanément plus de quatre variables. Les distributions sont en outre supposées centrées.

Soit donc une distribution de dimension 4, correspondant aux variables x, y, z, t . Là encore l'hypothèse de normalité apportera des relations simples.

On montre en effet que :

$$(16) \quad E \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} = \text{Cov}(x, y) \text{Cov}(z, t) + \text{Cov}(x, z) \text{Cov}(y, t) \\ + \text{Cov}(x, t) \text{Cov}(y, z)$$

Les relations (13), (14), (15) et (15') ne constituent d'ailleurs que des cas particuliers de cette relation (16).

Hors de l'hypothèse de normalité des résultats peuvent être obtenus en faisant appel aux cumulants et fonctions caractéristiques (Cf. par exemple KENDALL & STUART, 1979, chapitres 3 et 4)

III-2. Application aux transformations linéaires et quadratiques des variables

III-2.1. Cas univarié

A) Transformation linéaire

Soit une variable aléatoire x d'espérance $E(x) = \bar{X}$ et de variance $\sigma_x^2 = \text{Var}(x)$. Considérons alors la variable z , déduite linéairement de x par la relation :

$$z = a_x x + a.$$

On en déduit immédiatement

$$(17) \quad E(z) = \bar{Z} = a_x \bar{X} + a.$$

$$(18) \quad \text{Var}(z) = a_x^2 \text{Var}(x)$$

$$\text{On en déduit encore } \text{Cv}^2(z) = \frac{a_x^2}{(a_x \bar{X} + a.)^2} \text{Var}(z) = \frac{a_x^2 \bar{X}^2}{\bar{Z}^2} \text{Cv}^2(x)$$

$\text{Cv}(z)$ étant le coefficient de variation de z , rapport de son écart-type à sa moyenne.

$$(19) \quad CV(z) = \frac{a_x \bar{X}}{a_x \bar{X} + a} \quad CV(x) = \alpha_x \quad CV(x)$$

si $\alpha_x = \frac{a_x}{\bar{X}}$ avec une notation inspirée du paragraphe II.2

B) Transformation quadratique :

Soit maintenant une relation quadratique (i. e. comportant un terme au carré) $z = a_{xx} x^2 + a_x x + a$. L'espérance de z se calcule aisément:

$$(20) \quad E(z) = a_{xx} \text{Var}(x) + a_{xx} \bar{X}^2 + a_x \bar{X} + a.$$

Cette espérance peut être comparée à $a_{xx} \bar{X}^2 + a_x \bar{X} + a$.

Il apparaît donc un "biais" $a_{xx} \text{Var}(x)$.

Son importance relative peut être appréciée par la relation :

$$(21) \quad \frac{E(z) - a_{xx} \bar{X}^2 - a_x \bar{X} - a}{a_{xx} \bar{X}^2 + a_x \bar{X} + a} = \frac{a_{xx} \text{var}(x)}{a_{xx} \bar{X}^2 + a_x \bar{X} + a} = \alpha_{xx} \text{CV}^2(x)$$

Si $\alpha_{xx} = \frac{\bar{X}^2 a_{xx}}{a_{xx} \bar{X}^2 + a_x \bar{X} + a}$ avec une notation inspirée du paragraphe II.3.

Le calcul de la variance de z est plus délicat. On peut y accéder en calculant d'abord $E(z^2)$ et en appliquant la relation (11), en vertu de laquelle $\text{var}(z) = E(z^2) - E^2(z)$

$$E(z^2) = E(a_{xx}^2 (x^4) + a_x^2 (x^2) + a^2 + 2 a_{xx} a_x (x^3) + 2 a_{xx} a (x^2) + 2 a_x a (x))$$

Soit encore,

$$E(z^2) = a_{xx}^2 E(x^4) + a_x^2 E(x^2) + a^2 + 2 a_{xx} a_x E(x^3) + 2 a_{xx} a E(x^2) + 2 a_x a E(x)$$

Apparaissent donc des moments d'ordre 3 et 4. Le calcul ne sera poursuivi désormais que sous l'hypothèse de normalité de x .
On supposera même que $E(x) = \bar{X} = 0$.

Dans ce cadre $E(x^3) = 0$ et $E(x^4) = 3 \text{Var}^2(x)$, ainsi

$$E(z^2) = 3 a_{xx}^2 \text{Var}^2(x) + (a_x^2 + 2 a_{xx} a_y) \text{Var}(x) + a_y^2$$

et puisque $E^2(z) = a_{xx}^2 \text{Var}^2(x) + 2 a_{xx} a_y \text{Var}(x) + a_y^2$

$$(22) \quad \boxed{\text{Var}(z) = a_x^2 \text{Var}(x) + 2 a_{xx}^2 \text{Var}^2(x)}$$

On voit donc apparaître le terme supplémentaire $2 a_{xx}^2 \text{Var}^2(x)$.

III-2.2. Cas bivarié

A) Transformation linéaire

Soient donc deux variables x et y de moyennes respectives \bar{X} et \bar{Y} .
Soit encore la variable z déduite de x et y par la relation :

$$z = a_x x + a_y y + a.$$

Dans ce cadre :

$$(23) \quad \boxed{E(z) = \bar{Z} = a_x \bar{X} + a_y \bar{Y} + a.}$$

$$(24) \quad \boxed{\text{Var}(z) = a_x^2 \text{Var}(x) + 2 a_x a_y \text{Cov}(x, y) + a_y^2 \text{Var}(y)}$$

Si $\text{Var}(x) = \sigma_x^2$, $\text{Var}(y) = \sigma_y^2$ et $\text{Cov}(x, y) = \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y$

$$\text{Var}(z) = a_x^2 \sigma_x^2 + 2 a_x a_y \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y + a_y^2 \sigma_y^2$$

On peut là aussi se ramener à un coefficient de variation, de telle sorte que :

$$(25) \quad \boxed{Cv^2(z) = \frac{a_x^2 \bar{X}^2}{\bar{Z}^2} Cv^2(x) + \frac{2 a_x a_y \bar{X} \bar{Y}}{\bar{Z}^2} Cc(x, y) + \frac{a_y^2 \bar{Y}^2}{\bar{Z}^2} Cv^2(y)}$$

$Cc(x, y)$ désignant le coefficient de covariation de x et y , c'est à dire

$$\frac{\text{Cov}(x, y)}{\bar{X} \bar{Y}}$$

B) Transformation quadratique

Soit maintenant une variable z définie par :

$$z = b_{xx} x^2 + b_{xy} x y + b_{yy} y^2 + b_x x + b_y y + b.$$

ou de façon équivalente :

$$z = a_{xx} x^2 + 2 a_{xy} x y + a_{yy} y^2 + a_x x + a_y y + a.$$

Les coefficients notés a et b sont égaux, à une exception près : $b_{xy} = 2 a_{xy}$. On conservera dans ce paragraphe le système de notation avec les coefficients b . (Mais pour faire du cas bivarié un cas particulier du cas multivarié il faut en revenir aux notations a .)

Son espérance se calculera directement :

$$(26) \quad E(z) = b_{xx} E(x^2) + b_{xy} E(xy) + b_{yy} E(y^2) + b_x E(x) + b_y E(y) + b$$

Soit en se ramenant aux moments centrés, et en remplaçant $E(x)$ par \bar{X} et $E(y)$ par \bar{Y} :

$$E(z) = b_{xx} \text{Var}(x) + b_{xy} \text{Cov}(x, y) + b_{yy} \text{Var}(y)$$

$$+ b_{xx} \bar{X}^2 + b_{xy} \bar{X} \bar{Y} + b_{yy} \bar{Y}^2$$

$$+ b_x \bar{X} + b_y \bar{Y} + b.$$

Si $\bar{Y} = \bar{X} = 0$, cette formule se simplifie en :

$$(27) \quad E(z) = b_{xx} \text{var}(x) + b_{xy} \text{Cov}(x, y) + b_{yy} \text{Var}(y) + b.$$

$$= b_{xx} \sigma_x^2 + b_{xy} \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y + b_{yy} \sigma_y^2 + b.$$

Le calcul de $E(z^2)$, dont on déduira $\text{var}(z) = E(z^2) - E^2(z)$ fera appel aux moments d'ordre 3 et 4. On supposera pour simplifier que $E(x) = E(y) = b = 0$. Avec une transformation linéaire cela impliquerait que $E(z) = 0$. Il n'en va plus de même avec une transformation quadratique.

Dans ce cadre :

$$\begin{aligned}
 E(z^2) &= b_x^2 \sigma_x^2 + 2 b_x b_y \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y + b_y^2 \sigma_y^2 \\
 &+ 2b_x b_{xx} E(x^3) + 2 b_y b_{yy} E(y^3) + 2 b_x b_{xy} E(x^2 y) + 2 b_y b_{xy} E(x y^2) \\
 &+ b_{xx}^2 E(x^4) + b_{xy}^2 E(x^2 y^2) + b_{yy}^2 E(y^4) \\
 &+ 2 b_{xx} b_{xy} E(x^3 y) + 2 b_{xx} b_{yy} E(x^2 y^2) + 2 b_{xy} b_{yy} E(x y^3)
 \end{aligned}$$

Si la distribution est binormale les formules se simplifient pour conduire à :

$$\begin{aligned}
 E(z^2) &= b_x^2 \sigma_x^2 + 2b_x b_y \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y + b_y^2 \sigma_y^2 \\
 &+ 3 b_{xx}^2 \sigma_x^4 + 6 b_{xx} b_{xy} \rho_{xy} \sigma_x^3 \sigma_y \\
 &+ (b_{xy}^2 + 2 b_{xx} b_{yy}) (1 + 2 \rho_{xy}^2) \sigma_x^2 \sigma_y^2 \\
 &+ 6 b_{xy} b_{yy} \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y^3 + 3 b_{yy}^2 \sigma_y^4
 \end{aligned}$$

Cette relation s'obtient en application des formules du paragraphe III.1.2.

Si l'on soustrait $E^2(z)$ on en déduit :

$$(28) \quad \boxed{\text{Var}(z) = V_1 + V_2}$$

avec :

$$(28') \quad \boxed{V_1 = b_x^2 \text{Var}(x) + 2 b_x b_y \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y + b_y^2 \text{var}(y)}$$

et

$$\begin{aligned}
 (28'') \quad V_2 &= 2 b_{xx}^2 \sigma_x^4 + 4 b_{xx} b_{xy} \rho_{xy} \sigma_x^3 \sigma_y \\
 &+ (b_{xy}^2 (1 + \rho_{xy}^2) + 4 b_{xx} b_{yy} \rho_{xy}^2) \sigma_x^2 \sigma_y^2 \\
 &+ 4 b_{xy} b_{yy} \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y^3 + 2 b_{yy}^2 \sigma_y^4
 \end{aligned}$$

III-2.3. Cas multivarié

A) Transformations linéaires

Soient I variables aléatoires x_i , et la variable z définie à partir des précédentes par :

$$z = \sum_i a_i x_i + a$$

L'espérance de x_i est \bar{x}_i , sa variance σ_i^2 . La covariance des variables i_1 et i_2 est notée C_{i_1, i_2} . Cela implique donc que :
 $C_{i, i} = \sigma_i^2$

L'espérance de z se calcule aisément :

$$(29) \quad E(z) = \bar{z} = \sum_{i=1}^I a_i \bar{x}_i + a$$

et de même,

$$(30) \quad \text{Var}(z) = \sum_{i_1, i_2} a_{i_1} a_{i_2} C_{i_1, i_2}$$

On peut vérifier que les formules (23) et (24) constituent des cas particuliers des relations (29) et (30) avec $a_1 = a_x$ et $a_2 = a_y$

B) Transformations quadratiques

Soit cette fois :

$$z = \sum_{i_1, i_2} a_{i_1, i_2} x_{i_1} x_{i_2} + \sum_{i=1}^I a_i x_i + a$$

On en déduit :

$$(31) \quad E(z) = \sum_{i_1, i_2} a_{i_1, i_2} C_{i_1, i_2} + \sum_{i_1, i_2} a_{i_1, i_2} \bar{x}_{i_1} \bar{x}_{i_2} + \sum_i a_i \bar{x}_i + a$$

Si les x_i sont centrés elle se transforme en :

$$(31') \quad E(z) = \sum_{i_1, i_2} a_{i_1, i_2} C_{i_1, i_2} + a$$

La formule 27 constitue un cas particulier de l'équation 31 avec $a = b$; $a_1 = b_x$; $a_2 = b_y$; $a_{1,1} = b_{xx}$; $a_{1,2} = \frac{b_{xy}}{2}$, $a_{2,2} = b_{yy}$

Le calcul de $E(z^2)$, qui offrira celui de $\text{var}(z)$ par la formule 11 sera conduit dans le cas où $\bar{X}_i = 0$ pour tout i , et $a_i = 0$.

Dans ce cadre :

$$E(z^2) = \sum_{i_1, i_2} a_{i_1} a_{i_2} C_{i_1, i_2} \\ + \sum_{i_1, i_2, i_3} a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} E(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}) \\ + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4} a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} a_{i_4} E(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4})$$

Sous hypothèse de normalité il est possible de tout exprimer en fonction des variances-covariances (cf. § III-1.3). Les termes d'ordre 3 $E(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3})$, disparaissent.

La formule (16) montre que :

$$E(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}) = C_{i_1, i_2} C_{i_3, i_4} + C_{i_1, i_3} C_{i_2, i_4} + C_{i_1, i_4} C_{i_2, i_3}$$

Dans le même temps la formule 31 se résume à :

$$E(z) = \sum_{i_1, i_2} a_{i_1, i_2} C_{i_1, i_2}$$

Par ailleurs,

$$E^2(z) = \left(\sum_{i_1, i_2} a_{i_1, i_2} C_{i_1, i_2} \right)^2 = \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4} a_{i_1, i_2} a_{i_3, i_4} C_{i_1, i_2} C_{i_3, i_4}$$

$$\text{Var}(z) = E(z^2) - E^2(z) = \sum_{i_1, i_2} a_{i_1, i_2} C_{i_1, i_2}$$

$$+ \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4} a_{i_1, i_2} a_{i_3, i_4} (C_{i_1, i_3} C_{i_2, i_4} + C_{i_1, i_4} C_{i_2, i_3})$$

Les termes en $C_{i_1, i_2} C_{i_3, i_4}$ ont disparu, de par la soustraction de $E^2(z)$.

On voit donc qu'au terme $V_1 = \sum_{i_1, i_2} a_{i_1, i_2} C_{i_1, i_2}$ s'ajoute le terme V_2 :

$$(32) \quad V_2 = \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4} a_{i_1, i_2} a_{i_3, i_4} (C_{i_1, i_3} C_{i_2, i_4} + C_{i_1, i_4} C_{i_2, i_3})$$

La formule (28) correspond à un cas particulier où $I = 2$; avec $a_{1,1} = b_{x,x}$; $a_{1,2} = \frac{1}{2} b_{x,y}$; $a_{2,2} = b_{y,y}$

IV ESTIMATION DE L'ESPERANCE ET DE LA VARIANCE D'UNE FONCTION

Soit donc une fonction $\phi(\theta_1, \dots, \theta_I)$, dont on cherche à estimer la valeur au point $(\theta_1, \dots, \theta_I)$. La position exacte de ce point n'est pas connue, mais il existe des estimateurs $\hat{\theta}_i$ des θ_i . Conformément aux conventions exposées par la note infrapaginale 2 de page 9, une estimation ponctuelle sera notée $\hat{\phi}^*$. La variance vraie de l'estimateur $\hat{\theta}_i$ sera notée σ_i^2 , la covariance des estimateurs $\hat{\theta}_{i_1}$ et $\hat{\theta}_{i_2}$, \hat{C}_{i_1, i_2} . Selon la démarche classique des problèmes d'inférence, on cherchera tout d'abord à calculer, ou du moins à approcher la variance vraie de l'estimateur $\hat{\phi} = \phi(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_I)$, et son espérance. En pratique les covariances des $\hat{\theta}_i$ seront généralement inconnues. On disposera en générale de simples estimations, notées \hat{C}_{i_1, i_2}^* . En remplaçant dans les formules bâties dans la première étape, les variances et covariances vraies par les estimations, on obtiendra une estimation des biais et variances.

