

ECOLE DOCTORALE

MÉCANIQUE, THERMIQUE ET GÉNIE CIVIL

Année 2005

N°B.U.

Thèse de DOCTORAT

***Diplôme délivré conjointement par
L'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes***

Spécialité : GÉNIE MECANIQUE

Présentée et soutenue publiquement par :

Seyed Reza GHOREISHI

le 03 octobre 2005

à L'Ecole Centrale de Nantes

**MODELISATION ANALYTIQUE ET CARACTERISATION EXPERIMENTALE DU
COMPORTEMENT DE CABLES SYNTHETIQUES**

devant le jury ci-dessous :

Président :	B PESEUX	Professeur Emérite, Ecole Centrale de Nantes
Rapporteurs :	JJ BARRAU JC GRANDIDIER	Professeur, Université P. SABATIER, Toulouse Professeur, ENSMA, Poitiers
Examineurs :	A BUNSELL P CARTRAUD P DAVIES	Maître de Recherche, Centre des Matériaux, Ecole des Mines de Paris Professeur, Ecole Centrale de Nantes Chercheur, IFREMER, Centre de Brest
Invité	T MESSENGER	Maître de Conférences, IUT de Nantes

Table des matières

CHAPITRE 1. INTRODUCTION.....	5
1.1 GENERALITES	6
1.2 CABLES METALLIQUES ET CABLES SYNTHETIQUES.....	6
1.3 APPLICATIONS MARINES DES CABLES SYNTHETIQUES	7
1.4 ARCHITECTURE DES CABLES SYNTHETIQUES.....	9
1.5 MOTIVATIONS.....	11
1.6 PLAN DE L'ETUDE	11
CHAPITRE 2. MODELISATION DES CABLES – ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE.....	13
2.1 CABLES METALLIQUES.....	15
2.1.1 <i>Modèles Poutres courbes</i>	15
2.1.1.1 Comportement des constituants	15
2.1.1.2 Effet Poisson	16
2.1.1.3 Hypothèses cinématiques et contact entre les constituants.....	16
2.1.1.4 Nature des modèles	17
2.1.1.5 Modèle en fonction de la construction du câble	18
2.1.1.6 Comportement global du câble	19
2.1.1.7 Symétrie de la matrice	19
2.1.2 <i>Modèles semi-continus</i>	19
2.1.3 <i>Modèles EF</i>	21
2.1.4 <i>Bilan</i>	22
2.2 CABLES SYNTHETIQUES	23
2.2.1 <i>Modèles spécifiques pour câbles synthétiques</i>	23
2.2.1.1 Comportement des constituants	24
2.2.1.2 Hypothèses cinématiques et contact entre les constituants.....	24
2.2.1.3 Nature des modèles	26
2.2.1.4 Comportement global du câble	27
2.2.1.5 Modèle en fonction de la construction du câble	27
2.2.2 <i>Bilan</i>	27
2.3 CONCLUSION.....	27
CHAPITRE 3. MODELISATION D'UNE STRUCTURE A GRAND NOMBRE DE CONSTITUANTS TORSADES.....	31
3.1 INTRODUCTION	32
3.2 MODELES EXISTANTS.....	33
3.2.1 <i>Modèle de Raoof</i>	33
3.2.1.1 Cinématique d'une couche.....	34
3.2.1.2 Détermination du comportement de la membrane équivalente	34
3.2.1.3 Comportement global du câble	37
3.2.1.4 Bilan.....	38
3.2.2 <i>Modèle de Hoppe</i>	38
3.2.2.1 Bilan.....	39
3.2.3 <i>Modèle de Leech</i>	40
3.2.3.1 Comportement global de la structure.....	40

3.2.3.2	Bilan.....	42
3.3	MODELE CONTINU	43
3.3.1	<i>Hypothèses principales</i>	43
3.3.2	<i>Développement mathématique</i>	44
3.3.2.1	Géométrie.....	44
3.3.2.2	Déformation axiale.....	45
3.3.2.2.1	Allongement.....	45
3.3.2.2.2	Rotation.....	46
3.3.3	<i>Loi de comportement du modèle continu</i>	47
3.3.4	<i>Bilan</i>	51
3.4	BILAN DES MODELES.....	51
3.5	COMPARAISON DES MODELES.....	52
3.5.1	<i>Cinématique</i>	52
3.5.2	<i>Comportement mécanique du toron de 205T</i>	53
3.5.2.1	Données d'entrée	53
3.5.2.2	Comparaison des modèles.....	55
3.5.2.3	Etude de sensibilité sur le modèle FRM	56
3.5.2.3.1	Discretisation en couches.....	57
3.5.2.3.2	Packing Factor	57
3.5.2.4	Conclusion	58
3.5.3	<i>Comportement mécanique d'un brin assemblé du câble de 25T</i>	58
3.5.3.1	Influence de l'arrangement des fibres. Détermination du rayon du brin	59
3.5.3.2	Comparaison des modèles FRM et continu	61
3.5.3.3	Packing Factor	62
3.5.3.4	Influence des termes de torsion et de couplage à l'échelle supérieure	62
3.5.4	<i>Effet du frottement</i>	63
3.6	CONCLUSION.....	64
CHAPITRE 4. MODELISATION D'UN CABLE « 1+6 ».....		67
4.1	INTRODUCTION	68
4.2	MODELES EXISTANTS.....	69
4.2.1	<i>Modèle de Hruska</i>	70
4.2.2	<i>McConnell et Zemek (1982)</i>	70
4.2.3	<i>Machida et Durelli [MAC 1973]</i>	71
4.2.4	<i>Modèle de Costello</i>	71
4.2.5	<i>Modèle de Kumar et Cochran</i>	75
4.2.6	<i>Modèle de Ramsey</i>	76
4.2.7	<i>Modèle de Satikh</i>	76
4.2.8	<i>Modèle de Labrosse</i>	77
4.2.9	<i>Bilan</i>	78
4.3	ETUDE DU DOMAINE DE VALIDITE DES MODELES ANALYTIQUES EXISTANTS POUR LES CABLES METALLIQUES	79
4.3.1	<i>Mise au point du Modèle EF 3D</i>	79
4.3.1.1	Caractéristiques géométrique et matériaux du câble	79
4.3.1.2	Conditions aux limites et chargement.....	79
4.3.1.3	Maillage et prise en compte du contact.....	80
4.3.2	<i>Analyse des résultats de modèle EF 3D</i>	81

4.3.2.1	Calcul de la Matrice Raideur du Câble	81
4.3.2.2	Analyse de sensibilité	82
4.3.2.3	Bilan.....	82
4.3.3	<i>Domaine de validité des modèles analytiques existants</i>	83
4.3.3.1	Matrice raideur adimensionnelle.....	83
4.3.3.2	Comparaison des modèles analytiques / EF 3D.....	84
4.3.3.3	Bilan.....	87
4.3.4	<i>Conclusion</i>	88
4.4	EXTENSION DE MODELE LABROSSE POUR LES CABLES SYNTHETIQUES 1+6.....	88
4.4.1	<i>Géométrie</i>	89
4.4.2	<i>Champ de déplacement</i>	89
4.4.3	<i>Prise en compte des conditions de contact</i>	91
4.4.3.1	Hypothèse de contact permanent	92
4.4.3.2	Hypothèses sur le glissement interfilaire	92
4.4.3.3	Hypothèse sur le roulement interfilaire.....	93
4.4.4	<i>Simplification</i>	93
4.4.5	<i>Composantes du tenseur des déformations</i>	95
4.4.6	<i>Comportement des composants</i>	96
4.4.7	<i>Comportement global du câble 1+6</i>	97
4.5	COMPARAISON DU MODELE DE LABROSSE ETENDU AVEC CELUI DU LOGICIEL FRM	98
4.6	EFFET DU FROTTEMENT.....	100
4.7	CONCLUSION.....	101
CHAPITRE 5. ETUDE EXPERIMENTALE.....		103
5.1	INTRODUCTION	104
5.2	CABLES ETUDIES	104
5.3	MACHINES UTILISEES	106
5.4	PROCEDURE D'ESSAI	107
5.5	MOYENS DE MESURE.....	108
5.6	PROCEDURE D'OBTENTION DES EPROUVETTES	109
5.7	RESULTATS D'ESSAI.....	110
5.7.1	<i>Essais sur fibre</i>	111
5.7.2	<i>Essais sur brins et brins assemblés du câble 25T</i>	112
5.7.3	<i>Essais sur le toron et l'âme du câble 25T</i>	113
5.7.4	<i>Essais sur câble 25T</i>	116
5.7.4.1	Essai à l'IFREMER.....	116
5.7.4.2	Essai à L'ENSMP	117
5.7.4.3	Bilan.....	121
5.7.5	<i>Essais sur câble 205T</i>	121
5.7.6	<i>Bilan</i>	123
5.8	CONCLUSION.....	124
CHAPITRE 6. CONFRONTATIONS MODELES / EXPERIENCES		125
6.1	INTRODUCTION	126
6.2	LES DONNEES EXPERIMENTALES	126
6.2.1	<i>Caractéristiques géométriques</i>	126
6.2.1.1	Angle d'enroulement	126

6.2.1.2	Diamètre et pas	128
6.2.1.3	Bilan.....	129
6.2.1.4	Etude de sensibilité	129
6.2.2	<i>Caractéristiques mécaniques</i>	130
6.3	MODELE CONTINU.....	132
6.3.1	<i>Brin assemblé du toron et de l'âme du câble 25T</i>	132
6.3.2	<i>Toron du câble 205T</i>	133
6.3.3	<i>Bilan</i>	133
6.4	MODELE 1+6.....	134
6.4.1	<i>Ame et toron du câble 25T</i>	134
6.4.2	<i>Câble 25T</i>	135
6.4.3	<i>Bilan</i>	137
6.5	CABLE 205T	139
6.5.1	<i>Bilan</i>	140
6.6	CONCLUSION.....	140
CHAPITRE 7. CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES.....		143
7.1	BILAN	144
7.2	PERSPECTIVES.....	145
ANNEXE A. EQUATIONS DE KIRCHHOFF –LOVE.....		147
A.1	Equations de Kirchhoff –Love.....	147
ANNEXE B. ANALYSE DE SENSIBILITE		148
B.1	Maillage	148
B.2	Représentation géométrique des sections extrêmes	149
B.3	Logiciel (COSMOS / SAMCEF).....	150
B.4	Conditions de contact.....	151
ANNEXE C. MATRICE RAIDEUR ADIMENSIONNELLE		152
C.1	Comparaison des résultats EF et Analytiques en faisant varier l'angle d'enroulement α	153
C.2	Comparaison des résultats EF et Analytiques en faisant varier k_r	154
ANNEXE D. COMPOSANTS DE LA MATRICE RAIDEUR ADIMENSIONNEE		157
ANNEXE E. LES MACHINES D'ESSAI.....		160
E.1	DMA (Dynamic Mechanical Analysis) Machine	160
E.2	Instron et R&K (Roell & Korthaus) Machines.....	160
E.3	Banc d'essai de 100 tonnes	160
E.4	Banc d'essai de 10 tonnes à Evry.....	161
E.5	Banc d'essai de 3000 tonnes au LCPC	162
E.6	Banc d'essai de 500 tonnes au LCPC	162
BIBLIOGRAPHIE		164

Chapitre 1. Introduction

1.1 Généralités

Les câbles en général sont des éléments structurels ayant une capacité de supporter une grande charge axiale avec des raideurs de flexion et de torsion comparativement petites. Le besoin de tirer et lever a existé depuis le commencement de civilisation et les hommes ont compris qu'ils pouvaient exploiter les propriétés des câbles dans le but de rendre de nombreuses tâches plus faciles. Un câble de cuivre a été retrouvé en 700 av. J.-C. dans des ruines près de Babylone [NAW 1997, VEL 1981]. Depuis longtemps, il existe aussi des assemblages simples de plantes grimpantes qui sont réalisés à partir de fibres naturelles. Cependant, la pleine utilisation des câbles (câbles métalliques) a commencé au début de 19^{ème} siècle (en 1836) grâce à une technologie adéquate pour fabriquer des fils de métal résistants et de grande longueur [NAW- 1997]. D'autre part, au début du 20^{ème} siècle, l'utilisation des câbles synthétiques a débuté grâce à la naissance de fibres industrielles continues.

Contrairement à d'autres éléments structurels comme les barres, les câbles sont formés par plusieurs éléments constitutifs, et leur composition (multi-constituants) confère également aux câbles une sécurité accrue. Lorsqu'un élément constitutif casse, les efforts de frottement qu'exercent sur lui les éléments voisins lui permettent de récupérer sa charge nominale à partir d'une certaine distance de la cassure (cette distance est appelée longueur de réancrage ou « recovery length ») [RAO 1998].

Les câbles sont utilisés pour diverses applications dans de nombreux domaines industriels. On peut citer l'industrie minière, les systèmes de levage, les câbles de lignes électriques, les ascenseurs, les ancrages de plates-formes off-shore, les cordages de bateaux, les ponts suspendus ou encore les structures précontraintes.

1.2 Câbles métalliques et câbles synthétiques

D'une manière très générale, on peut classer les câbles en fonction de leur matériau constitutif en 2 catégories :

- les câbles métalliques
- les câbles synthétiques

Les câbles métalliques ont existé un siècle avant les câbles synthétiques, mais récemment, leur résistance a augmenté, et ils ont commencé à remplacer les câbles métalliques dans quelques applications, notamment marines. Cela a été suivi par le développement de fibres hautes performances qui permettent de produire des éléments fibreux avec un rapport résistance/masse jusqu'à 10 fois plus élevé que celui des éléments métalliques. Par exemple, si on compare trois câbles avec la même résistance de 567 kN (125000lb), la masse pour 100 m varie beaucoup selon qu'on utilise de l'acier ou des fibres, cf. tableau 1.1. Ces différences de masse deviennent très importantes quand on considère que le câble non seulement doit supporter la charge, mais aussi son propre poids (en sachant qu'en pratique, la longueur du câble, pour des applications marines est souvent de quelques kilomètres).

Tableau 1.1 : masse de 100 m de câbles de même résistance avec différents matériaux (d'après [FOS 2002]).

Matériau	Poids (N) dans l'air	Poids (N) dans l'eau
Acier	3350	2920
Aramide	650	180
HMPE*	460	0

* HMPE : High modulus polyethylene

Le gain en poids pour les éléments fibreux réduit la taille et le coût des équipements. En plus, les câbles synthétiques permettent de changer plus vite et plus facilement l'équipement et la machinerie. Les câbles synthétiques de longueurs plus élevées sont plus légers et plus maniables, et les réparations peuvent être effectuées sur site.

La résistance des éléments fibreux en fatigue est souvent meilleure que celle des câbles métalliques. Cependant, les données d'essai de fatigue sont très rares dans la littérature. Dans la norme européenne (EN ISO 19901-7:2004), il est indiqué que la durée de vie (fatigue en traction) des câbles en polyester et HMPE peut être supposée égale à au moins 5 fois celle d'un câble métallique. Pour les autres câbles synthétiques (aramide ou nylon), les données d'essai de fatigue sont insuffisantes pour développer des courbes de conception en fatigue. Dans l'absence d'une meilleure information, la courbe d'un câble métallique peut être utilisée (EN ISO 19901-7:2004).

Les câbles synthétiques présentent donc de très bonnes caractéristiques mécaniques, associées à une masse faible. Ils ont donc été largement utilisés, notamment dans le domaine maritime.

1.3 Applications marines des câbles synthétiques

Les câbles synthétiques trouvent de nombreuses applications en mer, allant des lignes de mouillage océanographique et des cordages de bateaux de plaisance, de force à la rupture de quelques tonnes, aux lignes d'ancrage de plates-formes pétrolières flottantes dont la force à la rupture peut atteindre 2000 tonnes ou plus.

Différentes fibres synthétiques sont utilisées dans de nombreuses applications marines :

- Les polyamides (nylon 66), pour les haussières,
- Le polyester pour les applications offshore,
- Les aramides (*Kevlar*, *Technora*) pour l'océanographie,
- Les HMPE (*Dyneema*, *Spectra*) pour les gréements.

La Figure 1.1 présente les propriétés génériques de ces fibres. On constate que les propriétés varient beaucoup d'une fibre à l'autre en terme de raideur, résistance, et d'allongement à la rupture. Il faut souligner également qu'il n'y a pas une seule fibre de chaque type mais toute une famille de différentes grades.

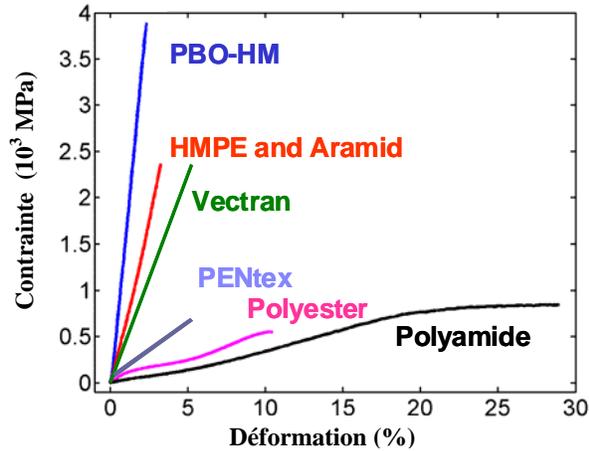


Figure 1.1 . Comportement schématique des fibres

L'IFREMER utilise les fibres aramides pour les lignes de mouillage d'instrumentation et pour la manutention d'engins en mer, Figure 1.2. Il faut souligner qu'il n'y a pas une seule fibre aramide mais toute une famille.



Figure 1.2. Câble aramide de manutention à bord navire d'IFREMER (Suroît), force à la rupture de 20 tonnes, 6 km de long.

Une autre application qui intéresse l'IFREMER est celle de l'amarrage de plate-formes flottantes pour l'exploration et la production pétrolière (Figure 1.3). Pour ces applications, le matériau actuel est du polyester mais d'autres matériaux plus performants sont à l'étude (aramides, HMPE), notamment pour les plates-formes de forage.



Figure 1.3. Spar ‘Red Hawk’, dans le Golfe du Mexique. 6 lignes tendues en polyester de 1200 tonnes force à la rupture tiennent le spar.

1.4 Architecture des câbles synthétiques

On distingue plusieurs types de câbles selon l’arrangement géométrique des constituants (cf. figure 1.4) :

- Câble à constituants parallèles
- Câble à constituants tressés
- Câble à constituants torsadés

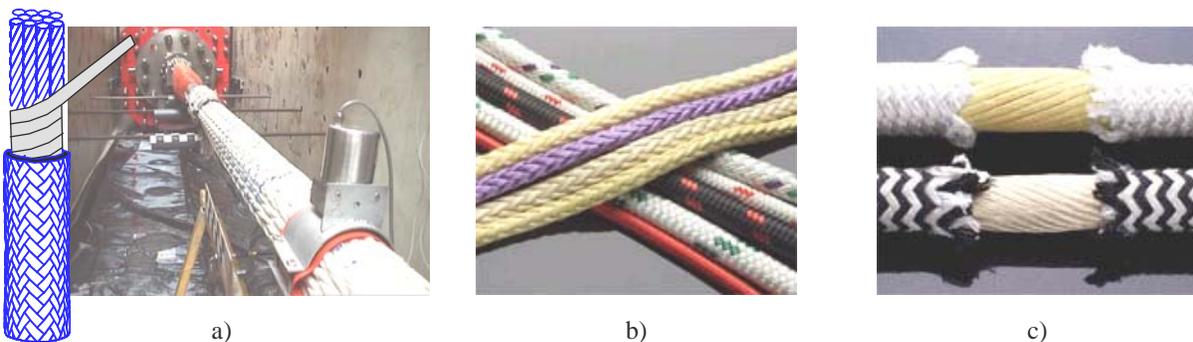
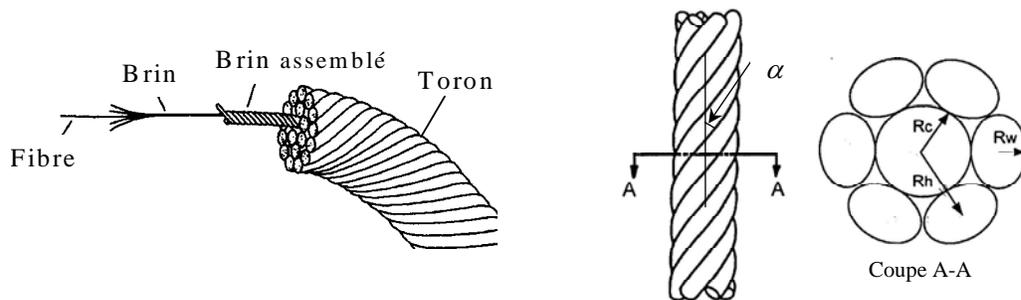


Figure 1.4 : Câbles avec différentes géométries : a) parallèle, b) tressé et c) torsadé.

Dans ce travail, on se limite à l'étude des câbles torsadés, très utilisés en applications marines. et on étudiera des fibres en aramide. On dispose, en outre, d'échantillons de câble avec cette fibre, sur lesquels on pourra effectuer des essais.

Ces câbles synthétiques torsadés se caractérisent par une architecture très complexe. Le constituant de base (de l'aramide dans notre cas) apparaît sous forme de **fibres**, à partir desquelles sont formés des **brins**, par un assemblage parallèle de fibres. Les brins sont alors torsadés pour former le **brin assemblé**, à partir duquel on réalise un **toron** par une opération d'enroulement, cf. figure 1.5(a). Le **câble** est enfin fabriqué avec les torons, qui décrivent des hélices autour de l'âme, cf. figure 1.5(b).



(a) Structure d'un toron
(d'après [LEE 2002])

(b) Câble avec 1+6 torons

Figure 1.5 : Structure du câble étudiée.

Concernant la construction du câble à partir des torons, plusieurs solutions existent :

Câble monocouche ou 1+6 : c'est l'élément le plus simple (câble métallique), il est constitué d'une couche d'éléments décrivant des hélices autour d'un constituant droit central, cf. figure 1.5 (b) ci-dessus ou cf. figure 1.6 a).

Câble multicouche : il est formé de plusieurs couches, comportant des éléments de même diamètre mais en nombre différent. Toutes les couches sont enroulées avec un **Pas** d'hélice identique, cf. figure 1.6 b).

Câble multitoron ou « Wire Rope » : les torons peuvent être utilisés seuls comme un câble, mais sont ici des éléments constitutifs d'un câble de dimensions plus importantes cf. figure 1.6 c (ce type de câble est rencontré dans les *câbles synthétiques*).

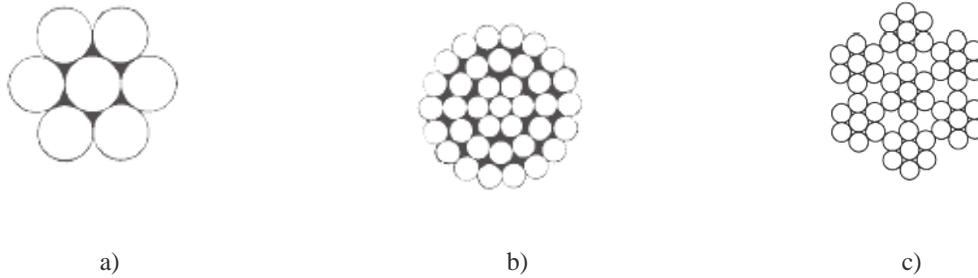


Figure 1.6 : différentes structures de câbles : a) monocouche, b) multicouche et c) multitoron.

On note ici que de la même manière qu'il existe plusieurs sortes de câbles, il existe divers types de torons.

1.5 Motivations

Aujourd'hui, la conception des câbles synthétiques repose sur l'utilisation de coefficients de sécurité qui intègrent plusieurs facteurs peu connus tels que la dispersion des propriétés statiques, leur comportement sous sollicitation cyclique et en fluage, et l'influence de l'environnement marin. Avant d'aborder ces aspects, il est indispensable de **disposer d'un modèle de comportement mécanique des câbles, validé par des résultats expérimentaux**, qui permettra de prendre en compte le comportement des différentes fibres et des constructions rencontrées couramment.

L'objectif est la modélisation de câbles à partir des seules données la loi de comportement de la fibre, et la description géométrique du câble. En effet, on connaît bien le comportement des fibres mais moins bien l'influence de la structure du câble sur ses propriétés.

L'analyse de la construction est une première étape vers l'optimisation de la structure. A terme on cherche également à mieux connaître la durabilité de ces matériaux en environnement marin.

Ce travail a fait l'objet d'une collaboration entre l'IFREMER et l'Institut de Recherches en Génie Civil et Mécanique (GeM) de l'Ecole Centrale de Nantes. L'IFREMER est impliquée dans des projets avec les opérateurs et les sociétés d'ingénierie qui travaillent pour l'industrie pétrolière, et a réalisé des études sur ces câbles depuis une dizaine d'années. Au GeM des travaux pour la modélisation des câbles métalliques ont été menés à la fin des années 90.

1.6 Plan de l'étude

Compte tenu de la structure hiérarchique du câble, sa modélisation passe par des méthodes de transition d'échelles, fournissant le comportement d'un constituant à partir de sa description à une échelle inférieure. Le modèle complet du câble fait alors intervenir ces modèles, les résultats issus d'un modèle servant de données d'entrée à l'échelle supérieure.

Etant donné l'architecture du câble, **deux types de modèles** seront développés : l'un est adapté à **un assemblage d'un grand nombre de constituants torsadés**, alors que le second est destiné à des géométries avec **une âme centrale et 6 fils hélicoïdaux identiques : structure dite 1+6**.

Dans les deux cas, et dans le deuxième chapitre de ce mémoire, une synthèse bibliographique présente différents modèles de la littérature, provenant de travaux relatifs à des câbles synthétiques ou métalliques.

Au chapitre 3, nous nous intéressons au **premier type de modèle**, destiné aux structures à grand nombre de constituants torsadés. Plusieurs modèles existants sont discutés, et l'un d'entre eux est repris et amélioré. En final, plusieurs modèles sont mis en œuvre sur différents exemples, et les écarts de raideurs obtenus sont analysés. Ceci conduit à retenir à ce stade deux modèles différents, dont l'un est analytique.

Le chapitre 4 est consacré à la modélisation d'une **structure** de type **1+6**. Sur ce type d'architecture, des modèles spécifiques existent, mais dans le domaine des câbles métalliques. Une étude préliminaire est donc menée pour choisir, parmi les modèles de câbles métalliques de la littérature, celui qui servira de base à la construction d'un modèle pour le câble synthétique. Ce choix s'appuie sur la détermination du domaine de validité de ces modèles, dans le cas métallique. Le modèle retenu est alors adapté au cas des synthétiques.

Dans cette partie initiale du mémoire, les divers modèles passés en revue sont confrontés du point de vue théorique. On examine également à travers des exemples les différences de comportement obtenues à partir de plusieurs modèles. L'objectif de la deuxième partie du mémoire est la validation expérimentale des modèles précédents.

Au chapitre 5, sont présentés les essais de caractérisation du comportement de câbles synthétiques. De nombreux essais sont réalisés, à différentes échelles, et sur deux types de câbles (d'effort à la rupture de 25T et 205T respectivement).

La confrontation modèles/essais fait l'objet du chapitre 6.

Enfin, le bilan de ces travaux et ses perspectives fait l'objet du chapitre 7.

Chapitre 2. Modélisation des câbles – analyse bibliographique

Modélisation des câbles – analyse bibliographique

Nous examinons dans ce chapitre les principaux travaux qui ont été réalisés sur la modélisation des câbles. En général, nous avons deux types de câbles selon le matériau de base utilisé : les câbles métalliques et les câbles synthétiques.

La première partie de ce chapitre est consacrée aux modélisations de câbles métalliques. Les études sur les câbles synthétiques sont abordées dans une deuxième partie.

Nous définissons d'abord quelques notions qui seront utilisées par la suite:

- Matrice raideur du câble : en général, le comportement global du câble en traction/torsion, qui nous intéresse plus particulièrement, peut être exprimé sous la forme suivante:

$$\begin{Bmatrix} F_z \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\varepsilon\varepsilon} & k_{\varepsilon\theta} \\ k_{\theta\varepsilon} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{z,z} \\ \theta_{z,z} \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

où F_z , M_z , $u_{z,z}$ et $\theta_{z,z}$ représentent respectivement l'effort axial, le moment de torsion, les déformations axiale et de torsion. La matrice raideur a pour composantes $k_{\varepsilon\varepsilon}$, $k_{\theta\theta}$, $k_{\varepsilon\theta}$ et $k_{\theta\varepsilon}$ qui représentent respectivement les raideurs en traction, torsion et les termes de couplage.

- Contact tangentiel (circonférentiel) / contact radial: lorsque le contact se situe entre les fils d'une même couche d'un câble, on parle de contact tangentiel (cf. figure 2.1 : A)) et lorsque le contact se produit entre deux fils appartenant à des couches adjacentes ou entre l'âme et des fils de couche adjacente, on dit qu'il est radial (cf. figure 2.1 : B)).
- Contact linéique / contact ponctuel : le contact, entre deux constituants appartenant à une même couche ou à deux couches adjacentes du câble, peut être linéique (cf. figure 2.1 : C)) ou ponctuel (cf. figure 2.1 : D)).

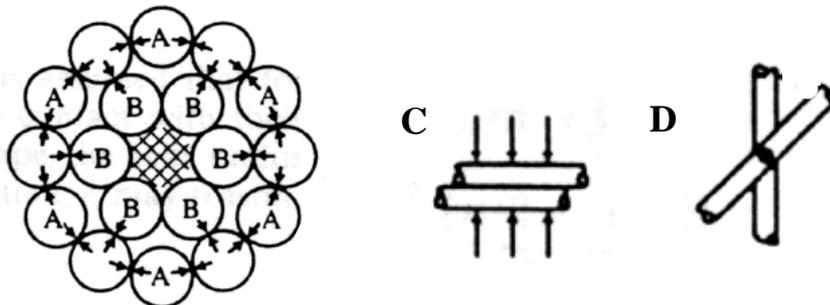


Figure 2.1 : différents modes de contact dans un câble: A) tangentiel, B) radial, C) linéique et D) ponctuel (d'après [RAO 1995a]).

- Rotation bloquée/Rotation libre: Un câble en rotation bloquée a ses extrémités bloquées en rotation axiale, alors que les extrémités d'un câble en rotation libre sont libres de tourner.

2.1 Câbles métalliques

Dans la littérature, on distingue différents types de modèles pour les câbles métalliques. Ces modèles se différencient par la formulation utilisée pour la description des constituants du câble (poutre courbe, membrane (pour décrire une couche de fils), 3D), et par leur mise en oeuvre (analytique, numérique (éléments finis)). On peut classer ces modèles en 3 catégories : poutres courbes, semi-continus et éléments finis, que nous décrivons ci après. Signalons qu'une synthèse bibliographique de ces modèles est présentée dans [CAR 1997] et [NAW1997].

2.1.1 Modèles Poutres courbes

Dans ces modèles, les différents constituants du câble sont assimilés à des poutres courbes selon la théorie de Kirchhoff-Love [LOV 1944].

Pour ce type de modèles, on distingue plusieurs aspects relatifs au comportement des constituants, au traitement du contact, à la formulation d'hypothèses cinématiques, à la forme du comportement global, et à la nature du modèle. D'autre part, chaque modèle s'applique préférentiellement à une construction de câble donnée : monocouche, multicouche, ou multitorons.

2.1.1.1 Comportement des constituants

En général, chaque constituant subit des sollicitations de **traction, torsion et flexion**. Dans certains modèles, seul le comportement en **traction** est pris en compte, et les raideurs de torsion et de flexion sont négligées, cf. Hruska [HRU 1951], [HRU 1952], [HRU 1953], Lutchansky [LUT 1969] et Lanteigne [LAN 1985]. McConnell et Zemek [MCC 1982] ont modifié le modèle de Hruska, en ajoutant simplement la somme de la raideur de **torsion** de tous les fils individuels dans le terme de torsion ($k_{\theta\theta}$) de la matrice raideur. Ceci permet une amélioration importante sur le terme de torsion (en référence à des résultats expérimentaux).

En 1973, Machida et Durelli [MAC 1973] ont de plus étudié les effets des raideurs de **flexion** et de **torsion** des fils individuels sur la matrice raideur globale du câble. Ils apportent une légère amélioration sur le terme de couplage et une amélioration importante sur le terme de torsion par rapport au modèle de Hruska.

Tous les modèles de type poutres courbes postérieurs à 1973 ([PHI 1973], [COS 1976], [HUA 1978], [KNA 1979], [VEL 1984], [PHI 1985], [UTT 1987a], [UTT 1987b], [KUM 1987], [RAM 1988], [RAM 1990], [KUM 1990], [SAT 1996], [LAB 1998], [KUM 2001]) prennent en compte les raideurs de **traction, flexion et torsion**.

2.1.1.2 Effet Poisson

En 1984, Velinsky, Anderson et Costello [VEL 1984] présentent un modèle pour un toron avec âme centrale, dans lequel la contraction radiale due à l'effet Poisson est prise en compte. Dans les modèles [HUA 1978], [PHI 1985], [UTT 1987a], [UTT 1987b], [KUM 1987], [RAM 1988], [RAM 1990] et [KUM 2001] qui utilisent une approche similaire à celle de Costello et al. pour l'étude des câbles en chargement axial, la contraction radiale due à l'effet Poisson est également prise en compte. Nous retiendrons de ces travaux les conclusions de Utting et Jones [UTT 1987a], [UTT 1987b], qui montrent qu'en chargement axial, on peut négliger l'effet Poisson pour déterminer le comportement global de câble.

2.1.1.3 Hypothèses cinématiques et contact entre les constituants

Le contact entre les constituants d'un câble est un élément important de la modélisation. Le problème de contact dans un câble est complexe d'un point de vue mécanique. En général, deux types de contact existent : le contact **tangentiel** entre les fils d'une même couche (cf. figure 2.1 a)) et le contact **radial** entre deux fils appartenant à des couches adjacentes (cf. figure 2.1 b)). Dans la plupart des modèles, les effets du frottement et des déformations de contact sont négligés, à l'exception de quelques travaux.

En 1973, Phillips et Costello [PHI 1973] présentent une approche fondamentale basée sur les équations d'équilibre de Kirchhoff-Love pour les poutres courbes, en étudiant des torons à une couche de fils hélicoïdaux et **sans âme**, les fils se touchant donc entre eux (**contact tangentiel**), les déformations de contact et le frottement étant négligées. Au niveau cinématique, la variation d'angle d'hélice est considérée, la déformation des fils étant négligée. Ainsi, la déformation axiale du toron ne provient que des variations de l'angle d'enroulement. Ensuite, la déformation des fils est prise en compte [COS 1976].

En 1978, Huang [HUA 1978] considère les contacts radial (âme - fils) et tangentiel (fil - fil), les déformations de contact étant négligées. Huang déduit de cette étude que si les fils sont constitués du même matériau, l'extension du toron entraîne toujours la séparation des fils hélicoïdaux. En 1987, Utting et Jones [UTT 1987a], [UTT 1987b] utilisent une approche similaire à celle de Costello pour l'étude des câbles en chargement axial. Ils prennent en compte le frottement, et l'aplatissement des fils sous l'effet de la pression de contact radial (âme – fils). Ils montrent qu'en traction - torsion, la prise en compte du frottement et de l'aplatissement des fils a une influence négligeable sur le comportement global de câble. Dans le cas d'un câble multicouches, la même conclusion a été obtenue par Ramsey [RAM 1990] sur le caractère négligeable du frottement sur le comportement global d'un câble en chargement axial. Dans le modèle proposé par Lanteigne [LAN 1985] pour des câbles multicouches, seul le contact radial (entre des couches adjacent) est pris en compte et les déformations de contact sont négligées. En flexion, la raideur est estimée pour deux cas limites : non glissement, et glissement sans frottement, cf. figure 2.2.

Labrosse [LAB 1998] présente une nouvelle approche pour l'étude des câbles 1+6 en chargement axial. En effet, dans ce modèle, le contact entre l'âme et les fils (contact radial) est pris en compte. Tous les mouvements relatifs possibles entre âme et fils sont

étudiés, et il est montré qu'en chargement axial, le seul mouvement relatif qui a une influence sur le comportement global est une rotation (appelée pivotement). Les autres mouvements relatifs pouvant être supposés nuls, ceci permet d'établir des relations entre la cinématique des fils et celle de l'âme. Ensuite, la comparaison avec des résultats expérimentaux justifie que le pivotement peut être considéré comme libre (d'après [NAW 1997]).

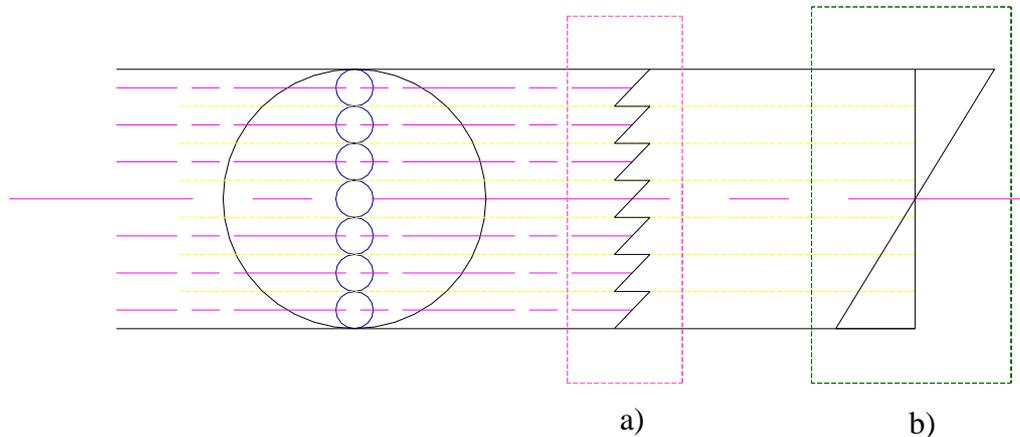


Figure 2.2 : déplacement de section du câble en flexion : a) glissement sans frottement et b) non glissement

Dans un article plus récent, Kumar et Boesis [KUM 2001], obtiennent les contraintes locales de contact (radial) maximales dans le câble à partir de leurs résultats analytiques précédents [KUM 1987], et en utilisant des équations de la mécanique des contacts (théorie de Hertz). Il y est montré que les contraintes de compression maximales du contact dépendent fortement du module d'élasticité de matériau et de l'angle d'hélice.

2.1.1.4 Nature des modèles

En considérant les phénomènes précédents et le comportement des constituants, des modèles de différentes natures sont obtenus.

Tous les modèles dans lesquels on néglige la contraction radiale et le changement de l'angle d'enroulement, sont des modèles **linéaires** [HRU 1951], [HRU 1952], [HRU 1953], [LUT 1969], [LAN 1985], [MCC 1982], [MAC 1973], [LAB 1998] et [SAT 1996].

Dans les travaux de Costello et al. [PHI 1973] et [COS 1976], le changement de géométrie étant pris en compte, des équations **non linéaires** sont obtenues. Ces équations peuvent être résolues par une méthode itérative. En 1984, Velinsky, Anderson et Costello [VEL 1984], présentent leurs résultats pour un toron avec âme centrale. Ensuite, les équations utilisées sont linéarisées.

Knapp [KNA 1979] étudie la variation du rayon de l'âme due à la pression des couches pour un câble avec une âme souple (soft core) en chargement axial. Contrairement à Costello [COS 1997], l'effet Poisson n'est pas pris en compte. Il obtient dans un premier temps, des équations non linéaires et ensuite, les équations sont linéarisées. Les résultats

obtenus sont comparés à des résultats expérimentaux [GIB 1972]. De bonnes corrélations entre la théorie et les expériences sont obtenues. Cette approche est essentiellement consacrée aux câbles avec une âme souple, mais il est possible d'appliquer aux structures avec une âme plus rigide. Dans ce dernier cas, ces résultats coïncident avec ceux de Machida et Durelli [MAC 1973].