Si ϕ désigne, comme en II, $100 \left(\frac{Y_r^2}{Y_r^1} - 1 \right)$, $\frac{Y_r^2}{Y_r^1}$ étant le rapport des

des rendements par recrue correspondant à deux régimes d'exploitations différents, le calcul de ϕ suppose, entre autres, que soient connues les mortalités aux âges (ou aux longueurs), les paramètres de croissance. Les mortalités étant calculées par une analyse des cohortes (sur les âges ou longueur), ces calculs se feront sur la base des distributions d'âge ou de longueur dans les prises P_j , $j = 1, \dots, J$. (J correspondant au nombre de groupes d'âges ou de taille). Ces distributions sont généralement inconnues. On ne dispose que d'estimations \hat{P}_j sur la base d'un échantillonnage. De même, faute des véritables paramètres K et L^∞ , on ne disposera que d'estimations \hat{K} et \hat{L}^∞ . Les I variables évoquées précédemment seront donc $\theta_1 = K$, $\theta_2 = L^\infty$, $\theta_3 = P_1$, $\theta_4 = P_2 \dots$, en supposant cette fois que les autres paramètres (à commencer par M) soient constants⁽¹⁾. Si l'on ne traite que de l'incertitude relative aux paramètres de croissance, seuls les paramètres $\theta_1 = K$ et $\theta_2 = L^\infty$ apparaîtront.

(1) Des paramètres tels que M ou le taux d'exploitation terminal E^+ d'une analyse des cohortes sont évidemment soumis à des incertitudes. Mais à notre connaissance, on ne peut quantifier statistiquement ces incertitudes, et les traitements proposés ici sont donc inapplicables.

IV-1 Application des développements d'ordre 1

IV-1-1 Approximation de la variance vraie

A/Généralités

Un développement limité d'ordre 1 conduit, au voisinage du point $(\theta_1^0, \dots, \theta_I^0)$, à approcher $\phi(\theta_1, \dots, \theta_I)$ par $f^1(\theta_1, \dots, \theta_I)$, avec

$$(33) \quad f^1(\theta_1, \dots, \theta_I) = \phi(\theta_1^0, \dots, \theta_I^0) + \sum_{i=1}^I (\theta_i - \theta_i^0) \frac{\partial \phi(\theta_1^0, \dots, \theta_I^0)}{\partial \theta_i}$$

En fait on effectuera des développements au voisinage des vraies valeurs : $\theta_i^0 = \tilde{\theta}_i$. Par la suite donc il y aura équivalence entre θ_i^0 et $\tilde{\theta}_i$. De même, on notera $\tilde{\phi} = \phi^0$ la vraie valeur $\phi(\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_I)$.

Si l'on dispose d'estimateurs $\hat{\theta}_i$ des $\tilde{\theta}_i$, on en déduit l'estimateur $\hat{\phi} = \phi(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_I)$, et l'estimateur "approché" $\hat{f}^1 = f^1(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_I)$

$$E(\hat{\phi}) \neq E(\hat{f}^1) = \phi(\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_I) + \sum_{i=1}^I (E(\hat{\theta}_i) - \tilde{\theta}_i) \frac{\partial \phi(\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_I)}{\partial \theta_i}$$

$$(34) \quad E(\hat{\phi}) \neq E(\hat{f}^1) = \tilde{\phi} + \sum_{i=1}^I \tilde{a}_i (\bar{\theta}_i - \tilde{\theta}_i) \quad , \tilde{a}_i \text{ étant défini}$$

par l'équation (8), qui s'écrit ici :

$\tilde{a}_i = \frac{\partial \phi}{\partial \theta_i}(\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_I)$. La présence du tilde sur a_i indique que le calcul s'effectue au point $(\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_I)$. $\bar{\theta}_i$ est l'espérance de $\hat{\theta}_i$.

Si les $\hat{\theta}_i$ sont des estimateurs non biaisés, la formule (34) se simplifie en : $E(\hat{\phi}) \neq E(\hat{f}^1) = \tilde{\phi}$.

Par la suite on développera essentiellement ce cas, pour concentrer la discussion d'éventuels biais de $\hat{\phi}$ comme estimateur de $\tilde{\phi}$, sur l'influence de la non linéarité de ϕ , que les développements d'ordre supérieur à 1 permettront d'approcher.

Le seul développement limité d'ordre 1 ne permet pas ici de mettre en évidence de biais, car il ne comporte que des termes linéaires. Il faut en venir à un développement d'ordre 2 pour obtenir une approximation plus réaliste de biais, qui seront la règle dès lors que la fonction ϕ n'est pas linéaire vis à vis des θ_i .

Les développements limités d'ordre 1 permettent en revanche d'obtenir une approximation des variances, par le truchement de la relation (30) :

$$(35) \quad \text{Var}(\hat{\phi}) \approx \text{Var}(\hat{f}^1) = \sum_{i_1, i_2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta_{i_1}} \frac{\partial \phi}{\partial \theta_{i_2}} \hat{c}_{i_1, i_2} = \sum_{i_1, i_2} \hat{\alpha}_{i_1} \hat{\alpha}_{i_2} \hat{c}_{i_1, i_2}$$

Si l'on s'intéresse au coefficient de variation $\hat{c}_v^2(\hat{\phi})$, on fera appel aux coefficients de sensibilité définis par l'équation 8'

$$(32) \quad \hat{c}_v^2(\hat{\phi}) \approx \sum_{i_1, i_2} \hat{\alpha}_{i_1} \hat{\alpha}_{i_2} \hat{c}_{i_1, i_2}$$

\hat{c}_{i_1, i_2} désignant le coefficient de covariation de $\hat{\theta}_{i_1}$ et $\hat{\theta}_{i_2}$

puisque :

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\hat{\sigma}_i}{\hat{\phi}} \frac{\partial \phi}{\partial \theta_i}$$

Si une seule variable θ_1 est considérée, la formule (24) mène à :

$$\hat{c}_v^2(\hat{\phi}) \approx (\hat{\alpha}_1)^2 \hat{c}_v^2(\hat{\theta}_1)$$

$$(32) \quad \hat{c}_v(\hat{\phi}) \approx \hat{\alpha}_1 \hat{c}_v(\hat{\theta}_1)$$

Le coefficient de sensibilité d'ordre 1 permet donc de convertir directement le coefficient de variation d'un paramètre en coefficient de variation résultant pour $\hat{\phi}$.

B/illustration

Considérons l'analyse des changements de rendements par recue consécutifs à une modification du régime d'exploitation.

La fonction quantifiant les gains ou pertes a été précédemment définie comme $\phi = 100 \left(\frac{Y_r^2}{Y_r} - 1 \right)$. Elle est soumise, entre autres, aux incertitudes sur la croissance, et donc aux problèmes d'estimation de K et L_∞ . Les vraies valeurs K et L_∞ étant inconnues, on ne dispose que d'estimateurs \hat{K} et \hat{L}_∞ . Dans ce cadre $\hat{\phi} = \phi(\hat{K}, \hat{L}_\infty)$ est estimée par $\hat{\phi} = \phi(\hat{K}, \hat{L}_\infty)$. La formule (34) devient:

$$E(\hat{\phi}) \approx \phi(\hat{K}, \hat{L}_\infty) + \frac{\partial \phi}{\partial K} (E(\hat{K}) - K) + \frac{\partial \phi}{\partial L_\infty} (E(\hat{L}_\infty) - L_\infty)$$

Si les estimateurs \hat{K} et \hat{L}_∞ sont non biaisés, en première approximation (i.e. selon un développement d'ordre 1) $\hat{\phi}$ le sera aussi.

La variance de $\hat{\phi}$ sera quant à elle approximativement égale à :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial K} \right)^2 \text{Var}(\hat{K}) + 2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial K} \frac{\partial \phi}{\partial L_\infty} \right) \text{Cov}(\hat{K}, \hat{L}_\infty) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial L_\infty} \right)^2 \text{Var}(\hat{L}_\infty)$$

Le problème précédemment évoqué, du lien des incertitudes sur K et L_∞ est pris en compte par le terme médian, où apparaît la covariance. Ce terme est très souvent négatif. Il vient atténuer les conséquences des variances de \hat{K} et \hat{L}_∞ , prises isolément.

On peut de même examiner les conséquences d'erreurs d'échantillonnage sur les distributions d'âge ou de longueur dans les captures, en supposant cette fois K et L_∞ connus. La fonction ϕ se trouvera fonction de la composition des prises P_j $j = 1, \dots, J$, par l'intermédiaire des mortalités. Si les variances et covariances des \hat{P}_j , estimateurs des \tilde{P}_j , sont connues, la variance de $\hat{\phi} = \phi(\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_J)$ sera approximativement égale à :

$$\sum_{j_1, j_2} \frac{\partial \phi}{\partial \hat{P}_{j_1}} \frac{\partial \phi}{\partial \hat{P}_{j_2}} \text{Cov}(\hat{P}_{j_1}, \hat{P}_{j_2})$$

Les dérivées doivent être calculées pour les "vraies" fréquences \tilde{P}_j .

IV-1-2 Estimation de la variance vraie

Dans la pratique les formules précédentes ne peuvent être directement appliquées. Elles font en effet appel au calcul des dérivées premières au point $(\theta_1, \dots, \theta_I)$, qui est inconnu, et aux variances vraies des estimateurs elles aussi souvent inconnues. Dans une situation concrète on disposera en fait d'estimations $\hat{\theta}_i^*$ des θ_i , et d'estimations \hat{C}_{i_1, i_2}^* des covariances C_{i_1, i_2} . On adaptera alors les formules précédentes, pour construire des estimations des espérances et variances. Les dérivées seront calculées au point $(\hat{\theta}_i^*)$, définissant des coefficients \hat{a}_i^* , estimations des \tilde{a}_i . Les variances et covariances vraies seront remplacées par les estimations disponibles. A titre d'exemple l'adaptation de la relation (35) conduira à estimer $\text{Var}(\hat{\Phi})$ par:

$$\sum_{i_1, i_2} \hat{a}_{i_1}^* \hat{a}_{i_2}^* \hat{C}_{i_1, i_2}^*$$

La variance ainsi calculée est entachée de deux sources d'erreur: l'erreur d'approximation d'une part, l'erreur d'estimation au sens statistique d'autre part.

IV-2 Applications des développements d'ordre 2

IV-2-1 Approximation et estimation des biais

A/Approximation du biais vrai d'un estimateur

A l'ordre deux, un développement au voisinage du point $(\theta_1, \dots, \theta_I)$, conduit à approcher $\Phi(\theta_1, \dots, \theta_I)$ par $f^2(\theta_1, \dots, \theta_I)$, défini par :

$$\Phi(\theta_1, \dots, \theta_I) + \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} (\theta_i - \hat{\theta}_i) + \sum_{i_1, i_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_{i_1} \partial \theta_{i_2}} (\theta_{i_1} - \hat{\theta}_{i_1}) (\theta_{i_2} - \hat{\theta}_{i_2})$$

Les dérivées se calculant au point $(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_I)$, cela amènera à utiliser comme approximation de $\Phi(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_I)$, la statistique \hat{f}^2 définie par :

$$\hat{f}^2 = \Phi(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_I) + \sum_i \tilde{a}_i (\hat{\theta}_i - \hat{\theta}_i) + \sum_{i_1, i_2} \tilde{a}_{i_1, i_2} (\hat{\theta}_{i_1} - \hat{\theta}_{i_2}) (\hat{\theta}_{i_1} - \hat{\theta}_{i_2})$$

Les \tilde{a}_i ont déjà été définis. Les coefficients \tilde{a}_{i_1, i_2} se définissent de façon similaire :

$$\tilde{a}_{i_1, i_2} = \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_{i_1} \partial \theta_{i_2}}$$

Avec ces notations:

(33) $E(\hat{\Phi}) \neq E(\hat{f}^2) = \Phi + \sum_i \tilde{a}_i (\bar{\theta}_i - \hat{\theta}_i) + \sum_{i_1, i_2} \tilde{a}_{i_1, i_2} C_{i_1, i_2}$

Si les estimateurs $\hat{\theta}_i$ sont non biaisés, la formule se simplifie;

(34) $E(\hat{\Phi}) - \Phi \neq E(\hat{f}^2) - \Phi = \sum_{i_1, i_2} \tilde{a}_{i_1, i_2} C_{i_1, i_2}$

On peut exprimer ce biais en termes relatifs:

$$(35) \quad \frac{E(\Phi) - \bar{\phi}}{\bar{\phi}} \neq \frac{E(f^2) - \bar{\phi}}{\bar{\phi}} = \sum_{i_1, i_2} \tilde{\alpha}_{i_1, i_2} \tilde{c}_{i_1, i_2}$$

\tilde{c}_{i_1, i_2} désigne comme précédemment le coefficient de covariation de θ_{i_1} et θ_{i_2}

Conformément à l'équation (10') $\tilde{\alpha}_{i_1, i_2}$ est défini par :

$$\tilde{\alpha}_{i_1, i_2} = \frac{\tilde{\theta}_{i_1} \tilde{\theta}_{i_2}}{\bar{\phi}} \tilde{a}_{i_1, i_2}$$

Si un seul paramètre est en cause la relation (35) se ramène à :

$$\frac{E(\Phi) - \bar{\phi}}{\bar{\phi}} \neq \alpha_{1,1} CV^2(\theta_1)$$

Cette relation offre un intérêt direct aux coefficients de sensibilité d'ordre deux.

B/Estimation du biais

Comme pour les développements d'ordre 1 pour obtenir une estimation du biais on devra d'une part calculer les dérivées aux points $(\hat{\theta}_1^*, \dots, \hat{\theta}_I^*)$, et remplacer les variances et covariances vraies par leur estimation.

L'adaptation de la formule (34) donnera alors une estimation du biais, égale à :

$$\sum_{i_1, i_2} \hat{a}_{i_1, i_2}^* \hat{c}_{i_1, i_2}^*$$

Les \hat{a}_{i_1, i_2}^* se déduisent des dérivées secondes calculées au point $(\hat{\theta}_1^*, \dots, \hat{\theta}_I^*)$

En théorie, on dispose donc d'un outil de correction des biais.

Reste que, comme les variances, les biais calculés par les formules précédente sont soumis à deux sources d'erreurs : celles induites par les approximations celles liées aux erreurs d'estimation des \tilde{c}_{i_1, i_2} . Pour ce qui concerne la première source d'erreur, un développement limité, même conduit à l'ordre 2 reste une approximation, valable à condition que les $\hat{\theta}_j$ ne s'écartent "pas trop" des $\tilde{\theta}_j$.

L'estimation du biais sera donc d'autant meilleure que ces biais sont eux mêmes faibles, puisque dépendant des variances et covariances \tilde{C}_{i_1, i_2} . La technique présentée est ainsi utile pour indiquer si l'on peut craindre ou non des biais importants. Si les biais suggérés sont faibles, il sera possible de les corriger approximativement. Lorsque les formules suggèrent des biais importants, mieux vaut envisager des techniques comme le jackknife, le bootstrap ou les validations croisées.

IV-2.2. Réexamen du problème des variances

Ce réexamen suppose la connaissance des moments d'ordre trois et quatre. Il n'y sera ainsi procédé que sous l'hypothèse de normalité, comme dans le paragraphe III-2.

Si l'on considère un seul paramètre quelconque θ_1 , l'application de la formule (22) conduit à :

$$\text{Var}(\hat{\phi}) = 2 \hat{a}_{1,1}^2 \text{Var}^2(\hat{\theta}_1) + \hat{a}_1 \text{Var}(\hat{\theta}_1)$$

avec $\hat{a}_1 = \frac{\partial \phi}{\partial \theta_1}$ et $\hat{a}_{1,1} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta_1^2}$, les dérivées étant calculées au point $(\hat{\theta}_1)$.

Dans un cadre bivarié on appliquera les formules (28), (28^{bis}) et (28^{ter}). Si l'on considère le couple $(\hat{K}, \hat{L}_\infty)$ et la fonction ϕ de gain/perte, il convient ainsi d'ajouter à la variance déduite du développement d'ordre 1 le terme \tilde{V}_2 :

$$\begin{aligned} \tilde{V}_2 = & 2 \tilde{b}_{K,K}^2 \sigma_K^4 + 4 \tilde{b}_{K,K} \tilde{b}_{K,L} \rho_{K,L} \sigma_K^3 \sigma_L \\ & + (\tilde{b}_{K,L}^2 (1 + \rho_{K,L}^2) + 4 \tilde{b}_{K,K} \tilde{b}_{L,L} \rho_{K,L}^2) \sigma_K^2 \sigma_L^2 \\ & + 4 \tilde{b}_{K,L} \tilde{b}_{L,L} \rho_{K,L} \sigma_K \sigma_L^3 + 2 \tilde{b}_{L,L}^2 \sigma_L^4 \end{aligned}$$

$$\text{Si } \sigma_K^2 = \text{var}(\hat{K}), \sigma_L^2 = \text{var}(\hat{L}_\infty), \rho_{KL} = \frac{\text{Cov}(\hat{K}, \hat{L}_\infty)}{\sigma_K \sigma_L}$$

$$\tilde{b}_{K,K} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial K^2}, \tilde{b}_{K,L} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial K \partial L_\infty}; \tilde{b}_{L,L} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial L_\infty^2}$$

Dans un cadre multivarié le terme additif sera déduit de la formule (32) où $\hat{a}_{i,j} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$ et $\hat{c}_{i,j} = \text{Cov}(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j)$.

Les calculs qui précèdent sont relatifs à l'approximation de la variance vraie de l'estimateur ϕ . On construira une estimation en suivant les mêmes procédures que celles exposées dans les paragraphes IV-1-2 et IV-2-1 B.

Globalement, le calcul des termes d'ordre 2 sera d'abord utile pour vérifier, sous hypothèse de normalité (ou d'une hypothèse mieux adaptée) qu'ils sont faibles vis-à-vis de ceux correspondant au développement d'ordre 1. Lorsque tel n'est pas le cas le calcul de variance, incluant les termes d'ordre deux, sera fondé à deux conditions :

- que l'hypothèse de normalité (ou l'hypothèse équivalente) soit fondée, ou fournisse au moins une approximation raisonnable, (Ce sera par exemple le cas si les estimateurs du Jackknife sont utilisés, et si l'on suit la conjecture de Tukey jusqu'à la normalité).
- que l'approximation de ϕ apporté par un développement d'ordre 2 soit fidèle sur le domaine où se regroupe l' "essentiel" des points $\{\hat{\theta}_i\}$ de part et d'autre de la valeur vraie $\{\hat{\theta}_i\}$ l'étendue de ce domaine étant fonction des variances des $\hat{\theta}_i$.

V - ILLUSTRATION

V-1 - Présentation de l'exemple

Les données qui apparaissent dans le tableau 1 ont été empruntées à JONES (1979). La deuxième colonne de ce tableau regroupe les distributions de longueur de captures de langoustines mâles, sur un stock de Mer du Nord. Les longueurs, exprimées en mm, correspondent à la longueur céphalo thoracique. On cherche alors à évaluer l'impact de modifications du régime d'exploitation par rapport à la situation de référence, celle engendrant, à l'équilibre, la distribution de longueur observée. Cette distribution est supposée (hypothèse d'école) correspondre à un échantillonnage aléatoire simple de taille 1 000.

Pour obtenir les évaluations de rendements par recrue il faut supposer connues la croissance et la mortalité naturelle. Il est alors possible de pratiquer une analyse des cohortes de JONES (1974) qui fournit des estimations de mortalité par pêche F_i , pour tout intervalle de longueurs

Longueur de début d'inter- valle	Captures	Délai DT	Mortalité par pêche F	F x DT	Z x DT	Effectif
14.0	1.00	.036	.001	.000	.007	19668.1
15.0	18.00	.037	.025	.001	.008	19525.9
16.0	25.00	.037	.035	.001	.009	19365.2
17.0	39.00	.038	.054	.002	.010	19196.0
18.0	46.00	.039	.063	.002	.010	19011.5
19.0	35.00	.040	.047	.002	.010	18818.6
20.0	68.00	.040	.091	.004	.012	18635.2
21.0	95.00	.041	.126	.005	.013	18417.5
22.0	342.00	.042	.453	.019	.028	18171.6
23.0	360.00	.043	.480	.021	.029	17678.5
24.0	525.00	.044	.710	.031	.040	17168.6
25.0	815.00	.045	1.133	.051	.060	16495.6
26.0	1012.00	.046	1.472	.068	.077	15536.7
27.0	726.00	.047	1.106	.052	.061	14387.2
28.0	760.00	.048	1.205	.058	.068	13529.9
29.0	807.00	.049	1.342	.066	.076	12643.8
30.0	850.00	.051	1.495	.076	.086	11716.5
31.0	927.00	.052	1.745	.091	.101	10752.8
32.0	1023.00	.053	2.097	.112	.122	9719.6
33.0	1030.00	.044	2.342	.128	.139	8599.0
34.0	900.00	.056	2.288	.129	.140	7481.0
35.0	820.00	.058	2.341	.136	.147	6502.4
36.0	715.00	.060	2.299	.137	.149	5611.6
37.0	630.00	.062	2.284	.141	.153	4933.8
38.0	505.00	.063	2.057	.131	.143	4148.6
39.0	370.00	.066	1.668	.109	.122	3594.8
40.0	320.00	.068	1.575	.107	.120	3160.4
41.0	348.00	.070	1.891	.133	.147	2819.7
42.0	365.00	.073	2.252	.164	.178	2434.9
43.0	320.00	.075	2.281	.172	.197	2037.1
44.0	297.00	.078	2.485	.195	.211	1689.2
45.0	209.00	.082	2.048	.167	.184	1368.4
46.0	185.00	.085	2.101	.179	.196	1138.9
47.0	167.00	.089	2.231	.198	.216	936.3
48.0	149.00	.093	2.390	.222	.241	754.3
49.0	117.00	.098	2.277	.222	.242	592.8
50.0	419.00		1.800			465.6

- TABLEAU 1 -

Données de base et résultats de l'analyse des cohortes de Jones.

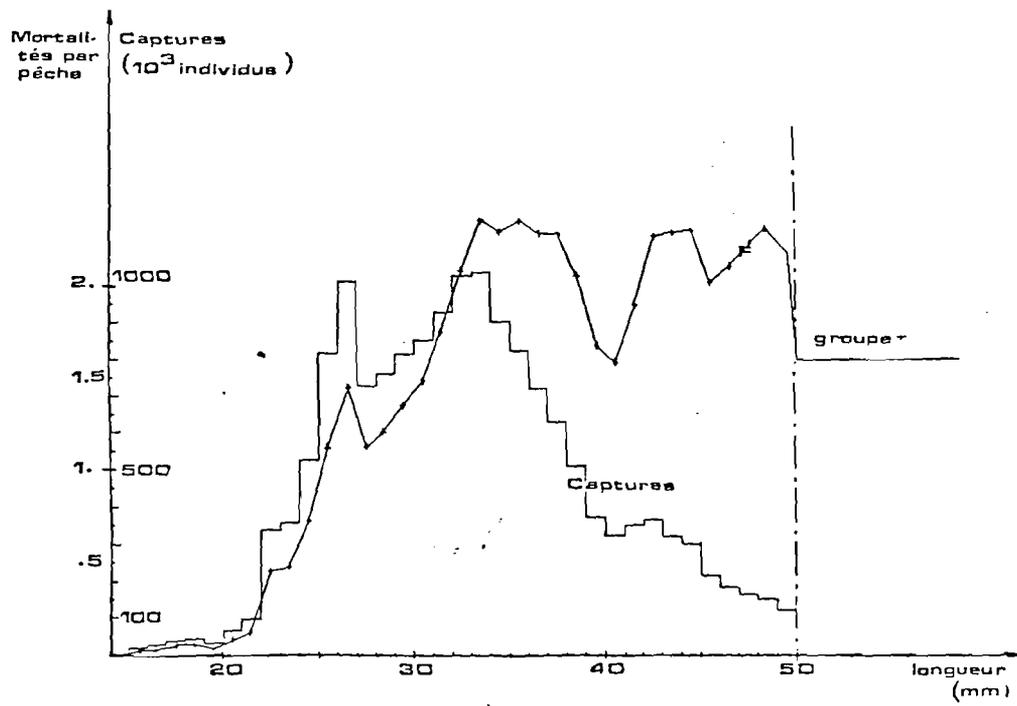


Figure 3 : Histogramme des captures et mortalités par pêche aux longueurs dans l'exemple traité des langoustines (*Nephrops norvegicus*)

(ℓ_i, ℓ_{i+1}) de l'histogramme. Il convient toutefois d'inclure un paramètre supplémentaire, le taux d'exploitation final $E^+ = \left(\frac{F^+}{F^+ + M} \right)$, qui prévaut sur le dernier intervalle de l'histogramme. Cet intervalle regroupe les captures de taille supérieure à un seuil ℓ^+ , définissant la borne inférieure du Groupe +.

Les mortalités par pêche étant désormais connues, il est possible, en gardant les mêmes valeurs pour K , L^∞ et M , de calculer les rendements par recrue. C'est ce qui a été fait en utilisant l'approximation de Thompson et Bell (cf. Laurec et Le Guen, 1981) qui amène à négliger les croissances pondérales à l'intérieur d'un intervalle de longueur (ℓ_i, ℓ_{i+1}) . Toutes les captures opérées dans cet intervalle reçoivent le poids $\bar{W}_i = a \bar{\ell}_i^b$, $\bar{\ell}_i$ étant égal à : $\frac{\ell_i + \ell_{i+1}}{2}$; (a et b sont les paramètres de la relation taille-poids). Le schéma de discrétisation utilisé pour les calculs de rendement par recrue est le même que celui utilisé pour l'histogramme des captures, à une nuance près. Dans l'histogramme des captures les longueurs supérieures à ℓ^+ sont regroupées, la mortalité par pêche étant supposée constante au delà de ℓ^+ . Pour des raisons techniques (Pereiro et Pallares, 1984 ; Laurec et Mesnil, 1985 a) il est hautement souhaitable que ℓ^+ soit nettement inférieur à L^∞ . Il demeure qu'au delà de ℓ^+ les animaux continuent de grandir. C'est pourquoi dans les calculs de rendement par recrue il vaut mieux continuer la discrétisation aussi près que possible de L^∞ . Le pas de l'histogramme étant $\Delta\ell$, on poursuit donc le découpage des gammes de longueur au delà de ℓ^+ , jusqu'à une longueur ℓ_I , inférieure à L^∞ mais telle que $\ell_I + \Delta\ell \geq L^\infty$.

Le programme utilisé "bloque" alors la croissance à ℓ_I . Toutes les captures au delà de cette longueur reçoivent le poids $W_I = a \ell_I^b$.

Pour les analyses, il a été supposé que $K = .5$, $L^\infty = 70$ mm et $M = .2$. Le groupe + débute à 50 mm, ainsi $\ell^+ = 50$; mais $\ell_I = 69$.

Les paramètres de croissance correspondent au choix initial de JONES (1979). Un taux d'exploitation terminal de .9 a été choisi. L'ensemble des mortalités par pêche ainsi calculées apparaît dans le tableau 1 en colonne 4. Le vecteur mortalité obtenu a été reporté sur la figure 3. Quatre intervalles feront l'objet d'une attention particulière dans les illustrations. Ils sont associés aux bornes inférieures de longueur 25, 35, 40 et 45. Les lignes correspondantes ont donc été soulignées

dans le tableau 1. Dans le même tableau, apparaît en colonne 3 DT_i , délai nécessaire pour croître de la longueur l_i à la longueur l_{i+1} . Ce laps croît en effet avec la longueur l_i du fait du ralentissement de croissance inhérent au modèle de Von Bertalanffy.

Pour les calculs de rendement par recrue, l_I a été choisi égal à 69. La croissance a été supposé isométrique, de telle sorte que le coefficient b de la relation taille-poids $w = a l^b$ a été supposé égal à 3.

Le coefficient a est sans importance, car on évalue des rapports de rendements par recrue : il joue de façon multiplicative, apparaît ainsi en numérateur et dénominateur.

Le calcul des dérivées de $\phi = 100 \left(\frac{Y_r^2}{Y_r^1} - 1 \right)$ a été fait selon la méthode présentée par Laurec et Mesnil (1985, b). Sans entrer dans le détail de ces calculs, il est important de savoir qu'ils reposent extensivement sur la dérivation des fonctions de fonctions.

Ainsi les rendements par recrue dépendent des mortalités par pêche, elles-mêmes fonctions des paramètres de croissance. Le cas de la mortalité naturelle est plus intéressant, car ce paramètre influence les calculs de rendement par recrue de deux façons :

- directement car toutes les formules de calcul des rendements font explicitement apparaître M ,
- indirectement, car les formules donnant les rendements font aussi appel aux mortalités par pêche dans la situation de référence, qui dépendent elles-mêmes de la valeur admise pour M . Ainsi :

$$\frac{d Y_r^1}{dM} = \frac{\partial Y_r^1}{\partial M} + \sum_i \frac{\partial Y_r^1}{\partial F_i} \frac{d F_i}{d M}$$

Le terme $\frac{\partial Y_r^1}{\partial M}$ traduit l'action directe.

Le second correspond aux actions indirectes, par l'entremise des F_i . La résultante globale est notée $\frac{dY^1_r}{dM}$ bien qu'il s'agisse aussi d'une dérivée partielle.

Dans une certaine mesure pour les autres paramètres K , L^∞ et E^+ une combinaison d'action directe et indirecte peut aussi apparaître : si les longueurs ℓ^+ et ℓ_I sont distinctes, comme ce sera le cas dans l'exemple, les calculs de production au delà de ℓ^+ donneront des résultats dépendant des valeurs assignées à K , L^∞ et E^+ . Cela crée une action directe qui s'ajoute à celle liée aux F_i .

Les régimes envisagés dans les calculs correspondent à de simples variations du niveau d'exploitation. Il n'y a donc pas de modification du profil (ou diagramme) de mortalité par rapport au régime de référence. Chaque régime est ainsi caractérisé par un multiplicateur μ vis-à-vis de la situation de référence. La fonction de gain/perte Φ peut donc être définie comme une fonction de μ . Φ a été calculée pour un ensemble de valeurs de μ , qui conduit à la figure 4. Cette courbe à l'allure classique d'un rendement par recrue en fonction de l'effort. La transformation en fonction de gain/perte ne correspond qu'à un changement d'échelle et d'origine pour les ordonnées.

Quatre valeurs ont fait l'objet d'une attention particulière, à titre d'illustration. A ces quatre valeurs sont attachés autant de scénarios, numérotés en chiffres romains, de I à IV.

Ces scénarios correspondent à des multiplicateurs de l'effort μ égaux respectivement à 0.5, 0.9, 1.01 et 1.5. On reviendra sur le scénario III ($\mu = 1.01$). Les autres valeurs choisies l'on été pour illustrer la différence des sensibilités selon que l'on considère une réduction de l'effort (scénario I et II) ou une augmentation (scénario IV), mettre en évidence les nuances entre diminution forte ($\mu = 0.5$), ou faible ($\mu = 0.9$).

Le scénario III correspond en fait au souhait d'apprécier les variations locales du rendement par recrue au voisinage du statu quo. Ces variations locales sont liées avant tout à la dérivée $Y'_r(1)$ dérivée du rendement par recrue selon μ pour $\mu = 1$. Selon le signe de cette dérivée les diagnostics les plus rustiques conclueront à un stock sous exploité ($Y'_r(1) > 0$) ou surexploité ($Y'_r(1) < 0$). Cette dérivée sera également à prendre en considération si l'on se réfère au célèbre $F_{0.1}$. Dans la détermination de diagnostics économiques, elle jouera aussi un rôle crucial lorsque

Le coût est supposé proportionnel à l'effort. C'est pourquoi LAUREC et MESNIL (1986) ont proposé d'y attacher une importance particulière. Dans la détermination de stratégies d'échantillonnages elle peut ainsi offrir un critère synthétique, si l'on cherche à maximiser la précision obtenue dans l'estimation de $Y_r(1)$ pour un coût donné. Cela paraît par exemple plus pertinent que le critère proposé par WHITE (1983), considérant des intégrations sur la plage d'effort de 0 à un niveau quelconque. Dans une telle valeur intégrée les bas niveaux d'effort peuvent en effet jouer un rôle central, comme on le verra plus loin. En pratique pourtant les réductions d'effort concevables sont modérées, et la précision de l'évaluation d'impacts de réductions massives est rarement à l'ordre du jour.