Dans les modèles [HUA 1978], [UTT 1987a] et [UTT 1987b] qui utilisent une approche similaire à celle de Costello pour l'étude des câbles 1+6 en chargement axial, les non-linéarités géométriques dues à la contraction radiale (effet Poisson) sont prises en compte. Les résultats montrent qu'en traction-torsion, leur effet est négligeable sur le comportement global de câble. On peut donc dire que pour des charges courantes, le comportement d'un câble peut être considéré comme linéaire (d'après [VEL 1984] et [COS 1997]).

En 1997, Costello [COS 1997] publie un ouvrage qui est en fait une synthèse de tous les travaux précédents de Costello et al.. On note qu'aucune formule analytique n'est donnée pour la matrice raideur du câble.

En 1987, Kumar et Cochran [KUM 1987] proposent une version linéaire des équations de Costello et Philips, et arrivent à une expression analytique de la matrice raideur, avec prise en compte des contractions radiales pour étudier les câbles multicouches. Plus tard, ils utilisent leurs équations linéaires pour traiter le cas du chargement axial d'un toron comportant une âme en fibre [KUM 1990]. Dans un article plus récent, Kumar et Boesis [KUM 2001], valident leur modèle [KUM 1987] par les résultats d'essais sur un câble métallique de 7 fils soumis à une charge axiale et un moment de torsion.

2.1.1.5 Modèle en fonction de la construction du câble

Les modèles les plus simples, dont les composants travaillent uniquement en traction, comme ceux décrits dans [HRU 1951], [HRU 1952], [HRU 1953], [LUT 1969] et [LAN 1985], sont appropriés pour des câbles **multicouches** (qui contiennent un grand nombre de fils) mais pas utilisable pour des câbles **1+6 (monocouche)**. Certains modèles sont présentés uniquement pour modéliser les câbles 1+6 [HUA 1978], [UTT 1987a], [UTT 1987b], [SAT 1996] et [LAB 1998]; et les autres modèles que nous avons présentés ici, sont initialement conçus pour les câbles multicouches, mais il est possible de les appliquer également aux câbles 1+6 [MAC 1973], [KNA 1979], [MCC 1982], [VEL 1984], [KUM 1987], [KUM 2001].

Les modèles pour prédire le comportement global d'un **câble de section complexe** (multitorons) sont plutôt rares dans la littérature. Velinsky et al. [VEL 1984] ont étendu la théorie linéaire de Costello pour traiter ce type de câble en traction et torsion. Un an plus tard, Velinsky utilise ces équations linéaires pour traiter le cas du chargement axial d'un câble multitorons comportant une âme en fibre [VEL 1985]. En 1985, Philips et Costello [PHI 1985] ont étendu la théorie de Velinsky et al. [VEL 1984] pour étudier les câbles de section complexe soumis à un chargement qui combine traction, torsion et courbure constante imposée.

2.1.1.6 Comportement global du câble

En général le comportement axial global du câble se caractérise par un couplage entre traction, torsion et flexion. Dans [LAN 1985] l'auteur a démontré que, si la configuration du câble est symétrique, le comportement en flexion est indépendant de la traction et de la torsion (les termes de couplages, flexion/traction et flexion/torsion sont nuls). Par contre, si la symétrie disparaît (par exemple si un nombre donné de fils du câble est cassé), le comportement en flexion dépendra à la fois de traction et de torsion. Tous les modèles que nous avons présentés auparavant conduisent à un comportement du câble couplé en traction – torsion (eq. 1) ; certains d'entre eux sont également capables de traiter la flexion [LUT 1969], [LAN 1985], [PHI 1985], [RAM 1988] et [LAB 1998].

2.1.1.7 Symétrie de la matrice

Comme cela peut être démontré facilement grâce au théorème de réciprocité de Maxwell-Betti (d'après [RAO 1995a], [JOL 1991] et [SAT 1996]) la matrice raideur du comportement du câble doit être symétrique. Ceci est le cas pour les modèles [HRU 1951], [HRU 1952], [HRU 1953], [LUT 1969], [LAN 1985], [MCC 1982], [LAB 1998] et [SAT 1996]. En revanche, cette propriété n'est pas respectée dans [MAC 1973], [PHI 1973], [COS 1976], [KNA 1979], [VEL 1984], [VEL 1985], [PHI 1985], [KUM 1987], [KUM 2001]. Certains travaux essaient d'améliorer les modèles précédents pour restaurer la symétrie de la matrice raideur d'un câble [RAM 1988], [RAM 1990], et [SAT 1996]. Ils considèrent que le moment de torsion d'un fil ne doit pas seulement s'exprimer en fonction de la rotation du fil mais aussi en fonction de sa déformation axiale, et que le moment de flexion est fonction de la courbure du fil et de sa déformation axiale.

Les différents modèles analytiques (modèles poutre courbe) de câbles métalliques sont répertoriés dans le tableau 1 à la fin de ce chapitre. Au chapitre 4 on discutera de l'utilisation de ces modèles pour les câbles synthétiques présentant une structure de type 1+6, cf. section 4.2.

2.1.2 Modèles semi-continus

Les modèles semi-continus sont plus récents par rapport aux modèles poutres courbes. Ce type de modèle repose sur une technique d'homogénéisation. Lorsqu'une couche d'un câble est composée d'un grand nombre de constituants élémentaires identiques, on peut en effet remplacer le système discret par un matériau continu dont les caractéristiques sont convenablement déterminées.

Les premiers modèles semi-continus de câbles datent des années 80 avec les travaux de Raoof et Hobbs ; ils ont travaillé largement sur le comportement de torons, en se concentrant sur les torons avec un grand nombre de fils afin que les moments de flexion et moments de torsion dans les fils individuels deviennent beaucoup moins importants que dans le toron avec six et sept fils.

En 1982, Hobbs et Raoof [HOB 1982] proposent une nouvelle approche pour la modélisation des câbles monotrons multicouches. L'analyse est basée sur deux hypothèses principales : pour une charge axiale nulle sur le câble, les fils dans chaque

couche se touchent juste, et les raideurs de flexion et de torsion des fils individuels sont négligées. Dans ce modèle, chaque couche de fil est traitée comme une feuille cylindrique orthotrope avec des propriétés non-linéaires. Ces propriétés sont régies par quatre composantes élastiques. Deux d'entre elles sont obtenues directement à partir des propriétés des fils. Les deux autres sont reliées à la raideur de contact (contact tangentiel) au sein de la couche (théorie de Hertz). Ces raideurs tiennent compte des efforts exercés par les couches adjacentes. Dans ce modèle, le frottement entre les fils adjacents d'une même couche est pris en compte et la raideur axiale du câble est obtenue par sommation des raideurs des différentes couches. On retrouve cette analyse dans [RAO 1988].

Plus tard, Raof [RAO 1991] reprend la théorie des feuilles orthotropes et présente une méthode simplifiée, pour obtenir la matrice raideur du toron multicouches sous l'hypothèse d'un glissement sans frottement entre les fils d'une même couche. Ceci conduit à une borne inférieure de la raideur en chargement axial. Ce modèle est basé sur des résultats expérimentaux et des calculs statistiques, qui couvrent une grande gamme de diamètres et d'angles d'enroulement de câble. En 1995, Raof et Kraincanic [RAO 1995a] ont étendu de la même manière, le modèle simplifié précédent [RAO 1991] pour le cas de non glissement (d'où l'obtention d'une borne supérieure).

En 1995, Raof et Kraincanic [RAO 1995b] ont étendu le modèle Raof [RAO 1991] pour modéliser des câbles multitorons comportant une âme en fibre sous chargement axial. Les résultats obtenus sont comparés à des résultats expérimentaux réalisés sur des câbles [VEL 1985b] et [CAN 1993]. La correspondance entre ces prévisions et les mesures est bonne. Dans [RAO 1995c], ils reprennent la mise en équation de [RAO 1995b] pour traiter un câble multitorons comportant une âme en acier. De bonnes corrélations entre la théorie et les expériences [VEL 1984] et [STR 1988] sont obtenues. En 1997, Raof [RAO 1997] étudie l'influence de l'angle d'enroulement sur différents caractéristiques de toron multicouches. Pour ce faire, 3 torons avec un angle d'enroulement de 12°, 18° et 24° sont fabriqués. Le rôle prédominant de l'angle d'enroulement sur le comportement global d'un toron multicouches soumis à un chargement de traction, torsion et flexion est démontré.

Il faut noter que les modèles de câble présentés par Raof et al. nécessitent un nombre suffisant de fils dans chaque couche pour que les propriétés puissent être moyennées afin que chaque couche se comporte comme une feuille orthotrope. C'est pourquoi ces modèles ne sont pas utilisables pour des câbles 1+6.

En 1989, Blouin et Cardou [BLO 1989] s'inspirent largement du modèle de Raof et al. et étudient le comportement de câbles soumis à un chargement axial. En effet, chaque couche de fils dans le toron est représentée par un cylindre circulaire creux dont le matériau est considéré comme orthotrope. Les cylindres sont considérés comme épais et le problème est tridimensionnel. Les propriétés élastiques de matériau sont obtenues par comparaison paramétrique avec les modèles connus. Jolicœur et Cardou [JOL 1996] ont étendu le modèle de Blouin et Cardou [BLO 1989] pour étudier un câble en flexion. Les conditions de contact à l'interface entre deux cylindres sont seulement étudiées pour deux cas limites : non-frottement et non-glissement. Des comparaisons sont faites avec les résultats expérimentaux de McConnell et Zemke [MCC 1982] et Scanlan et Swart [SCA 1968] ainsi que les résultats des modèles analytiques [LAN 1985], [COS 1997] et [RAO 1990]. On peut noter un léger écart concernant le terme de torsion pour des toron de 7 fils

mais les résultats pour un toron qui contient un grand nombre de fils sont très satisfaisants. Les résultats pour la raideur en traction et les termes de couplages sont bons, mais pour la flexion, ils ne sont pas satisfaisants.

Les différents modèles semi-continus de câbles métalliques sont également répertoriés dans le tableau 1 à la fin de ce chapitre. L'utilisation de ces modèles pour les câbles synthétiques sera discutée au chapitre 3, cf. section 3.2.1.

2.1.3 Modèles EF

Le calcul par éléments finis permet, entre autres, la simulation très précise et réaliste du comportement mécanique de structures complexes sans avoir à réaliser de prototype physique. Ainsi, en phase de conception, on peut tirer très avantageusement profit du calcul par éléments finis pour valider ou optimiser des composants ou assemblages complets du câble.

Les premiers modèles éléments finis de câble ont été très simplifiés, du fait de la faiblesse de puissance de calcul des ordinateurs : ainsi, la description de la géométrie et des efforts interfilaires était très grossière. Les premiers modèles éléments finis (EF) de câbles ont été construits à partir d'éléments déjà existants dans le code NASTRAN [NAW 1997]. En 1973, dans [CAR 1973], les fils du câble ainsi que les liaisons entre fils sont modélisés par des EF barres. Dans [CUT 1987], les fils du câble sont modélisés par des éléments solides à 6 noeuds mais les liaisons entre fils sont assimilées à des ressorts.

En 1997, Nawrocki [NAW 1997] a réalisé un modèle EF de fil hélicoïdal (modèle poutre) pour l'étude du comportement mécanique des câbles monotorons 1+6. Dans ce modèle, la variation du diamètre des fils et les déformations locales dues aux contacts interfilaires (contact radial) sont négligées, mais l'effort tranchant dans la section des fils est pris en compte. Les frottements internes sont également négligés, mais tous les mouvements interfilaires possibles (glissement, roulement et pivotement) sont modélisés. Il y est montré que le pivotement interfilaire est le seul mouvement interfilaire à avoir une influence notable sur la réponse globale d'un câble en chargement axial. Dans [LAB 1998], Labrosse propose un modèle EF (modèle poutre) spécialement adapté à l'étude des câbles en flexion de faible amplitude. Il en déduit que pour faire l'étude de la réponse globale du câble, il suffit de considérer que le glissement est bloqué. Ensuite, Nawrocki et Labrosse [NAW 2000] étudient à l'aide de leur modèle éléments finis, le rôle des conditions de contacts pour un câble 1+6 en chargement axial et en flexion. Il y est montré que les pivotements et glissement interfilaires gouvernent la réponse globale du câble, respectivement pour le chargement axial et en flexion. Par comparaison avec des résultats expérimentaux de Utting et Jones [UTT 1987a], les auteurs en déduisent que le pivotement interfilaire peut être considéré comme libre.

Avec l'avènement d'ordinateurs plus puissants, les modèles EF permettent d'analyser le comportement local et global du câble de manière plus réaliste et approfondie.

En 1996, Chiang [Chi 1996] a utilisé le code ANSYS et des éléments solides 3D à 8 noeuds pour modéliser une petite longueur d'un toron (entre 0.1 et 0.35 de pas) de type 1+6 en chargement axial statique. Cette étude est réalisée pour déterminer l'influence de différents paramètres sur la raideur axiale et la répartition des contraintes entre les fils extérieurs et l'âme. Ces paramètres sont l'angle d'enroulement des fils, les conditions aux

limites en rotation, la longueur du modèle, le rayon de l'âme, le rayon des fils extérieurs et les conditions de contact interfilaire (non-glissement et glissement total).

Jiang et al. [JIA 1999] ont également utilisé le code ANSYS et des éléments solides à 8 noeuds pour modéliser 1/12 d'un toron (en exploitant la symétrie du toron) de 7 fils soumis à un chargement axial. Ils ont modélisé une petite longueur d'un toron (approximativement 1/1000 de pas), donc pour considérer l'effet d'hélice, le champ de déplacement est imposé sur deux sections extrêmes du modèle comme conditions aux limites (ce qui n'est pas fait dans [CHI 1996]). Pour ce faire, les auteurs ont déterminé théoriquement le champ de déplacement. Grâce à ce modèle éléments finis, des effets non-linéaires tels que le contact, le frottement et la plasticité qui sont très difficiles à intégrer dans un modèle analytique, sont étudiés. Pour la réponse globale du câble, la comparaison des résultats du modèle éléments finis avec les résultats expérimentaux de Utting et Jones [UTT 1987a], est très satisfaisante. Un an plus tard Jiang et al. [JIA 2000] présentent un modèle éléments finis pour étudier un toron à trois couches (1+6+12 fils). Le modèle est construit de la même façon que le précédent [JIA 1999]. Les auteurs en déduisent, par comparaison avec des résultats expérimentaux de Utting et Jones [UTT 1988], que le comportement global de leur modèle est plus proche des résultats expérimentaux que les résultats analytiques de Costello [COS 1997].

Il faut noter que dans les deux derniers articles, les auteurs ont imposé, sur les deux sections extrêmes, le champ de déplacement approximé issu de leur modèle analytique. Si on veut étudier vraiment le comportement global de câble, il faudrait modéliser une longueur suffisamment grande pour éliminer les effets de bord.

Dans ce travail, on sera amené à utiliser des modèles éléments finis 3D. Nous y reviendrons au chapitre 4.

2.1.4 Bilan

Après l'examen des travaux précédents, on peut dire qu'il existe des modèles analytiques pour tous les types de câbles métalliques existants en chargement axial. Les **modèles poutres courbes** sont très bien adaptés pour étudier le câble **1+6**. Les études menées avec ce modèle montrent qu'en traction - torsion, la prise en compte de l'effet Poisson, du frottement et de l'aplatissement des fils ainsi que les non-linéarités géométriques ont une influence négligeable sur le comportement global du câble. De plus, les contacts radiaux entre les fils extérieurs et l'âme sont les seuls contacts qui existent au cours d'un chargement axial. Nous nous appuyerons sur ces résultats lors de la présentation de notre modèle 1+6 pour passage de toron à câble.

Pour les câbles métalliques **multicouches**, les **modèles semi-continus**, dans lesquels chaque couche est assimilée à une membrane, sont bien adaptés. Dans ces modèles, l'effet du frottement est pris en compte et les composantes élastiques de chaque couche sont reliées à la raideur de contact (entre deux cylindres parallèles à base circulaire) au sein de la couche. Ce dernier aspect rend l'utilisation de ce modèle délicate pour les câbles synthétiques. En effet, les constituants sont très souples transversalement, et ne se comportent donc pas de la même façon qu'un cylindre homogène.

Au niveau éléments finis, les auteurs utilisent 2 types de modèles selon que les éléments sont des poutres ou 3D. L'économie des modèles EF poutres en temps de calcul par

rapport aux EF 3D est non négligeable mais se justifie moins aujourd'hui où les calculs 3D sont très rapides.

En général, les auteurs ont montré les qualités de ces modèles grâce aux résultats expérimentaux mais, le domaine de validité n'est pas toujours bien défini. Il faut noter aussi que les résultats expérimentaux disponibles dans la littérature sont le plus souvent sur des petits câbles. De ce point de vue, la réalisation d'essais sur des gros câbles sera intéressante.

Les différents modèles de câbles métalliques sont répertoriés dans le tableau 1.

2.2 Câbles synthétiques

Comme indiqué au chapitre 1, les câbles synthétiques ont une structure hiérarchique. On passe ainsi successivement de la fibre au brin, puis au brin assemblé, au toron, et enfin au câble (cf. figure 2.3, qui reprend la figure 1.5 du chapitre 1).

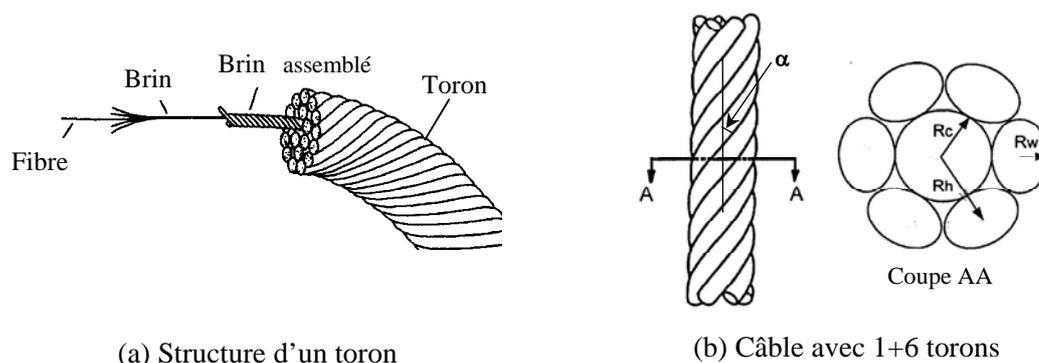


Figure 2.3– Architecture du câble synthétique.

Par exemple, dans notre cas, pour le câble 25T, on a plus de 1 million fibres. Le nombre de constituants est réduit en considérant des brins au lieu de fibres. Cependant, il reste élevé comparativement aux câbles métalliques, de plus, les constituants du câble synthétique ne sont pas homogènes ni isotropes.

2.2.1 Modèles spécifiques pour câbles synthétiques

La complexité de cette géométrie oriente la modélisation vers des approches analytiques (des modèle EF 3D ne sont pas envisageables car le comportement transverse des constituants est très mal connu). Néanmoins, les modèles analytiques de câbles synthétiques sont plutôt rares dans la littérature. Dans ce type de modèle, comme au paragraphe précédent, on distingue plusieurs aspects relatifs au comportement des constituants, au traitement du contact, à la formulation d'hypothèses cinématiques, à la forme du comportement global, aux aspects géométriques et à la nature du modèle.

2.2.1.1 Comportement des constituants

Dans les câbles synthétiques, le diamètre de filaments est très petit (dans notre cas $12 \mu\text{m}$), et les filaments sont en très grand nombre. Donc à cette échelle, on ne considère pas les raideurs de torsion et de flexion, et seule la traction est considérée. Ainsi, en général, dans les modèles de câbles synthétiques, les constituants de base travaillent uniquement en **traction**, cf. Treloar et Monter [TRE 1963], Treloar [TRE 1965], Hoppe [HOP 1991]. Par contre, dans les structures supérieures telles que torons, les moments de torsion et de flexion (générés par déformation axiale du câble) doivent être considérés [LEE 1993]. Le modèle de Leech est implémenté dans un logiciel (FRM : **Fiber Rope Modeller**) développé par Tension Technology International Limited, TTI (2003). Par la suite, ce modèle sera appelé FRM. Dans ce modèle, en chargement axial, le comportement local du constituant peut être décrit par une loi de traction - torsion couplée. Dans des articles plus récents [RUN 2002] et [BEL 2004], les raideurs de torsion et de flexion sont prises en compte.

Enfin, pour tous les modèles de câble synthétique, le comportement des constituants de base, en général le brin, est déterminé par expérience.

2.2.1.2 Hypothèses cinématiques et contact entre les constituants

Les modèles de câbles synthétiques se basent sur des relations géométriques pour passer des déformations axiales de la structure à celles de ses constituants, à chaque niveau, avec les hypothèses que toute section plane et normale à la ligne moyenne initiale, le reste après déformation, et que la déformation de structure est à volume constant [TRE 1963], [TRE 1965], [HOP 1991], [LEE 1993], [RUN 2002] et [BEL 2004]. Rungamornrat et al. [RUN 2002] présentent des résultats pour un modèle à section constante.

Dans les premiers travaux, la déformation due au contact et aux frottements entre les constituants est négligée [TRE 1963], [TRE 1965] et [HOP 1991]. Plus tard, certains modèles ont pris en compte le contact et l'effet du frottement, [LEE 1993], [RUN 2002] et [BEL 2004]. Ces modèles permettent également de traiter la structure en considérant que ses constituants ont une raideur transverse faible, ce qui conduit à des changements de forme importants de leur section (on parle de « soft components »). Ces modèles analysent différentes géométries appelées « **Packing** », « **Wire rope** » et « **Wedge** », et différents types de contact (cf. figure 2.4). Les modèles de Leech [LEE 1993], Rungamornrat et al. [RUN 2002] et Beltran [BEL 2004] s'intègrent dans un logiciel, et les auteurs ne donnent qu'une description très sommaire de leur modèle. Ces auteurs constatent que l'effet de frottement sur le comportement global du câble en chargement axial est négligeable.

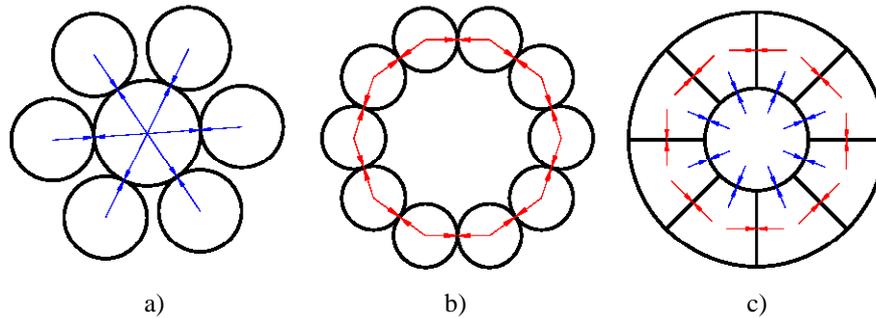


Figure 2.4 : différentes géométries et différents types de contact, a) Packing (contact radial); b) Wire rope (contact tangentiel) et c) Wedge (contacts radial et tangentiel) ; d'après [LEE 1993].

En 2002, Leech [LEE 2002] s'intéresse plus particulièrement à la modélisation du mouvement relatif entre des différents constituants. Pour introduire des effets du frottement, il est nécessaire de considérer les glissements aux points de contact. Les modes de glissement sont nombreux ; Leech en présente 6 différents : Mode 1. « **axial slip** » : glissement axial entre composants dans la même couche (cf. figure 2.5 a)). Mode 2. « **component twist** » : frottement entre composants dans la même couche mais dû à la tendance des composants à tourner autour de leur axe (cf. figure 2.5 b)). Mode 3 « **scissoring** » : qui se produit quand un composant passe sur un autre comme dans une configuration de câble tressé (cf. figure 2.5 c)). Mode 4. « **sawing** » : qui apparaît entre composants de différentes couches et spécifiquement en flexion (cf. figure 2.5 d)). Mode 5: « **dilation** » : qui correspond à un changement dans la section du composant dû à un chargement de la structure (cf. figure 2.5 e)). Mode 6: « **distortional** » : qui provient de la déformation de composants très souples transversalement (cf. figure 2.5 e)). Pour un câble torsadé en chargement axial (notre étude), d'après Leech [LEE 1993], parmi tous ces modes, c'est le mode de **glissement axial** qui a la contribution la plus importante. De plus, ce mode a une influence négligeable sur le comportement global du câble en chargement axial.

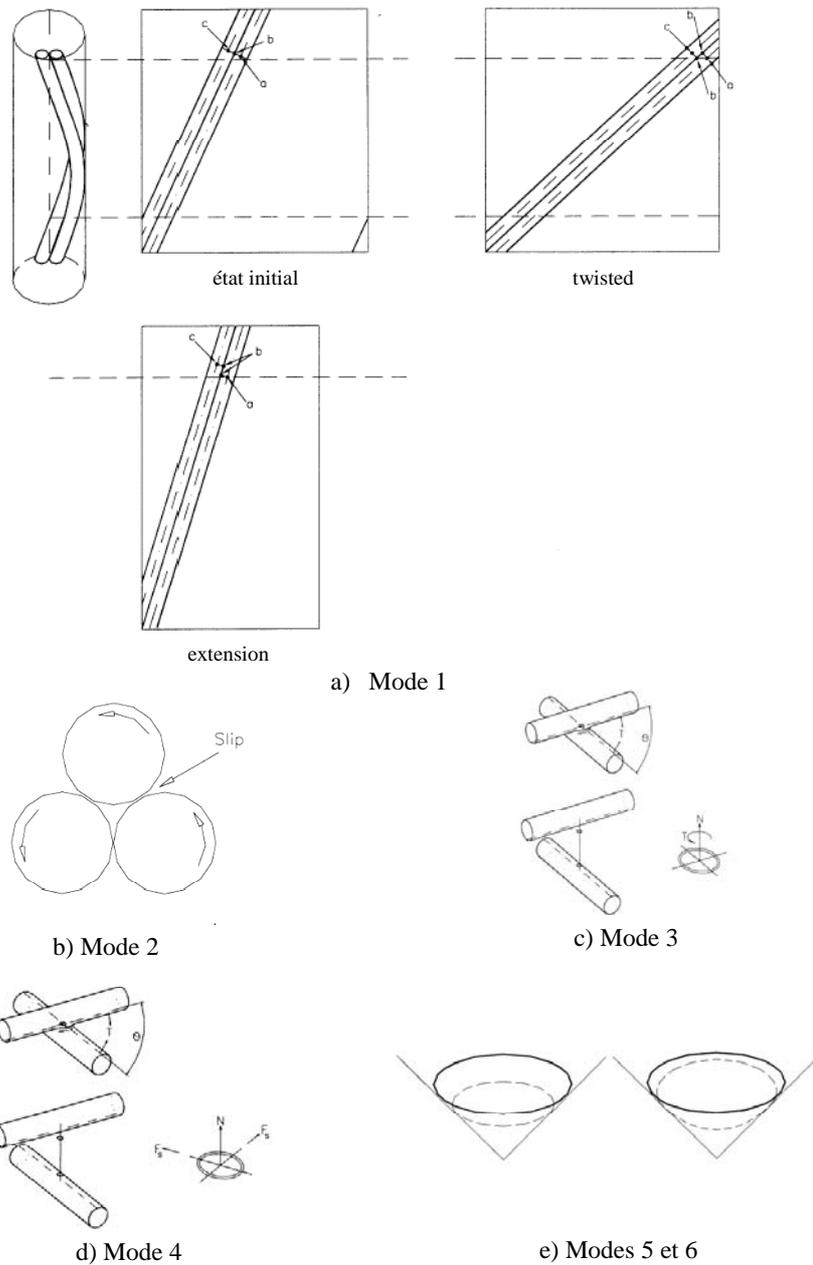


Figure 2.5 : différents modes de glissement (frottement) ; d'après [LEE 2002].

2.2.1.3 Nature des modèles

Le modèle de Treloar et Monter [TRE 1963] est capable de traiter des propriétés de matériau non-linéaires (introduites sous la forme de courbes contrainte – déformation) et avec des grandes déformations. Dans les modèles [LEE 1993], [RUN 2002] et [BEL 2004] qui sont implémentés dans un logiciel, la non-linéarité des propriétés matériau est également prise en compte (la raideur étant exprimée par un polynôme).

2.2.1.4 Comportement global du câble

Les modèles [TRE 1963], [TRE 1965], [HOP 1991], [RUN 2002] et [BEL 2004] fournissent le comportement global du câble uniquement en traction, alors que le modèle de Leech [LEE 1993] donne le comportement en traction - torsion.

2.2.1.5 Modèle en fonction de la construction du câble

Tous les modèles présentés ci-dessus pour les câbles synthétiques sont appropriés pour des structures multicouches (qui contiennent un grand nombre de constituants), mais la plupart des modèles sont également utilisables pour des câbles 1+6 cf. [HOP 1991], [LEE 1993], [RUN 2002] et [BEL 2004].

2.2.2 Bilan

Les modèles de câbles synthétiques sont relativement peu nombreux, et ils sont souvent intégrés dans un logiciel avec des méthodes de résolution numériques (résultats non analytiques, à l'exception du modèle [HOP 1991]). Dans ce type de modèle, pour les structures inférieures, les raideurs de torsion et de flexion sont négligées, mais, aux échelles supérieures, les moments de torsion et de flexion peuvent être considérés.

Le comportement global du câble en chargement axial se réduit le plus souvent à la traction, sauf dans le modèle de Leech [LEE 1993] (traction et torsion).

Dans les quelques références disponibles qui étudient l'effet du frottement, tous les auteurs déduisent que l'effet de frottement provoque une influence négligeable sur le comportement global du câble en chargement axial.

Pour valider les modèles, les résultats obtenus sont comparés à des résultats expérimentaux ; mais, d'une part les résultats disponibles sont très peu nombreux et d'autre part ces essais sont réalisés sur des petits câbles. Donc, des données d'essais supplémentaires, surtout pour des gros câbles, sont absolument nécessaires pour mieux comprendre la réponse du câble. De plus, le domaine de validité n'est pas toujours défini, sauf pour le modèle Treloar et Monter [TRE 1963], qui fournit de bons résultats (raideur en traction pour des petits câbles) pour un angle d'enroulement inférieur à 15°. On remarque que ce modèle ne fournit que la raideur en traction.

Les différents modèles de câbles synthétiques sont également répertoriés dans le tableau 1 à la fin de ce chapitre.

2.3 Conclusion

En considérant l'architecture du câble synthétique on peut dire que pour analyser ce type de câble deux modèles différents (au moins) sont nécessaires : un modèle multicouches plutôt pour les structures inférieures (brin, brin assemblé,...) et un modèle 1+6 ou monocouche pour les structures supérieures (câble ou toron).

Au vu de l'analyse bibliographique, on peut tout d'abord dire qu'il existe de nombreux modèles analytiques de **câbles métalliques** (matériaux homogènes et isotropes). Comme l'ont souligné Cardou et Jolicoeur [CAR 1997], ces modèles sont capables de traiter correctement le comportement axial des câbles métalliques. De plus, les modèles poutres courbes sont bien adaptés à des câbles de type 1+6, même si leur domaine de validité n'est pas toujours défini.

Par contre, les modèles spécifiques pour les **câbles synthétiques**, qui nous intéressent ici, sont plutôt rares dans la littérature et souvent intégrés dans un logiciel. On remarque qu'à notre connaissance, ces modèles sont développés pour des câbles multicouches, et qu'il n'y a pas de modèle spécifique de câble synthétique pour la construction 1+6.

Notre but dans cette étude est de construire un modèle analytique, fiable, pour obtenir le comportement global d'un câble synthétique en traction - torsion, en ayant comme seules données le comportement mécanique du matériau (à l'échelle du brin) et les paramètres géométriques de construction du câble. Pour atteindre cet objectif, on sera donc amené à utiliser successivement ces différents modèles, pour passer du brin au câble, comme l'illustre la figure 2.6.

De plus, les études expérimentales sont absolument nécessaires pour valider les modèles, en particulier sur les gros câbles.

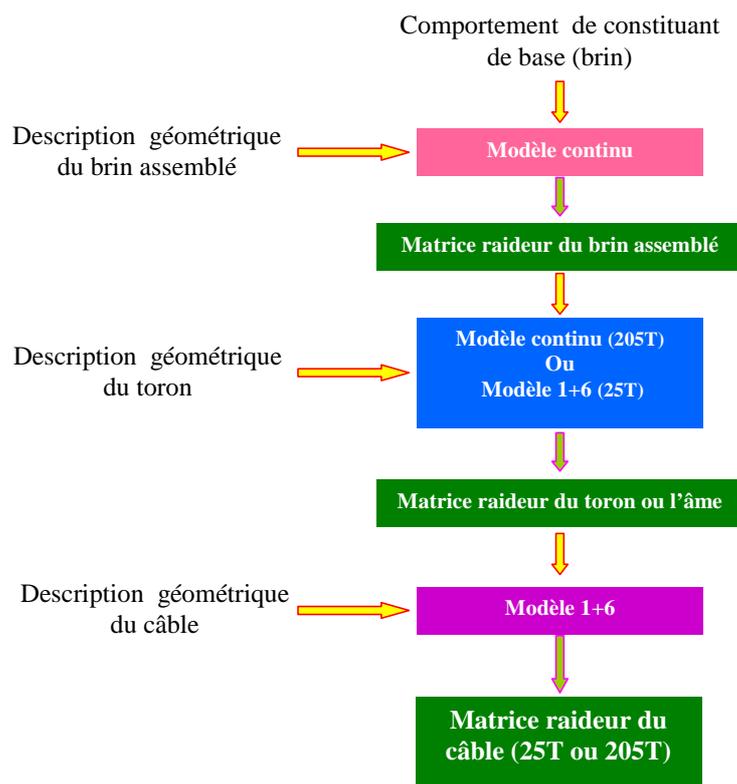


Figure 2.6 : organigramme général pour analyser les câbles synthétiques.

Tableau 1: modèles de câbles

Modèle	Comportement des constituants			Comportement global du câble			Effet Poisson	Contact		Effet frottement	N.L / L	Géométrie			Symétrie de K	Analyt.
	Tr.	To.	Fl.	Tr.	To.	Fl.		Rad.	Tan.			1+6	Multi-couches	Multi-torons		
Câbles Métalliques : Modèles poutres courbes																
[HRU 1951-53]	X	---	---	X	X	---	---	---	---	---	L	---	X	---	X	X
[LUT 1969]	X	---	---	X	X	X	---	X	---	---	L	---	X	---		
[MAC 1973]	X	X	X	X	X	---	---	---	---	---	L	X	X	---	---	X
[PHI 1973]	X	X	X	X	X	---	---	---	X	---	NL	---	X	---	---	---
[COS 1976]	X	X	X	X	X	---	X	X	---	---	NL	X	X	---	---	---
[MCC 1982]	X	X	---	X	X	---	---	---	---	---	L	X	X	---	---	X
[KNA 1979]	X	X	X	X	X	---	---	X	---	---	NL	X	X	---	---	X
[VEL 1984-85]	X	X	X	X	X	---	X	X	---	---	L	X	X	X	---	---
[PHI 1985]	X	X	X	X	X	X	X	X	---	---	L	X	X	X	---	---
[LAN 1985]	X	---	---	X	X	X	---	X	---	X	L	---	X	---		
[KUM 1987-90-01]	X	X	X	X	X	---	X	X	---	---	L	X	X	---	---	X
[UTT 1987a-b]	X	X	X	X	X	---	X	X	---	X		X	---	---	---	---
[RAM 1988-90]	X	X	X	X	X	---	X	X	---	X	L	X	X	---	---	---
[SAT 1996]	X	X	X	X	X	---	---	X	---	---	L	X	X	---	X	X
[LAB 1998]	X	X	X	X	X	X	---	X	---	---	L	X	---	---	X	X

Modèle	Comportement des constituants			Comportement global du câble			Effet Poisson	Contact		Effet frottement	N.L / L	Géométrie			Symétrie de K	Analyt.
	Tr.	To.	Fl.	Tr.	To.	Fl.		Rad.	Tan.			1+6	Multi-couches	Multi-torons		
Câbles Métalliques : modèles semi-continus																
Raof et al.	X	---	---	X	X	---	---	X	X	X	NL	---	X	X	---	---
[BLO 1989]	X	X	X	X	X	---	X	X	---	---	L	X	X	---	---	---
[JOL 1996]	X	X	X	X	X	X	X	X	---	---	L	X	X	---	---	---
Câbles synthétiques																
[TRE 1963-65]	X	---	---	X	---	---	V. C	---	---	---	NL	---	X	---	---	---
[HOP 1991]	X	---	---	X	---	---	V. C.	---	---	---	NL	X	X	---	---	X
[LEE 1993]	X	X	X	X	X	---	V. C.	X	X	X	NL	X	X	X		---
[RUN 2002]	X	X	X	X	---	---	V. C. et S. C.	X	X	X	NL	X	X	X		---
[BEL 2004]	X	X	X	X	---	---	V. C.	X	X	X	NL	X	X	X		---

Tr. : Traction	Tan. : tangentiel
To. : Torsion	N. L. : Non linéaire
Fl. : Flexion	V. C. : Volume Constant
Rad. : Radial	S. C. : Section Constant

Chapitre 3. Modélisation d'une structure à grand nombre de constituants torsadés

3.1 Introduction

Nous cherchons ici à mettre au point un modèle, pour prédire le comportement d'une **structure** constituée d'un grand nombre de constituants élémentaires appelés **sous-structures**, à partir de sa géométrie et du comportement des sous-structures. Il s'agit du comportement de la structure en **chargement axial** : traction et torsion.

Ce type de modèle pourra être appliqué sur des structures telles que les brins assemblés des câbles de 25T et 205T, ainsi que sur les torons et l'âme du câble 205T cf. figure 3.1. Le modèle du brin assemblé sera défini à partir de sa géométrie et du comportement des brins et celui du toron en fonction de sa géométrie et du comportement des brins assemblés. Les résultats issus du modèle du brin assemblé peuvent ainsi être utilisés comme données d'entrée à l'échelle supérieure, pour le toron.

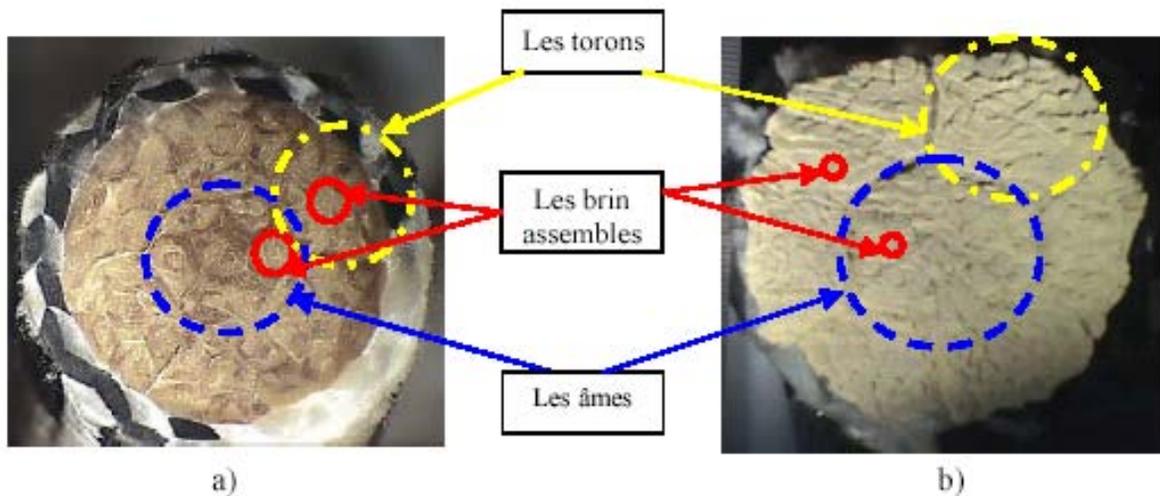


Figure 3.1 : la construction des câbles synthétique, a) câble 25T b) câble 205T

En première approche, la géométrie d'une structure et de ses sous-structures se présente selon la configuration décrite figure 3.2.