Cela étant, il conviendrait en toute rigueur de calculer les coefficients de sensibilité de $Y_r'(1)$, c'est mathématiquement possible. Une excellente approximation peut aussi être obtenue par :

$$\frac{Y_r(1 + \Delta \mu) - Y_r(1)}{\Delta \mu}$$

Si $\Delta \mu = .01$ cela peut encore s'écrire :

$$100 (Y_r(1.01) - Y_r(1)) = Y_r(1) (\phi(1.01))$$

Au coefficient multiplicatif $Y_r(1)$ pris on retrouve donc $\phi(1.01)$. L'apparition d'un coefficient multiplicatif ne modifiant pas les coefficients de sensibilités, la sensibilité de $\phi(1.01)$ donnera une approximation de celle de $Y_r'(1)$.

V - 2. Etudes directes de sensibilité

Les coefficients de sensibilité seront notés avec les conventions du paragraphe II, le (ou les) paramètre(s) concerné(s) apparaissant en indice, L^∞ étant simplifié en L, E^+ en E. Apparaîtront donc des termes tels que $\beta_K, \beta_L, \beta_{KK}, \beta_{LL} \dots \beta_M, \beta_E \dots$

Les dérivées et coefficients de sensibilité ont été calculées à l'ordre 1 et 2 vis-à-vis des paramètres K, L^∞ M et E^+ . Les coefficients croisés d'ordre deux ont aussi calculés pour les couples (K et L^∞) d'une part, K et M d'autre part. L'attention portée au couple (K, L^∞) est due à la forte dépendance des incertitudes sur ces deux paramètres de croissance. Pour ce qui est du couple (K, M) il mérite aussi un examen joint car on peut montrer que les fonctions de gain/perte ne dépendent que du rapport K/M, et non de la valeur individuelle de chacun des coefficients. De cela on peut d'ailleurs déduire les relations :

$$\beta_K = -\beta_M ; \beta_{KK} = -\beta_M - \beta_{MM} ; \beta_{KM} = -\beta_M - 2\beta_{MM} = \beta_K - 2\beta_{KK}$$

pour les coefficients associés à la fonction de gain-perte.

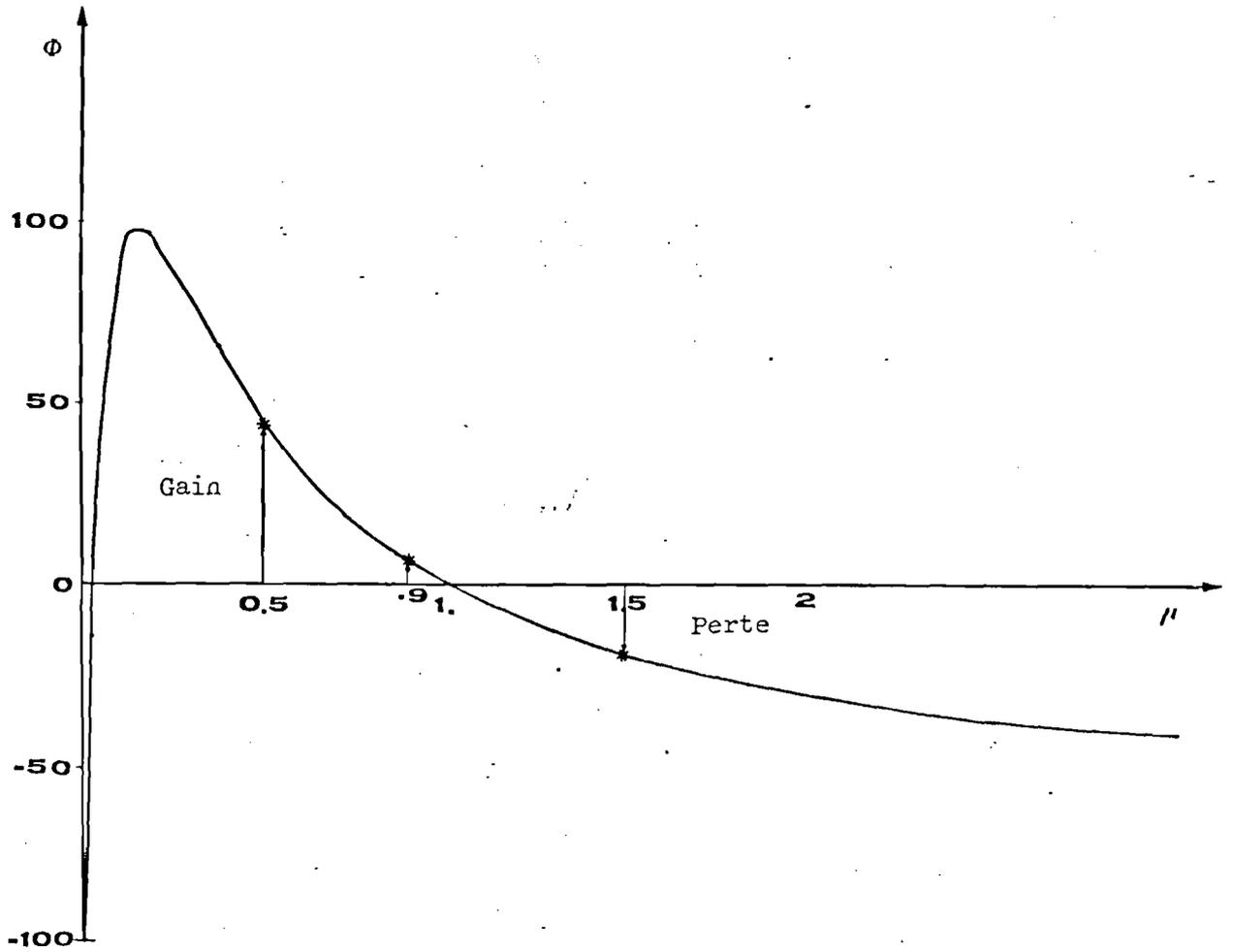


Figure 4: Evolution avec le multiplicateur de l'effort μ de la fonction de gain/perte ϕ

Début d'intervalle	β_K	β_{LK}	β_L	β_{LL}	β_{KL}	β_M	β_{MM}	β_{KM}	β_E	β_{EE}
14.0	1.193	.013	1.575	-.144	1.531	-.183	.013	.157	.040	-.038
15.0	1.175	.011	1.586	-.140	1.546	-.175	.014	.153	.040	-.038
16.0	1.168	.010	1.603	-.135	1.561	-.168	.010	.146	.040	-.038
17.0	1.161	.009	1.618	-.131	1.576	-.161	.009	.143	.040	-.038
18.0	1.154	.008	1.635	-.127	1.593	-.154	.008	.136	.040	-.038
19.0	1.146	.007	1.651	-.123	1.610	-.146	.007	.132	.040	-.038
20.0	1.136	.006	1.669	-.118	1.628	-.138	.006	.127	.040	-.038
21.0	1.131	.005	1.687	-.114	1.646	-.131	.005	.121	.040	-.039
22.0	1.123	.004	1.707	-.110	1.666	-.123	.004	.116	.040	-.039
23.0	1.117	.003	1.730	-.107	1.691	-.117	.003	.111	.041	-.039
24.0	1.111	.002	1.755	-.104	1.716	-.111	.002	.106	.042	-.040
25.0	1.105	.002	1.782	-.101	1.744	-.105	.002	.101	.043	-.041
26.0	1.102	.002	1.845	-.099	1.778	-.102	.002	.098	.046	-.044
27.0	1.099	.002	1.852	-.098	1.816	-.099	.002	.096	.049	-.046
28.0	1.095	.001	1.887	-.096	1.851	-.095	.001	.093	.051	-.049
29.0	1.091	.001	1.924	-.094	1.889	-.091	.001	.089	.055	-.052
30.0	1.087	.001	1.963	-.092	1.929	-.087	.001	.086	.058	-.055
31.0	1.084	.001	2.006	-.091	1.972	-.084	.001	.083	.063	-.059
32.0	1.082	.000	2.053	-.090	2.020	-.082	.000	.081	.069	-.064
33.0	1.080	.000	2.106	-.091	2.073	-.080	.000	.079	.077	-.071
34.0	1.080	.001	2.164	-.091	2.132	-.080	.001	.079	.087	-.080
35.0	1.080	.001	2.225	-.090	2.194	-.080	.001	.078	.100	-.090
36.0	1.080	.001	2.289	-.090	2.260	-.080	.001	.078	.114	-.101
37.0	1.079	.001	2.357	-.088	2.329	-.079	.001	.077	.131	-.114
38.0	1.079	.001	2.429	-.085	2.403	-.079	.001	.076	.150	-.128
39.0	1.077	.001	2.502	-.080	2.476	-.077	.001	.074	.171	-.142
40.0	1.073	.001	2.572	-.074	2.551	-.073	.001	.070	.191	-.155
41.0	1.067	.001	2.645	-.067	2.625	-.067	.001	.065	.213	-.168
42.0	1.062	.001	2.725	-.060	2.708	-.062	.001	.060	.243	-.184
43.0	1.058	.001	2.814	-.053	2.800	-.058	.001	.057	.286	-.204
44.0	1.054	.001	2.909	-.045	2.897	-.054	.001	.052	.340	-.224
45.0	1.049	.001	3.012	-.035	3.003	-.049	.001	.048	.413	-.242
46.0	1.042	.001	3.113	-.025	3.107	-.042	.001	.041	.489	-.250
47.0	1.033	.000	3.218	-.015	3.215	-.033	.000	.032	.584	-.243
48.0	1.022	.000	3.319	-.007	3.327	-.022	.000	.021	.712	-.205
49.0	1.008	.000	3.442	-.001	3.442	-.008	.000	.008	.890	-.098
50.0	.000	.000	.000	.000	.000	9.000	.000	.000	10.000	90.000

- TABLEAU 2 -

Coefficients de sensibilité des mortalités par pêche.

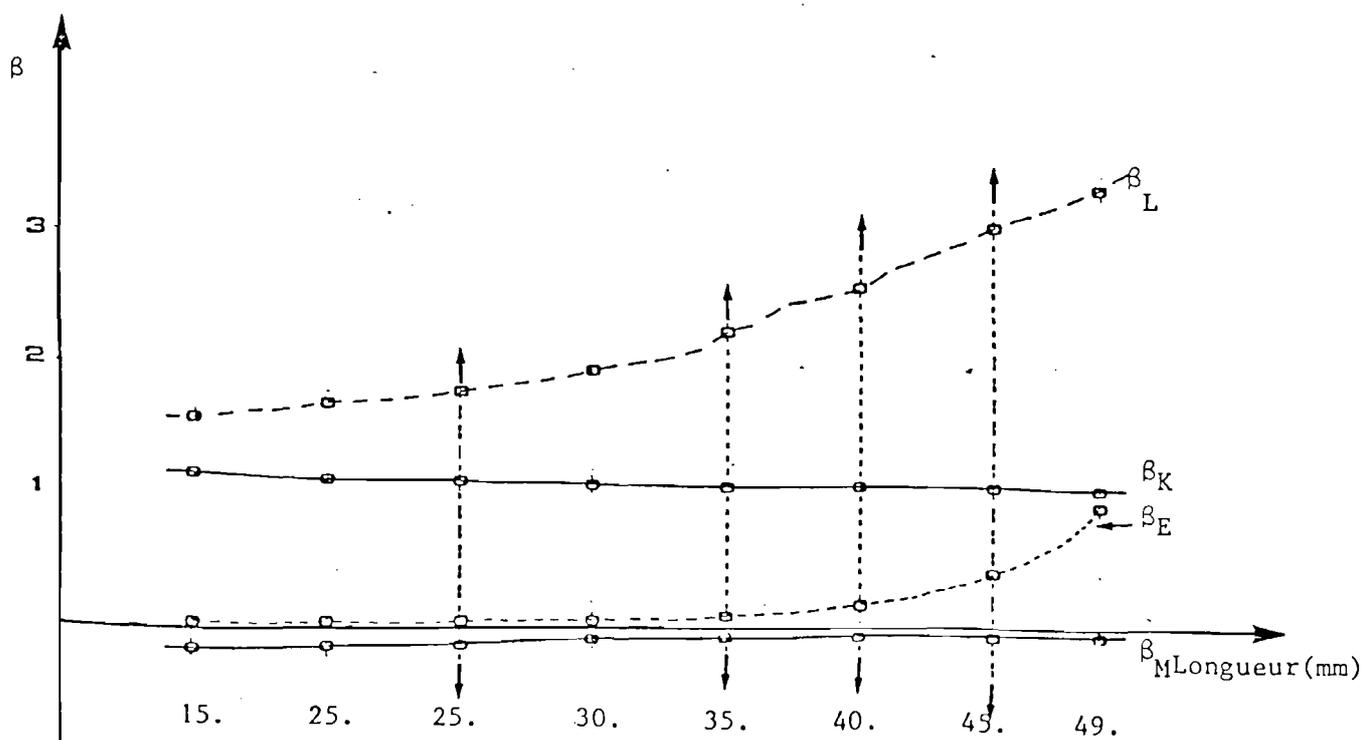


Figure 5 : Coefficients de sensibilité d'ordre 1 des mortalités par pêche aux longueurs

V-2-1. Sensibilité des mortalités par pêche

A) Examen du tableau des coefficients.

Les coefficients β apparaissent dans le tableau 2. La figure 5 visualise les coefficients d'ordre 1.

On peut noter que les coefficients d'ordre deux sont très généralement plus faibles que leurs homologues d'ordre 1. Dans les développements limités les termes d'ordre deux joueront donc un rôle généralement réduit, d'autant plus faible que les écarts relatifs $\frac{\Delta\theta}{\theta}$ considérés étant régulièrement inférieurs à 1, l'élévation à la puissance 2 les réduira $(\frac{\Delta\theta^2}{\theta}) \ll \frac{\Delta\theta}{\theta}$.

Les comparaisons de colonne à colonne font apparaître l'importance des coefficients liés aux paramètres de croissance. En fait, la liaison des paramètres K et L_∞ rend peu utilisable cette constatation. Supposons ainsi que les connaissances acquises garantissent qu'il faut un an pour passer d'une longueur de 27.5 à 44.2. Il n'est pas rare en effet de rencontrer des situations de ce type, notamment lorsque deux modes annuels sont clairement visibles, mais qu'au delà des âges correspondant le recouvrement des longueurs pour deux âges contigus ne permet plus d'interprétation directe. Dans ce cadre, toute courbe de Von Bertalanffy est satisfaisante dès lors que $K = \text{Log} \left(\frac{L_\infty - 27.5}{L_\infty - 44.2} \right)$. Aux arrondis près, les trois courbes de la figure 2 sont alors satisfaisantes.

Dans ce cadre, l'incertitude sur la croissance peut être ramenée à L_∞ , les variations de K étant asservies à celles de L_∞ , par l'équation ci-dessus. On peut alors calculer la dérivée résultante globale $\frac{dF}{dL_\infty}$, opposée à la dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial L_\infty}$. Les formules usuelles de dérivation de fonction de fonction mènent alors à :

$$\frac{dF}{dL_\infty} = \frac{\partial F}{\partial K} \frac{dK}{dL_\infty} + \frac{\partial F}{\partial L_\infty}$$

$$\frac{d^2F}{dL_\infty^2} = \frac{\partial F}{\partial K} \frac{d^2K}{dL_\infty^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} \left(\frac{dK}{dL_\infty} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L_\infty} \frac{dK}{dL_\infty} + \frac{\partial^2 F}{\partial L_\infty^2}$$

Les dérivées premières et secondes de K vis-à-vis de L_∞ se calculent aisément, à partir de l'équation $K = \text{Log} \left(\frac{L_\infty - 27.5}{L_\infty - 44.2} \right)$

$$\frac{dK}{dL_\infty} = \frac{1}{L_\infty - 27.5} - \frac{1}{L_\infty - 44.2} ; \quad \frac{d^2K}{dL_\infty^2} = \frac{1}{(L_\infty - 44.2)^2} - \frac{1}{(L_\infty - 27.5)^2}$$

On peut alors déduire de ces dérivations des coefficients de sensibilité d'ordre 1 et 2.

Pour F_{25} ils seront respectivement égaux à $- .58$ et 1.34 , pour F_{35} à $- .08$ et $.26$, pour F_{40} à $.28$ et $- .51$, enfin pour F_{45} à $.77$ et $- 1.5$. Ils restent relativement forts notamment pour les coefficients d'ordre 2 mais les erreurs relatives concevables sur L^∞ sont aussi plus faibles que pour M . Les incertitudes résultant sur les F des incertitudes sur M et L^∞ seront ainsi dans l'ensemble du même ordre. La sensibilité vis-à-vis de E^+ paraît quant à elle nettement moindre.

En examinant la figure 5, ou le tableau 2 de ligne à ligne et non de colonne à colonne, on peut tout d'abord retrouver la classique convergence, la sensibilité vis-à-vis de E^+ s'estompant quand les tailles diminuent. Pour la sensibilité vis-à-vis de M une tendance inverse s'observe.

Vis à vis des paramètres de croissance, si on considère séparément K et L^∞ le phénomène le plus net correspond à un affaiblissement de l'impact des incertitudes sur L^∞ quand la taille diminue. Si l'on considère le couple (K et L^∞), en asservissant les variations de K à celle de L^∞ , comme on l'a fait plus haut, une interprétation simple est délicate, car l'évolution selon les longueurs des coefficients d'ordre 1 et 2, montre des tendances divergentes. Des développements limités explicites sont nécessaires.

B) Développements limités.

La qualité des approximations apportées par les développements d'ordre 1 et 2 peut être appréciée sur le tableau 3. Les exemples traités sont associés aux mortalités aux longueurs précédemment annoncées comme bénéficiant d'une attention particulière (25, 35, 40, 45).

Les plages considérées pour K vont de $.3$ à $.7$ (bloc 1) pour L^∞ de 55 à 80 (bloc 2). Aller au-delà de ces plages mène à des valeurs aberrantes pour les mortalités (cf. les valeurs dépassant 3. pour $L^\infty = 80$)

	Base	Base	Base	Base	F ²⁵			F ³⁵			F ⁴⁰			F ⁴⁵		
	K = .5	L=70.	M = .2	E ⁺ = .9	(Base F ²⁵ = 1.13)			(Base F ³⁵ = 2.34)			(Base F ⁴⁰ = 1.58)			(Base F ⁴⁵ = 2.05)		
	ΔK	ΔL=	ΔM	ΔE ⁺	F ²⁵ Δ ¹	F ²⁵ Δ ¹ +Δ ²	F ²⁵	F ³⁵ Δ ¹	F ³⁵ Δ ¹ +Δ ²	F ³⁵	F ⁴⁰ Δ ¹	F ⁴⁰ Δ ¹ +Δ ²	F ⁴⁰	F ⁴⁵ Δ ¹	F ⁴⁵ Δ ¹ +Δ ²	F ⁴⁵
Bloc 1	-2	0	0	0	.63	.63	.63	1.33	1.33	1.33	.90	.90	.90	1.19	1.19	1.19
	-.1	0	0	0	.88	.88	.88	1.84	1.84	1.83	1.24	1.24	1.24	1.62	1.62	1.62
	-.05	0	0	0	1.01	1.01	1.01	2.09	2.09	2.09	1.41	1.41	1.41	1.83	1.83	1.83
	-.05	0	0	0	1.26	1.26	1.26	2.59	2.59	2.59	1.74	1.74	1.77	2.26	2.26	2.26
	+.1	0	0	0	1.38	1.38	1.38	2.85	2.85	2.85	1.91	1.91	1.91	2.48	2.48	2.48
Bloc 2	+.2	0	0	0	1.63	1.63	1.64	3.35	3.35	3.36	2.25	2.25	2.25	2.91	2.91	2.99
	0	-15	0	0	.70	.69	.69	1.23	1.22	1.19	.71	.70	.69	.73	.72	.71
	0	-10	0	0	.84	.84	.84	1.60	1.59	1.58	1.00	.99	.99	1.17	1.17	1.16
	0	-5	0	0	.99	.99	.99	1.97	1.97	1.97	1.29	1.29	1.29	1.61	1.61	1.60
	0	+5	0	0	1.28	1.28	1.28	2.71	2.71	2.71	1.86	1.86	1.87	2.49	2.49	2.49
Bloc 3	0	+10	0	0	1.42	1.42	1.42	3.09	3.08	3.08	2.15	2.15	2.15	2.93	2.93	2.93
	-12	+10.5	0	0	1.13	1.06	1.06	2.52	2.32	2.33	1.78	1.63	1.63	2.46	2.23	2.96
	-.07	+5.25	0	0	1.11	1.09	1.09	2.38	2.33	2.33	1.65	1.60	1.61	2.22	2.15	2.15
	.10	-5.25	0	0	1.22	1.19	1.19	2.44	2.36	2.36	1.60	1.54	1.54	2.00	1.92	1.91
	+.24	-10.5	0	0	1.43	1.29	1.29	2.77	2.40	2.39	1.78	1.49	1.48	1.95	1.95	1.94
Bloc 4	0	0	-.1	0	1.19	1.19	1.19	2.43	2.44	2.44	1.63	1.63	1.63	2.10	2.10	2.10
	0	0	-.05	0	1.16	1.16	1.16	2.39	2.39	2.39	1.60	1.60	1.60	2.08	2.08	2.08
	0	0	+.05	0	1.10	1.10	1.10	2.29	2.29	2.29	1.55	1.55	1.55	2.02	2.02	2.02
	0	0	+.10	0	1.07	1.07	1.07	2.25	2.25	2.24	1.52	1.52	1.52	2.00	2.00	1.99
	0	0	+.2	0	1.01	1.02	1.01	2.15	2.16	2.14	1.46	1.46	1.46	1.95	1.95	1.94
Bloc 5	0	0	0	-.2	1.12	1.12	1.12	2.29	2.33	2.28	1.51	1.50	1.50	1.86	1.84	1.84
	0	0	0	-.1	1.13	1.13	1.13	2.31	2.31	2.31	1.54	1.54	1.54	1.96	1.95	1.95
	0	0	0	-.05	1.13	1.13	1.13	2.33	2.33	2.33	1.56	1.56	1.56	2.00	2.00	2.01
	0	0	0	+.05	1.14	1.13	1.14	2.35	2.35	2.35	1.59	1.59	1.59	2.10	2.09	2.09

- TABLEAU 3 -

Application aux mortalités par pêche des développements limités d'ordres 1 et 2.

STRUCTURE DU TABLEAU :

--- BLOC 1 : Variations de K uniquement ; K = $\left\{ \begin{array}{l} .30 \\ .40 \\ .45 \\ .55 \\ .60 \\ .70 \end{array} \right.$

--- BLOC 2 : Variations de L_∞ uniquement ; L_∞ = $\left\{ \begin{array}{l} 55. \\ 60. \\ 65. \\ 75. \\ 80. \end{array} \right.$

--- BLOC 3 : Variations de K et L_∞ ; K = $\left\{ \begin{array}{l} .38 \\ .43 \\ .60 \\ .74 \end{array} \right.$; L_∞ = $\left\{ \begin{array}{l} 80.5 \\ 75.25 \\ 64.75 \\ 59.5 \end{array} \right.$

--- BLOC 4 : Variations de M uniquement ; M = $\left\{ \begin{array}{l} .1 \\ .15 \\ .25 \\ .30 \\ .40 \end{array} \right.$

--- BLOC 5 : Variations de E⁺ uniquement ; E⁺ = $\left\{ \begin{array}{l} .70 \\ .80 \\ .85 \\ .90 \end{array} \right.$

ou à des profils de mortalité hautement invraisemblables (cf. maximum à 35 pour $L^\infty = 55$, que la biologie de l'espèce rend difficilement concevable). Il a été précédemment souligné que les incertitudes sur K et L^∞ devaient être considérées simultanément. C'est pourquoi dans le bloc 3 apparaissent les écarts conduisant aux diverses courbes de la figure 2. La première ligne de ce bloc ($\Delta K = - .12$, et $\Delta L^\infty = +10.5$) ramène en effet à $K = .38$ et $L^\infty = 80.5$ (courbe 2 de la figure 2), la dernière ligne conduit à elle à $K = .74$ et $L^\infty = 59.5$ (courbe 3 de la même figure).

Les lignes 2 et 3 du bloc 3 supposent des variations de K asservies à celles de L^∞ avec des écarts pour L^∞ moitié de ceux associés respectivement aux lignes 1 et 4.

Les écarts considérés pour M vont de $- .1$ à $+ .2$, menant M de $.1$ à $.4$, avec donc des variations relatives notablement plus fortes. Les résultats obtenus sont reportés dans le bloc 4 du tableau 3.

Pour E^+ le bloc 5 fait apparaître des écarts allant de $- .2$ à $+ 0.05$, E^+ allant alors de $.7$ à $.95$. La mortalité finale associée va alors de $.47$ à 3.8 , ce qui correspond à une plage très vaste.

Les colonnes du tableau 3 sont associées aux longueurs 25, 35, 40 et 45. La valeur de base associée, notée F^0 , est rappelée. $F^0 + \Delta^1$ correspond alors au développement d'ordre 1, $F^0 + \Delta^1 + \Delta^2$ au développement d'ordre 2. La vraie valeur est notée simplement F , avec en indice la longueur considérée.

Globalement, les développements d'ordre 1 offrent dans ce tableau des approximations satisfaisantes, les développements d'ordre 2 donnent des approximations quasi-parfaites, notamment si l'on compare les erreurs d'approximation à celles liées aux incertitudes sur les paramètres injectés. Ainsi, pour F_{40} , selon la valeur de M , les valeurs obtenues vont de 1.63 à 1.46 ; les erreurs d'approximations ne jouent quant à elles, au plus, que sur la deuxième décimale.

Si les développements d'ordre 1 sont globalement satisfaisants, c'est dans le bloc 3 qu'ils apparaissent du moindre intérêt. Pour obtenir une approximation de qualité, il faut très vite faire appel aux termes d'ordre 2. C'est ce que suggèrerait le calcul des coefficients de sensibilité obtenus en asservissant les variations de L_{∞} à celles de K . Cet exemple montre donc qu'il est prudent de pousser les développements jusqu'à l'ordre 2. On notera, par ailleurs, que les sensibilités les plus fortes s'observent pour $l = -45$ mm. Plus généralement, c'est à l'approche de l^+ qu'apparaissent les problèmes majeurs.

Ce serait plus net encore si l'on s'intéressait non pas aux F , mais aux $F \times DT$. JONES (1974) note à juste titre que seules les $F \times DT$ joueront dans les calculs ultérieurs. Comme nous avons de toutes façons analysé plus loin la sensibilité des produits finaux, que sont les rendements par recrue relatifs, il n'a pas paru utile de discuter la sensibilité des $F \times DT$.

V-2-2. Sensibilité des rendements par recrue relatifs

A) Examen des coefficients de sensibilité

Le tableau 4, constitue le pendant du tableau 3. Il couvre des valeurs de μ allant de 0.1 à 2.5, avec attention particulière aux valeurs correspondant aux scénarii I à IV. La figure 6 visualise les coefficients d'ordre 1. On peut vérifier sur tableau et figure les identités annoncées au paragraphe V.2.

On peut noter la régularité des variations selon μ des coefficients de sensibilité. C'est particulièrement frappant au voisinage de $\mu = 1$. Les dérivées de ϕ présentent d'ailleurs une allure différente. Elles changent de signe de part et d'autre de $\mu = 1$. Mais comme ϕ change aussi de signe la continuité est restaurée quand on fait appel aux coefficients de sensibilité.

Le tableau 4 montre qu'il faut s'attendre à ce que les termes d'ordre 2 jouent un rôle faible, mais non négligeable. Les coefficients de sensibilité du premier et deuxième ordre sont dans l'ensemble du même ordre de grandeur, pour les paramètres de croissance. Si pour la mortalité naturelle les coefficients d'ordre deux sont d'un ordre de grandeur inférieur aux coefficients d'ordre 1, cette relation s'inverse pour E^+ .

	μ	β_K	β_{KK}	β_L	β_{LL}	β_{KL}	β_M	β_{MM}	β_{KM}	β_E	β_{EE}
Scénario I	.1	.76	-.51	3.74	-17.40	.03	-.76	.25	.0007	7.38	16.4
	.2	.64	-.40	2.98	-7.47	.61	-.64	.25	.0004	2.87	-7.15
	.3	.59	-.35	2.53	-3.54	.75	-.59	.24	.0003	1.20	-10.00
	.4	.54	-.31	2.17	-1.81	.68	-.54	.22	.0003	.40	-9.5
	.5	.49	-.29	1.88	-1.22	.55	-.49	.20	.0003	.17	-7.9
Scénario II	.6	.45	-.27	1.63	-1.05	.40	-.45	-.17	.0003	.23	-6.3
	.7	.41	-.26	1.44	-1.01	.26	-.41	-.15	.0003	.33	-5.0
	.8	.38	-.25	1.27	-1.02	.15	-.38	-.13	.0004	.37	-4.0
	.9	.35	-.24	1.14	-1.02	.06	-.35	-.11	.0004	.39	-3.2
Scénario III	1.01	.32	-.23	1.02	-1.02	-.02	-.32	-.09	.0004	.38	-2.5
Scénario IV	1.1	.30	-.22	.93	-1.01	-.07	-.30	-.08	.0004	.36	-2.1
	1.2	.28	-.21	.86	-1.00	-.11	-.28	-.07	.0004	.34	-1.7
	1.3	.27	-.21	.79	-.98	-.15	-.27	-.06	.0004	.32	-1.4
	1.4	.25	-.20	.74	-.96	-.17	-.25	-.05	.0004	.30	-1.2
	1.5	.24	-.19	.69	-.93	-.19	-.24	-.05	.0004	.28	-1.1
	1.6	.23	-.19	.65	-.90	-.20	-.23	-.04	.0004	.26	-.9
	1.7	.22	-.18	.61	-.88	-.21	-.22	-.04	.0004	.25	-.8
	1.8	.21	-.17	.58	-.85	-.22	-.21	-.03	.0004	.23	-.8
	1.9	.20	-.17	.55	-.83	-.22	-.20	-.03	.0004	.22	-.7
	2.0	.20	-.17	.53	-.81	-.23	-.20	-.03	.0004	.21	-.7
	2.1	.19	-.17	.51	-.78	-.23	-.19	-.02	.0004	.20	-.6
	2.2	.19	-.16	.49	-.76	-.23	-.19	-.02	.0004	.19	-.6
	2.3	.18	-.16	.47	-.75	-.23	-.18	-.02	.0004	.18	-.5
	2.4	.17	-.16	.46	-.73	-.23	-.18	-.02	.0004	.17	-.5
	2.5	.17	-.15	.44	-.71	-.23	-.17	-.02	.0004	.17	-.4

TABLEAU 4 Coefficients de sensibilité de la fonction de gain/perte ϕ

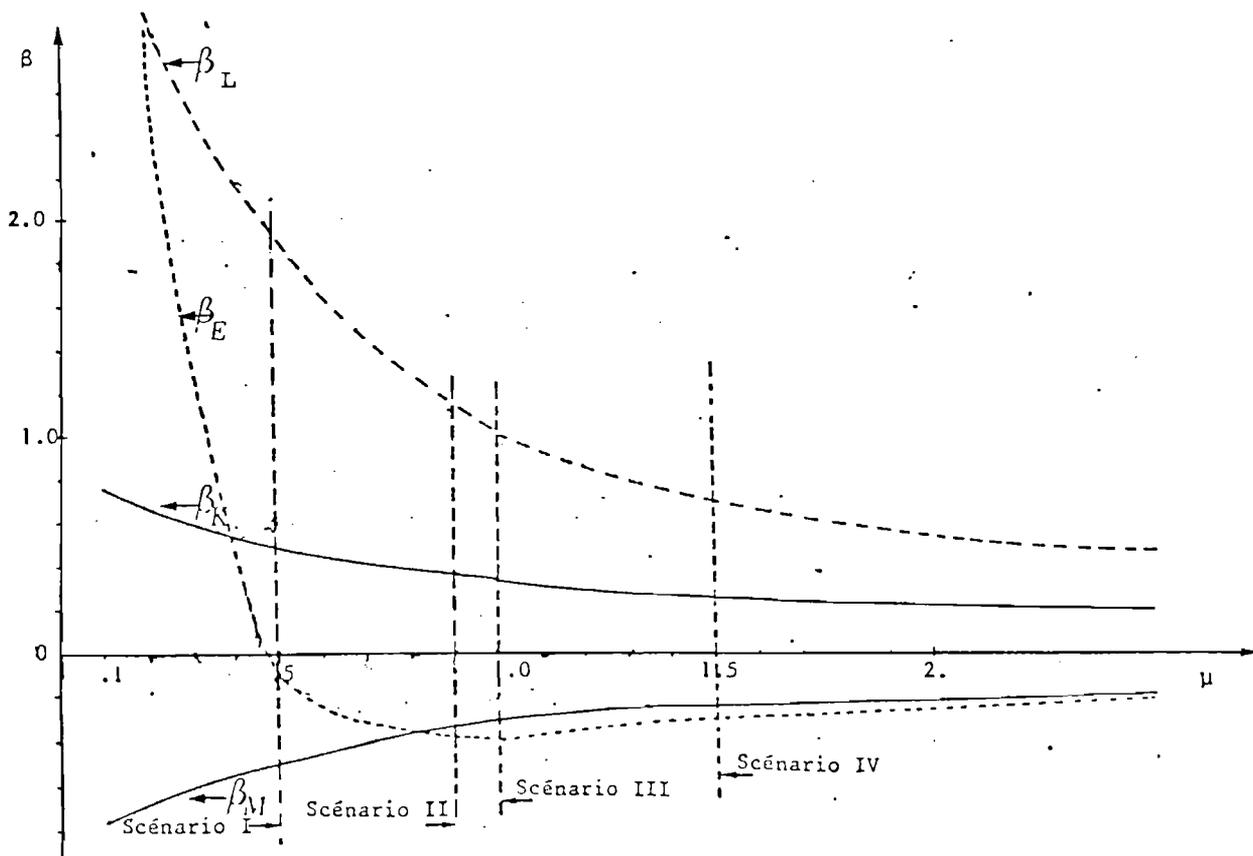


Figure 6 : Coefficients de sensibilité d'ordre 1 de la fonction de gain-perte

C'est sur M que les incertitudes relatives (associées aux $\frac{\Delta M}{M}$) sont les plus grandes. Un examen rapide du tableau 4 suggère donc que c'est de ce paramètre que résulteront les problèmes les plus graves.