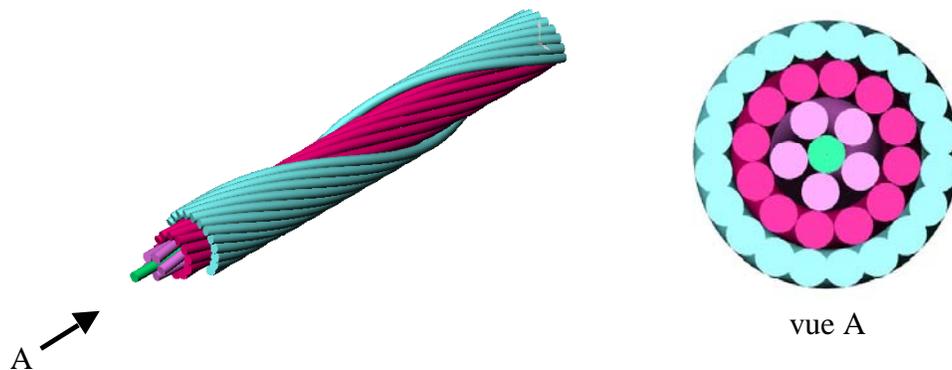


Figure 3.2 : une structure multicouche constituée d'un « grand » nombre de constituants élémentaires.

Les sous-structures sont supposées de section circulaire, et avec une ligne moyenne qui décrit une hélice. Dans la section de la structure, représentée Figure 3. 2 vue A, la section apparente des sous-structures est une ellipse, dont les axes ont pour longueurs $2R$ et $2R/\cos\alpha$, où α est l'angle de l'hélice. Pour l'exemple de la figure 3.2, la valeur de l'angle pour chaque couche est faible, la forme elliptique de la section est donc à peine visible.

Dans ce chapitre, les modèles existants sont d'abord décrits, avec leurs hypothèses principales. Nous détaillons les modèles de Raoof et Hobbs [RAO 1988], Hoppe [HOP 1991] et Leech [LEE 1993]. Nous présentons ensuite un modèle que nous avons développé, à partir du modèle de Hoppe.

Enfin, les modèles sont comparés entre eux et l'influence de différents paramètres sur les résultats est étudiée. La comparaison est menée ici d'un point de vue "théorique", l'objectif étant de sélectionner les "meilleurs" modèles, sur des critères qui seront précisés le moment venu. La confrontation de ces modèles à des résultats expérimentaux sera présentée ultérieurement, au chapitre 6.

3.2 Modèles existants

Comme nous l'avons déjà indiqué dans le chapitre 2, les modèles existants pour des constructions multicouches peuvent être classés en 2 catégories : les modèles multicouches pour les câbles métalliques (modèles semi-continus), cf. [HOB 1982], [JOL 1996], [BLO 1989]..., et les modèles multicouches pour les câbles synthétiques, cf. [TRE 1963], [TRE 1965], [HOP 1991], [LEE 1993], [RUN 2002] et [BEL 2004]. Dans ces modèles, la section de la structure est supposée être un assemblage de couches concentriques, et chaque couche formée de constituants ayant le même angle d'hélice.

Les modèles de câbles synthétiques sont souvent intégrés dans un logiciel et sont mis en œuvre avec des techniques numériques (résultats non analytiques), à l'exception de [HOP 1991]. Dans tous ces modèles, pour les constituants de base, les raideurs de torsion et de flexion sont négligées et c'est le comportement global du câble en traction pure qui est caractérisé, sauf pour le modèle de Leech [LEE 1993] qui traite la torsion et le couplage traction - torsion.

Par la suite, on va présenter brièvement les modèles de Raoof et Hobbs [RAO 1988], Hoppe [HOP 1991] et Leech [LEE 1993], et puis on donnera la démarche suivie pour développer un nouveau modèle.

3.2.1 *Modèle de Raoof*

Ce modèle appartient à la famille des modèles semi-continus, qui ont été présentés en section 2.1.2.

Raoof et Hobbs ont travaillé largement sur le comportement de câbles (cf. [HOB 1982], [RAO 1988], [RAO 1991], [RAO 1995],...) en se concentrant sur les câbles avec un grand nombre de fils, ce qui permet de négliger les moments de flexion et de torsion dans les fils individuels. Les phénomènes du contact d'interfilaire et le frottement ont été pris en compte.

L'analyse est basée sur les étapes suivantes :

- la cinématique de chaque couche est déterminée en fonction des déformations du câble.

- Le système discret, correspondant à l'ensemble des fils constituant d'une couche, est remplacé par une membrane équivalente. Les caractéristiques mécaniques de cette membrane sont déterminées à partir du comportement des fils et de résultats issus de la théorie du contact.
- Enfin, le câble multicouche est traité comme un assemblage des couches concentriques avec les membranes équivalentes obtenues à l'étape précédente.

3.2.1.1 Cinématique d'une couche

Pour relier les déformations du câble avec celles de chaque couche, les auteurs ont établi une série d'équations non-linéaires (le changement de géométrie étant pris en compte), qui peuvent être résolues par une méthode itérative, pour plus de détails cf. [HOB 1982] et [RAO 1988]. Après résolution de ces équations, les déformations de chaque couche sont obtenues en fonction des déformations du câble, dans un système d'axes locaux (t, b, n), avec t tangent à la ligne moyenne d'une hélice de la couche, et n dirigé vers le centre de la couche, (cf. figure 3. 3).

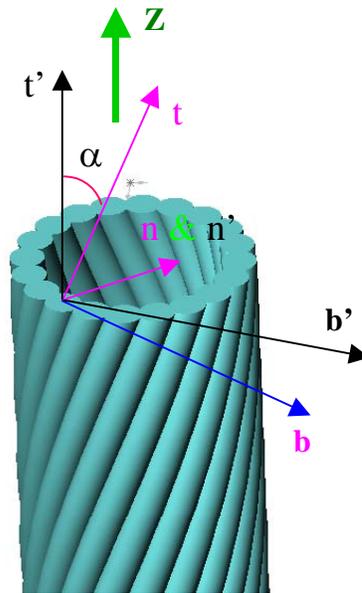


Figure 3.3 : les axes locaux (t, b, n) et globaux (t', b', n') pour une couche

3.2.1.2 Détermination du comportement de la membrane équivalente

Le comportement élastique de la membrane équivalente est décrit dans le système d'axes locaux :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{tt} \\ \varepsilon_{bb} \\ \varepsilon_{tb} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{tt} \\ \sigma_{bb} \\ \sigma_{tb} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

où ε , σ et S_{ij} représentent respectivement les déformations, contraintes et souplesses d'une couche dans les axes locaux.

Pour ce modèle, il y a donc quatre composantes de souplesse élastiques nécessaires.

Deux d'entre elles sont obtenues directement à partir des propriétés élastiques des fils :

$$\begin{cases} S_{11} = \frac{4}{\pi E} \\ S_{12} = -\nu S_{11} \end{cases} \quad (3.2)$$

ou E et ν sont respectivement le module Young et le coefficient de Poisson du fil.

En théorie, pour déterminer la loi de comportement de chaque couche, il faut faire la somme sur les efforts et les moments de tous les composants de la couche, cf. Hoppe [HOP 1991] et Leech [LEE 1993]. Mais les auteurs, ici, intègrent la contrainte sur la section de la couche et

il apparaît donc le coefficient $\frac{\pi}{4}$, qui représente le rapport entre la surface totale du matériau et la surface totale de la couche. On rappelle ici que les fils individuels sont décrits par des poutres courbes dont les raideurs de flexion et de torsion sont négligées.

Les deux autres souplesses sont reliées à la souplesse de contact (contact tangentiel) au sein de la couche (théorie de Hertz). On va considérer successivement le contact dû à la compression ou au cisaillement entre 2 fils.

Compression

La théorie de Hertz permet d'étudier le contact en compression de 2 cylindres droits d'axe parallèle. Cette théorie est utilisée ici pour approcher localement le contact entre 2 fils hélicoïdaux.

Selon cette théorie, la souplesse correspondant au contact en compression est définie par $d\delta_n = S_{22} dP$ et relie la variation de longueur δ_n entre les centres de deux fils voisins initialement distants de D (la diamètre des fils), à la force linéique de contact P , cf. figure 3.4. Cette théorie fournit l'expression suivante de la souplesse :

$$S_{22} = \frac{1}{\pi E} \left(4(1-\nu^2) \left[\frac{1}{3} + \ln \frac{1.25 D}{\left(\frac{PD(1-\nu^2)}{E} \right)^{\frac{1}{2}}} \right] - 2(1-\nu^2) \right) \quad (3.3)$$

Cette souplesse est donc fonction de D , qui est une grandeur géométrique connue, et la force linéique de contact P qu'il faut déterminer. Pour ce faire, on utilise le résultat de la théorie de Hertz selon laquelle la variation de la distance entre les centres de fils adjacents sur la ligne de contact, δ_n , est définie par:

$$\delta_n = \frac{4P(1-\nu^2)}{\pi E} \left(\frac{1}{3} + \ln \frac{D}{b} \right) \quad (3.4)$$

où b est la demi-largeur de la bande de contact (cf. figure 3.4) et définie par :

$$2b = 1.6 \left(\frac{PD(1-\nu^2)}{E} \right) \quad (3.5)$$

Enfin, pour deux cylindres droits et parallèles, on a :

$$\delta_n = \varepsilon_{bb} D \quad (3.6)$$

et nous supposons que cette relation reste vraie dans notre cas.

En exprimant dans (3.4) δ_n sous la forme (3.6), et b sous la forme (3.5), on obtient une équation dont la résolution permet de déterminer la valeur de la force de contact P sur la ligne de contact en fonction de ε_{bb} et des données E , ν , D .

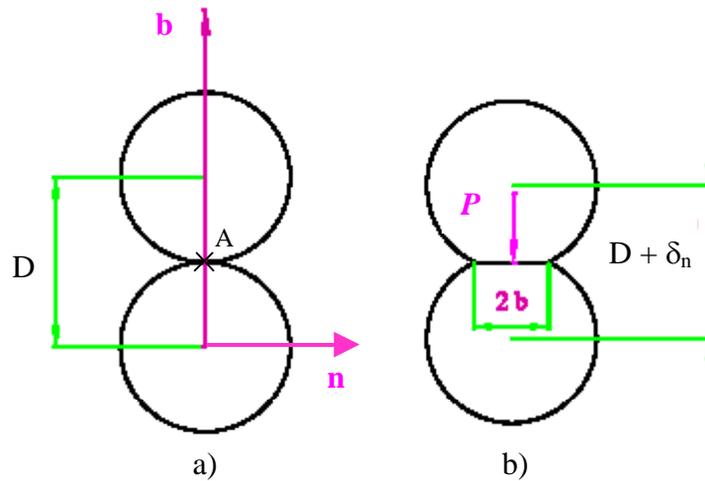


Figure 3.4 : contact entre deux cylindres droits et parallèle, a) avant déformation b) après déformation

Cisaillement

La souplesse en cisaillement est obtenue grâce à d'autres résultats de la théorie du contact (cf. [MIN 1949]) :

$$S_{66} = \frac{S_{22}}{1-\nu} \left(1 - \frac{\delta_l}{\delta_{l_{\max}}} \right)^{-1/2} \quad (3.7)$$

où δ_l est le glissement relatif entre deux fils adjacents, sur la ligne de contact passant par le point A, dans la direction t, perpendiculaire au plan (b,n), cf. figure 3.4.

À cause des phénomènes de frottement interfilaire, S_{66} est fonction de la charge appliquée et du coefficient de frottement. C'est donc le cas aussi pour la matrice raideur du câble. En pratique, on utilise des valeurs limites supérieures et inférieures, associées respectivement

aux cas extrêmes de non glissement et de glissement sans frottement. La limite supérieure correspond à δ_l nul alors que pour la limite inférieure, δ_l tend vers $\delta_{l\max}$.

Il faut noter que ces souplesses S_{22} et S_{66} tiennent compte non seulement des efforts de contact à l'intérieur d'une couche, mais aussi des efforts exercés par les couches adjacentes. Pour plus de détails sur ce point, on renvoie à [RAO 1988].

3.2.1.3 Comportement global du câble

Une fois le comportement de chaque couche obtenu, on passe au calcul du comportement du câble.

Pour ce faire, il est nécessaire d'exprimer le comportement de chaque couche dans une base identique, ce qui justifie l'introduction d'une nouvelle base (t' , b' , n') (cf. figure 3. 3, t' étant parallèle à l'axe global z et b' est l'axe orthoradial, donc n et n' sont identiques).

Le comportement de chaque couche, transformé dans ces nouveaux axes devient :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon'_{tt} \\ \varepsilon'_{nn} \\ \varepsilon'_{tb} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{26} \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma'_{tt} \\ \sigma'_{nn} \\ \sigma'_{tb} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

où l'exposant ' est associé à ce nouveau système d'axes.

Après avoir déterminé les raideurs de chaque couche dans les axes (t' , b' , n'), la sommation des raideurs des différentes couches permet d'établir la loi de comportement du câble.

On utilise à ce niveau les relations $u_{z,z} = \varepsilon'_{tt}$ et $\varepsilon'_{tb} = r \theta_{z,z}$, pour obtenir une relation de la forme :

$$\begin{Bmatrix} F_z \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\varepsilon\varepsilon} & k_{\varepsilon\theta} \\ k_{\theta\varepsilon} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{z,z} \\ \theta_{z,z} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

où F_z , M_z , $u_{z,z}$, $\theta_{z,z}$ représentent respectivement l'effort axial, le moment de torsion, la déformation axiale et la déformation de torsion dans les axes globaux du câble. Les composantes de la matrice raideur sont exprimées par :

$$\begin{cases} k_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^N \left[A_{ni} \left(\frac{\sigma'_{tt}}{u_{z,z}} \right)_i \right] + E A_{\text{âme}} & k_{\varepsilon\theta} = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^N \left[A_{ni} r_i \left(\frac{\sigma'_{tt}}{r_i \theta_{z,z}} \right)_i \right] \\ k_{\theta\varepsilon} = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^N \left[A_{ni} r_i \left(\frac{\sigma'_{tb}}{u_{z,z}} \right)_i \right] & k_{\theta\theta} = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^N \left[A_{ni} r_i^2 \left(\frac{\sigma'_{tb}}{r_i \theta_{z,z}} \right)_i \right] \end{cases} \quad (3.10)$$

où r_i et A_{ni} sont respectivement le rayon d'hélice moyen et la section de matériau (hors vides) de la couche i , N est le nombre de couches dans le câble et A_{ame} est la section de l'âme (couche centrale du multicouches).

On remarque que la matrice raideur de chaque couche est obtenue en deux étapes. Dans un premier temps, on considère le cas $\theta_{z,z} = 0$, et on calcule $\begin{pmatrix} \sigma'_{tt} \\ u_{z,z} \end{pmatrix}_i$ et $\begin{pmatrix} \sigma'_{tb} \\ u_{z,z} \end{pmatrix}_i$ à partir des Eqs. (3.8), ce qui permet d'en déduire $k_{\varepsilon\varepsilon}$ et $k_{\theta\varepsilon}$, à partir de l'équation (3.10). Par la suite et de la même manière, $k_{\varepsilon\theta}$ et $k_{\theta\theta}$ seront obtenus en imposant $u_{z,z} = \varepsilon'_{bb} = 0$, pour plus de détails cf. [HOB 1982].

3.2.1.4 Bilan

Dans ce modèle, les phénomènes frottement interfilaire ont été pris en compte et le comportement de la structure en couplage traction-torsion se situe entre des bornes inférieure (glissement total) et supérieure (non-glissement). On rappelle que ce modèle est non-linéaire (prise en compte du changement géométrie et du contact), ce qui nécessite un traitement numérique et des calculs itératifs.

D'autre part, la raideur de contact est évaluée en supposant la section des constituants circulaire. Cette hypothèse se justifie dans le cas des câbles métalliques, mais est a priori inadaptée aux câbles synthétiques. Enfin, comme tous les modèles multicouches existants, le modèle nécessite la connaissance des paramètres géométriques de chaque couche, ce qui n'est pas toujours facile à définir pour les câbles synthétiques, cf. figure 3.1.

Il faut noter aussi que ce modèle, dans sa phase de définition d'une membrane équivalente, est d'autant plus approprié que le nombre de constituants dans une couche est important. Ainsi, ce modèle n'est pas applicable aux échelles inférieures (brins assemblés des câbles 25T et 205T) dont le nombre de constituants est insuffisant.

Ce modèle sera utilisé pour le toron du câble de 205T et les résultats seront comparés avec d'autres modèles.

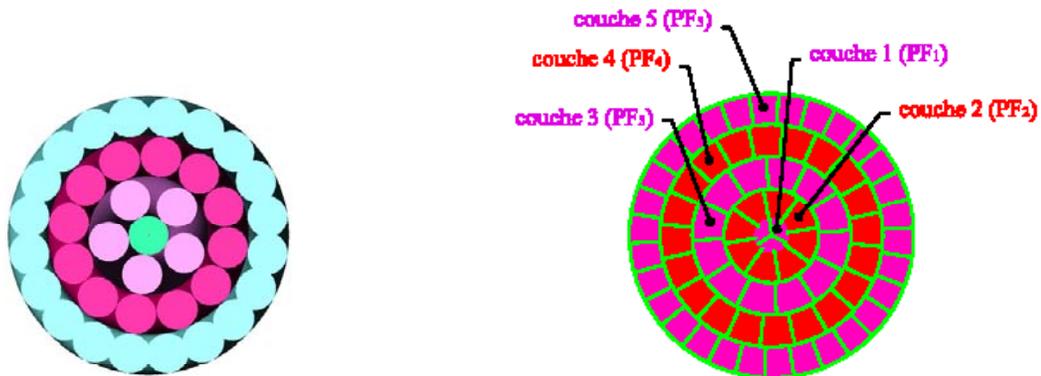
3.2.2 Modèle de Hoppe

Le travail de Hoppe [HOP 1991] permet, selon une approche essentiellement géométrique, de présenter un modèle de comportement des câbles synthétiques sous une sollicitation de traction simple. On remarque ici que ce modèle est basé sur celui développé par Paul [PAU 1970]. Ce modèle nécessite la connaissance des caractéristiques mécaniques des composants et des paramètres de construction du câble, comme : le nombre de couches, le nombre de composants dans chaque couche et l'angle d'enroulement de chaque couche. Ce modèle est basé sur les hypothèses suivantes :

- (a) La géométrie de la structure est multicouche avec les constituants de ligne moyenne hélicoïdale et de section circulaire, cf. figure 3.5 a).
- (b) Au niveau local les constituants de base travaillent uniquement en **traction** dans la direction de leur axe (tangent à la ligne moyenne).
- (c) La section de la structure reste plane, et normale à la fibre moyenne après déformation. Cette hypothèse permet d'exprimer l'allongement en un point quelconque en fonction de celui de la ligne moyenne de la structure.
- (d) La déformation de la structure est à volume constant.
- (e) Les effets du contact et du frottement entre les sous-structures sont négligés.
- (f) Au niveau global, on s'intéresse seulement au comportement en traction (pas de prise en compte de la torsion (directe ou induite par une sollicitation en traction)).

En utilisant des hypothèses ci-dessus, l'allongement d'une sous-structure, λ_i , est relié à celui de la structure, λ_z et ensuite la force dans chacun de constituant est déterminée. La projection des efforts sur la direction de l'axe du câble permet d'établir la loi du comportement du câble.

Ce modèle ne sera pas développé davantage ici. Nous présenterons plus en détails un modèle qui constitue une extension de ce dernier.



a) Modèle multicouche discret (Hoppe),
ou hard components (FRM, Leech)

b) Modèle multicouche soft
components (FRM, Leech)

Figure 3.5 : géométrie de la structure pour différents modèles

3.2.2.1 Bilan

Comme commentaires sur ce modèle de Hoppe [HOP 1991], on peut remarquer qu'il revient à considérer que les constituants de la structure sont indépendants, dans la mesure où aucune

interaction de type contact-frottement n'est prise en compte. L'analyse bibliographique du chapitre 2 a montré que cette hypothèse était justifiée en chargement axial. Ce modèle s'apparente donc à un assemblage parallèle de ressorts hélicoïdaux travaillant seulement en traction. Du point de vue géométrique, la définition des différentes couches et de leurs paramètres est en pratique difficile, cf. figure 3.1. Enfin, ce modèle fournit le comportement global de la structure seulement en traction simple.

Ce modèle est en revanche simple et analytique, c'est pourquoi nous avons décidé de l'utiliser comme base de départ pour développer un nouveau modèle de traction-torsion pour les câbles synthétiques. Ce nouveau modèle sera présenté en section 3.

Par la suite, nous comparons la raideur axiale obtenu par le modèle de Hoppe pour le toron du câble 205T aux résultats obtenus par d'autres modèles.

3.2.3 Modèle de Leech

En 1993, Leech et al. [LEE 1993] présentent un modèle dont la formulation est basée sur le principe des travaux virtuels. Ce modèle est intégré dans un logiciel (FRM) pour prédire le comportement des câbles synthétiques soumis à un chargement axial. Ce modèle reprend les hypothèses (a), (b), (c) du modèle de Hoppe. Il s'en distingue par les aspects suivants :

- La géométrie de la structure est multicouches. Cependant, **deux options sont possibles** pour décrire la géométrie, cf. section 2.2.1.2. On peut considérer que chaque couche est constituée de fils à section circulaire, cf. figure 3.5 a) (option « **hard components** » dans le logiciel FRM, comme dans le modèle précédent). Avec l'autre option, on suppose au contraire que la raideur transverse des constituants est faible, ce qui conduit à des changements de forme importants de leur section (option « **soft components** » dans le logiciel), cf. figure 3.5 b). Cette dernière hypothèse est plus réaliste dans le cas des câbles synthétiques lorsque la structure comprend un grand nombre de sous-structures, cf. figure 3.1.
- Ce modèle traite le phénomène du contact. Les mouvements relatifs aux points de contact sont considérés. Les différents mouvements sont nombreux et Leech présente 6 modes différents [LEE 2002], cf. section 2.2.1.2 ; il indique que pour les câbles torsadés en chargement axial, **la plus grande** contribution vient du mode de la **composante axiale** du mouvement relatif. Son effet reste cependant peu sensible sur le comportement global du câble.
- Au niveau global, le comportement de la structure est caractérisé en traction – torsion.

3.2.3.1 Comportement global de la structure

En utilisant les hypothèses ci-dessus, la déformation axiale d'une sous-structure peut être exprimée en fonction de la longueur de la structure L , et du rayon de l'hélice moyenne de la sous-structure r sous la forme :

$$\varepsilon_n = \frac{\sqrt{L^2 + (r\theta)^2}}{L_o \sqrt{1 + \tan^2 \alpha_o}} - 1 \quad (3.11)$$

où t est tangent à l'axe moyen de l'hélice avec θ l'angle balayé par la sous-structure autour de l'axe de la structure (cf. figure 3. 6), défini par :

$$\theta = \frac{L}{r} \tan \alpha \quad (3.12)$$

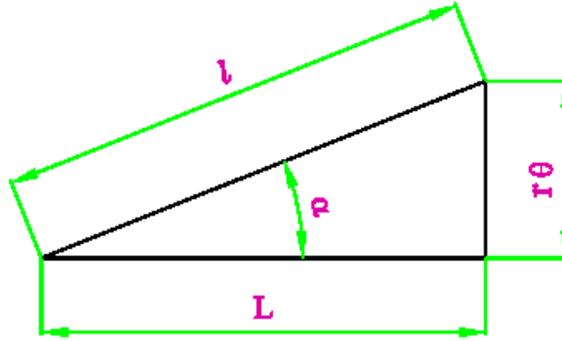


Figure 3.6 : la ligne centrale d'un composant en projection sur un plan.

Le principe des travaux virtuels nous permet d'écrire :

$$F_z \delta L + M_z \delta \theta + P_c \delta r = \delta U \quad (3.13)$$

où δL , $\delta \theta$ et δr sont les déplacements virtuels, et P_c la force de frottement donnée en multipliant la force du contact par le coefficient de frottement.

L'énergie totale de déformation U de la structure, est obtenue en additionnant celle des sous-structures et définie par :

$$\delta U = \sum_{i=1}^N f_i l_o \delta \varepsilon_{ii} \quad (3.14)$$

où f_i est la force axiale induite dans la sous-structure, N le nombre de sous-structures. D'autre part, ε_{ii} est fonction de L , θ et r , donc :

$$\delta \varepsilon_{ii} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial L} \right) \delta L + \left(\frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial \theta} \right) \delta \theta + \left(\frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial r} \right) \delta r \quad (3.15)$$

en utilisant les relations (3.14) et (3.15) dans (3.13), on peut écrire :

$$F_z \delta L + M_z \delta \theta + P_c \delta r = \left(\sum_{i=1}^N f_i l_o \frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial L} \right) \delta L + \left(\sum_{i=1}^N f_i l_o \frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial \theta} \right) \delta \theta + \left(\sum_{i=1}^N f_i l_o \frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial r} \right) \delta r \quad (3.16)$$

On en déduit que la force axiale, le moment de torsion et la force linéique de contact sont exprimés par :

$$\begin{cases} F_z = \sum^N f_t l_o \frac{\partial \varepsilon_{tt}}{\partial L} \\ M_z = \sum^N f_t l_o \frac{\partial \varepsilon_{tt}}{\partial \theta} \\ P_c = \sum^N f_t l_o \frac{\partial \varepsilon_{tt}}{\partial r} \end{cases} \quad (3.17)$$

A partir de ces expressions, et de caractéristiques de traction des sous-structures données sous la forme de courbes, le logiciel FRM fournit en sortie les courbes de « *force axiale – déformation axiale* », « *force axiale – déformation de torsion* », « *moment de torsion – déformation axiale* » et « *moment de torsion – déformation de torsion* ». Ceci nous permet de déterminer respectivement, la raideur axiale, $k_{\varepsilon\varepsilon}$, les termes de couplages, $k_{\varepsilon\theta}$, $k_{\theta\varepsilon}$ et la terme de torsion, $k_{\theta\theta}$. La matrice raideur est obtenue en deux étapes : dans un premier temps, une rotation axiale nulle est imposée ($\theta_{z,z} = 0$), et on obtient les première et troisième courbes, ce qui permet de calculer $k_{\varepsilon\varepsilon}$ et $k_{\theta\varepsilon}$. Par la suite, et de la même manière, $k_{\varepsilon\theta}$ et $k_{\theta\theta}$ seront obtenus en imposant une déformation axiale constant ($u_{z,z} = 0.01$). Si la courbe d'entrée de traction est une droite, en sortie, on récupère aussi des droites (à condition de rester dans le domaine des petites perturbations), dont les pentes fournissent directement les raideurs.

A l'origine, seul le comportement en traction des constituants était considéré. Par la suite, ce modèle a été modifié pour prendre en compte un comportement local avec une loi de traction torsion couplée.

Le modèle de Leech est implémenté dans le logiciel FRM (**F**iber **R**ope **M**odeller) développé et commercialisé par Tension Technology International Limited, TTI (2003). Nous parlerons par la suite de modèle FRM.

3.2.3.2 Bilan

Le modèle FRM qui vient d'être décrit est particulièrement adapté aux câbles synthétiques multicouches. On constate en effet que la géométrie considérée (avec l'option « soft components ») est en accord avec les observations expérimentales, que le phénomène de frottement est pris en compte, et que la loi de comportement globale est de type traction-torsion.

Comme le modèle de Raof (cf. section 2.1), ce modèle n'est pas analytique et impose donc un traitement numérique, via le logiciel FRM. D'autre part, comme tous les modèles précédents, le modèle nécessite la connaissance des paramètres géométriques de chaque couche, ce qui n'est pas toujours facile à définir précisément pour les câbles synthétiques, cf. figure 3.1.

Ce modèle peut être utilisé en cascade pour décrire les échelles successives d'un câble. Dans la littérature, il existe des modèles proches de celui de Leech : [RUN 2002] et [BEL 2004]. Ces modèles sont également intégrés dans un logiciel.

Dans ce travail, nous appliquerons le modèle de Leech implémenté dans le logiciel FRM, acquis par l'IFREMER dans le cadre du projet. Dans la section 3.5, les résultats du logiciel FRM sont comparés avec les résultats d'autres modèles, à différentes échelles. On étudiera aussi le rôle du frottement sur le comportement global de la structure.

3.3 Modèle Continu

Dans ce paragraphe, on va proposer une extension du modèle de Hoppe [HOP 1991].

Dans la littérature, les structures étudiées ici sont dites multicouches, mais on ne les considère pas dans ce modèle comme un assemblage de couches, mais comme un ensemble d'hélices coaxiales dont la section se réduit à un point matériel, et qui décrivent la géométrie d'un constituant élémentaire. C'est dans ce sens que ce modèle est dit **continu**.

3.3.1 Hypothèses principales

La théorie présente est basée sur les hypothèses de modèle de Hoppe [HOP 1991] à l'exception de :

- a) Au niveau géométrique, on n'utilise pas ici de représentation formelle de la section de la structure, puisque celle-ci est décrite en tant que milieu continu, cf. figure 3.7 a). Il est cependant supposé que les sous-structures sont décrites par des hélices coaxiales (avant et après déformation), avec le même nombre de tours par mètre, c'est-à-dire le même *Pas* (*Pas* ou « pitch length », qui représente la distance entre deux spires consécutives, cf. figure 3.7 b)). Ceci nous permet de relier l'angle d'hélice en un point matériel à sa distance à l'axe de la structure et à la valeur de l'angle d'hélice sur le contour de la structure.
- b) Au niveau global, ce modèle fournit un comportement de type traction – torsion.

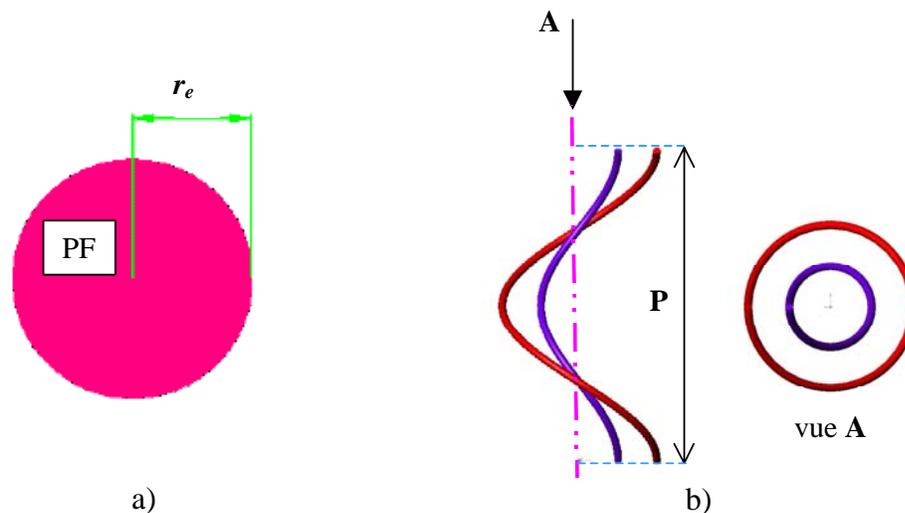


Figure 3.7 : a) géométrie de la structure pour le modèle continu, b) deux sous-structures avec différentes distances à l'axe de la structure.

3.3.2 Développement mathématique

Dans ce paragraphe, on présente d'abord le modèle géométrique qui est utilisé pour décrire une sous-structure dans la structure. Ensuite, la déformation axiale d'une sous-structure quelconque est reliée aux déformations axiale et de torsion de la structure.

3.3.2.1 Géométrie

La structure est assimilée à un milieu continu, formé d'hélices coaxiales. Ces hélices sont caractérisées par le même pas P . En notant r_0 (r après déformation) le rayon de la ligne moyenne d'une hélice, et α_0 son angle d'enroulement (cf. figure 3.8 a)), on a, quelle que soit l'hélice considérée :

$$P = \frac{2\pi r_0}{\tan \alpha_0} \quad (3.18)$$

Or, en général, pour une structure donnée, son rayon extérieur est connu, de même que la valeur de l'angle d'enroulement sur la couche extérieure. En notant r_{e0} et α_{e0} ces valeurs avant déformation, qui correspondent aux paramètres de l'hélice située sur la périphérie de la structure, on déduit de (3.18) la relation :

$$\tan \alpha_o = \frac{r_o}{r_{eo}} \tan \alpha_{eo} \quad (3.19)$$

qui permet de déterminer l'angle d'enroulement en un point quelconque de la section en fonction des paramètres géométriques de la structure.

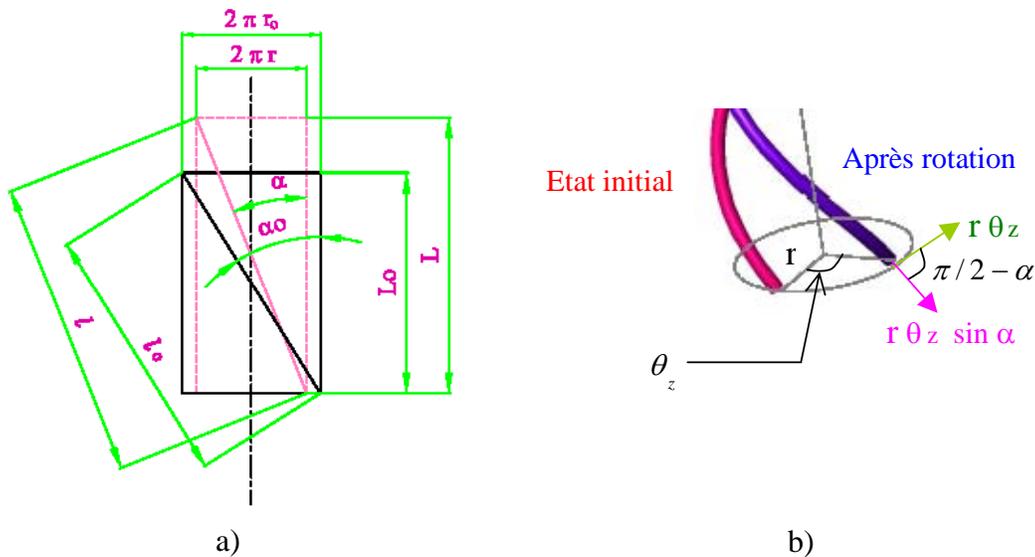


Figure 3.8 : sous-structure avant et après déformation a) traction et b) rotation de la structure

3.3.2.2 Déformation axiale

En chargement axial, la déformation axiale de chaque sous-structure est constituée de deux parties différentes : la première résulte de l'allongement de la structure, alors que la deuxième est due à sa rotation. En petites déformations, on peut découpler ces phénomènes, la déformation axiale de la sous-structure est donc exprimée par :

$$\varepsilon_{tt} = \varepsilon_{tt}^A + \varepsilon_{tt}^R \quad (3.20)$$

où ε_{tt}^A et ε_{tt}^R sont respectivement la déformation axiale de la sous-structure due à l'allongement et à la rotation de la structure.

3.3.2.2.1 Allongement

Les allongements de la structure et de la sous-structure (en un point quelconque à distance r de l'axe de la structure), sont notés respectivement λ_z et λ_t , et on a :

$$\lambda_z = \frac{L}{L_0} = 1 + u_{z,z} \quad (3.21)$$

$$\lambda_t = \frac{l}{l_0} = 1 + \varepsilon_{tt}^A \quad (3.22)$$

où L est la longueur de la structure et l est mesurée le long de l'hélice de rayon r .

La section de la structure étant supposée rester plane, et normale à la fibre moyenne après déformation, on a les relations suivantes (cf. figure 3. 8 a) :

$$\begin{cases} L_0 = l_0 \cos \alpha_0 \\ L = l \cos \alpha \end{cases} \quad (3.23)$$

les expressions (3.21), (3.22) et (3.23) nous permettent d'exprimer l'allongement en un point quelconque λ_t en fonction de celui de la ligne moyenne de la structure λ_z :

$$\lambda_t = \lambda_z \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} \quad (3.24)$$

Dans cette relation, apparaît la valeur α de l'angle d'enroulement après déformation. Il faut donc transformer cette équation pour se ramener à une expression où λ_t est seulement fonction de λ_z et de paramètres associés à la géométrie initiale de la structure.

Pour ce faire, nous utilisons la condition de volume constant (cf. figure 3.8 a) :

$$\pi r^2 L = \pi r_0^2 L_0 \quad (3.25)$$

les relations (3.21) et (3.25) nous permettent d'écrire la relation suivante :

$$\lambda_z = \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \quad (3.26)$$

La variation du pas d'hélice donne $P = P_0 \lambda_z$, ce qui compte tenu de (3.18) fournit :

$$\tan \alpha = \frac{r}{r_0} \frac{1}{\lambda_z} \tan \alpha_o \quad (3.27)$$

D'où, en combinant avec (3.26), on peut exprimer l'angle d'enroulement après déformation, α , en fonction de celui avant déformation, α_o , et de l'allongement de la structure, λ_z :

$$\tan \alpha = \frac{\tan \alpha_o}{\lambda_z^{3/2}} \quad (3.28)$$

On peut alors réécrire (3.24) sous la forme :

$$\lambda_t^2 = \lambda_z^2 \cos^2 \alpha_o + \frac{\sin^2 \alpha_o}{\lambda_z} \quad (3.29)$$

Enfin, d'après (3.22), on a : $\varepsilon_{tt}^A = \lambda_t - 1$.

3.3.2.2.2 Rotation

Lorsque la structure subit une rotation relative θ_z entre les deux extrémités d'un tronçon de longueur L_o , la déformation axiale de la sous-structure (ε_{tt}^R) est exprimée par :

$$\varepsilon_{tt}^R = \frac{\Delta l}{l_o} \quad (3.30)$$

où $\Delta l = l - l_o$ est défini par (cf. figure 3.8 b) :

$$\Delta l = r \theta_z \sin \alpha \quad (3.31)$$

en reportant les relations (3.23), (3.26) et (3.31) dans l'expression (3.30), ε_{tt}^R devient :

$$\varepsilon_{tt}^R = \frac{r_o}{\sqrt{\lambda_z}} \theta_{z,z} \sin \alpha \cos \alpha_o \quad (3.32)$$

où $\theta_{z,z}$ est la rotation par unité de longueur (la déformation de torsion) définie par :

$$\theta_{z,z} = \frac{\theta_z}{L_o} \quad (3.33)$$

Et les relations (3.19) et (3.28) nous permettent d'exprimer la position d'un point quelconque après déformation en fonction de celle d'un point situé sur la couche extérieure avant déformation, et de l'allongement de la structure. On a ainsi :

$$\begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{r_{eo}^2 \lambda_z^3}{r_{eo}^2 \lambda_z^3 + r_o^2 \tan^2 \alpha_{eo}} \\ \sin^2 \alpha = \frac{r_o^2 \tan^2 \alpha_{eo}}{r_{eo}^2 \lambda_z^3 + r_o^2 \tan^2 \alpha_{eo}} \end{cases} \quad (3.34)$$

En tenant compte des expressions (3.29) et (3.32), et des relations (3.21) et (3.22), on obtient que la déformation axiale totale de la sous structure est donnée par :

$$\varepsilon_{tt} = \varepsilon_{tt}^A + \varepsilon_{tt}^R = \left[\sqrt{\lambda_z^2 \cos^2 \alpha_o + \frac{\sin^2 \alpha_o}{\lambda_z}} - 1 \right] + \frac{r_o}{\sqrt{\lambda_z}} \theta_{z,z} \sin \alpha \cos \alpha_o \quad (3.35)$$

en pratique dans cette relation, $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ sont donnés d'après l'équation (3.34), où ils sont fonction de λ_z et de paramètres associés à la géométrie initiale. De plus, d'après l'équation (3.19), $\sin \alpha_o$ et $\cos \alpha_o$ sont exprimés en fonction de r , r_{eo} et α_{eo} .

Dans cette relation, l'expression de la déformation axiale ε_{tt}^A de la sous-structure induite par la traction est déjà présente dans le modèle de Hoppe [HOP 1991]. Le second terme ε_{tt}^R , dû à la torsion de la structure, est nouveau par rapport du modèle de Hoppe.

3.3.3 Loi de comportement du modèle continu

Chaque hélice élémentaire de la sous-structure est supposée être en traction simple. La loi de comportement s'écrit donc :

$$\sigma_{tt} = E \varepsilon_{tt} \quad (3.36)$$

où t est la tangente à l'hélice.

Pour obtenir la loi de comportement globale de la structure, il faut exprimer cette relation sur des axes globaux, puis intégrer sur la section pour obtenir l'effort axial et le moment de torsion.

Il reste à préciser la section sur laquelle on intègre. Comme nous l'avons déjà indiqué, le plus souvent, la géométrie d'un constituant d'un câble est définie par son rayon extérieur et son pas. Ce sont en effet ces données qui sont fournies par le constructeur pour un toron par exemple. Les autres données constructeur éventuellement disponibles concernent la densité ρ du matériau de base (la fibre) et la masse linéique de la structure m_l .

A partir de ces données, si on compare la surface πr_e^2 au rapport m_l / ρ qui représente la surface de matière S_m présente dans une section, on constate une différence, qui traduit la présence de vides dans une section, cf. figure 3.9. On est donc amené à introduire le **Packing Factor** PF défini par :

$$PF = \frac{m_l / \rho}{\pi r_e^2} \quad (3.37)$$

et dont la valeur est inférieure à 1.

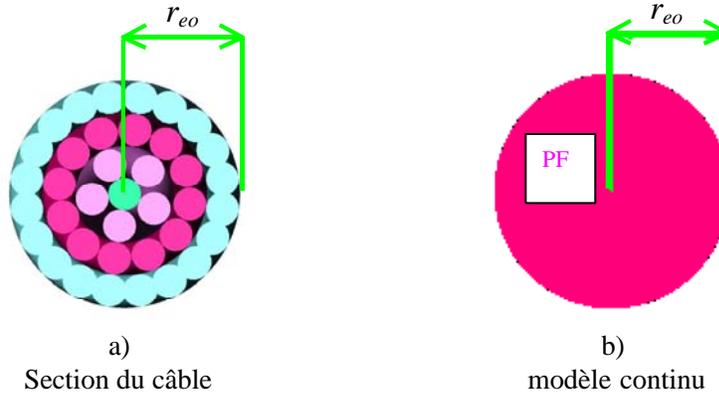


Figure 3.9 : a) la section de la structure et b) section du modèle continu.

Signalons que même si on ne connaît pas les valeurs de ρ et de m_l , il faut travailler avec une valeur de PF inférieure à 1, pour tenir compte des vides dans la section.

Dans le modèle, lorsqu'on intègre sur la section pour obtenir la loi de comportement globale de la structure, si on veut **à la fois** respecter la géométrie (c'est-à-dire le rayon extérieur de la structure), et la présence des vides, l'intégrale d'une fonction f quelconque sur la surface matérielle S_m du constituant sera définie par :

$$\int_{S_m} f dS = PF \int_0^{2\pi} \int_0^{r_{eo}} f r_o dr_o d\theta \quad (3.38)$$

de façon à ce que, pour $f = 1$, le membre de droite redonne S_m .

On peut ainsi positionner de façon réaliste les hélices élémentaires dans la structure. Il s'agit là d'un point important car leur rayon (principalement) et leur angle d'enroulement interviennent dans le calcul du moment de torsion de la structure.

Il en résulte que la force axiale et le moment de torsion peuvent être exprimés par les équations suivantes :

$$\begin{cases} F_z = PF \int_0^{2\pi} \int_0^{r_{eo}} \sigma_{tt} \cos^2 \alpha r_o dr_o d\theta \\ M_z = PF \int_0^{2\pi} \int_0^{r_{eo}} \sigma_{tt} \cos \alpha \sin \alpha r_o^2 dr_o d\theta \end{cases} \quad (3.39)$$

Et dans ces équations, σ_{tt} est donné d'après (3.36) et (3.35).

Après intégration sur la section de la structure des relations (3.39) en utilisant un logiciel de calcul formel (Maple), on détermine la loi de comportement globale de la structure. On réécrit celle-ci sous la forme matricielle (3.9), soit :

$$\begin{Bmatrix} F_z \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\varepsilon\varepsilon} & k_{\varepsilon\theta} \\ k_{\theta\varepsilon} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{z,z} \\ \theta_{z,z} \end{Bmatrix}$$

et les composantes de la matrice raideur sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l}
k_{\varepsilon\varepsilon} = 2 \pi E r_{eo}^2 PF \lambda_z^{2.5} \left[\frac{\ln\left(\frac{1}{2} + \tan^2 \alpha_{eo} + \frac{\lambda_z^3}{2} + \sqrt{(1 + \tan^2 \alpha_{eo})(\lambda_z^3 + \tan^2 \alpha_{eo})}\right)}{\tan^2 \alpha_{eo} (\lambda_z - 1)} \right. \\
\left. - \frac{\sqrt{\lambda_z} \ln(\lambda_z^3 + \tan^2 \alpha_{eo}) + \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda_z^3}{2} + \lambda_z^{1.5}\right) - \sqrt{\lambda_z} \ln(\lambda_z^3)}{\tan^2 \alpha_{eo} (\lambda_z - 1)} \right] \\
k_{\varepsilon\theta} = 2 \pi E r_{eo}^3 PF \lambda_z^{4.5} \left[\frac{\ln((\lambda_z^3 + \tan^2 \alpha_{eo}) + \frac{\lambda_z^3}{(\lambda_z^3 + \tan^2 \alpha_{eo})} - \ln(\lambda_z^3) - 1)}{\tan^3 \alpha_{eo}} \right] \\
k_{\theta\varepsilon} = \frac{2}{3} \pi E r_{eo}^3 PF \\
\left[\frac{1}{4} \lambda_z ((-1 - \lambda_z^3) \left(\ln\left(\frac{1}{2} + \tan^2 \alpha_{eo} + \frac{\lambda_z^3}{2} + \sqrt{(1 + \tan^2 \alpha_{eo})(\lambda_z^3 + \tan^2 \alpha_{eo})}\right) \right) + \right. \\
\left. 2 \sqrt{(1 + \tan^2 \alpha_{eo})(\lambda_z^3 + \tan^2 \alpha_{eo})} - \frac{1}{2} \lambda_z^{1.5} (\tan^2 \alpha_{eo} - \lambda_z^3 \ln(\lambda_z^3 + \tan^2 \alpha_{eo})) \right. \\
\left. - \frac{1}{4} \lambda_z ((-1 - \lambda_z^3) \left(\ln\left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda_z^3}{2} + \lambda_z^{1.5}\right) + 2 \lambda_z^{1.5} \right) - \frac{1}{2} \lambda_z^{4.5} \ln(\lambda_z^3)) \right] / [\tan^3 \alpha_{eo} (\lambda_z - 1)] \quad (3.40) \\
k_{\theta\theta} = \frac{2}{3} \pi E r_{eo}^4 PF \lambda_z^3 \left[\frac{\tan^2 \alpha_{eo} - \frac{\lambda_z^6}{\lambda_z^3 + \tan^2 \alpha_{eo}} + \lambda_z^3 - 2 \lambda_z^3 (\ln(\lambda_z^3 + \tan^2 \alpha_{eo}) - \ln(\lambda_z^3))}{\tan^4 \alpha_{eo}} \right]
\end{array} \right.$$

les composantes de la matrice raideur sont donc fonction de E , de l'allongement de la structure, λ_z , et les caractéristiques géométriques de la structure : r_e et $\alpha_{e\theta}$.

Pour étudier l'influence de λ_z sur la matrice raideur, on présente maintenant le comportement de la structure sous la forme adimensionnée suivante, cf. [MES 2003]:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_z \\ m_z \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \bar{k}_{\varepsilon\varepsilon} & \bar{k}_{\varepsilon\theta} \\ \bar{k}_{\theta\varepsilon} & \bar{k}_{\theta\theta} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_{z,z} \\ r_{eo} \cdot \theta_{z,z} \end{array} \right\} \quad (3.41)$$

Où le vecteur de force adimensionnée est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_z \\ m_z \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{F_z}{\pi \cdot E \cdot r_{eo}^2} \\ \frac{M_z}{\pi \cdot E \cdot r_{eo}^3} \end{array} \right\} \quad (3.42)$$

et la matrice raideur adimensionnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{k}_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{k_{\varepsilon\varepsilon}}{\pi \cdot E \cdot r_{eo}^2} \\ \bar{k}_{\theta\varepsilon} = \frac{k_{\theta\varepsilon}}{\pi \cdot E \cdot r_{eo}^3} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{k}_{\varepsilon\theta} = \frac{k_{\varepsilon\theta}}{\pi \cdot E \cdot r_{eo}^3} \\ \bar{k}_{\theta\theta} = \frac{k_{\theta\theta}}{\pi \cdot E \cdot r_{eo}^4} \end{array} \right. \quad (3.43)$$

On remarquera que les composantes de la matrice raideur adimensionnée s'expriment en fonction de la seule variable géométrique α_{eo} et de l'allongement de la structure λ_z .

En étudiant l'évolution de ces composantes en fonction de λ_z , on constate que les valeurs sont quasiment constantes, cf. figure 3.10, où λ_z varie entre 1.00001 et 1.042. En effet, dans cet intervalle de λ_z , les variations de la raideurs axiale restent inférieures à 0.05% et 0.72% respectivement pour les angles d'enroulements de 5° et 20° . On peut donc considérer que la matrice raideur adimensionnée de la structure est fonction de seule variable α_{eo} .

Par la suite, lorsqu'on utilisera ce modèle, on calculera sa raideur pour $\lambda_z = 1.01$.

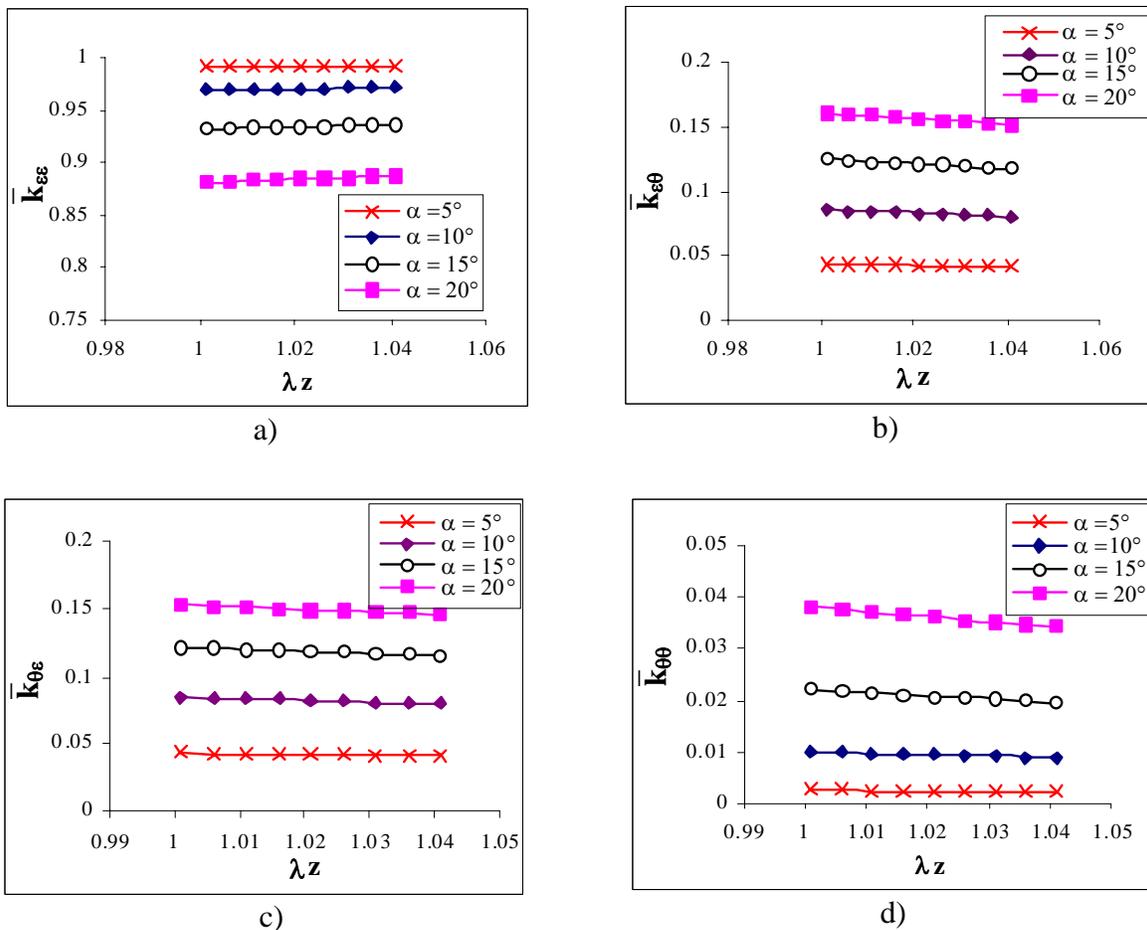


Figure 3.10 : résultats adimensionnés du modèle continu en fonction de l'allongement de la structure ; a) raideur axiale, b) et c) termes de couplages et d) raideur de torsion.

3.3.4 Bilan

Par rapport au modèle de Hoppe dont il est issu, le modèle qui vient d'être présenté se distingue par la description géométrique de la section de la structure, qui n'est pas supposée multicouche ici. D'autre part, le modèle de Hoppe initial a été étendu pour obtenir une loi de comportement globale en traction - torsion. En revanche, comme dans le modèle initial, on a affaire à un assemblage parallèle de ressorts hélicoïdaux, qui travaillent de manière indépendante (le contact n'est pas pris en compte).

Il faut noter aussi que dans modèle continu, seule la valeur globale de PF pour la structure est nécessaire. Celle-ci peut être déterminée facilement d'après (3.37), si on connaît les masses linéique et volumique de la structure. Par contre, dans le modèle de Leech [LEE 1993], il faut définir un Packing Factor pour chaque couche, sans qu'on ait d'informations à l'échelle d'une couche pour le faire. De plus, pour tous les modèles fondés sur une géométrie multicouche, il faut pouvoir définir le nombre de couches, et le nombre de constituants dans chacune des couches. Ceci n'est pas toujours facile, et plusieurs solutions peuvent être proposées, comme l'illustre la figure 3.1. De ce point de vue, le modèle continu est plus cohérent puisqu'il utilise des paramètres géométriques (pas, rayon extérieur de la structure), qui sont connus le plus souvent. Un autre avantage est l'existence de formules analytiques pour les termes de raideur, qui facilitent l'application de ce modèle par rapport aux autres.

3.4 Bilan des modèles

On peut faire une synthèse des différents modèles présentés auparavant en notant leurs caractéristiques principales dans le tableau ci-dessous :

Tableau 3.1 : caractéristiques principales des différents modèles.

Modèles	Géométrie		Comportement		Contact frottement	Mise en œuvre
	Structure	Sous-structure	Structure	Sous-structure		
Raof	Multicouche	Circulaire	Couplage traction/torsion	Traction pure	Oui	numérique
Hoppe	Multicouche	Circulaire	Traction pure	Traction pure	Non	analytique
FRM	Multicouche	Soft Hard	Couplage traction/torsion	Couplage traction/torsion	Oui	numérique
Continu	Continu	----	Couplage traction/torsion	Traction pure	Non	analytique

Rappelons d'autre part que le modèle de Raof, de par l'étape d'homogénéisation dans les couches, sera approprié si il y a un grand nombre de constituants dans les couches.

3.5 Comparaison des Modèles

On compare les différents modèles dans ce paragraphe, en étudiant le comportement mécanique de constituants à différentes échelles. En effet, selon les échelles étudiées, le nombre de constituants varie (12 pour un brin assemblé, 42 pour un toron), et les données disponibles ne sont pas les mêmes.

Par la suite on étudiera le comportement mécanique de toron du câble 205T, ainsi que le brin assemblé de l'âme du câble 25T en appliquant les différents modèles.

Ensuite, l'influence de frottement entre les constituants sur la réponse de la structure est étudiée pour deux échelles différentes.

3.5.1 Cinématique

Avant de comparer les résultats finaux (sur la matrice raideur) des différents modèles, nous comparons leurs résultats cinématiques. Pour ce faire, le rapport de $\frac{\varepsilon_{tt}}{u_{z,z}}$ (la déformation

axiale locale d'une sous-structure sur celle de la structure) est tracé en fonction de l'angle d'enroulement pour les modèles de Hruska [HRU 1953] (pas de contraction latérale : $\varepsilon_{tt} = u_{z,z} \cos^2 \alpha$), Raof [RAO 1988] (membrane équivalente) et les modèles à volume constant (Hoppe [HOP 1991], Leech [LEE 1993] et le modèle continu), cf. figure 3.11.

Comme l'illustre la figure 3.11, les résultats cinématiques pour différents modèles sont très proches pour des angles d'enroulements inférieurs à 15° , les écarts devenant plus importants au delà.

Comme dans la plupart des applications pour les câbles synthétiques, l'angle d'enroulement est inférieur à 15° , on peut considérer que tous les modèles sont équivalents en traction, du point de vue de la cinématique.

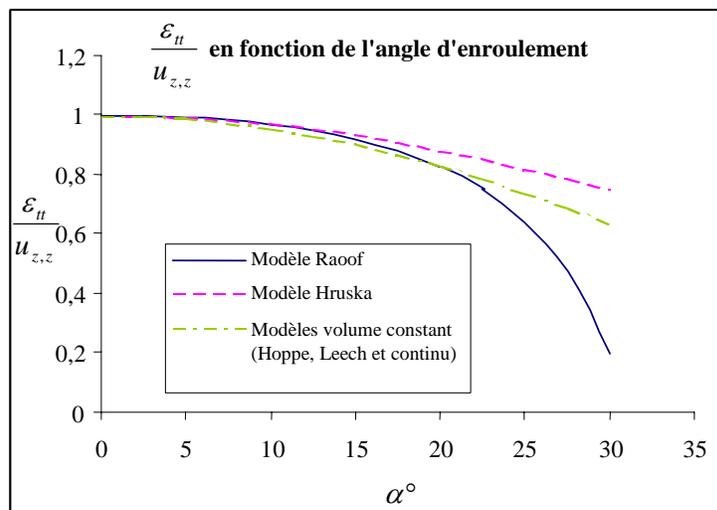


Figure 3.11 : rapport de la déformation axiale d'un composant à celle de la structure pour différents modèles.

3.5.2 Comportement mécanique du toron de 205T

Notre objectif est ici d'étudier les différents modèles décrits auparavant, en les appliquant au toron du câble de 205T.

3.5.2.1 Données d'entrée

Pour le toron, les données disponibles fournies par le constructeur sont le rayon extérieur (qui sera noté r_{e0}), le pas P , et le nombre de ses constituants, soit ici 42 brins assemblés. D'autre part, le comportement en traction d'un brin assemblé est connu d'après des résultats expérimentaux sous la forme d'une courbe effort / déformation axiale. Cette courbe est très bien approchée par une droite, et la valeur de la pente (c'est-à-dire la raideur du brin assemblé) est notée par la suite k_{ba} .

La mise en œuvre de chaque modèle requiert la connaissance de différentes données, qui sont listées dans le tableau ci-dessous :

Tableau 3.2 : données nécessaires pour les différents modèles. En **gras** sont indiquées les données fournies par le constructeur du câble.

Modèle	Données géométriques	Données matérielles	Données mixtes
Raof et Hoppe	Rayon du toron, Pas ; Nombre de couches ; Nombre de brins assemblés par couche.	Module d'Young du brin assemblé.	-----
FRM	Pas ; Nombre de couches ; Nombre de brins assemblés par couche ; Rayon du brin assemblé.	Raideur du brin assemblé	Packing Factor de chaque couche.
Continu	Rayon du toron, Pas.	Module d'Young du brin assemblé.	Packing Factor global.

Au vu de ce tableau, **pour tous les modèles, les données disponibles sont insuffisantes**, et il faut donc se donner les informations manquantes.

Données géométriques et mixtes

En particulier, pour les modèles de Raof, Hoppe et FRM, qui utilisent une géométrie de type multicouche, il faut se donner la discrétisation en couches, sachant que celle-ci doit respecter le nombre de constituants du toron (soit ici 42).

Dans les modèles de Raof et Hoppe, les constituants sont supposés rigides, ainsi, une fois qu'on s'est fixé le nombre n de couches dans le toron, on en déduit le rayon des brins assemblés grâce à la formule suivante :

$$2r_{e0} = (2n - 1) * 2r_{ba} \quad (3.44)$$

où r_{ba} est le rayon du brin assemblé (cf. figure 3.12) :

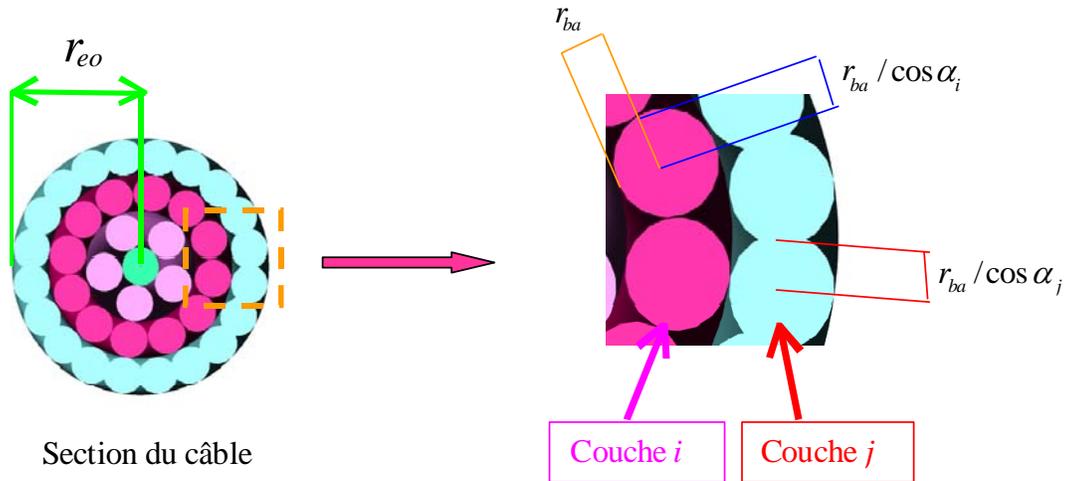


Figure 3.12 : géométrie d'un multicouche à constituants rigides

Dans le modèle FRM, les brins assemblés étant supposés souples, l'épaisseur d'une couche est en général différente du diamètre du brin assemblé. On doit donc se donner le rayon du brin assemblé, qu'on choisit identique pour toutes les couches. On doit également donner une valeur de Packing Factor dans chacune des couches. On définira des valeurs de rayon du brin assemblé et de Packing Factor telles que la structure ainsi constituée ait pour rayon extérieur le rayon du toron. En outre, comme ici l'objectif est de comparer les modèles mécaniques d'un même toron, il faut que le modèle continu et les modèles de Hoppe et Raoof aient dans une section la même quantité de matière. Ceci sera réalisé en imposant que dans le modèle FRM, on ait la même surface de matière S_m que dans les modèles de Hoppe et Raoof, cette dernière étant facilement calculable. En effet, cf. figure 3.12, dans chaque couche, on connaît le nombre de constituants et leur surface élémentaire est simplement égale à :

$$S_{ba} = \pi r_{ba}^2 / \cos \alpha \quad (3.45)$$

la valeur de l'angle d'enroulement dans la couche étant donnée à partir du pas P , d'après la relation :

$$\tan \alpha = 2\pi r / P \quad (3.46)$$

où r est le rayon d'hélice moyen de la couche.

Pour le modèle continu, la donnée manquante du point de vue géométrique est le Packing Factor global. Là encore, pour que tous les modèles mettent en jeu la même quantité de matière, la valeur du Packing Factor global utilisée dans le modèle continu sera donnée par la formule :

$$PF_{global} = S_m / \pi r_{e0}^2 \quad (3.47)$$

Données matérielles

Au niveau matériau, il faut définir un module d'Young apparent pour le brin assemblé dans les modèles de Raoof, Hoppe et continu. Pour les modèles de Raoof et Hoppe, celui-ci est simplement défini d'après la relation :

$$E_{ba} = k_{ba} / \pi r_{ba}^2 \quad (3.48)$$

où r_{ba} est donné par (3.44). Et la même valeur est utilisée pour le modèle continu.

Dans un premier temps, nous allons **comparer les différents modèles**, en les appliquant au toron du câble de 205T, et en faisant en sorte que les données utilisées dans les différents modèles soient cohérentes (chaque modèle est associé au même toron), comme nous venons de le souligner.

Comme nous l'avons mentionné auparavant, pour tous les modèles, certaines données sont manquantes, et des choix sont à faire. Nous effectuerons donc, dans un deuxième temps, une **étude de sensibilité des modèles** à ces choix, l'analyse portant sur la raideur globale du toron.

3.5.2.2 Comparaison des modèles

En utilisant le mode opératoire décrit précédemment, on applique les 4 modèles au toron du câble de 205T.

Pour ce toron, les données du constructeur de câble sont : $r_{e0} = 9.15$ mm, $P = 3.63$ t/m, et on a 42 brins assemblés.

Pour les modèles de Hoppe et Raoof, on suppose que le toron est constitué de $n = 4$ couches, avec respectivement dans chaque couche 1, 6, 14 et 21 brins assemblés (d'autres discrétisations seront étudiées par la suite). On calcule alors grâce à (3.44) : $r_{ba} = r_{e0} / 7 = 1.31$ mm. Enfin, en exploitant (3.45) et (3.46), on obtient : $S_m = 227.8$ mm².

Signalons que dans le modèle de Raoof, il est supposé que chaque couche est remplie par des constituants se touchant mutuellement. Cette condition n'est pas toujours réalisable pour les câbles synthétiques, et elle ne l'est pas pour la discrétisation précédente du toron. Par conséquent, dans chaque couche, on calcule la densité réelle de la couche, et on remplace la valeur théorique de $\pi/4$ dans (3.2) par cette densité.

Pour le modèle FRM, on choisit ici une valeur de rayon de brin assemblé identique à la valeur précédente, 1.31 mm (d'autres cas seront traités ensuite). Dans la couche centrale où l'on n'a qu'un seul constituant, le Packing Factor vaut 1. On détermine alors la valeur du Packing Factor dans les 3 autres couches en faisant en sorte de respecter le rayon extérieur du toron r_{e0} et la surface de matière S_m . Après quelques itérations (on a 2 équations pour 3 inconnues) ceci conduit à des valeurs de Packing Factor de 0.75, 0.88 et 0.89 respectivement dans les couches 2, 3 et 4 (on respecte ainsi exactement le rayon du toron, et à moins de 0.1% S_m).

Enfin, pour le modèle continu, la relation (3.47) fournit $PF_{global} = 0.8661$

La raideur du brin assemblé déterminée à partir de celle du brin (en appliquant le modèle FRM ou continu à partir d'un brin dont la raideur a été caractérisée de façon expérimentale) est $k_{ba} = 346.1$ kN , ce qui conduit d'après (3.48) à : $E_{ba} = 6.42 \cdot 10^4$ N / mm².

Les résultats en termes de raideur obtenus avec les différents modèles sont donnés dans le tableau ci-après. Pour le modèle de Raoof, deux séries de valeurs sont données, correspondant aux deux cas extrêmes de contact glissant ou collant en cisaillement, cf. section 2.1.2.

Tableau 3.3 : résultats des différents modèles sur le toron du câble 205T

Modèle	$k_{\varepsilon\varepsilon}$ (10^3 kN)	$k_{\varepsilon\theta}$ (kN.m)	$k_{\theta\varepsilon}$ (kN.m)	$k_{\theta\theta}$ (N.m ²)	
Modèle Raoof	Contact glissant	14.1	13.5	13.7	19.0
	Contact collant	14.7	7.72	9.27	105
Modèle Hoppe	14.1	----	----	----	
FRM	14.1	13.3	13.0	21.7	
Modèle Continu	14.1	13.2	13.1	16.5	

On constate que la raideur axiale $k_{\varepsilon\varepsilon}$ varie très peu d'un modèle à l'autre. En ce qui concerne les termes $k_{\varepsilon\theta}$ et $k_{\theta\varepsilon}$ de couplage traction-torsion, l'écart entre les modèles de Raoof avec l'hypothèse de contact glissant, FRM, et continu est faible. On note d'autre part que le défaut de symétrie de la matrice raideur est plus important dans le modèle FRM que dans le modèle continu.

Les écarts les plus importants sont obtenus pour la raideur en torsion. Il y a un écart significatif entre les modèles FRM et continu. D'autre part, la borne inférieure du modèle de Raoof est supérieure à la valeur du modèle continu.

Pour le modèle de Raoof, la raideur en contact collant est réellement supérieure à celle en contact glissant, mais au sens de l'énergie de déformation élastique. Cela n'exclut donc pas que les termes de couplage soient plus faibles en contact collant, comme c'est le cas ici. On observe d'autre part que sur ce modèle, en dehors de la raideur axiale où les 2 bornes sont très proches, l'écart entre les bornes est important, ce qui rend ce modèle inexploitable. De plus, la mise en œuvre de ce modèle est compliquée. De même, le modèle de Hoppe ne fournit que la raideur axiale et présente donc un intérêt limité. C'est pourquoi par la suite nous ne retiendrons que les modèles FRM et continu.

Pour trancher entre ces 2 modèles, il faudrait pouvoir les confronter à des résultats expérimentaux, ce qui sera fait au chapitre 6.

3.5.2.3 Etude de sensibilité sur le modèle FRM

Les données disponibles pour le toron étant insuffisantes pour pouvoir appliquer un modèle, nous étudions dans ce paragraphe l'influence des paramètres indéfinis sur le comportement global, pour le modèle FRM. Nous étudions successivement les cas de la discrétisation en couches et du Packing Factor.

3.5.2.3.1 Discrétisation en couches

Le toron est constitué de 42 brins assemblés, supposés disposés sur des couches concentriques. Il y a évidemment plusieurs façons de répartir les constituants dans les différentes couches. Les résultats associés aux différentes discrétisations sont présentés dans le tableau 3.4 ci-dessous.

On n'a considéré que le cas de 4 couches (il ne peut y en avoir moins du fait de la surface de chaque brin assemblé, et si on a 5 couches, les couches 4 et 5 seraient très peu denses). D'autre part, comme auparavant, toutes les configurations donnent un toron de même rayon et de surface de matière S_m .

Tableau 3.4 : raideur globale du toron pour plusieurs discrétisations en couche

Modèle	construction	$k_{\varepsilon\varepsilon}$ (10^3 kN)	$k_{\varepsilon\theta}$ (kN.m)	$k_{\theta\varepsilon}$ (kN.m)	$k_{\theta\theta}$ (N.m ²)
FRM	1+6+14+21	14.1	13.3	13.0	21.7
FRM	1+6+13+22	14.1	13.3	13.0	21.5
FRM	1+6+12+23	14.1	13.1	12.8	21.3
FRM	1+7+14+20	14.1	13.1	12.8	21.4
FRM	3+8+13+18	14.1	13.0	12.7	21.5

On constate que les résultats varient de façon négligeable d'une configuration à l'autre. Ceci est dû au fait que l'angle d'enroulement est faible pour le toron (il varie de 0° au centre du toron jusqu'à 11.8° sur le rayon extérieur). Or, entre 0 et 11.8° , la variation de raideur du brin assemblé est très faible. Il en résulte que la façon dont on positionne les brins assemblés dans la section du toron influence très peu la raideur globale.

3.5.2.3.2 Packing Factor

En pratique, la masse linéique du toron n'est pas donnée par le constructeur, ce qui signifie qu'on n'a pas les informations nécessaires pour déterminer sa surface de matière S_m . Cette dernière quantité constitue donc une variable du problème, et on va étudier ici des modèles FRM de torons associés à des valeurs différentes de S_m . Dans le cas présent, cette variabilité sur S_m va résulter de l'utilisation de plusieurs valeurs de Packing Factor.

On étudie donc un toron constitué de 4 couches de 1, 6, 14 et 21 brins assemblés. Pour chaque modèle, on a un diamètre de brin assemblé constant par couche, et on ajuste la valeur des Packing Factor des couches 2, 3 et 4 de façon à obtenir comme rayon extérieur le rayon du toron. Le diamètre du brin assemblé variant d'un modèle à un autre, il en résulte des valeurs différentes de S_m . Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 3.5 ci-après :

Tableau 3.5 : raideur globale du toron pour plusieurs Packing Factors

Modèle	r_{ba} (mm)	PF	$k_{\varepsilon\varepsilon}$ (10^3 kN)	$k_{\varepsilon\theta}$ (kN.m)	$k_{\theta\varepsilon}$ (kN.m)	$k_{\theta\theta}$ (N.m ²)	S_m (mm ²)
FRM	1.31	0.866	14.1	13.3	13.0	21.7	227.9
FRM	1.325	0.890	14.1	13	12.8	21.3	234.1
FRM	1.35	0.921	14.1	12.9	12.7	21.1	243.0
FRM	1.38	0.958	14.1	12.9	12.7	21.0	252.1

On remarque que bien que la valeur de surface de matière S_m varie de plus de 10%, les écarts restent très faibles sur la raideur globale. Ce résultat vient du fait que même si S_m change d'un cas à l'autre (puisque l'on a des valeurs différentes de r_{ba}), dans tous les cas, la raideur du toron est due à un même nombre des brins assemblés, de même raideur k_{ba} (en N). Les variations de S_m sont donc compensées par celles du module d'Young apparent ($E_{ba} = k_{ba} / \pi r_{ba}^2$, d'après (3.48)), d'où une raideur globale du toron quasi-constante.

Pour le modèle continu, le seul paramètre indéterminé est le Packing Factor global (cf. tableau 3.2, le module d'Young étant défini par (3.48)), et une étude de sensibilité de la raideur vis-à-vis de ce paramètre conduit à des résultats similaires à ceux obtenus avec le modèle FRM.

3.5.2.4 Conclusion

L'application des différents modèles au toron du câble de 205T a conduit à éliminer les modèles de Hoppe et de Raoof, pour ne conserver que les modèles FRM et continu. L'étude de sensibilité a par ailleurs permis de montrer que ces modèles s'avèrent très peu dépendants des paramètres qu'on ne peut déterminer à partir des données fournies par le constructeur du câble. Ce résultat est très encourageant car il montre que les modèles peuvent être utilisés même sans connaître de façon précise tous les paramètres nécessaires.

3.5.3 Comportement mécanique d'un brin assemblé du câble de 25T

Nous nous intéressons maintenant au cas d'un **brin assemblé** du câble de 25T, **dont les constituants sont des brins**.

En effet, contrairement au cas du toron étudié auparavant, les données disponibles à cette échelle ne sont pas les mêmes, il faut donc adapter l'étude précédemment menée à ce cas.

Pour ce brin assemblé, les données constructeur sont le nombre de brins (soit 16) et le pas du brin assemblé, mais on ne connaît pas son rayon extérieur. D'autre part, pour le brin, on connaît sa masse linéique, et la masse volumique des fibres le formant (on rappelle que le brin est un assemblage parallèle de fibres). Enfin, on dispose de résultats d'essais de traction sur le brin, et on connaît sa raideur élastique notée k_b .

Le nombre de constituants étant faible, le modèle de Raouf n'est pas applicable à ce brin. Le modèle de Hoppe ne fournissant que la raideur en traction, on n'utilisera que les modèles FRM et continu. Et on est dans la situation suivante (cf. tableau 3.6) :

Tableau 3.6 : données nécessaires pour les différents modèles. En gras sont indiquées les données disponibles.

Modèle	Données géométriques	Données matérielles	Données mixtes
FRM	Pas ; Nombre de couches ; Nombre de brins par couche ; Rayon du brin.	Raideur du brin.	Packing Factor de chaque couche.
Continu	Rayon brin assemblé, Pas .	Module d'Young brin.	Packing Factor global.

Cette fois-ci, étant donné que l'on dispose de beaucoup d'informations à l'échelle du brin, on va les exploiter pour obtenir une valeur de rayon de brin, qui sera utilisée dans le modèle FRM.

Nous ferons ensuite une étude comparative entre les modèles FRM et continu, les données manquantes du modèle continu étant choisies de sorte que le brin assemblé étudié soit comparable à celui du modèle FRM.

3.5.3.1 Influence de l'arrangement des fibres. Détermination du rayon du brin

Comme nous l'avons indiqué auparavant, on connaît la masse linéique m_l du brin et la masse volumique ρ des fibres qui le constituent. D'autre part, le brin est réalisé à partir d'un assemblage parallèle de fibres. A ce niveau, deux hypothèses peuvent être faites quant à la géométrie de cet assemblage, cf. figure 3.13.

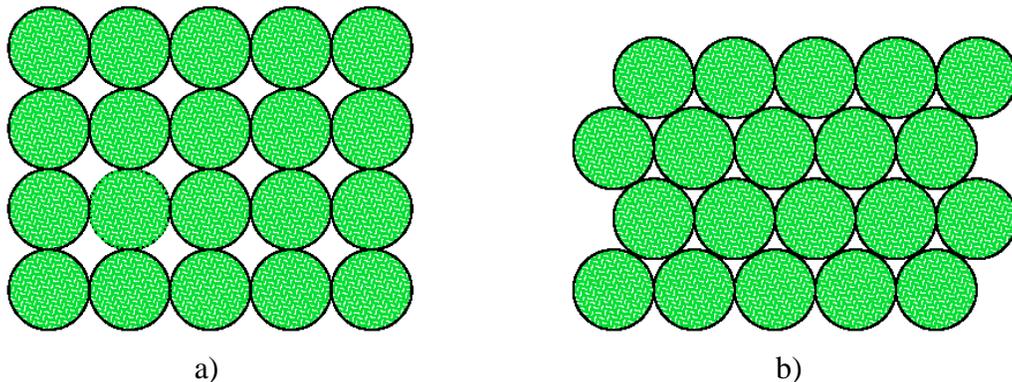


Figure 3.13 : arrangement des fibres dans un brin ; a) alignées et b) en quinconce

Dans le cas a), le Packing Factor vaut $\pi/4$, alors que dans le cas b) il vaut $\pi/2\sqrt{3}$. Or, d'après la définition de cette quantité (cf. (3.37)), on a, en notant r_b le rayon du brin :

$$r_b = \sqrt{\frac{m_l}{\pi \rho PF}} \quad (3.49)$$

Par conséquent, les hypothèses sur l'arrangement des fibres conduisent à des valeurs de rayon de brin différentes.

D'après le tableau 3.6, pour le modèle FRM, une fois le rayon du brin connu, il reste à définir la discrétisation en couches et la valeur du Packing Factor dans chacune des couches. Comme nous l'avons montré dans le paragraphe 3.5.2.3, le modèle FRM est peu sensible à ces deux données. On choisit donc pour le brin assemblé 3 couches de 1, 5 et 10 brins respectivement, les valeurs du Packing Factor étant de 1, 0.95 et 0.95. Ce modèle FRM sera utilisé pour deux valeurs de rayon de brin, selon que les fibres sont supposées alignées ou en quinconce.