Pour ce qui est des paramètres K et L_∞ , les calculs ont là aussi été repris en asservissant les variations de K à celles de L_∞ par la relation $K = \text{Log} \left(\frac{L_\infty - 27.5}{L_\infty - 44.2} \right)$. Les coefficients de sensibilité d'ordre 1 et 2 sont respectivement égaux à .83 et - 1.4 pour $\mu = .5$, .39 et - .6 pour $\mu = .9$, .33 et .51 pour $\mu = 1.01$, enfin .17 et - .29 pour $\mu = 1.5$.

Après un examen colonne à colonne du tableau 4, une comparaison des différentes lignes, ou un regard sur la figure 6, montre à quel point la sensibilité varie d'un régime à l'autre. Globalement, les incertitudes sont plus graves pour K et L_∞ lorsque l'on envisage des réductions d'effort ($\mu = .5$ et $\mu = .9$), que lorsque l'on considère une intensification de l'exploitation ($\mu = 1.5$, $\mu = 1.01$).

L'étude de la sensibilité des mortalités a montré que les incertitudes liées à K et L_∞ tendaient à être plus fortes pour les plus grandes longueurs. Lorsque l'on considère des niveaux d'exploitation élevés, les captures dans ces gammes de taille sont faibles, les incertitudes les concernant de peu d'impact. Il n'en va plus de même lorsque l'on considère des diminutions d'effort, et l'on peut même noter que les coefficients d'ordre 1 diminuent régulièrement quand μ croît de 0.5 à 1.5 dans le tableau 4.

La sensibilité en M fait apparaître un phénomène analogue, dont l'explication est toutefois plus complexe. Les incertitudes sur F liées à M ne montrent pas (tableau 2) de tendance forte avec la longueur mais cette tendance correspond plutôt à une augmentation quand la longueur diminue. Cependant, à l'action indirecte de M (au travers des F) s'ajoute l'action directe (cf. § V-1). Dans cette action directe les incertitudes sur M jouent d'autant plus que les animaux survivent en moyenne plus longtemps. Cet effet l'emportant sur l'action indirecte explique la relation monotone entre β_M et μ . De toute façon puisque $\beta_M = -\beta_K$, pour le coefficient d'ordre 1 l'explication liée à la croissance suffit.

Base K = .5 ΔK	Base L = .70. ΔL =	Base M = .2 ΔM	Base E ⁺ = .9 ΔE ⁺	Scénario I u = 0.5 (base φ ⁰ = 45.38)			Scénario II u = .9 (base φ ⁰ = 6.07)			Scénario III u = 1.01 (base φ ⁰ = .56)			Scénario IV u = 1.5 (base φ ⁰ = -19.75)		
				φ ⁰ +Δ ¹	φ ⁰ +Δ ¹ +Δ ²	φ	φ ⁰ +Δ ¹	φ ⁰ +Δ ¹ +Δ ²	φ	φ ⁰ +Δ ¹	φ ⁰ +Δ ¹ +Δ ²	φ	φ ⁰ +Δ ¹	φ ⁰ +Δ ¹ +Δ ²	φ
-2	0	0	0	36.48	34.36	33.36	5.22	4.99	4.85	-4.9	-4.7	-4.6	-17.84	-17.23	-16.84
-1	0	0	0	40.83	40.40	40.30	5.64	5.58	5.57	-5.3	-5.2	-5.2	-18.80	-18.65	-18.61
-0.5	0	0	0	43.15	43.22	43.01	5.85	5.84	5.84	-5.4	-5.4	-5.4	-19.28	-19.24	-19.24
+0.5	0	0	0	47.61	47.47	47.48	6.28	6.26	6.27	-5.8	-5.8	-5.8	-20.23	-20.19	-20.20
+1	0	0	0	49.83	49.30	49.38	6.49	6.43	6.44	-6.0	-5.9	-5.9	-20.71	-20.56	-20.58
+2	0	0	0	54.28	52.17	52.64	6.92	6.68	6.74	-6.4	-6.2	-6.2	-21.67	-21.05	-21.21
0	-15	0	0	27.13	24.58	21.87	4.59	4.30	3.82	-4.4	-4.1	-3.7	-16.84	-16.00	-14.72
0	-10	0	0	33.21	32.08	31.80	5.08	4.95	4.86	-4.8	-4.7	-4.6	-17.81	-17.44	-17.20
0	-5	0	0	39.30	39.01	39.04	5.57	5.54	5.53	-5.2	-5.2	-5.2	-18.78	-18.69	-18.67
0	+5	0	0	51.47	51.18	51.41	6.56	6.53	6.53	-6.0	-6.0	-6.0	-20.73	-20.15	-20.17
0	+10	0	0	57.55	56.42	57.38	7.05	6.93	6.97	-6.5	-6.3	-6.4	-21.70	-21.32	-21.42
-12	+10.5	0	0	52.82	49.92	50.35	6.59	6.36	6.36	-6.1	-5.9	-5.9	-20.65	-20.15	-20.17
-0.7	+5.25	0	0	48.70	47.88	47.80	6.29	6.23	6.23	-5.7	-5.7	-5.6	-20.12	-19.98	-19.98
+1.0	-5.25	0	0	43.27	42.11	42.26	5.96	5.86	5.97	-5.5	-5.4	-5.4	-19.65	-19.45	-19.47
+2.4	-10.5	0	0	43.29	37.21	38.39	6.05	5.55	5.60	-5.6	-5.2	-5.4	-20.1	-18.98	-13.07
0	0	-1	0	56.51	58.77	59.76	7.13	7.30	7.39	-6.5	-6.7	-6.8	-22.13	-22.38	-22.52
0	0	-0.5	0	50.95	51.51	51.62	6.60	6.64	6.65	-6.1	-6.1	-6.1	-20.95	21.01	-21.02
0	0	+0.5	0	39.81	40.38	40.29	5.54	5.58	5.57	-5.2	-5.2	-5.2	-18.56	-18.62	-18.61
0	0	+1.0	0	34.25	36.51	35.96	5.01	5.17	5.13	-4.7	-4.8	-4.8	-17.37	-17.60	-17.53
0	0	+2	0	23.12	32.15	28.69	3.94	4.62	4.34	-3.8	-4.3	-4.1	-14.98	-15.90	-15.47
0	0	0	-2	45.44	27.86	36.03	6.59	5.64	5.85	-6.1	-5.4	-5.5	-20.99	-19.95	-20.20
0	0	0	-1	45.46	41.04	42.32	6.33	6.09	6.12	-5.9	-5.7	-5.7	-20.37	-20.11	-20.12
0	0	0	-0.5	45.42	44.31	44.50	6.20	6.14	6.14	-5.7	-5.7	-5.7	-20.06	-20.00	-20.00
0	0	0	+0.5	45.33	44.28	44.00	5.94	5.88	5.88	-5.5	-5.5	-5.5	-19.50	-19.4	-19.38

- TABLEAU 5 -

Application aux fonctions de gain-perte des développements limités d'ordre 1 et 2.

STRUCTURE DU TABLEAU :

--- BLOC 1 : Variations de K uniquement ; K = $\begin{cases} .30 \\ .40 \\ .45 \\ .55 \\ .60 \\ .70 \end{cases}$

--- BLOC 2 : Variations de L_∞ uniquement ; L_∞ = $\begin{cases} 55. \\ 60. \\ 65. \\ 75. \\ 80. \end{cases}$

--- BLOC 3 : Variations de K et L_∞ ; K = $\begin{cases} .38 \\ .43 \\ .60 \\ .74 \end{cases}$; L_∞ = $\begin{cases} 80.5 \\ 75.25 \\ 64.75 \\ 59.5 \end{cases}$

--- BLOC 4 : Variations de M uniquement ; M = $\begin{cases} .1 \\ .15 \\ .25 \\ .30 \\ .40 \end{cases}$

--- BLOC 5 : Variations de E⁺ uniquement ; E⁺ = $\begin{cases} .70 \\ .80 \\ .85 \\ .90 \end{cases}$

Pour E^+ il n'apparaît pas de relation simple, les différents effets se combinant de façon complexe.

B) Développements limités

Le tableau 5 est l'homologue du tableau 3. Les approximations offertes par les développements limités apparaissent là encore comme de bonne qualité. Pour être plus précis, les erreurs d'approximation sont faibles vis-à-vis des incertitudes sur ϕ , liées aux incertitudes sur les paramètres K , L^∞ , M et F^+ . Dans un même bloc, et pour un scénario donné, les écarts entre ϕ et $\phi^0 + \Delta^1 + \Delta^2$ sont faibles vis-à-vis des différences de ligne à ligne. En ce sens, la sensibilité réelle n'est jamais trahie même par un simple développement d'ordre 1. Toutefois les termes non linéaires jouent un rôle plus fort que dans le cas des mortalités.

C'est dans le bloc 3 que, comme pour les mortalités, le passage à l'ordre 2 est le plus utile. Les écarts considérés pour ϕ y sont toutefois faibles. Les incertitudes sur L^∞ sont de faible impact dès lors qu'il est acquis que pour passer de $\ell = 27.5$ à $\ell = 45$ il faut un an aux langoustines. Cela n'est toutefois vrai que si peu d'individus dépassent les longueurs (aux alentours de 50 mm) à partir desquelles les différentes courbes de Von Bertalanffy possibles divergent. C'est pourquoi les plus fortes sensibilités sont observées pour $\mu = .5$, ainsi que le suggèrent les coefficients calculés au paragraphe A précédent.

Dans une certaine mesure des problèmes analogues apparaissent pour la sensibilité en E^+ . L'examen du bloc 5 montre que la fonction de gain/perte n'est pas monotone en E^+ . Il existe donc une forte influence des termes d'ordre 2, qui sont vite nécessaires, là encore surtout pour $\mu = 0.5$. Même un développement d'ordre 2 peut être insuffisant pour $\Delta E^+ = -.2$. Il demeure que le diagnostic global de faible sensibilité est fondé.

V - 3. Application aux inférences statistiques

V-3-1. Incertitudes sur la croissance

On supposera pour illustration que l'ajustement de la courbe de Von Bertalanffy a été fait à l'aide d'estimateurs non biaisés, ayant conduit aux estimations $\hat{K}^* = .5$ et $\hat{L}^* = 70$. La distribution de ces estimateurs sera assimilée à une distribution binormale.

Deux hypothèses relatives au niveau de dispersion ont été considérées. Dans la première, noté H_I , l'écart type σ_K de K est égal à .05, celui σ_L de L à 3., la corrélation étant égale à $-.8$. La seconde hypothèse H_{II} double les écarts-types (d'où $\sigma_K = .1$ et $\sigma_L = 6.$) en conservant la corrélation de $-.8$.

A) Inférences sur les mortalités.

Les résultats relatifs aux mortalités par pêche apparaissent sur la figure 7. La courbe en trait plein donne l'estimation de base, celles en traits mixtes-fins l'enveloppe associée aux intervalles de confiance à 5 %, construits après développement d'ordre 1 sous la première hypothèse (H_I d'incertitude). Les courbes en pointillé sont construites selon le même principe, en se référant à la seconde hypothèse d'incertitudes sur K et L (H_{II}).

Les résultats associés à un développement d'ordre 2 n'ont pas été portés, pour ne pas obscurcir la figure 5. Les termes d'ordre 2 ne jouent pas un rôle majeur pour l'intervalle (45,46). Sous l'hypothèse I le biais estimé est égal à $-.021$ contre $-.084$ sous l'hypothèse II (biais en fait exactement quatre fois plus important), l'estimation de base pour F étant égale à 2.05. Les biais suggérés sont faibles. Ils le sont plus encore pour des longueurs inférieures. Pour l'intervalle (49,50) ils sont un peu plus élevés tout en restant négligeables.

Les termes correctifs pour la variance ne sont pas non plus très forts. Ainsi, pour l'intervalle (45,46), sous l'hypothèse I la variance passe de .024 à .026, sous l'hypothèse II de .101 à .119. Un calcul exact montre que de l'hypothèse I à l'hypothèse II les termes correctifs sur la variance sont multipliés par 16. En effet, quand les écarts-types sont multipliés par 2 les moments d'ordre 4 sont multipliés par 16.