Les valeurs numériques utilisées sont les suivantes :

Pas du brin assemblé : $P = 17 \text{ t/m}$

masse volumique de matériau : $\rho = 1440 \text{ Kg/m}^3$

masse linéique de brin : $m_l = 336 \text{ g/Km}$

La formule (3.49) conduit à un rayon de brin $r_{b-al} = 0.308 \text{ mm}$, si les fibres sont alignées, et $r_{b-q} = 0.286 \text{ mm}$ si les fibres sont en quinconce.

D'autre part, la raideur des brins issue des essais de traction est $k_b = 21.4 \text{ kN}$.

A ce stade, les données sont suffisantes pour utiliser le modèle FRM, qui est appliqué pour les deux valeurs de rayon de brin.

exemple 1 : brin assemblé de l'âme du câble 25T constitué par les brins dans lesquels des fibres sont alignées.

3 couches : 1 (PF : 1) +5 (PF : 0.95) +10 (PF : 0.95)

Diamètre couche 1: 0.615 mm (= 2 r_{b-al})

Diamètre couche 2: 1.5401 mm et épaisseur : 0.4625 mm

Diamètre couche 3 ou brin assemblé : 2.5252 mm et épaisseur : 0.4925 mm

Pas = 17 t/m

exemple 2 : brin assemblé de l'âme du câble 25T constitué par les brins avec les fibres en quinconce.

3 couches : 1 (PF : 1) +5 (PF : 0.95) +10 (PF : 0.95)

Diamètre couche 1: 0.5720 mm (= 2 r_{b-q})

Diamètre couche 2: 1.4323 mm et épaisseur : 0.4301 mm

Diamètre couche 3 ou brin assemblé : 2.3480 mm et épaisseur : 0.4578 mm

Pas = 17 t/m

Les résultats obtenus avec le logiciel FRM à partir de ces deux jeux de données sont présentés dans la tableau 3.7.

Tableau 3.7 : résultats de modèle FRM sur un brin assemblé de l'âme de câble 25T, pour deux types d'arrangements différents de fibres dans un brin.

Exemples	Modèles	PF	$k_{\varepsilon\varepsilon}$ (kN)	$k_{\varepsilon\theta}$ (N.m)	$k_{\theta\varepsilon}$ (N.m)	$k_{\theta\theta}$ (N.m ²)
Exemple 1	FRM	0.95	337.79	23.49	25.04	0.0041
Exemple 2	FRM	0.95	338.44	20.33	22.35	0.0037

Comme en section 3.5.2.3.2, les exemples 1 et 2 de brins assemblés contiennent le même nombre de brins de même raideur unitaire, ils diffèrent en revanche au niveau de leur géométrie (rayon des brins). Les résultats obtenus sont de ce fait logiques, avec des raideurs axiales très proches, les différences se manifestant lorsque la torsion intervient, les raideurs les plus élevées étant obtenues pour l'exemple 1 qui a le rayon le plus grand.

Par la suite, l'hypothèse d'arrangement des fibres en quinconce étant plus réaliste (l'assemblage est plus compact), c'est cette configuration qui sera retenue.

3.5.3.2 Comparaison des modèles FRM et continu

Pour pouvoir appliquer le modèle continu, d'après le tableau 3.6, il reste à définir le rayon du brin assemblé, le module d'Young du brin, et le Packing Factor global.

Afin que le brin assemblé étudié avec le modèle continu soit comparable à celui utilisé dans le modèle FRM, on prend pour le rayon du brin assemblé la même valeur que celle du modèle FRM.

Pour obtenir le PF global, on utilise la formule :

$$PF = A_m / A_s \quad (3.50)$$

où A_m , A_s sont respectivement les sections de matériau et de brin assemblé calculés par logiciel FRM.

Le module d'élasticité apparent $(E_a)^b$ d'un brin est exprimée par:

$$(E_a)^b = \frac{k_b}{A_b} \quad (3.51)$$

où A_b est la section du brin (égale à πr_b^2) et k_b sa raideur axiale.

Les résultats de notre modèle continu et logiciel FRM sont comparés dans la tableau 3.8.

Tableau 3.8 : résultats des modèles FRM et continu sur un brin assemblé de l'âme de câble 25T pour des fibres en quinconce dans un brin.

Exemples	Modèles	PF	$k_{\varepsilon\varepsilon}$ (kN)	$k_{\varepsilon\theta}$ (N.m)	$k_{\theta\varepsilon}$ (N.m)	$k_{\theta\theta}$ (N.m ²)
Exemple 2	FRM	0.95	338.44	20.33	22.35	0.0037
	Modèle Continu	0.9530	338.19	24.47	24.35	0.0023

On observe des écarts entre les résultats des deux modèles comparables à ceux observés sur le toron, cf. tableau 3.3 : l'écart est négligeable sur la raideur en traction, il est de l'ordre de 10% sur les termes de couplage, et atteint une valeur importante pour la raideur en torsion. L'importance effective de ces écarts sera rediscutée en section 3.5.3.4.

3.5.3.3 Packing Factor

Pour étudier l'influence du packing factor PF sur les résultats à cette échelle, le modèle FRM est appliqué au brin assemblé de l'âme du câble 25T pour deux valeurs différentes de PF (exemples 2 et 3).

exemple 3 : essai sur le même brin assemblé que l'exemple 2 sauf que le PF est différent.

3 couches : 1 ($PF : 1$) +5 ($PF : 0.7854$) +10 ($PF : 0.7854$)

Diamètre couche 1: 0.5720 mm

Diamètre couche 2: 1.5535 mm et épaisseur : 0.4907 mm

Diamètre couche 3 ou brin assemblé : 2.5699 mm et épaisseur : 0.5082 mm

Pas = 17 t/m

Les résultats sont présentés dans le tableau 3.9. Ils montrent que PF a une influence négligeable sur la raideur axiale, mais importante pour les autres coefficients (termes de torsion et de couplage). Ceci était prévisible parce qu'ici le changement de PF nous conduit au changement du rayon extérieur (le rayon extérieur de l'exemple 3 est 10% plus élevé que celui de l'exemple 2).

On rappelle que le PF n'a pas même influence sur le comportement d'une structure à l'échelle supérieure (âme et toron du câble 205T), car dans ce cas le rayon extérieur de la structure était connu, et donc n'était pas influencé par la valeur de PF (cf. section 5.2.3.2).

Tableau 3.9 : les résultats pour brin assemblé de l'âme du câble 25T avec différents PF .

Exemples	modèles	PF	$k_{\varepsilon\varepsilon}$ (kN)	$k_{\varepsilon\theta}$ (N.m)	$k_{\theta\varepsilon}$ (N.m)	$k_{\theta\theta}$ (N.m ²)
Exemple 2	FRM	0.95	338.44	20.33	22.35	0.0037
Exemple 3	FRM	0.7854	337.71	24.41	27.43	0.0054

3.5.3.4 Influence des termes de torsion et de couplage à l'échelle supérieure

Dans les paragraphes précédents, on a montré que l'arrangement des fibres, le modèle utilisé, et le PF ont une influence importante sur les termes de torsion et de couplage. De plus, un paramètre tel que PF est inconnu.

A ce niveau, il est important de se rappeler que les brins assemblés sont en grand nombre à l'échelle supérieure (42 sur un toron d'un câble de 205T). Or, dans la littérature, dès lors que le nombre de constituants est élevé, il est courant de ne prendre en compte que la raideur de traction. Cela signifie que même si des écarts entre les modèles peuvent apparaître sur les termes de raideur du brin assemblé autres que la raideur en traction, il est probable qu'à l'échelle supérieure ces écarts ne jouent plus.

C'est cet aspect que nous nous proposons d'étudier ici. Pour ce faire, on va modéliser le toron du câble 205T de deux façons différentes : l'une en ne prenant en compte que la raideur de traction des brins assemblés, l'autre en prenant en compte tous les termes de raideur. Les résultats sont présentés dans le tableau 3.10.

Tableau 3.10 : résultats sur le toron du câble 205T avec différentes hypothèses sur le comportement du brin assemblé.

Raideurs du brin assemblé prises en compte	Modèle	$k_{\varepsilon\varepsilon}$ (10^3 kN)	$k_{\varepsilon\theta}$ (kN.m)	$k_{\theta\varepsilon}$ (kN.m)	$k_{\theta\theta}$ (N.m ²)
Traction, torsion, couplages	FRM	14.1	14.0	13.9	22.8
traction	FRM	14.1	13	12.8	21.3

On constate que les écarts sont faibles, alors qu'on compare 2 cas où les termes de raideur de torsion et de couplage passent d'une valeur nulle à la valeur issue d'un modèle. Cela signifie qu'on obtiendrait des écarts encore plus faibles si on prend les résultats issus de 2 modèles quelconques d'un brin assemblé, et en prenant en compte tous les termes de raideur.

On en conclut qu'on dispose d'une modélisation satisfaisante du brin assemblé, qu'on choisisse le modèle FRM ou continu, et sans que l'on connaisse de façon précise certains paramètres géométriques.

3.5.4 Effet du frottement

Comme on avait déjà indiqué, dans notre modèle continu, l'effet de frottement est négligé, alors que celui-ci peut être pris en compte dans le logiciel FRM. On a donc analysé le toron du câble de 205T, et un brin assemblé de l'âme de câble 25T à l'aide de logiciel FRM pour différentes valeurs du coefficient de frottement. Les résultats sont présentés ci-dessous tableau 3.11.

Tableau 3.11 : résultats FRM sur un toron du câble 205T ainsi qu'un brin assemblé de l'âme du câble 25T pour différentes valeurs de coefficient de frottement

Structure	coefficient de frottement	$k_{\varepsilon\varepsilon}$ (kN)	$k_{\varepsilon\theta}$ (N.m)	$k_{\theta\varepsilon}$ (N.m)	$k_{\theta\theta}$ (N.m ²)
Toron du câble 205T ($r_{r0} = 18.3$ mm)	0.	$14.1 \cdot 10^3$	$13.0 \cdot 10^3$	$12.8 \cdot 10^3$	21.3
	0.3	$14.2 \cdot 10^3$	$13.0 \cdot 10^3$	$13.8 \cdot 10^3$	22.7
	0.6	$14.3 \cdot 10^3$	$13.1 \cdot 10^3$	$15.0 \cdot 10^3$	25.3
Brin assemblé de l'âme du câble 25T ($PF = 0.95$)	0.	338	20.33	22.35	0.0037
	0.3	338	20.41	23.74	0.0041
	0.6	338	20.49	24.75	0.0043

Les écarts entre les résultats avec différents coefficients de frottement pour le brin assemblé de l'âme du câble 25T et le toron sont négligeables sur la raideur en traction, un peu supérieurs à 10% sur les termes de couplage, et de l'ordre de 15-20% sur la raideur à la torsion.

Comme on l'a montré dans la section précédente, les écarts de raideur sur le brin assemblé (à raideur de traction égale) n'ont pas d'influence à l'échelle supérieure.

Pour le toron en revanche, il n'en sera pas de même, et on retiendra à ce stade une dépendance (faible mais visible) de son comportement aux hypothèses de frottement entre les brins assemblés. Il est opportun de rappeler ici que dans le tableau 3.3, les résultats sur le modèle FRM avaient été obtenus avec un coefficient de frottement nul. Par conséquent, pour un coefficient de frottement non nul, les écarts observés dans le tableau 3.3 entre les modèles FRM et continu augmentent, et la raideur de torsion varie d'un facteur 2.

Là encore, c'est l'expérience qui nous permettra de donner une valeur plausible du coefficient de frottement, sous réserve que le modèle FRM soit satisfaisant par ailleurs. La valeur du coefficient de frottement pour des brins assemblés en aramide (brin sur brin) est entre 0.11 et 0.24 [FRM 2003] (ces valeurs ont été obtenues par essais sur différents brins assemblés en aramide). Par contre, à notre connaissance, aucune valeur du coefficient de frottement aux échelles supérieures (toron, âme et le câble) n'est donnée dans la littérature.

3.6 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était de disposer d'un modèle pour décrire le comportement axial d'une structure constituée d'un « grand » nombre de sous-structures, à partir de sa géométrie et du comportement mécanique des sous-structures. Les couples structures / sous-structures visés ici sont le toron et le brin assemblé d'une part, et le brin assemblé et le brin d'autre part.

Différents modèles de la littérature ont été étudiés, et un modèle continu a été développé, en tant qu'extension d'un modèle existant. Ces modèles ont ensuite été comparés, en les appliquant au toron du câble de 205T, et au brin assemblé de l'âme du câble de 25T.

Dans le cas du **toron**, réalisé à partir de 42 brins assemblés, 4 modèles différents ont été appliqués : ceux de Hoppe, Leech (FRM), Raoof et le modèle continu. A l'issue de cette étude, seulement deux d'entre eux ont été retenus : **Leech** et modèle **continu**, compte tenu des limitations des deux autres que nous avons déjà évoquées dans ce chapitre : pour le modèle Raoof, l'écart entre les bornes est important, et le modèle est difficile à utiliser. De même, le modèle de Hoppe ne fournit que la raideur axiale et présente donc un intérêt limité. Ces deux modèles conduisent à des résultats très voisins sur la raideur en traction, proches sur les raideurs de couplage (moins de 10% d'écart), mais sensiblement différents pour la raideur en torsion. D'autre part, en pratique, pour ces deux modèles, l'application au toron nécessite la connaissance de nombreux paramètres géométriques, dont certains sont inconnus. Par une étude de sensibilité, on a vérifié que ces modèles fournissent des résultats stables par rapport à ces paramètres inconnus, sachant que le rayon extérieur du toron est connu.

Pour le **brin assemblé**, il est constitué d'un nombre plus réduit de sous-structures : soit 16 brins, et les deux modèles précédents (Leech et continu) lui ont été appliqués. Les écarts entre les raideurs obtenues à partir de ces deux modèles sont du même ordre de grandeur que

dans le cas du toron. Là encore, une étude de sensibilité aux paramètres inconnus a été menée, démontrant une plus grande influence des résultats à ces paramètres, à l'exception de la raideur de traction qui s'avère très stable. Ceci provient du fait que dans le cas du brin assemblé, le rayon extérieur est inconnu. Cela dit, on a constaté que les écarts sur les raideurs enregistrées entre les modèles, ou sur un même modèle ou à cause des paramètres géométriques inconnus, sont d'influence négligeable à l'échelle supérieure. Ceci résulte du fait que les brins assemblés y sont en grand nombre, et que par conséquent c'est essentiellement leur raideur en traction qui joue, celle-ci s'avérant particulièrement stable.

Finalement, on retient les modèles de Leech (FRM) et continu.

Le modèle de Leech est relativement complet dans la mesure où il permet de prendre en compte les raideurs de couplage et de torsion au niveau des sous-structures, et le frottement entre les sous-structures. Ses inconvénients sont liés à la définition d'une géométrie multicouche (peu évidente en pratique) et sur la nécessité d'utiliser un logiciel pour sa mise en œuvre.

Le modèle continu présente le gros avantage d'être analytique, et s'appuie sur une description géométrique plus simple, et de ce fait plus en accord avec les données disponibles (pas de géométrie multicouches). Il néglige cependant complètement les phénomènes de frottement, et ne prend en compte que le comportement en traction de la sous-structure.

L'écart entre ces deux modèles n'est important que pour la raideur en torsion, et c'est la confrontation à l'expérience (voir chapitre 6) qui permettra de dire lequel de ces deux modèles fournit les meilleurs résultats.

Chapitre 4. Modélisation d'un câble « 1+6 »

4.1 Introduction

Comme nous l'avons déjà signalé aux chapitres 1 et 2, deux modèles sont nécessaires pour l'étude des câbles synthétiques : un modèle multicouches destiné aux structures inférieures (brin, brin assemblé, voire certains torons à grand nombre de constituants...) qui a été présenté dans le chapitre précédent, et un modèle 1+6 ou **monocouche** pour les structures supérieures (câble ou toron).

Les câbles monocouches auxquels on s'intéresse dans ce chapitre sont réalisés à partir d'une couche de m constituants appelés **fils** , supposés de **section circulaire** de rayon R_w , enroulés autour de l'âme (en général, m vaut 6, d'où l'appellation classique (1+6) pour un câble tel que celui illustré par la figure 4.1). L'**âme** est également supposée de **section circulaire**, de rayon R_c . La ligne moyenne d'un fil extérieur forme une hélice de rayon $R_h = R_c + R_w$. L'angle d'enroulement α est mesuré entre la tangente à cette hélice et l'axe du câble, cf. Figure 4.1.

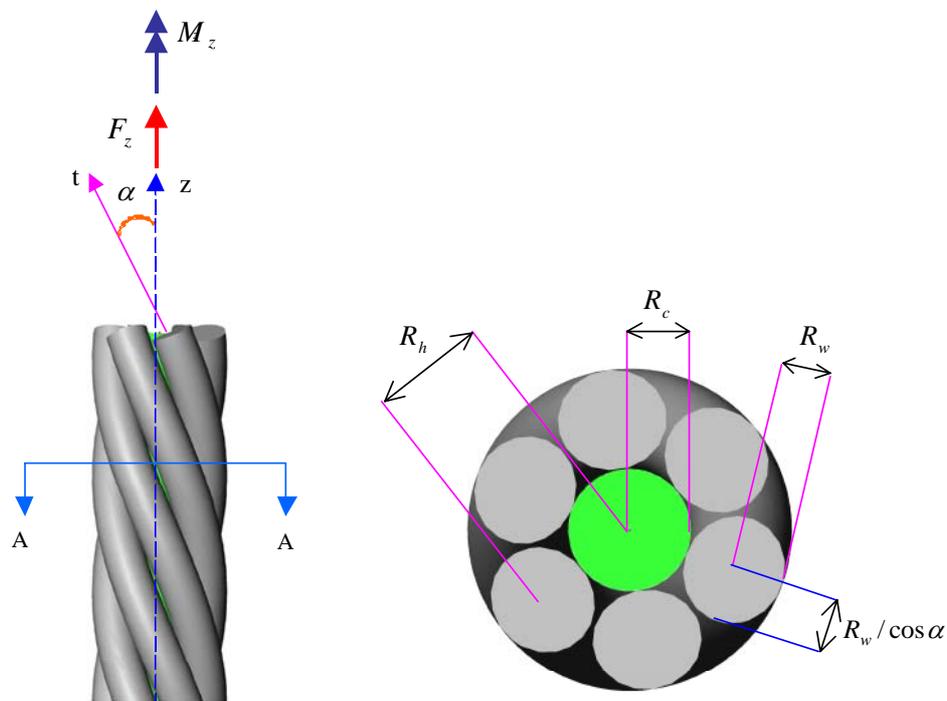


Figure 4.1 : construction du câble 1+6 (1 âme et 6 fils) et vue en coupe A-A de sa section.

Notre but dans ce chapitre est d'établir un modèle pour traiter le comportement global d'un câble synthétique de modèle 1+6 en traction - torsion, même si des hypothèses simplificatrices sont pour l'instant faites.

On remarque qu'à notre connaissance, il n'y a pas de modèle analytique disponible dans la littérature pour un câble synthétique de type 1+6. Comme on l'a déjà précisé, les modèles existants pour les câbles synthétiques sont plutôt intégrés dans un logiciel et nécessitent un traitement numérique [LEE 1993], [RUN 2002] et [BEL 2004]. Ce dernier aspect relativise l'intérêt de tels modèles, qui ne permettent pas d'établir de relation explicite entre les paramètres de conception du câble et son comportement mécanique. Nous avons donc décidé de développer un modèle analytique à partir d'un modèle

existant pour les câbles métalliques. En effet, pour les câbles métalliques de construction 1+6, il y a de nombreux modèles analytiques basés sur les équations d'équilibre de Kirchhoff-Love pour les poutres courbes [LOV 1944], et qui sont bien adaptés aux câbles 1+6 en chargement axial.

Dans ce chapitre on va d'abord présenter les modèles existants pour les câbles métalliques 1+6. Dans la littérature, le domaine de validité de ces modèles n'est pas toujours bien défini. Une étude sera donc menée sur ce point, l'objectif étant de sélectionner un modèle, qui sera ensuite modifié pour une application aux câbles synthétiques.

On présentera ensuite le modèle analytique ainsi construit pour prédire le comportement d'un câble synthétique 1+6 en chargement axial. Enfin, ce modèle sera appliqué aux câbles de 25T et 205T, et les résultats obtenus seront comparés avec ceux fournis par le logiciel FRM.

4.2 Modèles existants

Au vu de l'analyse bibliographique au chapitre 2, on peut dire qu'il existe de nombreux modèles analytiques de câbles métalliques, (c'est-à-dire des câbles dont le matériau constitutif est homogène et isotrope). Ces modèles sont basés sur la théorie de poutre courbe, et sont donc bien adaptés à la construction des câbles 1+6, dans lesquels, du fait du faible nombre de constituants, les raideurs de torsion et de flexion jouent un rôle important dans la réponse globale de la structure.

Nous présentons ici les modèles existants pour des câbles métalliques basés sur la théorie de poutre courbe ([HRU 1953], [MAC 1973], [KNA 1979], [MCC 1982], [KUM 1987], [SAT 1996], [COS 1997], [LAB 1998] et [RAM 1988]). Dans ces modèles de câbles, les fils constitutifs sont considérés comme des poutres hélicoïdales et, outre leur raideur en traction, leur raideur en torsion et éventuellement celle en flexion sont prises en compte, sauf dans le modèle de Hruska [HRU 1953]. Ces modèles se distinguent d'entre eux pour plusieurs aspects relatifs au comportement des constituants, à la prise en compte de l'effet Poisson, au traitement du contact, à la formulation d'hypothèses cinématiques (cf. chapitre 2). On rappelle qu'en chargement axial, il ressort de la littérature que le frottement, l'aplatissement des fils et les non-linéarités géométriques ont une influence négligeable sur le comportement global du câble. De plus, les contacts sont des contacts radiaux entre les fils extérieurs et l'âme.

D'une manière générale la loi de comportement du câble peut s'exprimer sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} F_z \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\varepsilon\varepsilon} & k_{\varepsilon\theta} \\ k_{\theta\varepsilon} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{z,z} \\ \theta_{z,z} \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

la matrice raideur est symétrique, ce qui résulte du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti cf. [SAT 1996], [RAO 1995] et [LAB 1998]. Par la suite, on va montrer que dans de nombreux modèles, cette propriété n'est pas vérifiée.

4.2.1 Modèle de Hruska

Les premiers modèles analytiques de câbles datent des années 50 avec les travaux de Hruska [HRU 1951], [HRU 1952], [HRU 1953] où un câble est traité comme un assemblage de fils qui travaillent uniquement en traction. Ce modèle est basé sur les hypothèses suivantes :

- Au niveau local les constituants travaillent uniquement en **traction** dans la direction de leur axe.
- La section de la structure reste plane, et normale à la fibre moyenne après déformation.
- Le changement de géométrie dû à l'effet Poisson n'est pas pris en compte.
- Les effets du contact et du frottement entre les constituants sont négligés.
- Au niveau global, le comportement de la structure est caractérisé en traction – torsion.

Le modèle de Hruska est le plus simple puisque les fils sont supposés en état de traction pure et les interactions entre les composants ne sont pas prises en compte. La déformation axiale de chaque fil est reliée aux déformations du câble par les relations géométriques. Après avoir déterminé la déformation axiale des fils, la force axiale dans chaque fil peut être calculée. On en déduit les efforts et moments sur l'axe du câble, et par suite la loi de comportement du câble est donnée par :

$$\begin{cases} k_{\varepsilon\varepsilon} = (AE)_c + \sum_{i=1}^N n_i (AE)_i \cos^3 \alpha_i \\ k_{\varepsilon\theta} = k_{\theta\varepsilon} = \sum_{i=1}^N n_i (AE)_i r_i \cos^2 \alpha_i \sin \alpha_i \\ k_{\theta\theta} = (GJ)_c + \sum_{i=1}^N n_i (AE)_i r_i^2 \sin^2 \alpha_i \cos \alpha_i \end{cases} \quad (4.2)$$

où les indices c et i représentent respectivement l'âme (core) et la couche i , alors que A , E , G et J sont respectivement l'aire de la section, le module Young, le module de cisaillement et le moment d'inertie en torsion des constituants ; et N , n , r et α représentent respectivement le nombre de couches, le nombre de constituants dans chaque couche, le rayon d'hélice et l'angle d'hélice. Dans notre cas (modèle 1+6), on aura $N = 1$, $n = 6$, r_1 et α_1 étant respectivement le rayon d'hélice, R_h et l'angle d'enroulement, α (cf. figure 4.1).

4.2.2 McConnell et Zemek (1982)

McConnell et Zemek [MCC 1982] ont modifié le modèle de Hruska, simplement en ajoutant la somme des raideurs de torsion de tous les fils individuels dans le terme de torsion ($k_{\theta\theta}$) de la matrice raideur. Donc, le terme de torsion, $k_{\theta\theta}$ est exprimé par :

$$k_{\theta\theta} = (GJ)_c + \sum_{i=1}^N n_i (AE)_i r_i^2 \sin^2 \alpha_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^N n_i (GJ)_i \quad (4.3)$$

les autres composantes de la matrice raideur sont déterminées par équation (4.2)₁₋₂.

4.2.3 Machida et Durelli [MAC 1973]

Machida et Durelli [MAC 1973] ont étudié les effets des raideurs de flexion et de torsion des fils individuels sur la matrice raideur du câble. En effet, ils font les mêmes hypothèses que précédemment si ce n'est qu'ils considèrent qu'au niveau local, les constituants sont soumis à un effort axial, un moment de flexion et un moment de torsion. Ils ont établi des équations linéaires pour déterminer la force axiale, le moment de flexion et le moment de torsion résultants dans les constituants hélicoïdaux d'un câble soumis globalement à des sollicitations de traction - torsion. Ce modèle conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{\theta\varepsilon} = \sum_{i=1}^N n_i \left(\begin{array}{l} (AE)_i r_i \cos^2 \alpha_i \sin \alpha_i - 2 \frac{(EI)_i}{r_i} \cos^2 \alpha_i \sin^3 \alpha_i \\ + \frac{(GJ)_i}{r_i} \cos^2 \alpha_i \sin \alpha_i (1 - 2 \cos^2 \alpha_i) \end{array} \right) \\ k_{\theta\theta} = (GJ)_c + \sum_{i=1}^N n_i \left(\begin{array}{l} (AE)_i r_i^2 \sin^2 \alpha_i \cos \alpha_i + 2(EI)_i \cos^3 \alpha_i \sin^2 \alpha_i \\ + (GJ)_i \cos^3 \alpha_i (1 - 2 \sin^2 \alpha_i) \end{array} \right) \end{array} \right. \quad (4.4)$$

les autres termes de $k_{\varepsilon\varepsilon}$ et $k_{\varepsilon\theta}$ sont données par (4.2)₁₋₂.

En 1979, Knapp [KNA 1979] utilise une méthode énergétique pour modéliser le comportement en traction-torsion des câbles à âme souple (c'est-à-dire dont le rayon diminue de façon non négligeable sous l'action de la pression des fils). Cette approche est essentiellement consacrée aux câbles à âme souple, mais il est possible de l'appliquer aux structures avec une âme plus rigide. Dans ce dernier cas, les résultats de ce modèle coïncident exactement avec les résultats de Machida et Durelli [MAC 1973].

4.2.4 Modèle de Costello

En 1973, Phillips et Costello [PHI 1973] introduisent une approche fondamentale basée sur les équations d'équilibre de Kirchhoff-Love pour les poutres courbes. Les caractéristiques principales de ces travaux, évoquées en section 2.1.1.3, sont reprises ici. Les câbles qui sont d'abord étudiés par Costello et al. sont des torons à une couche de fils hélicoïdaux et **sans âme**. Les fils extérieurs se touchent donc entre eux. Les hypothèses suivantes sont utilisées: les sections des fils dans un plan normal à l'axe du câble sont elliptiques, ce qui nécessite des angles d'enroulement relativement faibles (d'après [GHO 2004], $\alpha \leq 20^\circ$). Les grandes variations d'angle d'hélice sont permises, les frottements entre fils sont négligés, la déformation des fils est également négligée, ce qui signifie que la déformation axiale du toron ne provient que des variations de l'angle d'enroulement. Par la suite, la déformation des fils est alors prise en compte [COS 1976]. Bien que la déformation du fil soit petite, il est encore possible d'avoir une grande déformation du câble, comme c'était le cas précédemment, si le changement de l'angle d'enroulement est grand.

On note que les équations d'équilibre de Kirchhoff-Love pour les poutres courbes sont des équations non linéaires avec 2 variables indépendantes: la déformation d'un fil et l'angle final de l'hélice. Ces équations peuvent être résolues par une méthode itérative. En 1984, Velinsky, Anderson et Costello [VEL 1984] présentent leurs résultats pour les câbles avec une âme centrale. Dans cette configuration, les hypothèses suivantes sont faites :

- La section de la structure reste plane, et normale à la fibre moyenne après déformation,
- Au niveau local, les constituants travaillent en traction, torsion ainsi qu'en flexion,
- Les constituants extérieurs ne se touchent plus entre eux,
- Le changement de géométrie dû à l'effet Poisson est pris en compte,
- Les effets du contact et du frottement entre les constituants sont négligés (ce qui revient à dire que les fils sont supposés parfaitement collés à l'âme, sans aucun mouvement relatif possible),
- Au niveau global, le comportement de la structure est caractérisé en traction – torsion.

Ce modèle se base sur les relations géométriques entre les déformations des fils et celles du câble, avec les hypothèses que toute section plane et normale à la ligne moyenne initiale, reste plane et normale à la ligne déformée.

La figure 4. 2 présente la ligne moyenne d'un fil extérieur en projection sur un plan avant et après la déformation du câble.

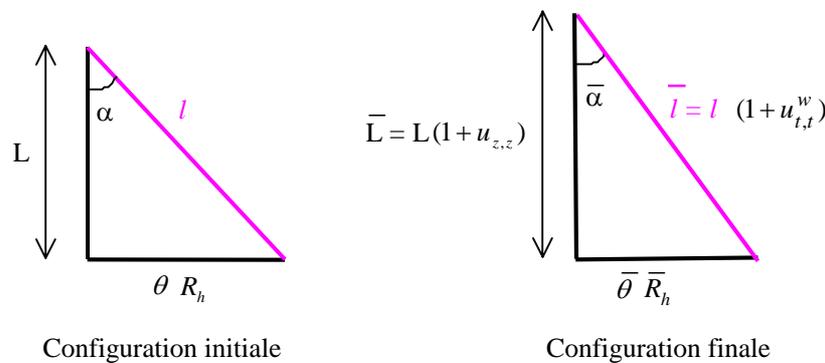


Figure 4. 2: ligne moyenne d'un fil extérieur en projection sur un plan.

En considérant la figure 4.2, on peut écrire les relations géométriques suivantes :

$$\begin{cases} L = l \cos \alpha & \bar{L} = \bar{l} \cos \bar{\alpha} \\ \tan \alpha = \frac{R_h \theta}{L} & \tan \bar{\alpha} = \frac{\bar{R}_h \bar{\theta}}{\bar{L}} \end{cases} \quad (4.5)$$

où $\bar{\quad}$ correspond aux paramètres après déformation, alors que la longueur de l'âme et du fil sont données par :

$$\begin{cases} \bar{L} = L(1 + u_{z,z}) \\ \bar{l} = l(1 + u_{t,t}^w) \end{cases} \quad (4.6)$$

où $u_{z,z}$ et $u_{t,t}^w$ sont la déformation axiale dans l'âme et un fil extérieur respectivement. Ceci nous permet d'exprimer les déformations du câble en fonction de celles du fil :

$$\begin{cases} u_{z,z} = \frac{\bar{L}-L}{L} = (1+u_{t,t}^w) \frac{\cos \bar{\alpha}}{\cos \alpha} - 1 \\ R_h \theta_{z,z} = R_h \frac{\bar{\theta} - \theta}{L} = \frac{R_h}{R_h} (1+u_{z,z}) \tan \bar{\alpha} - \tan \alpha \end{cases} \quad (4.7)$$

et le rayon final de hélice, en tenant compte de l'effet Poisson, est donné par :

$$\bar{R}_h = R_c (1 - \nu u_{z,z}) + R_w (1 - \nu u_{t,t}^w) \quad (4.8)$$

Par ailleurs, la géométrie initiale du fil non déformée (sa ligne moyenne) est caractérisée par une courbure k' , et une déformation de torsion, τ (la torsion à l'unité longueur) données par :

$$\begin{cases} k' = \frac{\sin^2 \alpha}{R_h} \\ \tau = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{R_h} \end{cases} \quad (4.9)$$

Les auteurs considèrent alors que les déformations et le changement de l'angle d'enroulement, $\Delta \alpha = \bar{\alpha} - \alpha$, sont petits. Ils linéarisent alors les équations (4.7)₁₋₂, de même que les équations donnant le changement en courbure, $\Delta k'$, et le changement en torsion à l'unité longueur, $\Delta \tau$ (on note ici, que pour des charges courantes, le comportement d'un câble peut être considéré comme linéaire, pour plus de détails cf. [COS 1997]). Finalement, les relations suivantes sont obtenues :

$$\begin{cases} u_{z,z} = u_{t,t}^w + \Delta \alpha \tan \alpha \\ R_h \theta_{z,z} = u_{t,t}^w \tan \alpha - \Delta \alpha + \nu \tan \alpha \frac{(R_c u_{z,z} + R_w u_{t,t}^w)}{R_h} \\ R_w \Delta k' = - \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{R_h / R_w} \Delta \alpha + \nu \frac{R_c u_{z,z} + R_w u_{t,t}^w}{R_h} \frac{\sin^2 \alpha}{R_h / R_w} \\ R_w \Delta \tau = \frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{R_h / R_w} \Delta \alpha + \nu \frac{R_c u_{z,z} + R_w u_{t,t}^w}{R_h} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{R_h / R_w} \end{cases} \quad (4.10)$$

On remarque que les deux premières équations permettent d'exprimer l'allongement du fil $u_{t,t}^w$ et la variation d'angle $\Delta \alpha$ en fonction des déformations du câble $u_{z,z}$ et $\theta_{z,z}$. Il s'ensuit que les variations de courbure et de torsion s'expriment également en fonction de ces déformations.

Le comportement mécanique local de chaque fil est donné par :

$$\begin{cases} M_t^i = (GJ)_w \Delta \tau \\ M_b^i = (EI)_w \Delta k^i \\ F_t^i = (EA)_w u_{t,t}^w \\ F_b^i = M_t^i \frac{\sin^2 \alpha}{R_h} - M_b^i \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{R_h} \end{cases} \quad (4.11)$$

où F_b^i , F_t^i , M_b^i et M_t^i représentent respectivement l'effort tranchant, la force de traction, le moment de flexion et le moment de torsion dans le $i^{\text{ème}}$ fil (cf. figure 4.3). On note ici que l'effort tranchant, F_b^i est obtenu à partir d'une équation d'équilibre de Kirchhoff-Love, cf. équation (A. 4) en annexe A, comme cela est classique dans les théories où les effets du cisaillement transverse ne sont pas pris en compte. On remarque aussi qu'en chargement axial il n'y a pas de moment de flexion ni d'effort tranchant selon la direction n .

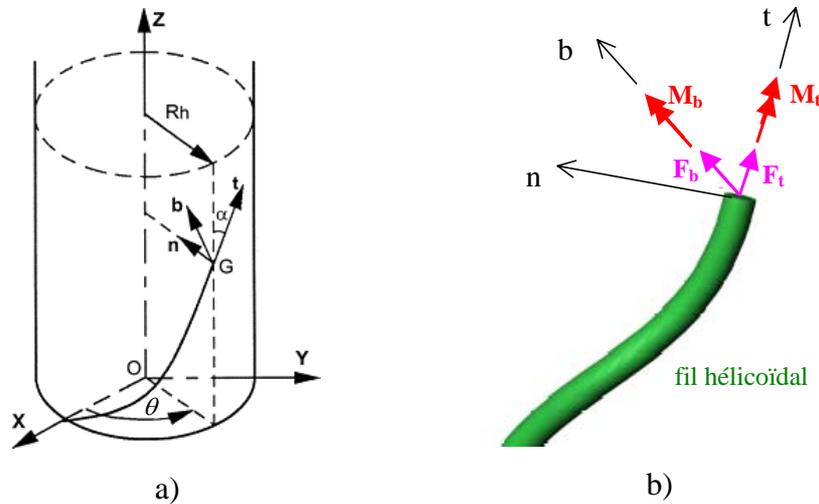


Figure 4.3 : a) ligne moyenne d'un fil hélicoïdal et b) forces et moments sur une section.

Après projection sur l'axe du câble, et sommation sur tous les fils, et en ajoutant les termes relatifs à l'âme on obtient :

$$\begin{cases} F_z = (EA)_c u_{z,z} + 6 \left(F_t^i \cos \alpha + F_b^i \sin \alpha \right) \\ M_z = (GJ)_c \theta_{z,z} + 6 \left(M_t^i \cos \alpha + M_b^i \sin \alpha + R_h F_t^i \sin \alpha + R_h F_b^i \cos \alpha \right) \end{cases} \quad (4.12)$$

En tenant compte de (4.10), et (4.11), on peut obtenir une expression analytique de la raideur du câble. Les composants de la matrice pour le modèle de Costello sont les suivantes :

$$\begin{cases} k_{zz} = (EA)_c + 6 [C_1 (EA)_w \cos \alpha + C_7 \sin \alpha] \\ k_{z\theta} = 6 [C_2 (EA)_w \cos \alpha + C_8 \sin \alpha] \\ k_{\theta z} = 6 [C_5 (GJ)_w \cos \alpha + C_3 (EI)_w \sin \alpha + R_h C_1 (EA)_w \sin \alpha - C_7 R_h \cos \alpha] \\ k_{\theta\theta} = (GJ)_c + 6 [C_6 (GJ)_w \cos \alpha + C_4 (EI)_w \sin \alpha + R_h C_2 (EA)_w \sin \alpha - C_8 R_h \cos \alpha] \end{cases} \quad (4.13)$$

les coefficients C_i sont en fonction de paramètres géométriques du câble sont exprimés par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{R_h - \nu R_c \tan^2 \alpha}{R_h \tan^2 \alpha + \nu R_w \tan^2 \alpha + R_h} \\ C_2 = \frac{R_h^2 \tan \alpha}{R_h \tan^2 \alpha + \nu R_w \tan^2 \alpha + R_h} \\ C_3 = \frac{-2 \cos^2 \alpha}{R_h} (1 - C_1) + \frac{\nu R_c \sin^2 \alpha}{R_h^2} + \frac{\nu R_w \sin^2 \alpha}{R_h^2} C_1 \\ C_4 = \frac{2 \cos^2 \alpha}{R_h} C_2 + \frac{\nu R_w \sin^2 \alpha}{R_h^2} C_2 \\ C_5 = \frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{R_h \tan \alpha} (1 - C_1) + \frac{\nu R_c \sin \alpha \cos \alpha}{R_h^2} + \frac{\nu R_w \sin \alpha \cos \alpha}{R_h^2} C_1 \\ C_6 = \frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{R_h \tan \alpha} C_2 + \frac{\nu R_w \sin \alpha \cos \alpha}{R_h^2} C_2 \\ C_7 = \frac{(GJ)_w \sin^2 \alpha}{R_h} C_5 - \frac{(EI)_w \sin \alpha \cos \alpha}{R_h} C_3 \\ C_8 = \frac{(GJ)_w \sin^2 \alpha}{R_h} C_6 - \frac{(EI)_w \sin \alpha \cos \alpha}{R_h} C_4 \end{array} \right. \quad (4.14)$$

En 1997, Costello publie un ouvrage qui est en fait une synthèse de tous les travaux de Costello et al. répertoriés précédemment [COS 1997].

Il faut noter que dans tous les travaux de Costello et al., aucune expression analytique n'est donnée pour la matrice raideur du câble, et que la matrice raideur n'est pas symétrique. Le fait d'avoir obtenu ici des expressions analytiques explicites est donc, à notre connaissance, nouveau.

4.2.5 Modèle de Kumar et Cochran

Kumar et Cochran [KUM 1987] et Kumar et Boesis [KUM 2001] proposent une version linéaire (les équations de Love sont linearisées en $\Delta\alpha$) des équations de Costello et Philips [COS 1976]. Ils arrivent à une expression analytique de la matrice raideur, avec prise en compte des contractions radiales, pour étudier les câbles multicouches en chargement axial. Pour un câble monocouche, et avec nos notations, la loi de comportement globale se réduit à la forme suivante (pour les câbles multicouches cf. [KUM 1987] et [KUM 2001]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{\varepsilon\varepsilon} = (AE)_c + m(AE)_w \cos\alpha (1 - (1+\nu)p \sin^2\alpha) \\ k_{\varepsilon\theta} = m(AE)_w R_h p \cos^2\alpha \sin\alpha \\ k_{\theta\varepsilon} = m \left((AE)_w R_h \sin\alpha - \frac{(EI)_w}{R_h} \sin\alpha (1 - \nu_f \cos^4\alpha + (1+\nu)(q - 1 + \nu_f \cos^4\alpha)) \right) \\ k_{\theta\theta} = (GJ)_c + m((EI)_w q \cos\alpha) \end{array} \right. \quad (4.15)$$

où les paramètres p et q sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} p = (1 - \nu_1) \left[1 - (1/4) \left(\frac{R_w}{R_h} \right)^2 (1 + \nu_f \cos 2\alpha) \sin^2\alpha \right] \\ q = (1 - \nu_1) \left[4 \left(\frac{R_h}{R_w} \right)^2 \sin^2\alpha + 1 - \sin^4\alpha - \nu_f \cos^4\alpha \cos 2\alpha \right] \end{array} \right. \quad (4.16)$$

dans cette relation ν_1 et ν_f sont obtenus par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_1 = \nu (R_w / R_h) \sin^2\alpha \\ \nu_f = \nu / (1 + \nu) \end{array} \right. \quad (4.17)$$

on note que dans ce modèle la matrice raideur n'est pas symétrique.

4.2.6 Modèle de Ramsey

En 1988, Ramsey [RAM 1988] reprend l'approche de Costello en notant qu'il est nécessaire de faire une analyse plus rigoureuse pour le moment de flexion et le moment de torsion internes dans les fils. Par rapport à la théorie de Costello, les expressions du moment de flexion et du moment de torsion comprennent un terme supplémentaire faisant intervenir la déformation axiale du fil, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_t^i = (GJ)_w (\Delta\tau + \tau u_{t,t}^w) \\ M_b^i = (EI)_w (\Delta k' + k' u_{t,t}^w) \end{array} \right. \quad (4.18)$$

où τ et k' sont les paramètres dans l'état non déformé, cf. (4.9).

Pour évaluer leur influence, les équations (4.18)_{1,2} ont été utilisées respectivement au lieu des équations (4.11)_{1,2} dans le modèle de Costello. On montrera que les modifications introduites ne sont pas majeures, mais permettent entre autres de restaurer la symétrie de la matrice raideur d'un câble en chargement axial.

4.2.7 Modèle de Satikh

En 1996, Sathik et al. [SAT 1996] font remarquer que pour le modèle de Costello, la matrice raideur du câble n'est pas symétrique. Ils expliquent que ceci peut être corrigé en considérant que le moment de torsion d'un fil ne doit pas seulement s'exprimer en fonction de la rotation du fil mais aussi en fonction de sa déformation axiale (cette remarque avait déjà été faite dans [RAM 1988], cf. eq. (4.18)). Ainsi, il reprend les hypothèses de Ramsey si ce n'est que le changement de géométrie (contraction radiale) dû à l'effet Poisson n'est pas pris en compte.

Il en résulte un modèle symétrique analytique. En particulier, pour des câbles monocouches (1+6), les composantes de la matrice raideur sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{\varepsilon\varepsilon} = (AE)_c + m \left((AE)_w \cos^3 \alpha + \left[(GJ)_w \sin^2 \alpha + (EI)_w \cos^2 \alpha \right] \frac{\sin^4 \alpha \cos \alpha}{R_h^2} \right) \\ k_{\varepsilon\theta} = k_{\theta\varepsilon} = m \left(\begin{array}{l} (AE)_w R_h \cos^2 \alpha \sin \alpha \\ + \left[(GJ)_w \cos^2 \alpha - (EI)_w (1 + \cos^2 \alpha) \right] \frac{\sin^3 \alpha \cos^2 \alpha}{R_h} \end{array} \right) \\ k_{\theta\theta} = (GJ)_c + m \left(\begin{array}{l} (AE)_w R_h^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \\ + (GJ)_w \cos^7 \alpha + (EI)_w \sin^2 \alpha \cos \alpha (1 + \cos^2 \alpha)^2 \end{array} \right) \end{array} \right. \quad (4.19)$$

4.2.8 Modèle de Labrosse

En 1998 Labrosse [LAB 1998] a présenté une nouvelle approche pour analyser un câble métallique de type 1+6. La nouveauté vient ici de l'élaboration d'un modèle cinématique pour toute la section du câble : âme et fils.

Dans ce modèle, l'âme et chacun des fils hélicoïdaux sont, comme dans le modèle de Costello décrits par des poutres de type Kirchhoff-Love. Par rapport au modèle de Costello, le changement de géométrie dû à l'effet Poisson n'est pas pris en compte. En revanche, le contact (fils et âmes supposés parfaitement collés dans le modèle de Costello) est modélisé plus finement. Dans une section donnée, les mouvements relatifs au point de contact entre l'âme et les fils sont étudiés. Géométriquement, le contact entre l'âme et des fils se situe sur des hélices à la périphérie de l'âme du câble, voir figure 4.4. Sa modélisation permet d'établir, sous certaines hypothèses (justifiées notamment à partir de résultats expérimentaux), des relations entre la cinématique des fils et de l'âme. Il en résulte la réduction du nombre de degrés de liberté pour décrire le mouvement de la section du câble. Ces aspects seront détaillés en section 4.4.

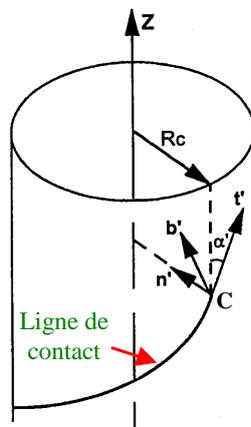


Figure 4.4 : la ligne de contact entre l'âme et un fil hélicoïdal.

Pour obtenir la loi de comportement globale du câble, on exprime ensuite les relations entre les contraintes intégrées et les déformations sur chaque fil et l'âme. Ces relations

font intervenir les caractéristiques globales des fils et de l'âme, et elles sont écrites dans le repère local des poutres. Ensuite les efforts et moments sont projetés dans la base globale du câble. Pour un câble en chargement axial, la loi de comportement globale se réduit à :

$$\begin{cases} k_{\varepsilon\varepsilon} = (AE)_c + 6(AE)_w \cos^3 \alpha \\ k_{\varepsilon\theta} = k_{\theta\varepsilon} = 6(EA)_w R_h \sin \alpha \cos^2 \alpha \\ k_{\theta\theta} = (GJ)_c + 6 \left((EA)_w R_h^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + (GJ)_w \cos^5 \alpha + (EI)_w \sin^2 \alpha \cos \alpha (1 + \cos^2 \alpha) \right) \end{cases} \quad (4.20)$$

Dans ce modèle aussi, la matrice de raideur du câble en chargement axial est symétrique.

4.2.9 Bilan

Dans ce paragraphe les différents modèles analytiques adaptés aux câbles métalliques de construction 1+6 ont été présentés. Il faut noter que certains modèles sont conçus pour des câbles monocouches ou 1+6 (cf. [SAT 1996] et [LAB 1998]) alors que les autres sont développés initialement pour des câbles multicouches et peuvent également s'appliquer à des câbles monocouches (construction 1+6), cf. [HRU 1951], [HRU 1952], [HRU 1953], [MCC 1982], [MAC 1973], [KNA 1979], [KUM 87], [COS 1997], [RAM 1988]. Ces différents modèles sont répertoriés dans le tableau 4.1 qui est extrait du tableau 2.1 au chapitre 2. **Ils sont tous analytiques.**

Notre but ici est de sélectionner un modèle de câble métallique comme point de départ pour développer un modèle pour les câbles synthétiques. Pour ce faire, une étude du domaine de validité des modèles de câble métallique va être menée.

Tableau 4.1: différents modèles analytiques adaptés aux câbles métalliques 1+6.

Modèle	Comportement des constituants			Comportement global du câble			Effet Poisson	Symétrie de K
	Tr.	To.	Fl.	Tr.	To.	Fl.		
[HRU 1951- 1953]	X	---	---	X	X	---	---	X
[MCC 1982]	X	X	---	X	X	---	---	X
[MAC 1973]	X	X	X	X	X	---	---	---
[KNA 1979]	X	X	X	X	X	---	---	---
[COS 1997]	X	X	X	X	X	X	X	---
[KUM 1987]	X	X	X	X	X	---	X	---
[RAM 1988]	X	X	X	X	X	---	X	---
[SAT 1996]	X	X	X	X	X	---	---	X
[LAB 1998]	X	X	X	X	X	X	---	X

Tr. : Traction

To. : Torsion

Fl. : Flexion

4.3 Etude du domaine de validité des modèles analytiques existants pour les câbles métalliques

Comme nous venons de l'indiquer, de nombreux modèles analytiques existent pour les câbles métalliques de type 1+6. Cependant, les travaux relatifs à l'application de ces modèles à des cas concrets, et à leur évaluation via une confrontation à des résultats expérimentaux, sont rares. Une telle étude est menée par Jolicoeur et Cardou [JOL 1991]. Elle concerne un câble avec un rayon d'âme et de fil fixés, et 3 valeurs d'angle d'enroulement (9.2, 12.9 et 17°). Les auteurs ont comparé différents modèles analytiques à l'aide d'exemples numériques et de résultats expérimentaux présentés par Utting et Jones [UTT 1987a], [UTT 1987b]. Ces résultats sont trop partiels pour en tirer une conclusion générale. Nous nous proposons donc dans cette section d'étendre ces travaux, en vue de déterminer le domaine de validité des différents modèles.

Pour ce faire, on utilisera comme référence un modèle EF 3D (éléments finis tridimensionnels), à partir duquel plusieurs calculs seront réalisés pour obtenir le comportement global du câble en chargement axial.

Après avoir mis au point le modèle EF (éléments finis) du câble sur une configuration donnée, on confrontera les modèles analytiques au modèle numérique en faisant varier les paramètres de conception du câble.

4.3.1 Mise au point du Modèle EF 3D

Dans ce paragraphe, l'objectif est de mettre au point le modèle EF du câble. Il s'agit donc de contrôler la fiabilité de ce modèle, et donc notamment sa convergence, au sens numérique du terme. On étudie un câble de configuration donnée, et on présente pour commencer ses caractéristiques géométriques et matérielles. Puis sont exposés les conditions aux limites et le chargement (à partir desquels le comportement axial du câble pourra être caractérisé), le maillage, et la prise en compte du contact.

4.3.1.1 Caractéristiques géométrique et matériaux du câble

Les caractéristiques de la géométrie et du matériau du câble (acier) sont reprises des travaux de Labrosse [LAB 1998]:

Géométrie :	Rayon de l'âme : $R_c = 2.675 \text{ mm}$
	Rayon du toron : $R_w = 2.590 \text{ mm}$
	Pas : $P = 230.13 \text{ mm}$, Angle de l'hélice : $\alpha = 8.18^\circ$
Matériau (acier):	Coefficient de Poisson : $\nu = 0.3$, Module d'Young $E = 200 \text{ GPa}$

4.3.1.2 Conditions aux limites et chargement

Pour tous les cas de chargement, une extrémité ($Z = 0$) est encastree, le chargement (forces et moments) et les conditions aux limites cinématiques complémentaires étant imposés à l'autre extrémité ($Z = L$). Pour simplifier l'introduction du chargement, la section ($Z = L$) est traitée comme un corps rigide, et le chargement est appliqué au milieu

de la section. Pour calculer la matrice raideur du câble, 4 chargements et conditions aux limites différents sont utilisés. Ceux-ci sont détaillés dans la partie 4.3.2.1.

4.3.1.3 Maillage et prise en compte du contact

Dans cette étude, plusieurs maillages sont réalisés. Ces maillages diffèrent par la géométrie des sections extrêmes du câble et par le type d'élément utilisé.

En ce qui concerne les sections extrêmes, elles sont soit planes (cf. Figure B1 en annexe B) soit « obliques » lorsque la section de chaque constituant est prise orthogonale à sa ligne moyenne comme montré en figure 4.5 suivante.

Pour tous les maillages, des éléments quadratiques sont utilisés. Cependant, il y a des modèles avec à la fois des éléments à 15 et 20 nœuds, et d'autres modèles ne comportant que des éléments à 20 nœuds. Le tableau B.1 en annexe B récapitule les caractéristiques des différents maillages étudiés.

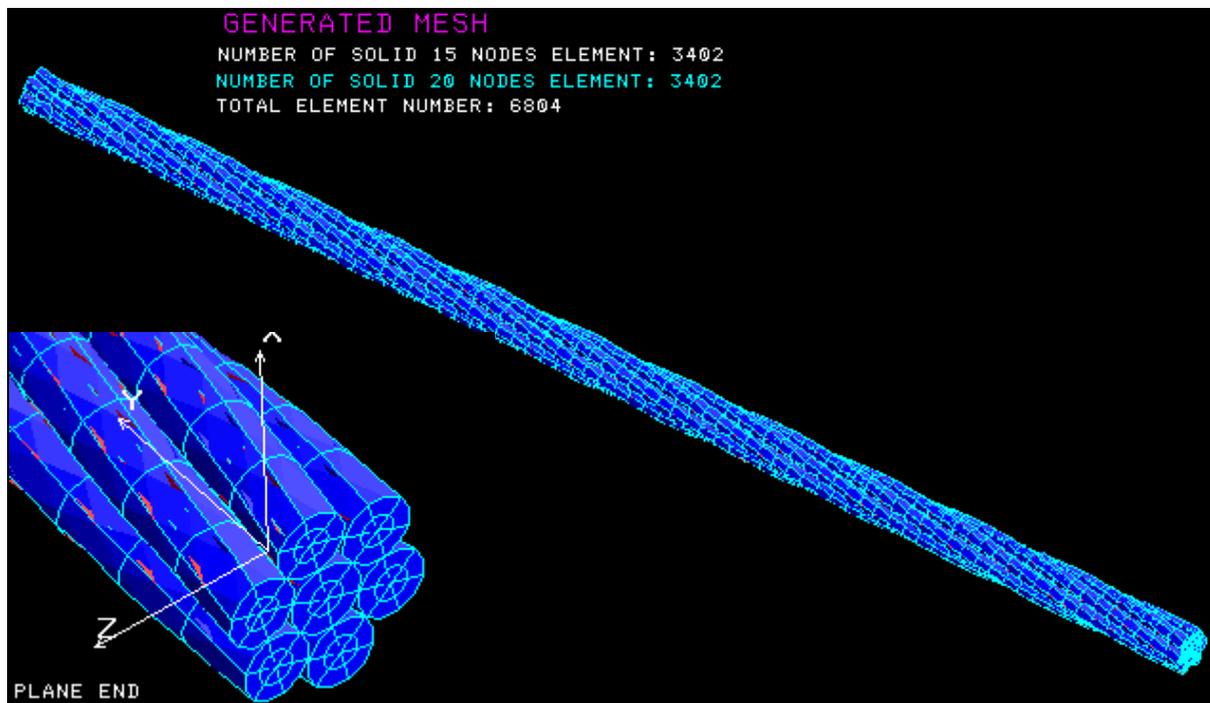


Figure 4.5: Maillage réalisé avec des éléments solides à 15 et 20 nœuds. Les sections terminales du câble sont obliques.

En ce qui concerne le contact, les calculs effectués considèrent l'hypothèse d'un contact collant. Cela signifie que le maillage est réalisé avec un nœud commun à l'âme et au fil à leur point de contact. Une étude complémentaire, à laquelle nous ferons référence en section 4.3.2.2, montre que les hypothèses sur le contact, le type d'élément et la représentation géométrique des sections extrêmes ont une influence négligeable sur le comportement global du câble. Pour plus de détails, voir annexe B.

4.3.2 Analyse des résultats de modèle EF 3D

On présente ici pour commencer les différents calculs réalisés pour obtenir la matrice raideur du câble. On discute alors les résultats des calculs, et de leur sensibilité à différents paramètres de modélisation.

4.3.2.1 Calcul de la Matrice Raideur du Câble

Pour déterminer les composantes de la matrice raideur, il est rappelé qu'une extrémité ($Z = 0$) est encastree (et donc $u_z = \theta_z = 0$), le chargement (forces et moments) étant imposé à l'autre extrémité ($Z = L$).

On rappelle ici que la loi de comportement global du câble en chargement axial est donnée par l'équation (4.1) :

$$\begin{Bmatrix} F_z \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\varepsilon\varepsilon} & k_{\varepsilon\theta} \\ k_{\theta\varepsilon} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{z,z} \\ \theta_{z,z} \end{Bmatrix}$$

Les déformations $u_{z,z}$ et $\theta_{z,z}$ sont calculées d'après la différence des déplacements entre la section au milieu du câble ($Z = L/2$) et celle à ($Z = 0$).

Pour déterminer la raideur axiale $k_{\varepsilon\varepsilon}$, une force axiale F_z est imposée sur la section extrême ($Z = L$) et cette section est bloquée en rotation axiale ($\theta_z = 0$), cf. figure 4.6-a.

Pour déterminer le terme de torsion $k_{\theta\theta}$, un moment de torsion M_z est imposé sur la section extrême ($Z = L$) et cette section est bloquée en translation axiale ($u_z = 0$), cf. figure 4.6-b.

Ensuite, une force axiale est appliquée sur la section extrême ($Z = L$) dont tous les autres degrés de liberté (translations et rotations) sont libres, cf. figure 4.6-c. Après avoir déterminé $u_{z,z}$ et $\theta_{z,z}$, $k_{\varepsilon\theta}$ est calculé à l'aide de l'équation (1) et du coefficient $k_{\varepsilon\varepsilon}$.

Pour déterminer la dernière composante de la matrice raideur ($k_{\theta\varepsilon}$), un moment de torsion est appliqué sur la section extrême ($Z = L$) dont tous les autres degrés de liberté (translations et rotations) sont libres, cf. figure 4.6-d. Après avoir déterminé $u_{z,z}$ et $\theta_{z,z}$, $k_{\theta\varepsilon}$ est calculé à l'aide de l'équation (1) et du coefficient $k_{\theta\theta}$.

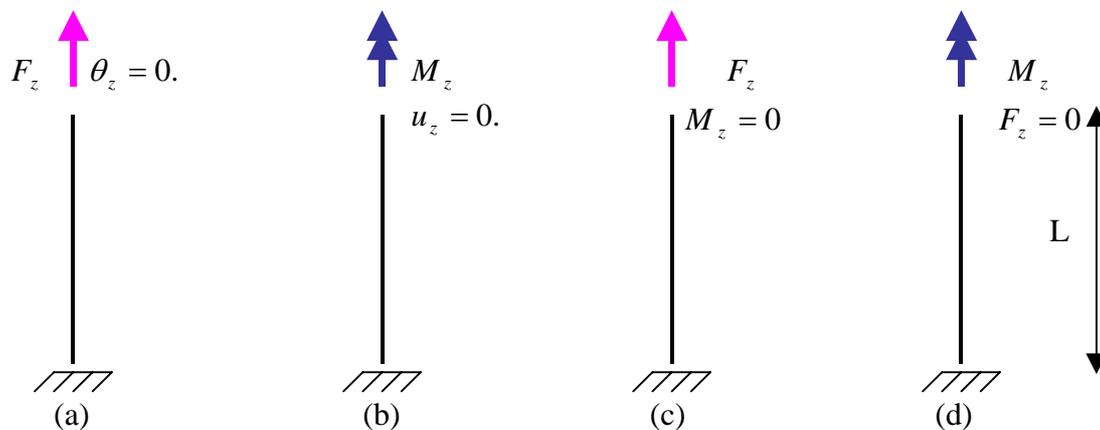


Figure 4.6: les différents chargements pour calculer les composants de la matrice raideur.

4.3.2.2 Analyse de sensibilité

A partir des composantes de la matrice raideur calculées par EF, l'influence des paramètres suivants est étudiée :

- représentation géométrique plane ou oblique des sections extrêmes
- maillage
- logiciel (COSMOS / SAMCEF)
- conditions du contact

Nous résumons ici les principaux résultats obtenus, qui sont exposés en détails en annexe B.

Une analyse est menée avec différentes représentations des section extrêmes (plane ou oblique) cf. figure 4.5. Les résultats montrent que les différentes représentations des sections extrêmes ont une influence négligeable sur le comportement global du câble cf. annexe B (l'écart maximum est inférieur à 0.11%).

On étudie aussi l'influence du type d'élément choisi, et on compare les résultats issus de différents maillages (cf. annexe B, tableau B.1). Il apparaît que le type d'élément a une influence parfaitement négligeable sur les résultats.

Ensuite l'analyse EF est effectuée à l'aide de deux logiciels différents (COSMOS et SAMCEF). On observe que l'écart entre les résultats de SAMCEF et COSMOS est très faible (moins de 0.80%).

L'influence des conditions de contact sur la réponse globale du câble est également étudiée. En effet, pour s'affranchir de toute hypothèse sur le contact, il faudrait effectuer un calcul en considérant un contact avec frottement. Cependant, un tel calcul est non-linéaire, c'est pourquoi on va pour simplifier envisager deux cas extrêmes : à savoir le cas d'un contact glissant et le cas d'un contact collant. De ce fait, on peut affirmer que dans le premier cas on minore la raideur du câble, alors que le calcul avec contact collant la majore. Si on compare les résultats de ces deux calculs (faits avec Samcef, cf. [MES 2003]), on observe que l'écart maximal est de 1.3% (pour le terme de torsion). Il s'avère par conséquent que les conditions du contact ont très peu d'influence sur les résultats en raideur.

4.3.2.3 Bilan

On a constaté que différents paramètres de modélisation (description de la géométrie, type d'élément, logiciel utilisé et hypothèses de contact) ont une influence négligeable sur le comportement global du câble en chargement axial. On utilisera à l'avenir ceux du premier maillage (sections extrêmes obliques, éléments solides à 15 et 20 nœuds, contact collant et logiciel COSMOS, cf. figure 4.5) pour déterminer numériquement la matrice raideur du câble, qui servira de référence pour évaluer les modèles analytiques.

Signalons pour conclure que les résultats du modèle EF restituent avec une très bonne précision la symétrie de la matrice raideur, puisque pour les différents calculs réalisés, l'écart entre $k_{\varepsilon 0}$ et $k_{\theta \varepsilon}$ ne dépasse pas 0,25%.

4.3.3 Domaine de validité des modèles analytiques existants

Comme annoncé au début de cette section 4.3, l'objectif est de déterminer le domaine de validité des modèles analytiques de comportement global d'un câble, pour une construction de type 1+6, avec un matériau métallique. Ce domaine va être établi en fonction des paramètres de construction géométrique du câble, le comportement de référence du câble étant obtenu à partir du modèle EF qui vient d'être présenté.

Au préalable, on va étudier la sensibilité de l'écart modèle analytique / modèle EF aux différents paramètres de construction du câble, et pour ce faire, on va étudier le comportement global du câble sous forme adimensionnelle.

4.3.3.1 Matrice raideur adimensionnelle

Le comportement global du câble, initialement exprimé comme sous la forme de l'équation 4.1, est considéré maintenant sous la forme adimensionnée suivante (on procède comme en section 3.3.3, si ce n'est que le rayon utilisé est R_h , et non pas le rayon extérieur, cf. [MES 2003]) :

$$\begin{Bmatrix} f_z \\ m_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{\varepsilon\varepsilon} & \bar{k}_{\varepsilon\theta} \\ \bar{k}_{\theta\varepsilon} & \bar{k}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{z,z} \\ R_h \cdot \theta_{z,z} \end{Bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

où le vecteur de force adimensionnée est exprimé par :

$$\begin{cases} f_z = \frac{F_z}{\pi \cdot E \cdot R_h^2} \\ m_z = \frac{M_z}{\pi \cdot E \cdot R_h^3} \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

et la matrice raideur adimensionnée par :

$$\begin{cases} \bar{k}_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{k_{\varepsilon\varepsilon}}{\pi \cdot E \cdot R_h^2} & \bar{k}_{\varepsilon\theta} = \frac{k_{\varepsilon\theta}}{\pi \cdot E \cdot R_h^3} \\ \bar{k}_{\theta\varepsilon} = \frac{k_{\theta\varepsilon}}{\pi \cdot E \cdot R_h^3} & \bar{k}_{\theta\theta} = \frac{k_{\theta\theta}}{\pi \cdot E \cdot R_h^4} \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Dans le cas du modèle de Labrosse [LAB 1998], ces termes s'écrivent :

$$\begin{cases} \bar{k}_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{1 + 6k_r^2 \cos^3 \alpha}{(1 + k_r)^2} \\ \bar{k}_{\theta\varepsilon} = \bar{k}_{\varepsilon\theta} = \frac{6k_r^2}{(1 + k_r)^2} \cos^2 \alpha \sin \alpha \\ \bar{k}_{\theta\theta} = \frac{1}{4 \cdot (1 + \nu)(1 + k_r)^4} \cdot (1 + 6k_r^4 \cos^5 \alpha) + \\ \frac{6k_r^2}{(1 + k_r)^2} \cos \alpha \sin^2 \alpha \cdot \left(1 + \frac{k_r^2}{4 \cdot (1 + k_r)^2} (1 + \cos^2 \alpha) \right) \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

avec $k_r = R_w / R_c$. On note donc que ces coefficients adimensionnés s'expriment en fonction des seules variables géométriques k_r et α .

Il en résulte qu'on va chercher à déterminer le domaine de validité des modèles de câble en fonction de ces deux paramètres.

Au préalable, on mène une étude sur l'évolution des écarts entre le modèle de Labrosse et le modèle EF 3D, en fonction de k_r et α . Cette étude est décrite en détails en annexe C : on constate que pour les valeurs usuelles de k_r , la différence entre les résultats EF et analytiques varie faiblement avec k_r . On peut donc supposer que la qualité des modèles analytiques est indépendante de k_r . Par conséquent, on va comparer les différents modèles analytiques avec les résultats EF en faisant varier seulement l'angle d'enroulement des fils α .

4.3.3.2 Comparaison des modèles analytiques / EF 3D

Dans le paragraphe précédent, on a montré, via une analyse adimensionnelle, que la qualité des résultats des modèles analytiques est sensible principalement à la variable géométrique α . Donc pour déterminer le domaine de validité de différents modèles analytiques, on compare les résultats analytiques avec ceux du modèle EF 3D en faisant varier α entre 2.5° et 35° .

Pour ce faire, on choisit pour tous les cas une âme avec une taille suffisamment grande pour éviter que les fils hélicoïdaux se touchent entre eux, si bien que les contacts ont lieu entre l'âme et les fils seulement. Cela veut dire que l'inégalité suivante est strictement respectée.

$$R_w \sqrt{1 + \frac{\tan^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}\right)}{\cos^2 \alpha}} < R_w + R_c. \quad (4.21)$$

cette relation entre R_w , R_c , α et m ($m = 6$ ici) a été établie par Costello [COS 1997].

Dans ce paragraphe, les composantes adimensionnelles de la matrice raideur obtenues par différents modèles analytiques sont comparées avec celles issues du modèle EF 3D COSMOS. On note que la valeur extrême d'inégalité (4.21) a été utilisée pour les résultats présentés par la suite.

Les valeurs numériques correspondantes pour les différents angles d'enroulement entre 2.5 et 35° sont présentées dans l'annexe D.

Dans un premier temps, on commentera les résultats de façon brute, l'objectif étant de dégager les modèles les plus précis et leur domaine de validité. On s'attachera ensuite à analyser les causes de ces résultats.

Raideur axiale

Sur la figure 4.7, est présentée l'évolution de la raideur axiale adimensionnée $\bar{k}_{\varepsilon\varepsilon}$ en fonction de l'angle d'enroulement, pour les différents modèles analytiques et le modèle EF.

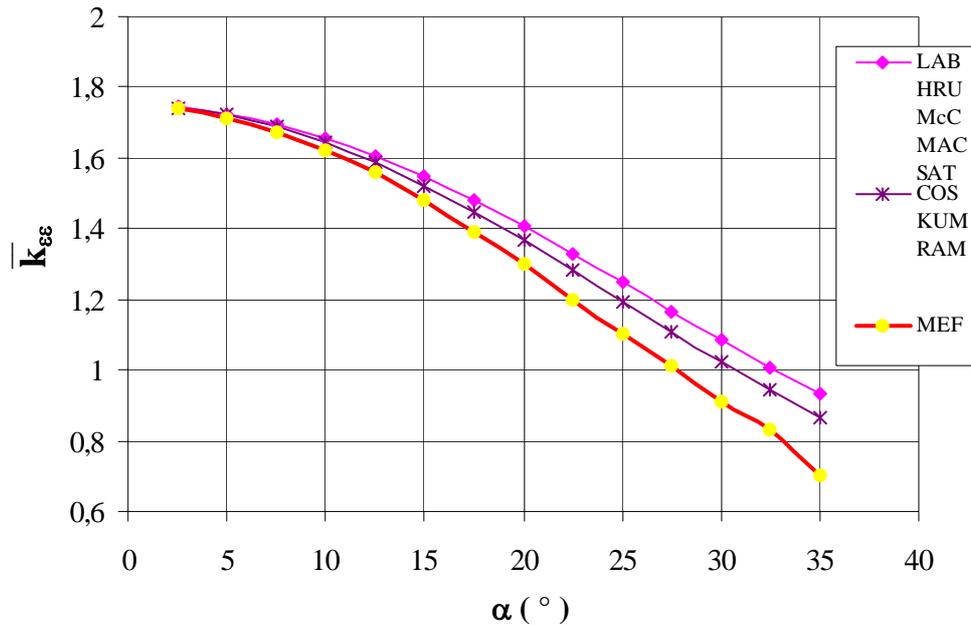


Figure 4.7 : raideur axiale adimensionnée en fonction de l'angle d'enroulement α .

Ces courbes montrent que tous les modèles analytiques étudiés se ramènent à seulement deux séries de résultats distincts : il y a d'une part coïncidence des résultats pour les modèles [HRU 1953], [MAC 1973], [MCC 1982], [SAT 1996] et [LAB 1998] (les écarts sont parfaitement négligeables, cf. annexe D), et une autre série de résultats pour [KUM 1987], [RAM 1988] et [COS 1997]. On remarque que pour le deuxième groupe de modèles, le changement géométrie dû à l'effet de Poisson est pris en compte. On intègre donc sur une section de câble de taille plus petite, d'où une raideur plus faible que dans le premier groupe de modèles. Cela dit, la raideur adimensionnelle reste un peu plus élevée que celle du modèle EF.

D'autre part, pour les angles d'enroulements faibles ($\alpha \leq 15^\circ$), les résultats de tous les modèles sont très proches (moins de 1.7% d'écart), et l'accord avec le modèle EF satisfaisant (moins de 5% d'écart).

Raideur de torsion

Sur la figure 4.8, est présentée l'évolution de la raideur de torsion adimensionnée $\bar{k}_{\theta\theta}$ en fonction de l'angle d'enroulement, pour les différents modèles analytiques et le modèle EF. On note que le modèle de Hruska [HRU 1953] donne des résultats sensiblement inférieurs aux autres, car la raideur de torsion des fils y est négligée. Tous les autres modèles analytiques fournissent des résultats très proches, l'écart étant d'autant plus faible que l'angle d'enroulement est petit. Par ailleurs, pour $\alpha \leq 20^\circ$, l'accord entre les modèles analytiques (Hruska excepté) et le modèle EF est satisfaisant. Notons enfin que la modification simple du modèle de Hruska faite par McConnell et Zemek [MCC 1982], suffit pour obtenir des résultats d'une qualité comparable à celles de modèles beaucoup plus complexes.

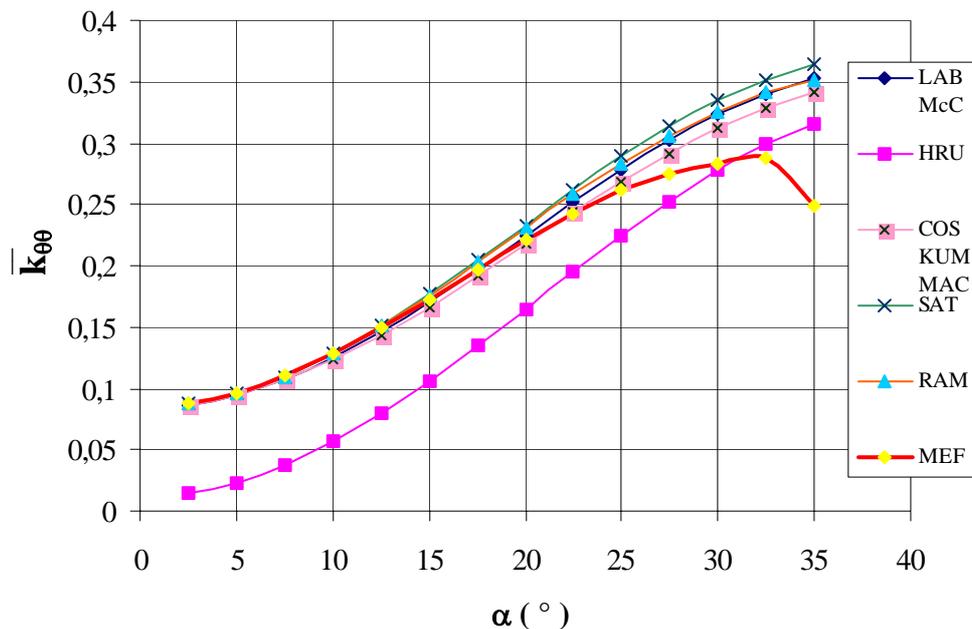


Figure 4.8 : raideur de torsion adimensionnée $k_{\theta\theta}$ en fonction de l'angle d'enroulement α .

Termes de couplages

Les figures 4.9 a) et b) présentent respectivement l'évolution des termes de couplages adimensionnés, $\bar{k}_{\varepsilon\theta}$ et $\bar{k}_{\theta\varepsilon}$ (uniquement pour les modèles non-symétriques), en fonction de l'angle d'enroulement.

Pour $\bar{k}_{\varepsilon\theta}$, on peut faire la même analyse qualitative que dans le cas de la raideur axiale. Les résultats des modèles analytiques se ramènent à deux séries, dont l'écart augmente faiblement avec l'angle d'enroulement. Pour un angle faible : $\alpha \leq 15^\circ$, l'accord avec le modèle EF est bon voire très bon. Au delà de cette valeur, un écart significatif apparaît.

En ce qui concerne $\bar{k}_{\theta\varepsilon}$, cf. figure 4.9 b), les écarts entre les résultats des modèles analytiques sont plus importants. D'autre part, lorsque l'angle d'enroulement augmente, il apparaît que ce sont les modèles qui prennent en compte le changement de géométrie dû à l'effet Poisson qui donnent les résultats les plus proches du modèle EF. Cela peut être expliqué par le fait que le moment de torsion M_z est sensible à la valeur du rayon de l'hélice.

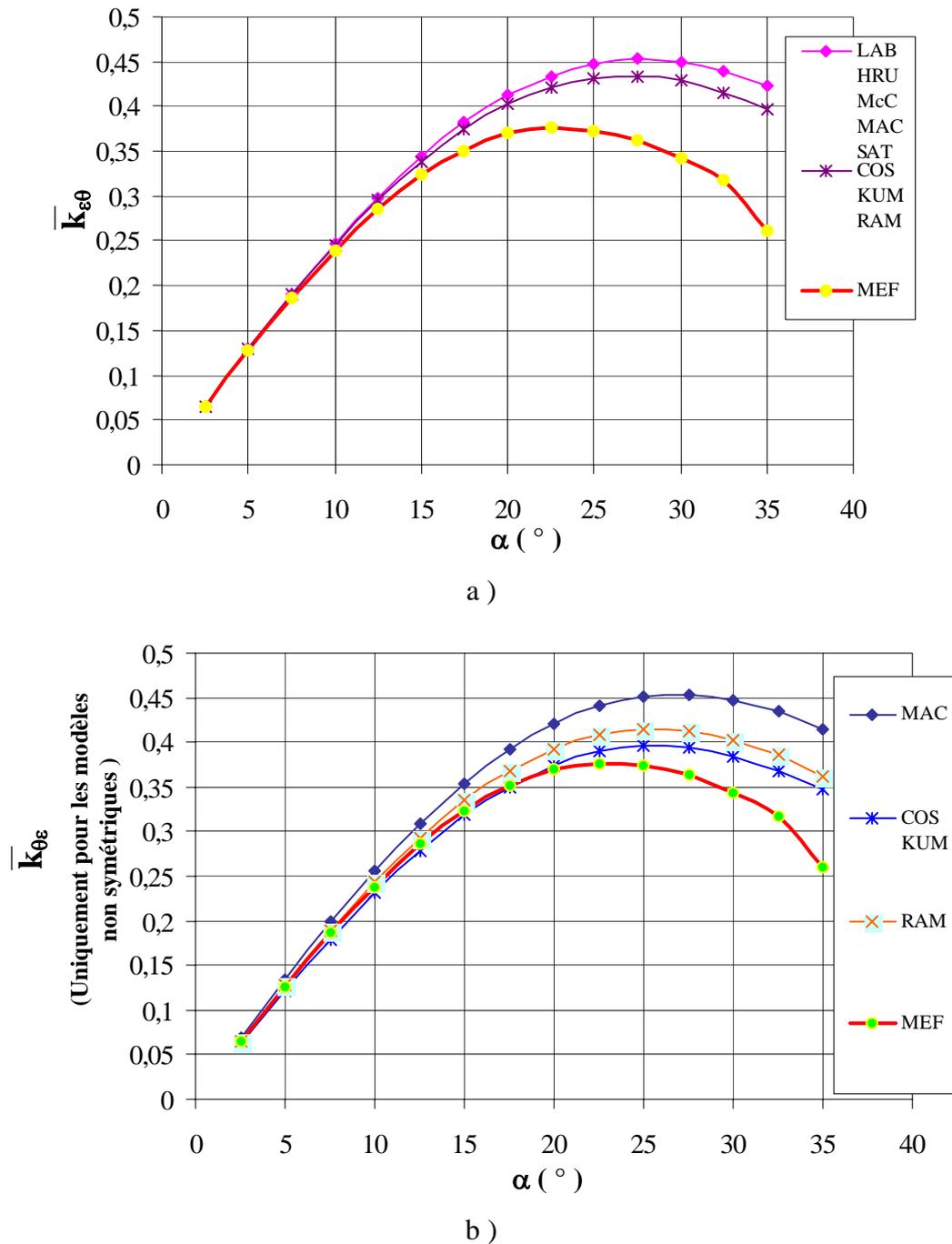


Figure 4.9 : termes de couplages adimensionnés en fonction de α , a) $k_{\epsilon\theta}$ et b) $k_{\theta\epsilon}$.