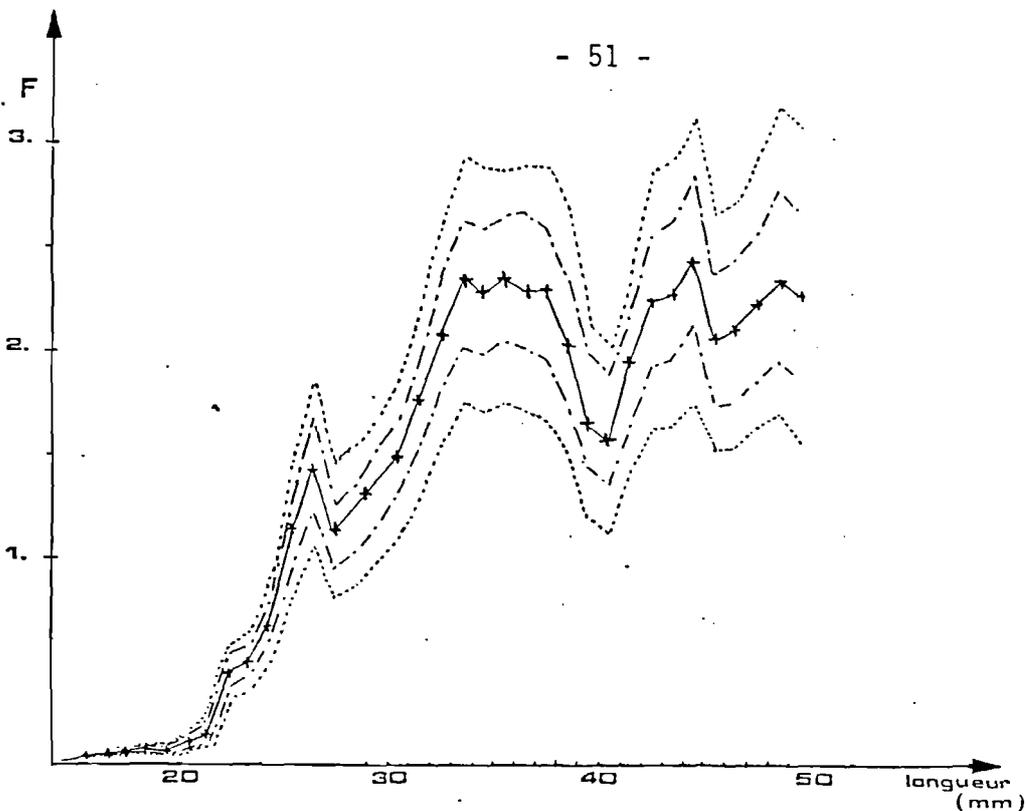


Figure 7 : Inférences sur les mortalités par pêche
liées aux incertitudes sur le couple $(\hat{K}, \hat{L}_{\infty})$
 —*— Estimation de base
 - - - Intervalles de confiance à 5% dans l'hypothèse I
 - - - Intervalles de confiance à 5% dans l'hypothèse II

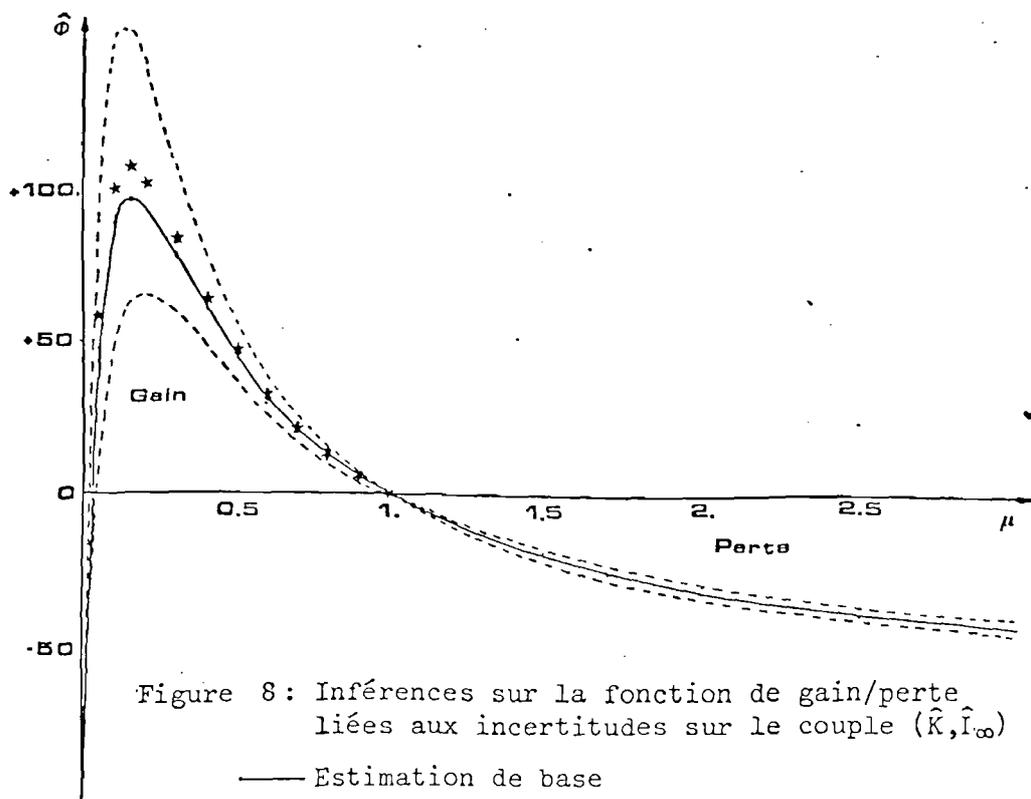


Figure 8 : Inférences sur la fonction de gain/perte
liées aux incertitudes sur le couple $(\hat{K}, \hat{L}_{\infty})$
 — Estimation de base
 * Estimation obtenue après soustraction du biais tel
qu'estimé par un développement d'ordre 2
 - - - Intervalles de confiance à 5% correspondants

Le calcul des corrections d'ordre 2 a donc ici pour premier résultat de légitimer les résultats liés au développement d'ordre 1. Si l'on suit l'intervalle (40-41) une correction ne serait pas illégitime, si l'hypothèse de binormalité du couple $(\hat{K}, \hat{L}_\infty)$ est fondée, car le tableau 3 montre que le développement d'ordre 2 offre de bonnes approximations, par exemple, sur le domaine de dispersion à 5 % du couple $(\hat{K}, \hat{L}_\infty)$.

B) Inférences sur les fonctions de gain/perte

Les résultats correspondant aux quatre scénarios de variation d'effort et aux deux niveaux de dispersion de \hat{K} et \hat{L}_∞ sont résumés dans le tableau 6. Quatre blocs de lignes apparaissent ainsi. Dans chaque bloc la première ligne est associée à l'hypothèse I, la seconde à l'hypothèse II. La figure 8 fait apparaître les intervalles de confiance à 5 % construits après un développement d'ordre 2, sous l'hypothèse II. Les étoiles noires correspondent dans le même cadre aux estimations obtenues après soustraction du biais. Elles ne sont reportées que pour $\mu \leq 1$, les biais étant négligeables pour $\mu > 1$.

Tableau et figure font d'abord apparaître la plus grande incertitude des résultats correspondants aux fortes réductions d'effort. On retrouve là, en termes statistiques, les constatations faites préalablement sur la sensibilité vis à vis de K et L_∞ . Ils montrent encore que les précisions atteintes, même sous l'hypothèse II, suffisent à garantir le diagnostic d'ensemble, et notamment le fait qu'une diminution d'effort engendrerait un accroissement du rendement par recrue.

Il apparaît encore que les développements d'ordre 2 n'apportent de contribution importante que sous l'hypothèse II, et pour les fortes réductions d'effort.

V-3-2. Incertitudes sur la distribution de longueur des captures

Comme ce fut annoncé, il a été supposé que l'échantillon analysé était un échantillon aléatoire simple de taille 1000. On peut montrer que la formule (32) démontrée sous hypothèse de normalité, est approximativement valable pour une loi multinomiale telle que générée par un E.A.S., du moins lorsque la taille de cet échantillon est suffisante (Laurec et Mesnil, 1986).

		Inférences après développement d'ordre I					Inférences après développement d'ordre II							
		V_1	S_1	B_I	$\hat{\phi}$	B_S	Biais	V_2	Var	S	B_I	$\hat{\phi}$.biais	B_S	
$\mu = .5$	$(\hat{K}, \hat{L}_\infty)$	Hyp. I	5.28	2.30	40.87	45.38	49.88	-.32	.19	5.47	2.34	41.11	45.70	50.28
		Hyp. II	21.12	4.60	36.37	45.38	54.38	-1.28	3.01	24.1	4.91	37.02	46.65	56.28
	\hat{P}_j	Hyp. E.A.S taille 1000	.73	.85	43.71	45.38	47.05	-.045	.008	.74	.86	43.74	45.43	47.10
$\mu = .9$	$(\hat{K}, \hat{L}_\infty)$	Hyp. I	.32	.18	5.71	6.07	6.42	-.03	.0012	0.33	.183	5.74	6.10	6.45
		Hyp. II	.129	.36	5.36	6.07	6.77	-.11	.0197	.148	.385	5.42	6.17	6.93
	\hat{P}_j	Hyp. E.A.S taille 1000	.015	.12	5.83	6.07	6.31	-.004	.0001	.015	.12	5.83	6.07	6.31
$\mu = 1.01$	$(\hat{K}, \hat{L}_\infty)$	Hyp. I	.00022	.0146	-.58	-.55	-.52	.002	$.8 \cdot 10^{-5}$.00022	.148	-.58	-6.55	-.53
		Hyp. II	.00086	.029	-.61	-.55	-.50	.009	.00013	.0010	-.031	-.61	-.56	-.50
	\hat{P}_j	Hyp. E.A.S taille 1000	.00013	.018	-.58	-.55	.51	0	$.9 \cdot 10^{-6}$.00013	.018	-.58	-.55	-.53
$\mu = 1.5$	$(\hat{K}, \hat{L}_\infty)$	Hyp. I	.123	.35	-20.44	-19.75	-19.07	.059	.0053	.128	.36	-20.51	-19.81	-19.11
		Hyp. II	.490	.70	-21.13	-19.75	-18.38	.238	.085	.575	.76	-21.48	-19.99	-18.51
	\hat{P}_j	Hyp. E.A.S taille 1000	.150	.39	-20.51	-19.75	-19.75	.006	.007	.15	.39	-20.52	-19.75	-19.00

- TABLEAU 6 -

Inférences sur les fonctions de Gain/Perte à partir de distributions données des estimations des paramètres de croissance, d'une part, et de l'histogramme des captures, d'autre part.

B_I = borne inférieure de l'intervalle de confiance à 5 %

B_S = borne supérieure correspondante.

Pour un échantillon de taille 1'000 tel que supposé ici l'approximation est excellente. Elle sera au besoin utilisée pour évaluer l'impact sur la variance des termes d'ordre 2.

A) Inférences sur les mortalités par pêche.

Les bornes des intervalles de confiance bâtis après un développement d'ordre 1 sont jointes sur la figure 9 par les courbes en pointillé. Pour chaque longueur individuelle les incertitudes apparaissent comme importantes. Avant de s'en effrayer, il faut garder à l'esprit que ce n'est pas chaque valeur individuelle qu'il convient de cerner avec précision, — et que l'on peut espérer que l'allure générale du vecteur de mortalité soit plus stable. Pour ce faire, des inférences ont aussi été effectuées, portant sur des mortalités moyennes par tranche de 5 mm. Les résultats sont reportés sous forme de cercles, au centre de segments matérialisant les intervalles de confiance à 5 % correspondant ; ils sont déjà plus rassurants.

B) Inférences sur les fonctions de gain/perte.

Les résultats pour $\mu = 1.5, 0.5, 0.9$ et 1.01 sont reportés sur le tableau 6, dans les troisièmes lignes des différents blocs. Sur la figure 10 les courbes en pointillés joignent les barres des intervalles de confiance à 5 % (issus d'un développement d'ordre 1 ou 2 car les résultats ne sont pas distinguables).

Tableau et figure font d'abord apparaître l'étroitesse des intervalles de confiance, qui relègue définitivement au rang des craintes prématurées l'inquiétude que pourrait susciter la figure 9. Les diagnostics d'ensemble sont beaucoup plus robustes que chaque mortalité individuelle. La réduction est plus spectaculaire encore que pour ce qui a trait aux inférences liées à K et L_{∞} . Cela tient à la plus grande indépendance des estimations de mortalité d'une longueur à l'autre, lorsque l'on traite des incertitudes sur les P_j que sur K ou L_{∞} . Pour ces dernières, en effet, une erreur d'estimation induit sur les mortalités par pêche calculée des erreurs fortement corrélées pour des longueurs voisines.

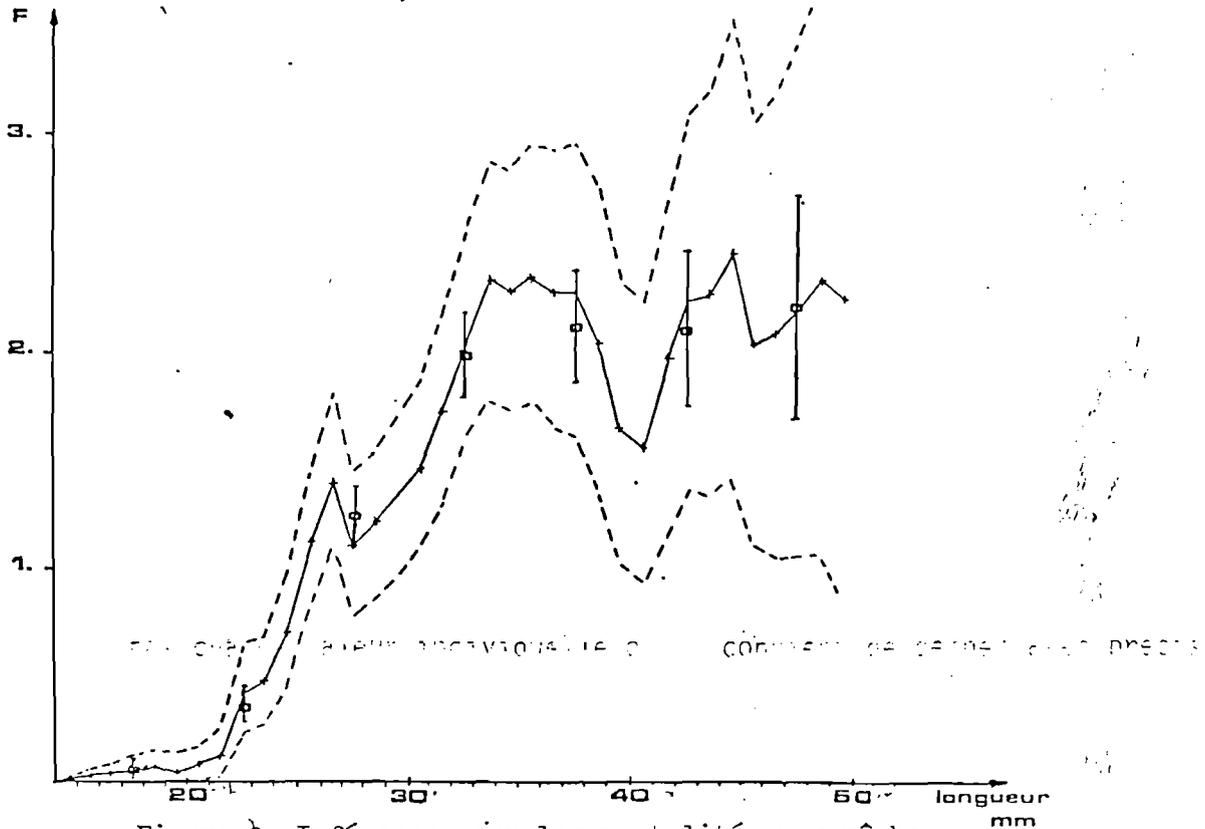


Figure 9: Inférences sur les mortalités par pêche liées aux incertitudes sur l'histogramme des captures

- Estimations de base
- - - Intervalles de confiance à 5% sur les F individuels
- F moyens sur des plages de 5 mm et intervalle associé

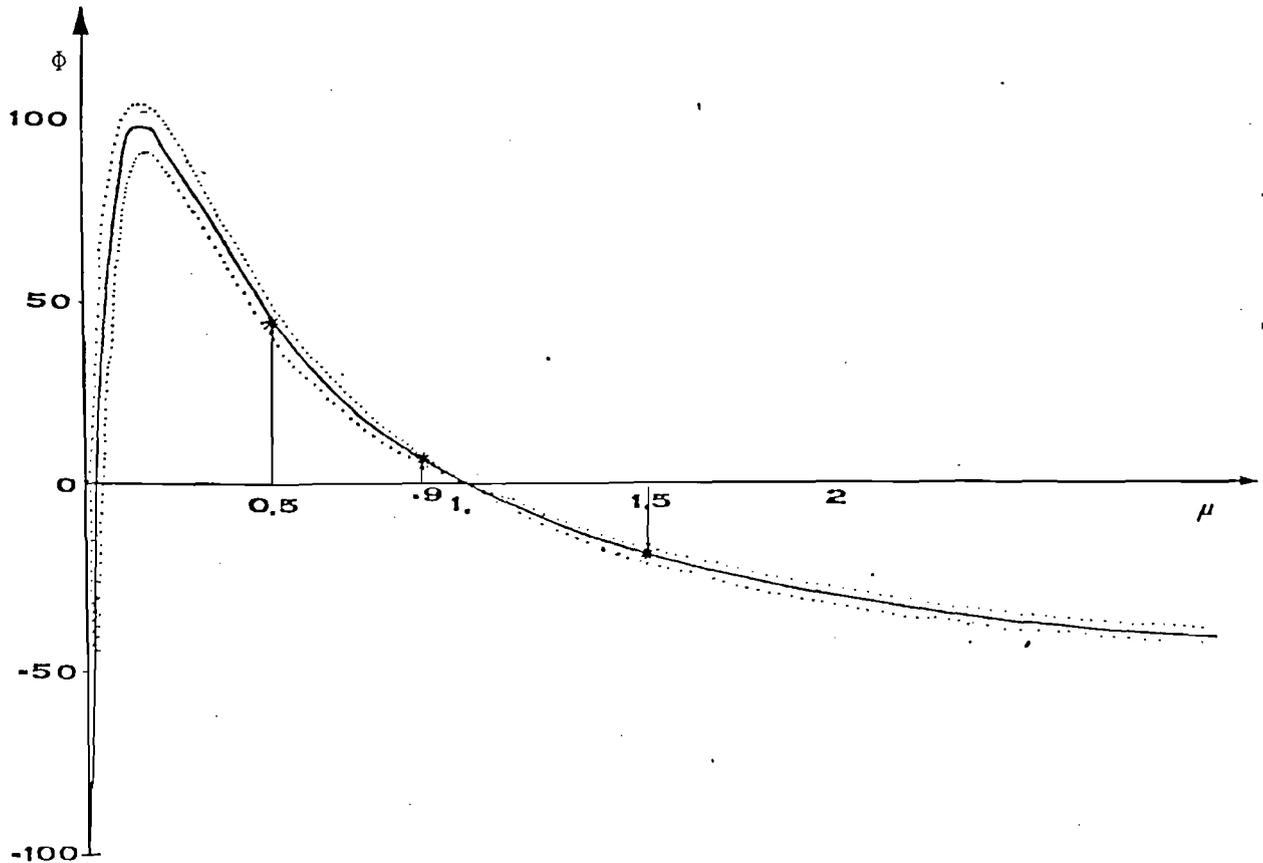


Figure 10: Inférences sur les fonctions de gain/perte liées aux incertitudes sur l'histogramme des captures

- Estimations de base
- Intervalles de confiance à 5%

De façon générale, les études de sensibilité doivent avant tout porter sur les résultats finaux, non sur des produits intermédiaires, même si ceux-ci permettent quelquefois une meilleure compréhension des sensibilités finales, voire d'exclure diverses hypothèses telles celles menant dans l'exemple à des mortalités aberrantes.