4.3.3.3 Bilan

D'une manière générale, on constate qu'à l'exception du modèle de Hruska (qui sous-estime clairement la raideur en torsion), pour un angle d'enroulement $\alpha \leq 15^\circ$, les résultats obtenus à partir des modèles analytiques sont très proches, et en bon accord avec le modèle EF.

Au delà de $\alpha \leq 15^\circ$, les écarts modèle analytique / modèle EF augmentent assez rapidement (sauf dans le cas de la raideur axiale). Il est probable que dans ce domaine la

modélisation poutre basée sur la théorie de Kirchhoff - Love soit trop approximative étant donné la forte courbure des fils hélicoïdaux.

Du point de vue de la précision, il apparaît que ce sont les modèles analytiques les plus riches, à savoir ceux qui prennent en compte le changement de géométrie dû à l'effet Poisson ([RAM 1990], [KUM 1987] et [COS 1997]) qui fournissent les résultats les plus proches de ceux du modèle EF 3D. Cependant, ces modèles présentent l'inconvénient d'avoir une matrice raideur non symétrique. Parmi les modèles conduisant à une matrice symétrique, c'est le modèle de Labrosse [LAB 1998] qui s'avère le plus précis. Ce modèle offre en outre l'intérêt d'être fondé sur une analyse fine des mouvements relatifs âme / fils.

D'autre part, à notre connaissance, en pratique, pour les câbles synthétiques, l'angle d'enroulement du câble reste inférieur à 15° , domaine dans lequel la précision du modèle de Labrosse est très satisfaisante. C'est donc ce modèle qui sera utilisé comme point de départ pour le développement d'un modèle de câble synthétique.

4.3.4 Conclusion

L'objectif de ce paragraphe était d'étudier le domaine de validité des modèles analytiques. Pour ce faire, les résultats de ces modèles ont été comparés à ceux d'un calcul par EF 3D, dont la fiabilité a été démontrée pour un câble métallique.

Ensuite, la comparaison entre les résultats des modèles analytiques et numérique est réalisée sur des raideurs adimensionnées. Dans un premier temps, il apparaît que les raideurs adimensionnées peuvent s'exprimer en fonction des seules variables géométriques $k_r = R_w / R_c$ et α . En fait, en pratique, k_r est proche de 1 ($k_r \geq 0.8$) et on a montré que, dans cet intervalle, la qualité des modèles analytiques est indépendante de k_r . Donc seule l'étude en fonction de l'angle α a été faite.

Cette étude a montré que le modèle analytique qui offrait à la fois une bonne précision et une certaine rigueur dans la formulation (matrice raideur symétrique) était celui de Labrosse. C'est donc ce modèle qui sera repris et transposé à l'étude des câbles synthétiques.

4.4 Extension de modèle Labrosse pour les câbles synthétiques 1+6

On considère toujours une structure de type 1+6, avec une âme et 6 torons, en chargement axial, mais il s'agit maintenant d'un câble synthétique.

Le modèle de Labrosse est repris en détails, en s'inspirant très largement de la thèse de l'auteur [LAB 1998]. L'objectif est ici de modifier ce modèle pour l'adapter à l'étude des câbles synthétiques. Il sera d'une part simplifié car conçu à l'origine pour un chargement quelconque (traction, torsion et flexion), et d'autre part étendu pour permettre la prise en compte d'un comportement plus complexe au niveau de l'âme et des fils (supposés homogènes à l'échelle du câble).

Dans un premier temps, on détermine le champ de déformation dans une section donnée de chaque fil et de l'âme. On tiendra compte ensuite de l'anisotropie (induite par la construction) des constituants synthétiques (fils et âme), en considérant dans leur comportement un couplage entre la traction et la torsion.

4.4.1 Géométrie

On considère un câble 1+6 présenté figure 4.1, et on suppose que l'âme aura une taille suffisamment grande pour éviter de toucher les fils hélicoïdaux entre eux, si bien que les contacts ont lieu uniquement entre l'âme et les fils. Cela veut dire que l'inégalité (4.21) est strictement respectée.

Un repère global $R_0(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ étant fixé à l'âme du câble (voir figure 4.3), la position du point courant G^i , centre de la section S^i du fil hélicoïdal i est déterminée par les deux paramètres l et θ_i . L'abscisse curviligne l est mesurée le long de l'hélice de rayon R_h , à partir du plan d'origine, et θ_i est l'angle à l'origine caractérisant le fil i , tel que

$$\theta_i = \frac{2\pi}{m}(i-1), \quad \text{avec } i = 1, \dots, m \quad (4.22)$$

on rappelle que m est le nombre de fils et l'indice $m+1$ correspond à l'âme.

Ainsi, les coordonnées de G^i dans R_0 sont

$$\begin{cases} x = R_h \cos\left(\frac{l \sin \alpha}{R_h} + \theta_i\right) \\ y = R_h \sin\left(\frac{l \sin \alpha}{R_h} + \theta_i\right) \\ z = l \cos \alpha \end{cases} \quad (4.23)$$

par la suite, on pose $\theta = \frac{l \sin \alpha}{R_h}$ afin d'alléger les notations. En G^i , le repère local est

défini par les vecteurs unitaires tangent \vec{t}^i , normal \vec{n}^i et binormal \vec{b}^i à l'hélice, cf. figure 4.3.

Dans le repère global R_0 , les composantes de ces vecteurs sont exprimées par :

$$\left\{ \vec{t}^i \right\} = \begin{Bmatrix} -\sin \alpha \sin(\theta + \theta_i) \\ \sin \alpha \cos(\theta + \theta_i) \\ \cos \alpha \end{Bmatrix}, \quad \left\{ \vec{n}^i \right\} = \begin{Bmatrix} -\cos(\theta + \theta_i) \\ -\sin(\theta + \theta_i) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \left\{ \vec{b}^i \right\} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \sin(\theta + \theta_i) \\ -\cos \alpha \cos(\theta + \theta_i) \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

4.4.2 Champ de déplacement

Pour définir le champ de déplacement, tout d'abord il faut noter qu'on restera dans le cadre quasi-statique d'un câble soumis à de petites perturbations. En effet, on reprend les hypothèses de Labrosse [LAB 1998] : le changement de géométrie dû à l'effet Poisson n'est pas pris en compte, et on considère donc que la ligne moyenne d'un fil déformé est toujours une hélice décrite par ses paramètres : angle d'enroulement, α , courbure, k' et torsion par unité longueur, τ , de l'hélice non déformée, cf. section 4.2.4.

Dans chaque fil constitutif du câble, les sections restent planes après déformation, par conséquent, pour chaque fil hélicoïdal i , le vecteur déplacement d'un point M^i de la section S^i de centre G^i peut être exprimé par :

$$\vec{u}_{M^i} = \vec{u}_{G^i} + \vec{\theta}^i \times \vec{G^i M^i} \quad (4.25)$$

où \vec{u}_{G^i} est le vecteur déplacement de G^i et $\vec{\theta}^i$ est le vecteur rotation de la section S^i . On rappelle que l'influence de la déformation de contact est négligée, (l'écrasement local des fils extérieurs sur l'âme), comme cela a été justifié par une étude de Utting et Jones [UTT 87a], [UTT 87b].

A ce stade, aucune hypothèse n'est faite sur la forme de \vec{u}_{G^i} et $\vec{\theta}^i$, et l'on se pose dans le repère global R_0

$$\left\{ \vec{u}_{G^i} \right\} = \begin{Bmatrix} u_x^i(l) \\ u_y^i(l) \\ u_z^i(l) \end{Bmatrix} \text{ et } \left\{ \vec{\theta}^i \right\} = \begin{Bmatrix} \theta_x^i(l) \\ \theta_y^i(l) \\ \theta_z^i(l) \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

pour passer le vecteur de déplacements \vec{u}_{G^i} et le vecteur de rotations $\vec{\theta}^i$, du repère global R_0 , au repère local R_i on a :

$$\begin{cases} u_j = a_{jk} u \\ \theta_j = a_{jk} \theta \end{cases} \quad (4.27)$$

où a_{jk} est la matrice de transformation définie par :

$$a = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \sin(\theta + \theta_i) & \sin \alpha \cos(\theta + \theta_i) & \cos \alpha \\ -\cos(\theta + \theta_i) & -\sin(\theta + \theta_i) & 0 \\ \cos \alpha \sin(\theta + \theta_i) & -\cos \alpha \cos(\theta + \theta_i) & \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

enfin, le champ de déplacement au point M^i de coordonnées $(0, \xi^i, \eta^i)$ dans le repère local $R_i(G^i, \vec{t}^i, \vec{n}^i, \vec{b}^i)$ (cf. figure 4.10) a les composantes suivantes dans ce même repère :

$$\left\{ \vec{u}_{M^i} \right\} = \begin{Bmatrix} -u_x^i(l) \sin \alpha \sin(\theta + \theta^i) + u_y^i(l) \sin \alpha \cos(\theta + \theta^i) + u_z^i(l) \cos \alpha \\ -\eta^i [\theta_x^i(l) \cos(\theta + \theta^i) + \theta_y^i(l) \sin(\theta + \theta^i)] \\ -\xi^i [\theta_x^i(l) \cos \alpha \sin(\theta + \theta^i) - \theta_y^i(l) \cos \alpha \cos(\theta + \theta^i) + \theta_z^i(l) \sin \alpha] \\ -u_x^i(l) \cos(\theta + \theta^i) - u_y^i(l) \sin(\theta + \theta^i) \\ -\eta^i [-\theta_x^i(l) \sin \alpha \sin(\theta + \theta^i) + \theta_y^i(l) \sin \alpha \cos(\theta + \theta^i) + \theta_z^i(l) \cos \alpha] \\ u_x^i(l) \cos \alpha \sin(\theta + \theta^i) - u_y^i(l) \cos \alpha \cos(\theta + \theta^i) + u_z^i(l) \sin \alpha \\ + \xi^i [-\theta_x^i(l) \sin \alpha \sin(\theta + \theta^i) + \theta_y^i(l) \sin \alpha \cos(\theta + \theta^i) + \theta_z^i(l) \cos \alpha] \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

Les équations (4.25) et (4.26) sont valables aussi pour l'âme, en remplaçant i par $m + 1$ et en prenant $\alpha = 0$. Pour l'instant, **les fils et l'âme sont modélisés de façon indépendante** et les mouvements d'une section complète du câble sont décrits par $6 \times (m + 1)$ paramètres.

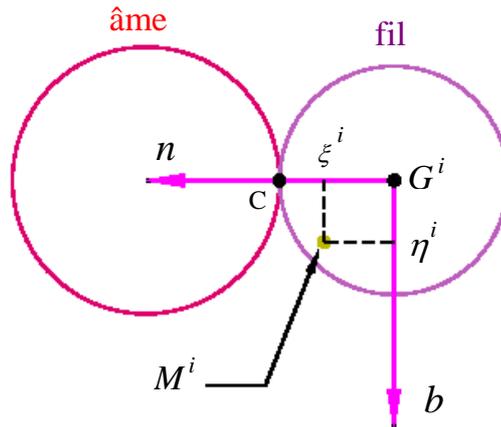


Figure 4. 10 : coordonnées du point $M^i (0, \xi^i, \eta^i)$ sur une section dans le repère local $R_i(G^i, \vec{t}^i, \vec{n}^i, \vec{b}^i)$.

4.4.3 Prise en compte des conditions de contact

L'étude du contact âme/fil (mouvements relatifs entre l'âme et les fils), va nous permettre de réduire les paramètres cinématiques et simplifier la forme générale du champ de déplacement donnée ci-dessus. La figure 4.11 représente la ligne moyenne d'un fil hélicoïdal ainsi que la ligne de contact, lorsqu'on les projette sur un plan, où $P = 2\pi R_h / \tan \alpha$ est la longueur d'un pas de l'hélice.

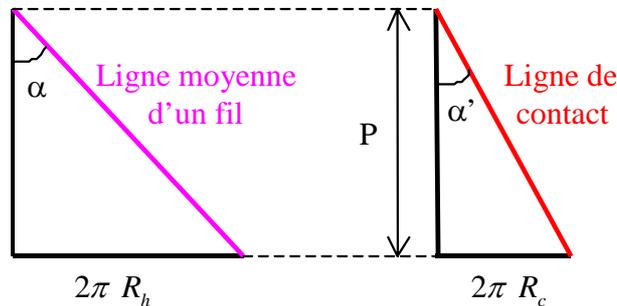


Figure 4.11: Ligne de contact et ligne moyenne en projection sur un plan

La ligne de contact entre un fil extérieur et l'âme est aussi une ligne hélicoïdale avec l'angle d'enroulement α' , exprimé par :

$$\alpha' = \text{Arc tan}\left(\frac{R_c}{R_h} \tan \alpha\right) \quad (4.30)$$

Si on écrit alors les mouvements relatifs possibles (âme-fil) sur cette ligne, on obtient 3 déplacements, de vecteur \vec{u}^R , et 3 rotations, de vecteur $\vec{\theta}^R$, en un point courant C de la ligne de contact. Leurs expressions sont :

$$\begin{cases} \vec{u}_c^{R^i} = \vec{u}_{c^i} - \vec{u}_{c^{m+1}} \\ \vec{\theta}^{R^i} = \vec{\theta}^i - \vec{\theta}^{m+1} \end{cases} \quad \text{où } C^i \in \text{fil } i \text{ et } C^{m+1} \in \text{âme} \quad (4.31)$$

On note $R_C(C, \vec{t}^i, \vec{n}^i, \vec{b}^i)$ le repère local lié à la ligne de contact et l'on remarque que $\vec{n}^i = \vec{n}^i$ et on peut donc écrire que

$$\vec{G}^i C^i = R_w \vec{n}^i \quad \text{et} \quad \vec{G}^{m+1} C^{m+1} = -R_C \vec{n}^i \quad (4.32)$$

Les déplacements relatifs dans le plan (b', t') , $\vec{u}_c^{R^i} \cdot \vec{t}^i$ et $\vec{u}_c^{R^i} \cdot \vec{b}^i$, représentent le glissement relatif entre un fil extérieur et l'âme, alors que le déplacement relatif selon n' , $\vec{u}_c^{R^i} \cdot \vec{n}^i$, caractérise la pénétration d'un fil extérieur et de l'âme en contact, voir figure 4.12.

Les rotations selon t' , n' et b' ($\theta^{R^i} \cdot \vec{t}^i$, $\theta^{R^i} \cdot \vec{n}^i$, $\theta^{R^i} \cdot \vec{b}^i$) correspondent respectivement au roulement relatif d'un fil sur l'âme, au pivotement relatif de la section du fil par rapport à la section de l'âme et à la rotation relative dans la direction binormale au contact. On va maintenant présenter les hypothèses sur les mouvements relatifs qui nous permettent d'établir les conditions de contact interfilaire.

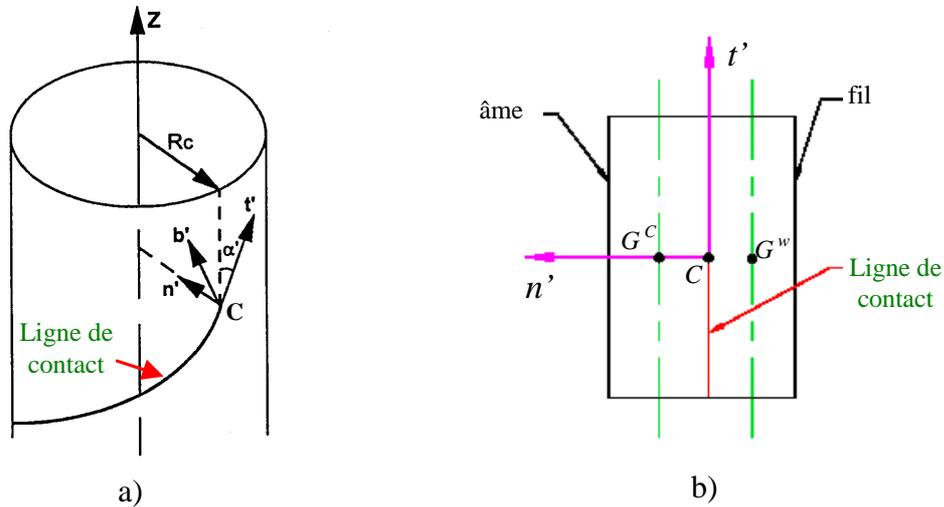


Figure 4.12 : a) ligne de contact entre l'âme et un fil hélicoïdal et b) contact linéique fil/âme, d'après [NAW 1997].

4.4.3.1 Hypothèse de contact permanent

La première relation due au contact exprime les conditions de contact linéique permanent entre les fils et l'âme, cf. figure 4.12. La zone de contact étant supposée indéformable, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} \vec{u}_c^{R^i} \cdot \vec{n}^i = 0 \\ \theta^{R^i} \cdot \vec{b}^i = 0 \end{cases}, \text{ pour tout } l \quad (4.33)$$

4.4.3.2 Hypothèses sur le glissement interfilaire

Dans sa thèse, (cf. [LAB 1998]) Labrosse suppose dans un premier temps que le glissement relatif des fils extérieurs par rapport à l'âme se fait dans la direction de l'axe du câble. En introduisant

$$\overrightarrow{u_c^{R^i}} \cdot \overrightarrow{Z} = u_z^{g^i}(s) \quad (4.34)$$

où $u_z^{g^i}(l)$ est le terme de glissement relatif des fils extérieurs sur l'âme, il déduit de cette hypothèse que les composantes de glissement relatif sur $\overrightarrow{t^{i'}}$ et $\overrightarrow{b^{i'}}$ sont exprimées par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_c^{R^i}} \cdot \overrightarrow{t^{i'}} = u_z^{g^i}(l) \cos \alpha' \\ \overrightarrow{u_c^{R^i}} \cdot \overrightarrow{b^{i'}} = u_z^{g^i}(l) \sin \alpha' \end{cases} \quad (4.35)$$

L'auteur indique ensuite qu'en chargement axial on a $u_z^{g^i} = 0$, ce résultat est d'ailleurs confirmé par [NAW 2000], et les résultats du modèle EF 3D, cf. section 4.3.2.2.

Il en résulte qu'il n'y a pas de déplacement relatif fil / âme, et que le mouvement relatif est de type rotation.

4.4.3.3 Hypothèse sur le roulement interfilaire

Puisqu'il est montré dans [NAW 2000], que quel que soit le chargement axial (traction ou torsion), le roulement relatif des fils extérieurs sur l'âme ne joue pas de rôle mesurable sur la réponse globale du câble, on peut donc le supposer nul, soit :

$$\overrightarrow{\theta^{R^i}} \cdot \overrightarrow{t^{i'}} = 0, \text{ pour tout } l. \quad (4.36)$$

Comme par ailleurs l'hypothèse de contact permanent conduit à l'équation (4.33), la seule rotation relative correspond au pivotement des fils extérieurs sur l'âme. On le note :

$$\theta_n^i(l) = \overrightarrow{\theta^{R^i}} \cdot \overrightarrow{n^{i'}} \quad (4.37)$$

Toujours dans le souci de réduire le nombre de variables pour décrire la cinématique du câble, on tient compte maintenant du fait qu'en chargement axial, les déplacements transverses de l'âme et les rotations de flexion sont nuls. Ainsi, si l'on note pour alléger l'écriture u_z et θ_z le déplacement et la rotation axiales en un point courant de la ligne moyenne de l'âme on a :

$$\begin{cases} u_x^{m+1}(l) = u_y^{m+1}(l) = \theta_x^{m+1}(l) = \theta_y^{m+1}(l) = 0, \\ u_z^{m+1}(l) = u_z, \\ \theta_z^{m+1}(l) = \theta_z. \end{cases} \quad (4.38)$$

A partir des conditions de contact écrites précédemment, il est maintenant possible de réduire le nombre initial de paramètres, comme on le fait par la suite.

4.4.4 Simplification

La combinaison linéaire $(\overrightarrow{\theta^{R^i}} \cdot \overrightarrow{t^{i'}}) \cos \alpha' + (\overrightarrow{\theta^{R^i}} \cdot \overrightarrow{b^{i'}}) \sin \alpha'$, compte tenu des hypothèses (4.33)₂ et (4.36), donne

$$\theta_z^i(l) = \theta_z^{m+1}(l). \quad (4.39)$$

On pose donc

$$\theta_z^i(l) = \theta_z^{m+1}(l) = \theta_z, \quad (4.40)$$

où $\theta_z(l)$ est la rotation d'ensemble de toute la section du câble (âme et fils), autour de son axe.

Cette dernière équation est en accord avec les résultats du modèle EF 3D. En effet, ces résultats montrent que pour les quatre chargements (cf. figure 4.6), dans la section ($Z = L/2$) au milieu du câble, les rotations axiales pour l'âme, θ_z , et pour le fil, θ_z^i , sont effectivement identiques, cf. Tableau 4.2. Donc la rotation relative âme/fil est nulle dans la direction de l'axe du câble.

Tableau 4.2: Rotation θ_z (rad.) de l'âme et des torons au milieu du câble ($Z = L/2$).

Rotation angle	a)	b)	c)	d)
θ_z (l'âme)	0.	4.17 e-3	3.36 e-3	5.31 e-3
θ_z^i (torons)	0.	4.17 e-3	3.37 e-3	5.31 e-3

L'équation (4.40) avec l'hypothèse (4.36) donnent

$$-[\theta_x^i(l)]\sin(\theta + \theta^i) + [\theta_y^i(l)]\cos(\theta + \theta^i) = 0. \quad (4.41)$$

Avec les définitions (4.37) et (4.40), les combinaisons linéaires :

$$-(4.41) \times \sin(\theta + \theta^i) - (\overrightarrow{\theta^{R^i}} \cdot \overrightarrow{n^i}) \cos(\theta + \theta^i) \text{ et } (4.41) \times \cos(\theta + \theta^i) - (\overrightarrow{\theta^{R^i}} \cdot \overrightarrow{n^i}) \sin(\theta + \theta^i)$$

donnent

$$\begin{cases} \theta_x^i(l) = -\theta_n^i(l) \cos(\theta + \theta^i) \\ \theta_y^i(l) = -\theta_n^i(l) \sin(\theta + \theta^i) \end{cases} \quad (4.42)$$

Avec les hypothèses (4.35)_{1,2}, et les combinaisons linéaires

$$(\overrightarrow{u_c^{R^i}} \cdot \overrightarrow{b^i}) \cos \alpha' - (\overrightarrow{u_c^{R^i}} \cdot \overrightarrow{t^i}) \sin \alpha' \text{ et } (\overrightarrow{u_c^{R^i}} \cdot \overrightarrow{b^i}) \sin \alpha' + (\overrightarrow{u_c^{R^i}} \cdot \overrightarrow{t^i}) \cos \alpha' \text{ donnent}$$

respectivement

$$[u_x^i(l)]\sin(\theta + \theta^i) - [u_y^i(l)]\cos(\theta + \theta^i) + R_h \theta_z = 0 \quad (4.43)$$

et

$$u_x^i(l) - u_z = [R_w \theta_x^i(l)]\sin(\theta + \theta^i) - [R_w \theta_y^i(l)]\cos(\theta + \theta^i). \quad (4.44)$$

De (4.42) et (4.44), on déduit

$$u_z^i(l) = u_z \quad (4.45)$$

Ainsi, avec la relation (4.40), on constate que le déplacement axial et la rotation axiale sont uniformes dans la section du câble.

Avec l'hypothèse (4.33)₁, les combinaisons linéaires :

$$(4.43) \times \sin(\theta + \theta^i) - (\overrightarrow{u_c^{R^i}} \cdot \overrightarrow{n^i}) \cos(\theta + \theta^i) \text{ et } (4.43) \times \cos(\theta + \theta^i) + (\overrightarrow{u_c^{R^i}} \cdot \overrightarrow{n^i}) \sin(\theta + \theta^i)$$

donnent

$$\begin{cases} u_x^i(l) = -R_h \theta_z \sin(\theta + \theta^i), \\ u_y^i(l) = R_h \theta_z \cos(\theta + \theta^i). \end{cases} \quad (4.46)$$

d'après les différentes simplifications opérées, on obtient que dans une section donnée, la cinématique de la section du câble est décrite maintenant par les 2 degrés de liberté de la ligne moyenne de l'âme (la translations u_z , ainsi que la rotation θ_z), et les 6 pivotements relatifs au niveau de chaque contact âme-fil hélicoïdal. Donc, il ne reste qu'à déterminer

$2+m$ paramètres pour définir les mouvements de tous les fils d'une section du câble, au lieu des $6 \times (m + 1)$ paramètres initiaux.

Les déplacements et les rotations au centre de la section du fil hélicoïdal i sont exprimées par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x^i(l) = R_h \theta_z \sin(\theta + \theta^i), \\ u_y^i(l) = R_h \theta_z \cos(\theta + \theta^i), \\ u_z^i(l) = u_z, \\ \theta_x^i(l) = -\theta_n^i \cos(\theta + \theta^i), \\ \theta_y^i(l) = -\theta_n^i \sin(\theta + \theta^i), \\ \theta_z^i(l) = \theta_z. \end{array} \right. \quad (4.47)$$

Par conséquent, en reportant l'équation (4.47) dans l'équation (4.29), le champ de déplacement en un point sur la section du fil hélicoïdal i s'écrit dans le repère $R_i(G^i, \vec{t}^i, \vec{n}^i, \vec{b}^i)$

$$\left\{ \vec{u}_{M^i} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} u_z \cos \alpha + \eta^i \theta_n^i - (\xi^i - R_h) \theta_z \sin \alpha \\ -\eta^i \theta_z \cos \alpha \\ u_z \sin \alpha + (\xi^i - R_h) \theta_z \cos \alpha \end{array} \right\} \quad (4.48)$$

4.4.5 Composantes du tenseur des déformations

Si l'on garde à l'esprit que l'on souhaite calculer les forces axiales et les moments de torsion dans les fils du câble, il s'avère nécessaire de calculer auparavant les déformations locales. Celles-ci sont accessibles grâce à l'expression du champ de déplacement que nous venons d'établir. Dans le cadre des petits déplacements et des petites déformations, nous nous contentons de calculer les composantes du tenseur des déformations de Green-Lagrange linéarisé [LAB 1998] défini pour le fil i sous forme indicielle suivante :

$$\varepsilon_{jk}^i = \frac{1}{2} (u_{M^i j,k} + u_{M^i k,j}) \quad (4.49)$$

Il vient finalement les composantes du tenseur de la déformation de fil i ε_{lm}^i , dans le repère local, $R_i(G^i, \vec{t}^i, \vec{n}^i, \vec{b}^i)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{tt}^i = \frac{1}{1 - \xi^i \kappa'} (u_{z,z} \cos^2 \alpha + \eta^i \theta_{n,z}^i \cos \alpha - \xi^i \theta_n^i \tau - (\xi^i - R_h) \theta_{z,z} \cos \alpha \sin \alpha), \\ \varepsilon_{nn}^i = \varepsilon_{bb}^i = \gamma_{nb}^i = 0, \\ \gamma_{nt}^i = \frac{\eta^i}{1 - \xi^i \kappa'} (-\theta_{z,z} \cos^2 \alpha + \kappa' \theta_n^i) \\ \gamma_{bt}^i = \frac{1}{1 - \xi^i \kappa'} (u_{z,z} \cos \alpha \sin \alpha + (1 - \xi^i \kappa') \theta_n^i + (\xi^i - R_h) \theta_{z,z} \cos^2 \alpha) \end{array} \right. \quad (4.50)$$

Pour une section donnée (section circulaire sous un chargement axial), la déformation de torsion dans le repère local, $\theta_{t,t}^i$, est constante (indépendante de η^i et ξ^i) et on suppose

que γ_{nt}^i et γ_{bt}^i varient linéairement avec $\theta_{t,t}^i$. Par conséquent, les glissements en un point quelconque M^i de la section sont exprimés par (cf. figure 4.10):

$$\begin{cases} \gamma_{nt}^i = -\eta^i \theta_{t,t}^i \\ \gamma_{bt}^i = \xi^i \theta_{t,t}^i \end{cases} \quad \text{où } \eta^i \text{ et } \xi^i \in \text{section du fil hélicoïdal } i \quad (4.51)$$

en sachant que $\theta_{t,t}^i$ est constant sur la section, et d'après les relations (4.50)₃₋₄ on peut écrire :

$$\frac{\gamma_{nt}^i}{\eta^i} + \frac{\gamma_{bt}^i}{\xi^i} = \frac{1}{\xi^i} \left[u_{z,z} \cos \alpha \sin \alpha + \theta_n^i - R_h \cos^2 \alpha \theta_{z,z} \right] = 0 \quad (4.52)$$

et finalement le pivotement relatif θ_n^i , est donné par :

$$\theta_n^i = -u_{z,z} \cos \alpha \sin \alpha + R_h \cos^2 \alpha \theta_{z,z} \quad (4.53)$$

On rappelle que le mouvement relatif fil / âme est caractérisé par le seul pivotement. On note que cette dernière équation va permettre d'éliminer le pivotement relatif dans les équations.

Donc, pour le chargement axial il ne reste qu'à déterminer 2 paramètres (une translation u_z et une rotation θ_z de l'âme) pour définir les mouvements de tous les fils d'une section du câble, au lieu des $6 \times (m + 1)$ paramètres initiaux.

On s'intéresse ici aux déformations de la ligne moyenne de chaque fil et de l'âme ($\eta^i = \xi^i = 0$). D'après les équations (4.9), (4.50) et (4.53), les déformations axiales au centre de section des fil i sont exprimées par :

$$\begin{cases} \varepsilon_{tt}^i = u_{z,z} \cos^2 \alpha + R_h \theta_{z,z} \cos \alpha \sin \alpha, \\ \theta_{t,t}^i = u_{z,z} \frac{\cos \alpha \sin^3 \alpha}{R_h} + \theta_{z,z} \cos^4 \alpha \end{cases} \quad (4.54)$$

On remarque que dans le travail de Labrosse [LAB 1998], le pivotement était éliminé en supposant celui-ci libre. On exprimait pour ce faire la nullité du moment associé grâce aux équations de Kirchhoff-Love. Une telle approche ne peut être utilisée pour un câble synthétique, car on néglige les moments de flexion. On note cependant que l'expression du mouvement relatif, θ_n^i , trouvée ici est la même que celle obtenue par Labrosse avec l'hypothèse de pivotement libre.

4.4.6 Comportement des composants

A ce stade, chaque fil est considéré comme une structure avec un comportement de couplage traction-torsion. Cela veut dire que les moments de flexion de chaque fil (M_n^i et M_b^i dans les directions \vec{n}^i et \vec{b}^i) sont négligés (la raideur de flexion pour les câbles synthétiques est supposée négligeable) ainsi que les efforts tranchants de chaque fil. Il s'agit là d'une différence avec le modèle de Labrosse [LAB 1998], initialement développé pour des câbles métalliques. Ces hypothèses découlent de la structure discrète de chaque fil, formé d'un assemblage discret de constituants, sans grande cohésion entre eux. D'ailleurs, en manipulant un toron, il est très facile de le déformer en flexion ou en

cisaillement transverse, alors qu'à l'inverse il présente une raideur importante en torsion, et plus encore en traction. Ces hypothèses paraissent donc raisonnables.

Le comportement de chaque fil peut être exprimé sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} F_t^i \\ M_t^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\varepsilon\varepsilon}^w & k_{\varepsilon\theta}^w \\ k_{\theta\varepsilon}^w & k_{\theta\theta}^w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{tt}^i \\ \theta_{t,t}^i \end{Bmatrix} \quad (4.55)$$

En reportant l'équation (4.54) dans l'équation (4.55), la force axiale et le moment de torsion pour chaque fil sont donnés par :

$$\begin{cases} F_t^i = \left[k_{\varepsilon\varepsilon}^w \cos^2 \alpha + k_{\varepsilon\theta}^w \cos \alpha \sin^3 \alpha / R_h \right] u_{z,z} + \left[k_{\varepsilon\varepsilon}^w R_h \cos \alpha \sin \alpha - k_{\varepsilon\theta}^w \cos^4 \alpha \right] \theta_{z,z} \\ M_t^i = \left[k_{\theta\varepsilon}^w \cos^2 \alpha + k_{\theta\theta}^w \cos \alpha \sin^3 \alpha / R_h \right] u_{z,z} + \left[k_{\theta\varepsilon}^w R_h \cos \alpha \sin \alpha - k_{\theta\theta}^w \cos^4 \alpha \right] \theta_{z,z} \end{cases} \quad (4.56)$$

Le terme F_t^i est l'effort normal dans le fil i (dans la direction tangentielle \vec{t}^i). Le moment M_t^i est le moment de torsion dans la direction tangentielle \vec{t}^i .

Pour l'âme, la direction tangentielle est l'axe \vec{Z} , le comportement de l'âme est donc exprimé par :

$$\begin{Bmatrix} F_t^c \\ M_t^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\varepsilon\varepsilon}^c & k_{\varepsilon\theta}^c \\ k_{\theta\varepsilon}^c & k_{\theta\theta}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{z,z} \\ \theta_{z,z} \end{Bmatrix} \quad (4.57)$$

On note ici que les coefficients k_{ij}^w et k_{ij}^c peuvent être déterminés soit par essai, soit par l'utilisation d'un modèle à l'échelle inférieure (modèle continu, logiciel FRM,...).

4.4.7 Comportement global du câble 1+6

Le comportement de chaque fil i , exprimé dans le repère $R_i(G^i, \vec{t}^i, \vec{n}^i, \vec{b}^i)$, peut se projeter dans le repère global $R_0(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$. Par sommation sur tous les fils hélicoïdaux et en ajoutant les termes relatifs à l'âme (d'équation (4.57)), on peut exprimer l'effort et le moment globaux du câble dans la direction de l'axe du câble, \vec{Z} , par :

$$\begin{cases} F_z = F_t^c + \sum_{i=1}^m [F_t^i \cos \alpha], \\ M_z = M_t^c + R_h \sum_{i=1}^m [F_t^i \sin \alpha] + \sum_{i=1}^m [M_t^i \cos \alpha] \end{cases} \quad (4.58)$$

Il vient finalement le comportement global du câble synthétique de type 1+6 sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} F_z \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\varepsilon\varepsilon}^* & k_{\varepsilon\theta}^* \\ k_{\theta\varepsilon}^* & k_{\theta\theta}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{z,z} \\ \theta_{z,z} \end{Bmatrix} \quad (4.59)$$

où $k_{\varepsilon\varepsilon}^*$, $k_{\varepsilon\theta}^*$, $k_{\theta\varepsilon}^*$ et $k_{\theta\theta}^*$ représentent les composantes de la matrice raideur donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{\varepsilon\varepsilon}^* = k_{\varepsilon\varepsilon}^c + m \left(k_{\varepsilon\varepsilon}^w \cos^3 \alpha + k_{\varepsilon\theta}^w \frac{\sin^3 \alpha \cos^2 \alpha}{R_h} \right) \\ k_{\varepsilon\theta}^* = k_{\varepsilon\theta}^c + m \left(k_{\varepsilon\varepsilon}^w R_h \sin \alpha \cos^2 \alpha + k_{\varepsilon\theta}^w \cos^5 \alpha \right) \\ k_{\theta\varepsilon}^* = k_{\theta\varepsilon}^c + m \left(k_{\varepsilon\varepsilon}^w R_h \sin \alpha \cos^2 \alpha + k_{\varepsilon\theta}^w \sin^4 \alpha \cos \alpha + k_{\theta\varepsilon}^w \cos^3 \alpha \right) \\ k_{\theta\theta}^* = k_{\theta\theta}^c + m R_h \left(k_{\varepsilon\varepsilon}^w R_h \sin^2 \alpha \cos \alpha + k_{\varepsilon\theta}^w \sin \alpha \cos^4 \alpha \right) \\ \quad + m \left(k_{\theta\varepsilon}^w R_h \sin \alpha \cos^2 \alpha + k_{\theta\theta}^w \cos^5 \alpha \right) \end{array} \right. \quad (4.60)$$

on note ici, pour construction 1+6, m vaut 6.

On remarque aussi que contrairement au modèle initial de Labrosse, la matrice raideur du câble est non symétrique. Cela peut être expliqué par le fait qu'ici, les comportements des composants (toron et âme) présentent un couplage traction/torsion, tandis que dans le modèle de Labrosse le comportement de composants est isotrope. Malgré tout, pour le modèle présent les écarts entre les termes de couplages restent inférieurs à 2% (pour les valeurs pratiques).

4.5 Comparaison du modèle de Labrosse étendu avec celui du logiciel FRM

A titre d'illustration, et en vue de comparer le modèle présenté à celui du logiciel FRM, les cas des câbles aramide d'effort à la rupture de 25T et 205T sont traités.

On note ici que pour décrire la géométrie dans le logiciel FRM, l'option de « **soft components** » a été utilisée (pour 2 couches).

Les données d'entrée pour le modèle 1+6 sont les matrices raideurs de l'âme et du toron du câble, qui sont obtenues ici à partir du logiciel FRM (les données d'entrée pour le logiciel FRM étant les résultats expérimentaux sur le brin). Ces données d'entrée sont présentées dans le tableau 4.3.

Tableau 4.3 : composantes de la matrice raideur de l'âme et du toron des câbles 25T et 205T.

Câble	Structure	Modèles	$k_{\varepsilon\varepsilon}$ (10^3 kN)	$k_{\varepsilon\theta}$ (kN.m)	$k_{\theta\varepsilon}$ (kN.m)	$k_{\theta\theta}$ (N.m ²)
25T	Ame	FRM	2.13	1.17	1.08	0.876
	toron	FRM	1.73	0.553	0.543	0.273
205T	Ame	FRM	18.9	39.7	37.9	118
	toron	FRM	14.1	13.0	12.7	21.3

On note que dans notre cas les deux câbles sont de type « regular lay » : l'angle d'enroulement dans les torons n'a pas le même signe que l'angle d'enroulement dans le câble. Cela est en général le cas afin de minimiser la force axiale générée par la rotation du câble ainsi que la raideur de torsion.

La matrice raideur du câble est ensuite obtenue avec le modèle 1+6 présenté dans ce chapitre et les résultats sont comparés avec ceux du logiciel FRM dans le tableau 4.4.

Tableau 4.4 : composantes de la matrice raideur les câbles 25T et 205T.

Exemples	modèles	$k_{\varepsilon\varepsilon}$ (10^3 kN)	$k_{\varepsilon\theta}$ (kN.m)	$k_{\theta\varepsilon}$ (kN.m)	$k_{\theta\theta}$ (N.m ²)
Câble 25T	FRM	11.6	11.7	11.2	22.36
	Modèle 1+6	11.7	11.2	11.1	16.44
Câble 205T	FRM	95.8	280	276	1820
	Modèle 1+6	96.3	269	268	1386

On constate que la raideur axiale $k_{\varepsilon\varepsilon}$ varie très peu d'un modèle à l'autre. En ce qui concerne les termes de couplage traction-torsion, l'écart entre les modèles FRM et 1+6 est faible. Les écarts les plus importants sont obtenus pour la raideur en torsion. Il y a alors un écart significatif entre les modèles FRM et 1+6. Cela peut être expliqué par le fait que le calcul du rayon de la ligne moyenne d'un fil extérieur, R_h , n'est pas la même pour les deux modèles. En effet, pour le modèle 1+6, le rayon est donnée par : $R_h = R_c + R_w$, alors que pour le modèle FRM, le rayon est défini par la distance entre le centre de la section du câble et le centre de surface de la section du fil extérieur, R_h' , cf. figure 4.13.