On peut encore noter, sur le tableau 6, le très faible impact des termes d'ordre 2. L'examen des dérivées secondes de Φ par rapport aux P_j montre qu'elles sont en général faibles. Seule la dérivée seconde par rapport aux captures du groupe + apparaît comme non négligeable. Les développements limités effectués à l'ordre 1 offrent d'ailleurs d'excellentes approximations, même avec des écarts importants sur les P_j .

CONCLUSION

Au moment où la nécessité de procéder à des études de sensibilité est non seulement théoriquement reconnue, mais encore suivie d'effets en halieutique, et tout en appréciant l'apport des techniques dites de simulation et de rééchantillonnage, il serait imprudent de renoncer à ce que peuvent apporter les méthodes delta. Classiques dans bien des domaines où s'est appliquée la statistique, elles n'ont pas fait l'objet de beaucoup d'attention en halieutique.

Sur l'exemple traité, elles n'épuisent pas les problèmes de sensibilité, le respect des hypothèses d'équilibre mériterait à lui seul un examen approfondi. Elles peuvent néanmoins beaucoup apporter (elles permettraient même d'aborder la question, non évoquée ici, de la variabilité individuelle de K et L_∞). Le paragraphe V a ainsi montré que les problèmes liés aux risques évoqués dans l'introduction pouvaient être abordés puisque l'on a pu évaluer la sensibilité, voire la précision au sens statistique des fonctions de gain/perte fondant diagnostic et pronostics.

Pour mettre en oeuvre les méthodes reposant sur les développements limités, il faudra cependant, comme on a tenté de le faire dans l'exemple traité, s'entourer d'un minimum de précautions. On pourra tester sur quelques cas la validité des approximations, en reprenant les calculs exacts. Le calcul systématique des coefficients de sensibilité permet alors un balayage d'ensemble, attirant l'attention sur un problème potentiel pour le ou les paramètres associés, on pourra alors refaire explicitement les calculs pour les valeurs extrêmes considérées.

Le passage des développements de l'ordre 1 à l'ordre 2 apporte indéniablement bien des complications. Hors de l'halieutique l'application des méthodes delta d'ordre 1 a cependant conduit par imprudence à des résultats malheureux. Cela incite à faire montre de prudence. Les développements d'ordre 1 permettent un examen des sensibilités "locales". Le décalage vis-à-vis de la sensibilité globale est lié aux termes non linéaires. Le passage à l'ordre 2 permet une première appréciation de l'importance de tels termes. Son premier intérêt est donc de valider éventuellement les résultats liés à l'ordre 1, ou d'attirer l'attention sur la nécessité d'une évaluation plus élaborée. Son second intérêt correspond à la possibilité d'une évaluation statistique des biais: le passage à l'ordre 2 constitue un prix minimal. Le dernier aspect correspond à une possible correction des variances, intervalles et domaine de confiance. Il est de moindre portée que les précédents. Il sera d'autant plus fructueux que les procédures d'estimations utilisées pourront asseoir une hypothèse de multinormalité. Face à des distributions nettement différentes et lorsque les développements à l'ordre 1 paraissent insuffisants, il faudra toutefois savoir reconnaître les limites de la méthode delta et recourir, par exemple, à des simulations.

Dans l'exemple traité, l'apport des termes d'ordre 2 est limité. Si l'expérience sur un sujet tel que la sensibilité des fonctions de gain-perte venait accumuler des faits similaires, cela légitimerait le recours aux méthodes d'ordre 1, nettement plus simples.

Outre le rapide survol précédemment évoqué des problèmes multiples de sensibilité, les méthodes delta seront particulièrement utiles lorsqu'il est difficile de simuler de façon réaliste la procédure de constitution des échantillons analysés. Dans l'exemple précité c'est surtout vrai pour l'histogramme des captures. Si, pour les besoins de l'illustration un échantillonnage aléatoire simple a été supposé, dans la réalité les procédures seront plus complexes. Le phénomène le plus délicat vient de ce que très souvent les animaux se regroupent dans l'espace, selon leur taille et/ou leur âge. Les mécanismes mis en jeu sont trop mal connus pour donner naissance à une simulation réaliste. Ce réalisme est pourtant indispensable, car les procédures de rééchantillonnage doivent être calquées sur la réalité (Anon, 1986). Il reste toutefois possible de définir une stratégie d'échantillonnage claire, qui permettra de calculer les variances et covariances, que les méthodes delta sauront utiliser.

On pourra donc évaluer la qualité statistique finale des diagnostics pour toute stratégie d'échantillonnage et évaluer les relations coût/précision des différentes stratégies.

Globalement donc, les méthodes delta gardent leur place dans la panoplie des outils permettant d'étudier les problèmes de sensibilité. Il faudra savoir les utiliser à bon escient, les combiner avec les autres approches.

Pour pouvoir mettre en oeuvre des méthodes delta, il faut être à même de calculer dérivées premières et secondes. C'est là l'affaire des mathématiciens. L'expérience nous a prouvé qu'avec un peu de science et beaucoup de patience les calculs pouvaient être faits, même dans des situations relativement complexes. Au besoin, on fera appel à des approximations, et en désespoir de cause il sera toujours possible d'approcher les valeurs recherchées des dérivées par des accroissements finis (cf. paragraphe II.2). Plus importante que ce problème mathématique ou numérique est la nécessité de disposer d'informations de base pour les études de sensibilité. Il faut à tout le moins disposer de bornes pour les valeurs "admissibles" des différents paramètres. Il est ainsi essentiel de pouvoir restreindre la plage des valeurs concevables pour M . Ce peut être même plus important que de rechercher la "meilleure estimation ponctuelle". Pour continuer autour de l'exemple choisi, il faudra aussi donner des éléments quantifiant l'incertitude sur K et L_{∞} . Dans leurs formes les plus rudimentaires cela peut correspondre à une connaissance "quasi-certaine" de la distance séparant deux modes annuels, et d'une gamme de valeurs "non-impossibles" pour L_{∞} , obtenue par exemple en analysant la partie droite de l'histogramme des captures.

Dans d'autres cas, on disposera d'estimations des variances et covariances des estimateurs \hat{K} et \hat{L}_∞ . Pour que ce soit possible, il faudra ajuster les courbes de croissance sur des jeux de données permettant des évaluations statistiques, et utiliser des techniques d'ajustement apportant au-delà des estimations \hat{K} et \hat{L}_∞ , des éléments sur leur distribution. Un effort devra de même être accompli pour définir une plage des valeurs "non impossibles" pour E^+ . Il faudra enfin pouvoir injecter des variances et covariances des captures aux longueurs. Ce ne sera possible que si une stratégie d'échantillonnage claire a été définie, même si la pratique aura pu entraîner quelques écarts vis à vis de la stratégie initialement projetée.

Pour mettre en oeuvre une étude de sensibilité, il faut donc avoir ce souci dès la collecte des données de base, et le garder tout au long de l'analyse.

Ainsi donc les outils existent, au nombre desquels les méthodes delta, qui permettent d'aborder la question, trop souvent et trop longtemps différée, de la fiabilité des évaluations en halieutique. Il est désormais nécessaire que les halieutes les connaissent, et que les procédures de collecte des données leur soient adaptées. Cela pourra paraître contraignant, difficile à mettre en oeuvre, mais c'est une condition sine qua non pour ne pas vivre indéfiniment dans l'ignorance, pour ne pas perpétuer les risques de sous-échantillonnage, de suréchantillonnage, voire de "méséchantillonnage".

Remerciements

L'édition de ce rapport n'aurait pas été possible sans la patience de Madame N. CONCHE et Mademoiselle I. GEFFROY. Il comporte vraisemblablement un certain nombre d'erreurs rémanentes. Elles auraient été beaucoup plus nombreuses sans la relecture critique de MM. GROS, LALOE et RIVARD. Enfin, ce rapport n'aurait jamais existé sans les organisateurs du D.E.A. d'océanographie d'Aix-Marseille II, qui en demandant une conférence sur ce sujet rendirent nécessaire la rédaction d'un rapport écrit.

REFERENCES CITEES

- ANON, 1983.- L'échantillonnage des prises commerciales de poissons et d'invertébrés marins. Publication spéciale canadienne des sciences halieutiques et aquatiques 66. 290 p.
- ANON, 1986.- Report of the working group on sensitivity of length based methods for stock assessment. In Proceedings of the international conference on the Theory and Application of length based methods of stock assessment. Mazzara del Vallo, Sicily, Italy (February, 1985).
- EFRON (B.), 1982.- The jackknife, the bootstrap and other resampling plans. CBMS-NSF Regional Conference Ser. 38, 92 p.
- EFRON (B.) and GONG (G.), 1983.- A leisurely look at the bootstrap the jackknife and cross-validation. The American Statistician (February 1983), Vol 37 n°1. pp 36-48.
- JONES (R.), 1974.- Assessing the long term effects of changes in fishing effort and mesh size from length composition data. Cons. int. Explor. Mer, C.M. 1974/F : 33, 13 p. (mimeo).
- JONES (R.), 1979.- An analysis of a Nephrops stock using length composition data. Rapp. P. V. Reun. Cons. int. Explor. Mer, 175, pp.259-269.
- KENDALL (M.) and STUART (A.), 1979.- The advanced theory of statistics, Vol. 1 Distribution theory. Fourth edition, Charles Griffin & Co. Ltd. London § High Wycombe 472 p.
- LAUREC (A.) et LE GUEN (J.C.), 1981.- Dynamique des populations marines exploitées. Tome I. Concepts et modèles. Rapp. Scient. et Techn. CNEXO n° 45, 118 p.
- LAUREC (A.) et MESNIL (B.), 1985(a).- Analytical investigations of errors in mortality rates estimated from length distribution of catches. Document présenté à "International Conference on the theory and application of length based methods of stock assessment". Mazzara del Vallo, Sicily, Italy (février, 1985).
- LAUREC (A.) et MESNIL (B.), 1985(b).- Rendement par recrue et analyse des cohortes de JONES. Etude de la sensibilité. Cons. Int. Explor. Mer, C.M. 1985/G : 23 réf.K.

- LAUREC (A.) et MESNIL (B.), 1986.- L'analyse des cohortes en halieutique : étude de sensibilité et stratégies d'échantillonnages. Journées de statistiques. Lille. France, 26-29 mai 1986.
- MAJKOWSKI (J.), 1982.- Usefulness and applicability of sensitivity analysis in a multispecies approach to stock assessment, pp. 149-166. In D. Pauly and G. I. Murphy (éd.). Theory and Management of Tropical Fisheries. ICLARM Conference Proceedings 9 ICLARM, Manila, Philippines and Div. Fish. Res. CSIRO, Cronula, Australia.
- PEREIRO (J.A.) and PALLARES (P.), 1984.- Consequences of introducing errors on the value of input parameter in the length distribution analysis (R. JONES), as applied to the Northern Stock of hake. Cons. Int. Explor. Mer C.M. 1984/G : 61, 17 p. mimeo.
- RIVARD (D.R.), 1983.- Effect of systematics, analytical and sampling errors on catch estimates : a sensitivity analysis. pp 114-129.
- WHITE (G. N. III), 1983.- Identification of influential variables in yield per recruit analyses. pp 130-139 in Anon 1983.

S O M M A I R E

<u>INTRODUCTION</u>	2
<u>I - Rappel sur les développements limités</u>	5
I-1. Développements limités d'ordre 1	5
I-2. Développements limités d'ordre 2	6
I-3. Extension à plusieurs variables	7
<u>II - Les coefficients de sensibilité</u>	9
II-1. Généralités	9
II-2. Coefficients d'ordre 1	10
II-3. Coefficients d'ordre 2	13
<u>III - Rappels de probabilité</u>	15
III-1. Moments et relations entre moments	15
III-1-1. Cas univarié	15
III-1-2. Cas bivarié	16
III-1-3. Cas multivarié	17
III-2. Applications aux transformations linéaires et quadratiques des variables	18
III-2-1. Cas univarié	18
A) Transformation linéaire	18
B) Transformation quadratique	19
III-2-2. Cas bivarié	20
A) Transformation linéaire	20
B) Transformation quadratique	21
III-2-3. Cas multivarié	23
A) Transformations linéaires	23
B) Transformations quadratiques	23
<u>IV - ESTIMATION DE L'ESPERANCE ET DE LA VARIANCE D'UNE FONCTION</u>	25
IV-1. Application des développements d'ordre 1	26
IV-1-1. Approximation de la variance vraie	26
A) Généralités	26
IV-1-2. Estimation de la variance vraie	29

Liste des figures

Figure 1	-	Approximation d'une courbe par la tangente	5
Figure 2	-	Recouvrement de différentes courbes de Von Bertalanffy	12
Figure 3	-	Histogramme des captures et mortalités par pêche aux longueurs dans l'exemple traité des langoustines (<i>Nephrops norvegicus</i>).	34
Figure 4	-	Evolution avec le multiplicateur de l'effort μ de la fonction de gain/perte Φ	39
Figure 5	-	Coefficients de sensibilité d'ordre 1 des mortalités par pêche aux longueurs	40
Figure 6	-	Coefficients de sensibilité d'ordre 1 de la fonction gain/perte	46
Figure 7	-	Inférences sur les mortalités par pêche liées aux incertitudes sur le couple (K, L_{∞})	51
Figure 8	-	Inférences sur la fonction de gain/perte liées aux incertitudes sur le couple (K, L_{∞})	51
Figure 9	-	Inférences sur les mortalités par pêche liées aux incertitudes sur l'histogramme des captures	55
Figure 10	-	Inférences sur les fonctions de gain/perte liées aux incertitudes sur l'histogramme des captures	55

Liste des tableaux

Tableau 1	-	Données de base et résultats de l'analyse des cohortes de Jones	33
Tableau 2	-	Coefficients de sensibilité des mortalités par pêche	40
Tableau 3	-	Application aux mortalités par pêche des développements limités d'ordres 1 et 2	43
Tableau 4	-	Dérivées et coefficients de sensibilité des fonctions de gain/perte pour $\mu = 1.5, .5, .9, 1.01$.	46
Tableau 5	-	Application aux fonctions de gain-perte des développements limités d'ordre 1 et 2	48
Tableau 6	-	Inférences sur les fonctions de gain/perte à partir de distributions données des estimations des paramètres de croissance, d'une part, et de l'histogramme des captures, d'autre part.	53