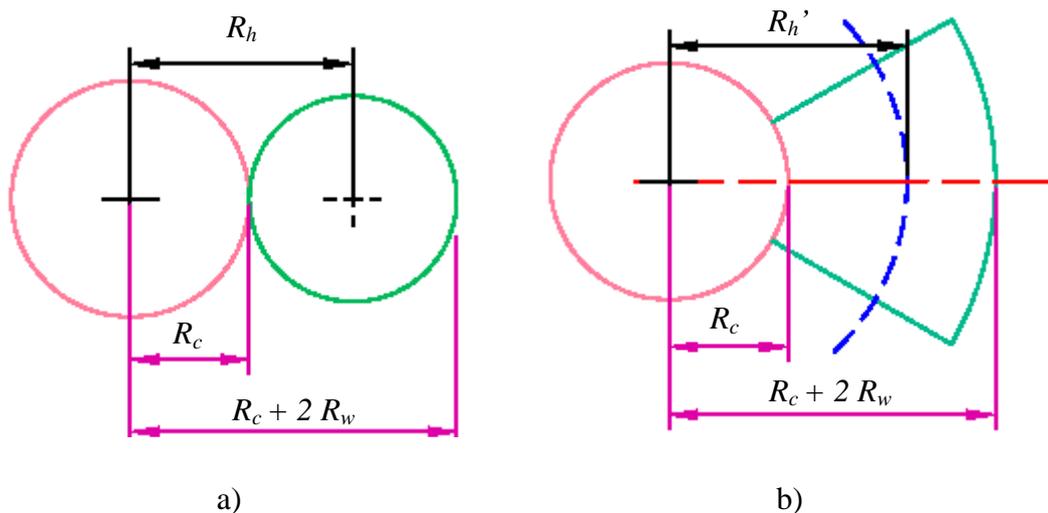


Figure 4.13 : rayon de l'hélice des fils pour différents modèles ; a) 1+6, b) FRM.

Donc, le rayon pris en compte par logiciel FRM est plus grand que celui du modèle 1+6 (la différence étant de l'ordre de 7%). Par conséquent, l'angle d'enroulement estimé par

le logiciel FRM est aussi plus grand que celui du modèle 1+6. Ces deux effets combinés peuvent expliquer une valeur plus grande pour la raideur de torsion par le logiciel FRM.

On observe par ailleurs que pour le modèle FRM, la perte de symétrie est plus importante que pour le modèle 1+6 (cf. tableau 4.4).

Ces 2 modèles seront confrontés à des résultats expérimentaux, cf. chapitre 5.

4.6 Effet du frottement

Comme on l'avait déjà indiqué, dans notre modèle 1+6, l'effet du frottement est négligé, alors que celui-ci peut être pris en compte dans le logiciel FRM. On a donc analysé le câble de 25T ainsi que 205T, à l'aide de logiciel FRM pour différentes valeurs du coefficient de frottement. Les résultats sont présentés tableau 4.5.

Tableau 4.5 : résultats FRM sur le câble 25T ainsi que le câble 205T pour différentes valeurs de coefficient de frottement

Structure	Coefficient de frottement	$k_{\varepsilon\varepsilon}$ (10^3 kN)	$k_{\varepsilon\theta}$ (kN.m)	$k_{\theta\varepsilon}$ (kN.m)	$k_{\theta\theta}$ (N.m ²)
Câble 25T	0.	11.6	11.7	11.2	22.36
	0.3	11.8	12.2	13.3	27.53
	0.6	11.9	12.5	15.3	30.40
Câble 205T	0.	95.7	280	276	1820
	0.3	97.0	299	326	2134
	0.6	98.4	308	377	2428

Les écarts entre les résultats avec différents coefficients de frottement pour les deux câbles sont inférieurs à 2.7% sur la raideur en traction, un peu supérieurs à 9% sur le terme de couplage, $k_{\varepsilon\theta}$, 26% sur le terme de $k_{\theta\varepsilon}$, et de l'ordre de 26% sur la raideur à la torsion.

On a constaté que l'hypothèses de frottement entre les torons et l'âme a un peu d'influence sur la raideur axiale. Pour les autres termes, l'influence des hypothèses de frottement est plus importante. De plus, si on compare ces résultats avec ceux du tableau 3.11 (sur le brin assemblé et le toron), on constate que l'effet du frottement devient de plus en plus important quand on passe des échelles inférieures aux échelles supérieures.

Là encore, c'est l'expérience qui nous permettra de donner une valeur plausible du coefficient de frottement. Signalons pour conclure sur ce point qu'à notre connaissance, aucune valeur du coefficient de frottement n'est donnée dans la littérature, quelle que soit l'échelle considérée, sauf à l'échelle du brin assemblé (brin sur brin), cf. section 3.5.4.

4.7 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était de développer un modèle analytique pour décrire le comportement axial d'un câble synthétique de construction 1+6, à partir de sa géométrie et du comportement mécanique de ses constituants (matrices raideur de l'âme et du toron).

A notre connaissance, les modèles analytiques de câble synthétique 1+6, sont rares dans la littérature, alors qu'il y a plusieurs modèles analytiques pour les câbles métalliques. C'est pourquoi on a décidé de développer un modèle pour câble synthétique 1+6, en tant qu'extension d'un modèle existant pour des câbles métallique.

Différents modèles de câbles métalliques de la littérature ont été étudiés, et leur domaine de validité a été défini. Pour ce faire, les résultats qui ont servi de référence ont été obtenus à partir d'un calcul éléments finis 3D, le modèle numérique correspondant ayant été préalablement validé. Les modèles analytiques ont été comparés au modèle numérique, pour une large variation d'angle d'hélice (entre 2.5° et 35° , une étude adimensionnée ayant montré que ce paramètre géométrique était le seul jouant un rôle sensible sur le domaine de validité des modèles analytiques). Les résultats montrent alors que pour $\alpha \leq 15^\circ$, l'accord entre tous les modèles analytiques et le modèle EF est satisfaisant, sauf pour le modèle de Hruska [HRU 1953] qui sous-estime la torsion $k_{\theta\theta}$.

Par contre, pour des angles plus importants, les écarts entre les différents modèles analytiques augmentent, de même que l'écart avec la solution EF 3D.

On note cependant, qu'à notre connaissance, en pratique, dans un câble, α reste inférieur à 15° , les modèles analytiques fournissent donc des résultats fiables (à l'exception du modèle [HRU 1953]) pour des câbles métalliques avec un matériau homogène et isotrope. C'est finalement le modèle de Labrosse [LAB 1998] que nous avons retenu, car il conduit à une matrice raideur symétrique, et est basé sur une étude des mouvements relatifs entre l'âme et les fils extérieurs, ce qui le rend plus attractif que les autres modèles analytiques. Pour les câbles synthétiques, ce modèle a été adapté : raideur des constituants négligeable en flexion et cisaillement transverse, et étendu : prise en compte du couplage traction - torsion au niveau de l'âme et des fils.

Ce modèle a ensuite été comparé avec celui du logiciel FRM, sur les câble de 25T et 205T.

L'écart entre ces deux modèles n'est important que pour la raideur en torsion, et c'est la confrontation à l'expérience (voir chapitre 6) qui permettra de dire lequel de ces deux modèles fournit les meilleurs résultats.

Chapitre 5. Etude expérimentale

5.1 Introduction

L'objectif des essais est d'avoir une approche physique des phénomènes, et de confronter les modèles développés avec la réalité de l'expérience. Etant donné l'architecture très complexe d'un câble synthétique, des essais à tous les niveaux d'échelle sont nécessaires. Par conséquent, pour fournir les données expérimentales pour la corrélation avec les modèles aux différentes échelles, les essais sont réalisés sur la fibre, le brin, le brin assemblé, le toron, l'âme et le câble.

La réalisation des essais aux différentes échelles implique la mise en oeuvre de moyens expérimentaux très variés, sur plusieurs sites. On détaillera ces essais par la suite.

On va d'abord présenter les constructions des différents câbles étudiés, ensuite, les points importants des essais seront exposés : les machines et les moyens de mesure utilisés, la procédure d'essai (chargement), le mode d'obtention des éprouvettes et les conditions aux limites.

Les résultats d'essais seront donnés en fin du chapitre.

5.2 Câbles étudiés

Dans cette étude expérimentale pour confronter les modèles développés à la réalité de l'expérience, des essais sont réalisés sur deux câbles différents:

- câble 25T : la charge nominale de rupture est de 25T, le matériau de base est l'aramide sous forme de fibres, à partir desquelles sont formés des brins (référence TWARON 1000), par un assemblage parallèle de fibres. Les brins sont torsadés pour former le brin assemblé, ensuite les torons sont fabriqués avec les brins assemblés, qui décrivent des hélices autour de l'âme (type 1+6). Le câble est enfin obtenu avec les torons, avec à nouveau une structure de type 1+6, cf. figure 3.1, chapitre 3.
- câble 205T : la charge nominale de rupture est de 205T, les brins sont les mêmes que ceux du câble 25T. En revanche, le nombre de brins torsadés dans le brin assemblé est plus important. D'autre part, les torons sont formés à partir des brins assemblés par une opération de tressage (de type multicouches). Le câble est enfin fabriqué avec les torons, qui décrivent des hélices autour de l'âme (type 1+6), cf. figure 3.1.

Les détails de la construction de ces deux câbles sont présentés dans les tableaux 5.1 et 5.2 respectivement.

Dans ces tableaux, le *Pas* positif correspond à RHL (*Right Hand Lay angle*) et le *Pas* négatif correspond à LHL (*Left Hand Lay angle*), il leur est associé respectivement un angle d'enroulement positif et négatif. Les deux câbles sont des câbles avec « Ordinary Lay ». Cela correspond aux câbles dans lesquels la direction de l'angle d'enroulement pour les torons est dans le sens opposé à celui du câble.

Tableau 5.1 : détails de la construction de câbles synthétiques de 25T.

Câble 25T					
structure	Sous-structure	Nombre de sous-structures	Arrangement proposé	Pas (t/m)	Diamètre (mm)
Câble 205-tonne	Ame	1	1 couche	5.833 (RHL)	19.2
	Toron	6	1 couche		
Ame					
structure	Sous-structure	Nombre de sous-structures	Arrangement proposé	Pas (t/m)	Diamètre (mm)
âme	Brin assemblé	7	1+6	18.868 (RHL)	7
Brin assemblé	Brin	16	1+5+10	-17 (LHL)	2.33
Brin (twaron1000)	fibre	2000	fibres en quinconce	0	0.572
Fibre	-----	-----	-----	----	0.012
Toron					
structure	Sous-structure	Nombre de sous-structures	Arrangement proposé	Pas (t/m)	Diamètre (mm)
toron	Brin assemblé	7	1+6	-10.870 (LHL)	6.1
Brin assemblé	Brin	12	3+9	19 (RHL)	2.03
Brin (twaron1000)	fibre	2000	fibres en quinconce	0	0.572
Fibre	-----	-----	-----	----	0.012

Tableau 5.2 : détails de la construction de câbles synthétiques de 205T.

Câble 205T					
structure	Sous-structure	Nombre de sous-structures	Arrangement proposé	Pas (t/m)	Diamètre (mm)
Câble 205-tonne	Ame	1	1 couche	2 (RHL)	57.6
	Toron	6	1 couche		
Ame					
structure	Sous-structure	Nombre de sous-structures	Arrangement proposé	Pas (t/m)	Diamètre (mm)
âme	Brin assemblé	42	1+6+14+21	6.329 (RHL)	21
Brin assemblé	Brin	24	3+7+14	14 (RHL)	3.0
Brin (twaron1000)	fibre	2000	fibres en quinconce	0	0.572
Fibre	-----	-----	-----	----	0.012
Toron					
structure	Sous-structure	Nombre de sous-structures	Arrangement proposé	Pas (t/m)	Diamètre (mm)
toron	Brin assemblé	42	1+6+14+21	-3.636 (LHL)	18.3
Brin assemblé	Brin	18	1+6+11	16 (RHL)	2.65
Brin (twaron1000)	fibre	2000	fibres en quinconce	0	0.572
Fibre	-----	-----	-----	----	0.012

On remarque que les données disponibles fournies par le constructeur ne sont pas suffisantes, elles sont indiquées en **Gras** dans les tableaux précédents. Les données manquantes seront obtenues par mesure, analyse d'image et à partir des relations géométriques, cf. chapitre suivant.

5.3 Machines utilisées

Comme le montrent les tableaux précédents, lorsqu'on passe de la fibre au câble de 205T, le diamètre évolue de 12 μ m à 57.6mm. Par conséquent, pour faire des essais sur toutes les échelles, différents dispositifs expérimentaux sont nécessaires. Par exemple, pour un essai sur une fibre on impose un effort maximum de 0.5 N, par contre pour un essai sur le câble de 205T on aura besoin d'un effort de 100 tonnes (50% de B. L. (Breaking Load :charge à la rupture)). En plus, pour des échelles inférieures (fibres, brins et brins assemblés) on ne mesure que la force axiale tandis que pour des échelles supérieures (câbles et torons) la force axiale et le moment de torsion sont mesurés.

Le tableau 5.3 ci-dessous regroupe la désignation des structures testées, le type d'essai associé ainsi que les moyens d'essais correspondants.

Tableau 5.3 : structures testées avec le type d'essai associé et la machine d'essai correspondante.

Structure testée	Type d'essai	Machine	Etablissement
Fibre	Traction simple	DMA (analyseur dynamique mécanique TAI) de 18N	IFREMER
Brin (Twaron 1000)	Traction simple	Instron 1 tonne	IFREMER
Brins assemblés du toron et de l'âme de câble 25T	Traction simple	R&K (Roell & Korthaus) de 20 tonnes	IFREMER
Toron et âme du câble 25T	Traction simple	Banc d'essai de 100 tonnes	IFREMER
Câble 25T	Traction simple	Banc d'essai de 100 tonnes	IFREMER
	Traction / Torsion	Machine de traction – torsion de 10 tonnes	ENSMP
Câble 205T	Traction simple	Banc d'essai de 3000 tonnes	LCPC
	Traction (en mesurant le couple)	Banc d'essai de 500 tonnes	LCPC

IFREMER : IFREMER, Centre de Brest, Département Matériaux et Structures.
ENSMP : Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Centre des Matériaux Pierre-Marie Fourt.
LCPC : Laboratoire Centrale des Ponts des Chaussées de Nantes.

Les détails des caractéristiques principales des différents bancs d'essai se trouvent en annexe E.

5.4 Procédure d'essai

La procédure d'essai inclut un chargement préliminaire de mise en place (*bedding-in*) de 5 cycles jusqu'à 50% de la charge nominale de la rupture, suivi par soit un chargement jusqu'à la rupture, soit un essai de fluage. Au cours de la 6^{ème} mise en charge, on obtient les raideurs de l'éprouvette. Cette procédure d'essai a été réalisée à toutes les échelles du câble. La procédure vient d'une procédure OCIMF (Oil Companies International Marine Forum) pour les câbles marins, mais elle a été retenue dans la norme ISO (ISO/DIS 19901-7 :2004) en préparation pour les lignes d'ancrage offshore.

Pendant les 5 premiers cycles de mise en place, la raideur du câble varie considérablement (jusqu'à 27% et 28% respectivement pour les câbles 25T et 205T), en particulier entre le premier et deuxième cycle, cf. figure 5.1. Pour le câble 205T, des cycles supplémentaires entre 10 et 30% de la charge à la rupture ont été réalisés après le 5^{ème} cycle, mais les résultats ont montré moins de 1% de changement sur la raideur du câble (pour ce câble en aramide), ceux-ci n'ont pas été réalisés pour le câble 25T.

Cette stabilisation initiale du câble enlève la déformation de mise en place mais comprend également un ré-alignement moléculaire des fibres.

La figure 5.1 présente deux exemples de déformation mesurée pendant des cycles de mise en place pour les câbles 25T et 205T. Il est évident que sans une procédure de mise en place des variations importantes de raideur peuvent être mesurées.

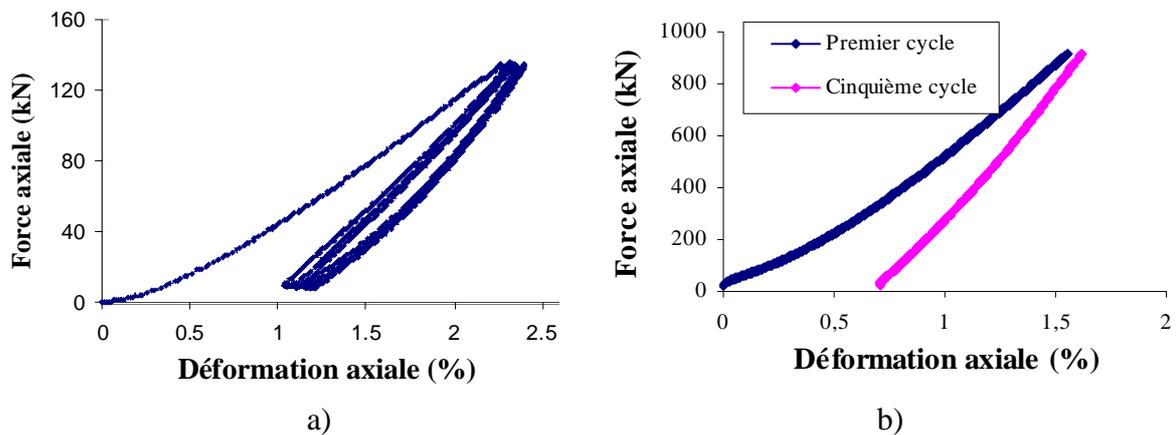


Figure 5.1 : force axiale / déformation pour les 5 cycles de mise en place a) câble 25T , b) câble 205T.

On remarque ici qu'au départ de l'essai, une non – linéarité de la raideur est observée. Cela s'explique par le fait qu'au début d'essai tous les composants de la structure ne sont pas sous tension. A la base, ceci est lié au fait que toutes les fibres n'ont pas exactement la même longueur. Ce phénomène (la variabilité) existe plus ou moins pour toutes les échelles du câble. Afin d'éliminer cet effet, les cycles d'essais seront réalisés dans une intervalle de 5 à 50% de l'effort à la rupture.

5.5 Moyens de mesure

Les déplacements du câble pendant l'essai ont été mesurés par trois systèmes de mesure:

- un extensomètre ancré sur le câble,
- deux cameras numériques (analyse d'image), qui visent des repères collés au câble,
- un LVDT (**L**inear **V**ariable **D**ifferential **T**ransducer) qui mesure le déplacement du piston (partie mobile de la machine d'essai).

Les deux premiers mesurent le déplacement dans la partie centrale du câble (loin des extrémités) et fournissent des résultats similaires, comme illustré sur la figure 5.2. Cette figure permet de valider ces moyens de mesure. Pour des essais de rupture, seul le système avec des cameras peut être utilisé. Pour les échelles inférieures (brins, brins assemblés, torons et âmes) seul le système avec des cameras a été utilisé.

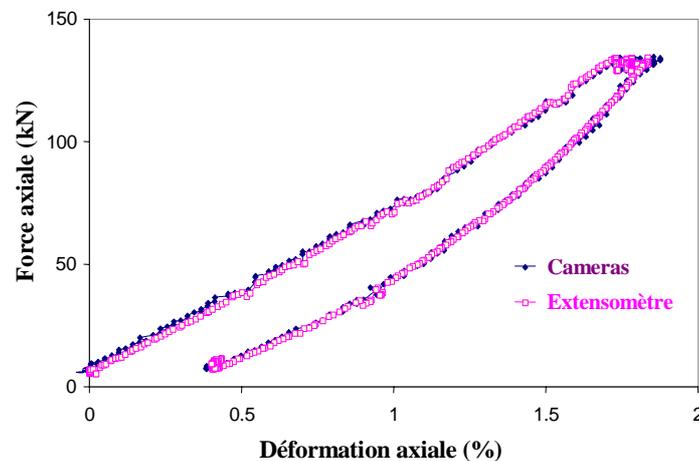


Figure 5.2 : comparaison des déformations mesurées par les cameras et l'extensomètre pour le câble 25T.

Le déplacement du piston est enregistré, mais n'est pas utilisé dans la détermination de la raideur du câble, car il correspond à une mesure globale, qui prend en compte des effets de bords.

Pour la déformation de torsion (la torsion par unité de longueur), la rotation relative entre les mors est enregistrée par la machine et la distance entre mors est utilisée comme la longueur effective.

Les extensomètres (capteur de déplacement à fil tendu de type ASM WS 375 ou 1250mm) sont en général capables d'obtenir des valeurs à 0,1% de précision. On attend une précision similaire pour les capteurs de force.

Les caméras enregistrent la position des marqueurs à une fréquence de 1 Hz. A partir d'un logiciel spécifique (corrélation d'image, Toolbox Matlab) on obtient l'endroit le plus probable du centre du marqueur à chaque moment et on calcule le déplacement de ce point. Un étalonnage permet d'obtenir le nombre de pixels/mm. Typiquement on travaille à 0,1 mm/pixel, mais on ajuste le champ de la caméra (1000 pixels) au champ de déplacement attendu de chaque marqueur afin d'optimiser la résolution.

5.6 Procédure d'obtention des éprouvettes

Le constructeur de câble fournit soit des brins (en rouleau) soit des câbles, mais aucun des constituants aux échelles intermédiaires (brin assemblé, toron). Par conséquent, pour avoir des éprouvettes de ces constituants, il faut défaire (« détorsader ») un câble. Par exemple, pour l'obtention du brin assemblé, on obtient d'abord le toron (en le déroulant du câble) puis le brin assemblé (en le déroulant le toron).

De plus, différentes terminaisons sont utilisées selon les échelles, pour lier les éprouvettes aux machines d'essais. Par exemple, pour le brin et brin assemblé on utilise les mors arrondis pneumatiques aux deux extrémités, cf. figure 5.3.

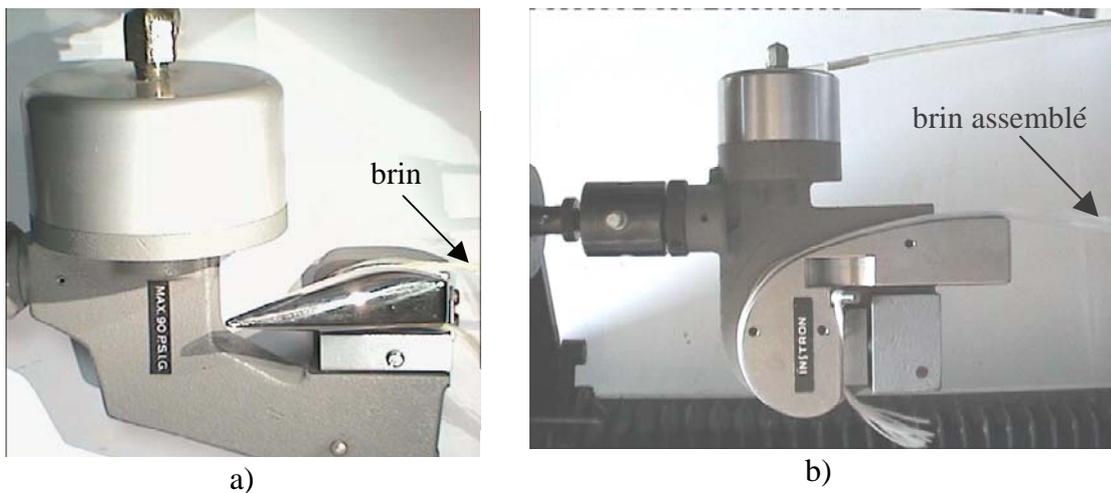
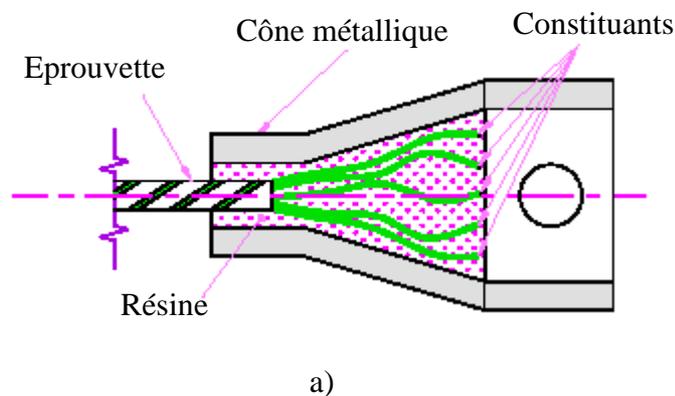


Figure 5.3 : mors arrondis pneumatiques utilisés pour les essais sur les brins (a) et le brin assemblé (b). Dans les deux cas, **l'éprouvette est horizontale** sur les photos.

Dans certains cas (toron du câble 25T et câble 25T à l'ENSMP), pour lier les éprouvettes à la machine, on utilise des cônes métalliques remplis par de la résine cf. figure 5.4 a). Dans d'autres cas, et notamment pour l'âme et le toron du câble 25T, on utilise des cônes et goupillons, et le serrage s'effectue par coincement à l'intérieur du cône, cf. figure 5.4 b).



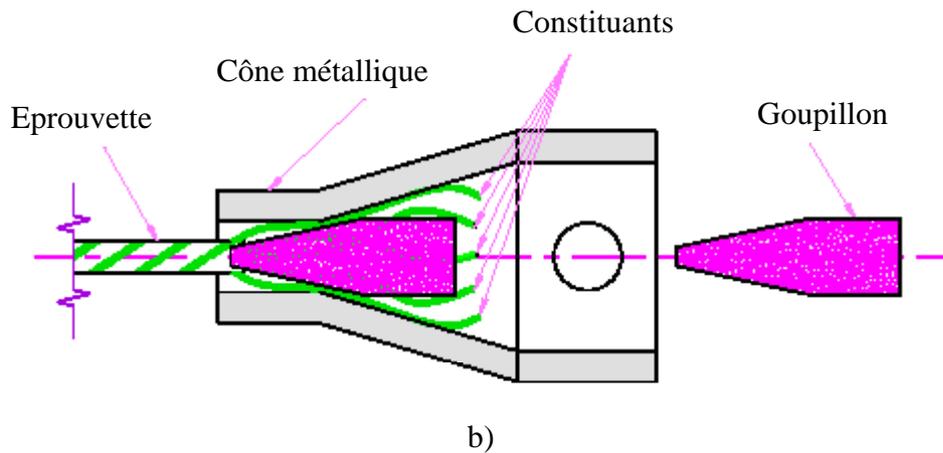


Figure 5.4 : terminaisons avec cône métallique ; a) cône rempli de résine et b) cône et goupillon, le serrage s'effectue par coincement à l'intérieur du cône.

Pour les câbles, la charge est introduite sur les épissures. L'épissure est préparée par une opération de tressage (manuellement) lors de la fabrication du câble, cf. figure 5.5.



Figure 5.5 : différentes épissures aux terminaisons du câble.

5.7 Résultats d'essai

Quelle que soit l'échelle, le comportement de la structure est exprimé sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} F_z \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\varepsilon\varepsilon} & k_{\varepsilon\theta} \\ k_{\theta\varepsilon} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{z,z} \\ \theta_{z,z} \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

où F_z , M_z , $u_{z,z}$, $\theta_{z,z}$ représentent respectivement l'effort axial, le moment de torsion, la déformation axiale et la déformation de torsion dans les axes globaux du câble.

Dans cette étude pour obtenir les différents composants de la matrice raideur, $[\mathbf{K}]$, on a réalisé des essais sur les différents constituants du câble. Pour le câble 25T les essais sont réalisés à toutes les échelles, fibre, brin, brin assemblés, toron, âme et câble. Par contre pour le câble de 205T on a réalisé des essais sur le câble, en sachant que les fibres et les

brins sont les mêmes que pour le câble 25T, donc pour ce câble les résultats d'essais sur fibre, brin et câble sont disponibles.

D'une manière générale, pour déterminer les quatre composantes de la matrice raideur, deux types d'essais différents sont nécessaires : essais de traction avec **rotation bloquée** ($\theta_{z,z}$ est nul) et essai de torsion avec **translation bloquée** ($u_{z,z}$ est nul). Nous précisons ultérieurement la façon dont on réalise en pratique ces conditions. Dans le premier cas l'expression (5.1) nous permet de déterminer la raideur en traction, $k_{\varepsilon\varepsilon}$ et le terme de couplage $k_{\theta\varepsilon}$ par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{F_z}{u_{z,z}} \\ k_{\theta\varepsilon} = \frac{M_z}{u_{z,z}} \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Pour le deuxième cas, de la même manière, $k_{\varepsilon\theta}$ et $k_{\theta\theta}$ sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{\varepsilon\theta} = \frac{F_z}{\theta_{z,z}} \\ k_{\theta\theta} = \frac{M_z}{\theta_{z,z}} \end{array} \right. \quad (5.3)$$

A l'échelle inférieure (brins et brins assemblés) on ne réalise que l'essai traction simple (rotation bloquée sans mesure de couple), parce qu'à cette échelle, l'effet des termes de couplage et la raideur de torsion sont négligeables sur la réponse globale du câble, cf. chapitre 3 section 5.3.4.

On remarque ici que les essais sur la fibre et le brin nous donnent une indication du comportement du matériau sans les effets de construction (couplage traction/torsion). Cette restriction disparaît aux échelles supérieures.

Les résultats obtenus pour chacun des constituants sont présentés ci-après.

Avant d'aborder les résultats expérimentaux, nous définissons distinctement quelques notions qui seront utilisées par la suite:

Numéro d'essai : quand on note le numéro d'essai, cela correspond à un essai réalisé sur la même éprouvette plusieurs fois.

Numéro d'éprouvette : lorsque le même essai est réalisé sur différentes éprouvettes, on utilisera le numéro d'éprouvette.

5.7.1 Essais sur fibre

Les essais sur fibres ont été réalisés à l'IFREMER au centre de Brest en utilisant un appareil de type DMA (TA Instruments 2980). Dans cet essai, la fibre est collée sur une fenêtre cartonnée, qui permet d'aligner la fibre et de la positionner dans les mors. Ensuite, on coupe le carton et on sollicite la fibre.

D'abord, les cycles de stabilisation sont imposés sur la fibre et on a constaté que la rigidité axiale devient quasiment stable au deuxième chargement, voir figure 5.6 a). Dans ce cas, le changement de raideur (entre 1^{er} et 2^{ème} cycle) s'explique par l'alignement moléculaire interne de la fibre.

On observe que les résultats d'essais sur des fibres unitaires sont dispersés (voir figure 5.6 b)), cela s'explique par le fait que les diamètres des fibres ne sont pas identiques. En effet, l'observation sur un microscope optique montre que le diamètre des fibres varie de $\pm 20\%$ autour d'une valeur de moyenne de $12\mu\text{m}$. C'est pour cette raison qu'on estime le module d'Young de la fibre à partir de résultats sur un brin, cf. section suivante.

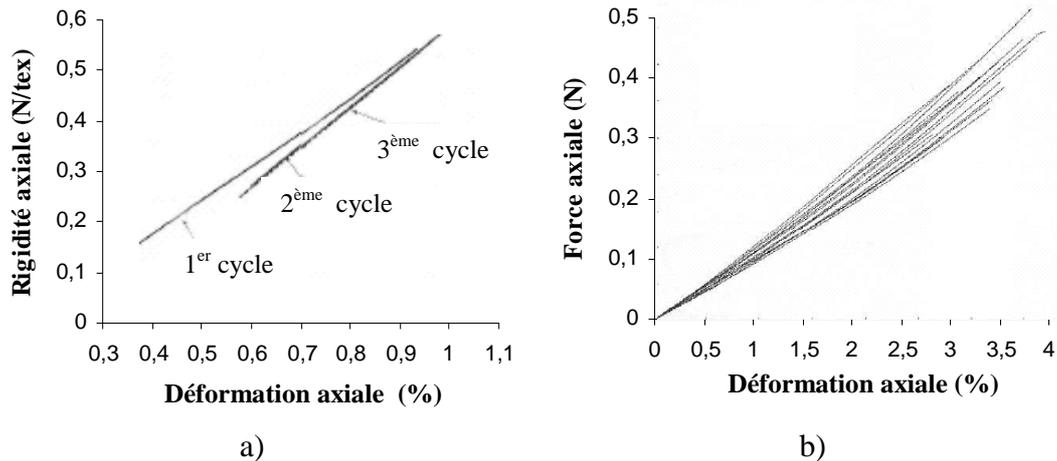


Figure 5.6 : les résultats d'essai sur fibre unitaires : a) les cycles de stabilisation, b) dispersion de résultats.

5.7.2 Essais sur brins et brins assemblés du câble 25T

Dans cette étude, le brin (Twaron 1000) est retenu comme matériau de base.

Chailleux et Davies en 2003 [CHA 2003] ont utilisé les résultats d'essais sur des brins pour identifier le comportement viscoélastique et viscoplastique des fibres d'aramide utilisées dans l'étude actuelle.

Les essais sur les brins et brins assemblés ont été réalisés à l'IFREMER à Brest en utilisant des machines *Instron et Roell & Korthaus*. Pour tous les essais ici, les conditions aux limites sont rotation bloquée aux deux extrémités (traction pure), et pour déterminer la raideur en traction les déplacements mesurés par caméras sont utilisés. Les résultats sont montrés graphiquement sur la figure 5.7.

Cinq éprouvettes de brin ont été testées avec des longueurs initiales de 349 à 355 mm. Pour le brin assemblé du toron, six éprouvettes ont été utilisées et leurs longueurs étaient comprises entre 344 et 352 mm. Ensuite, le même essai a été réalisé sur cinq éprouvettes de brins assemblés de l'âme de longueurs entre 343 à 354 mm. Le nombre d'éprouvettes, leur longueur, les raideurs en traction et les forces à rupture pour les essais sur brins et brins assemblés sont présentés dans le tableau 5.4. Les raideurs en traction sont données par l'équation (5.2)₁. On note ici que ces courbes sont approchées par une droite, et c'est la valeur de la pente dans l'intervalle de [0 à 0.9%] de déformation axiale après mise en place qui fournit la raideur axiale.

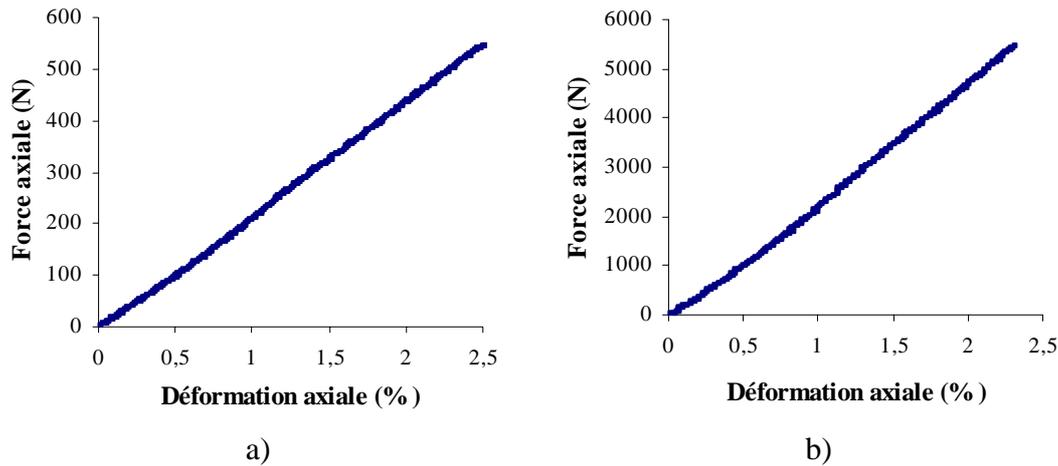


Figure 5.7 : résultats d'essais de traction simple jusqu'à rupture après 5 cycles de mise en place sur a) brin du câble 25T (Twaron 1000) et b) brin assemblé du toron de câble 25T.

Tableau 5.4 : résultats d'essais sur le brin, brin assemblé du toron et brin assemblé de l'âme. Valeurs moyennes et coefficients de variation.

Eprouvette	Nombre d'éprouvettes	Longueur d'éprouvette (mm)	Raideur en traction $k_{\varepsilon\varepsilon}$ (kN)	Force à la rupture (kN)
Brin (Twaron 1000)	5	349 - 355	$21.4 \pm 1\%$	$0.550 \pm 2\%$
Brin assemblé du toron	6	344 - 352	$228.2 \pm 3.6\%$	$5.12 \pm 8\%$
Brin assemblé de l'âme	5	343 - 354	$298.5 \pm 0.8\%$	$6.88 \pm 14\%$

On a constaté que les résultats d'essai sur le brin varient peu, contrairement à ceux de la fibre (cf. section précédente). C'est la raison pour laquelle on a choisi le brin comme constituant à l'échelle la plus petite pour obtenir la raideur du constituant élémentaire du câble. On rappelle ici que les essais sur le brin nous donnent une indication du comportement du matériau sans les effets de construction (le brin est un assemblage parallèle de fibres).

De plus, on observe que les écarts types pour des raideurs de brin assemblés sont plus importants que pour le brin. Cela pourrait être expliqué par le fait que les brins assemblés ont été obtenus du toron en défaisant le câble, ce qui a pour inconvénient d'altérer sa géométrie. Ceci n'est pas le cas pour le brin, qui a été fourni par le constructeur dans son état initial (en effet, les éprouvettes de brin sont obtenues à partir d'une bobine fournie par le constructeur, Teijin/Twaron cf. figure E 1 b), annexe E).

5.7.3 Essais sur le toron et l'âme du câble 25T

Ces essais ont été réalisés à l'IFREMER à Brest sur le banc d'essai de 100 tonnes. Pour tous les essais de ce paragraphe, des éprouvettes avec une longueur de 6 m sont utilisées. Dans un premier temps, les charges ont été introduites par cônes métalliques remplis de résine, mais le toron se décolle de la résine avant que la charge maximale voulue soit atteinte. A l'issue de ces essais, il a été décidé d'abandonner ce mode de fixation. Par la

suite, on utilise donc des cônes avec goupillons et le serrage s'effectue par coincement à l'intérieur du cône, cf. figure 5.4.

Les conditions aux limites sont : rotation bloquée à une extrémité, et émerillon à l'autre extrémité (l'émerillon est un dispositif qui permet au toron de tourner librement dans la direction de son axe).

Un chargement de 5 cycles de stabilisation jusqu'à 1.5T, puis une nouvelle mise en charge jusqu'à 1.5T sont imposés. Aucune rotation n'est observée à l'extrémité de l'émerillon, cet essai peut donc être considéré comme étant à rotation bloquée, soit $\theta_{z,z}$ nul. Au cours de la 6^{ème} mise en charge, on mesure l'allongement du toron avec les caméras.

Il est à noter que dans sa configuration normale, cette machine utilise un capteur de force de 1000 kN, et d'une manière générale, si on utilise ce capteur pour mesurer l'effort axial de toron (inférieur à 30 kN), on a une mauvaise précision. Un capteur de force de 200 kN a donc été ajouté pour obtenir une mesure plus précise. Une fois le capteur changé, les résultats sont satisfaisants, voir figure 5.8, où de plus la raideur est quasiment constante.

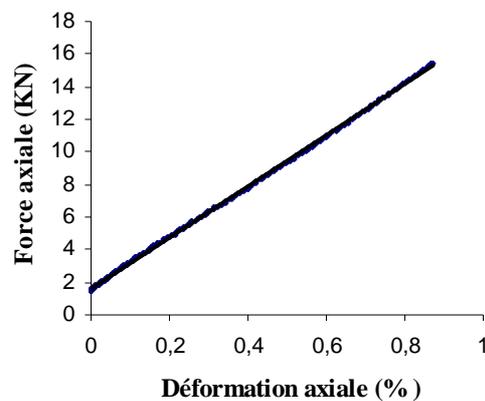


Figure 5.8 : résultats de l'essai de traction sur le toron après mise en place.

Ensuite, pour déterminer le terme de couplage, on charge le toron avec un effort d'une tonne, et puis on applique une rotation à l'extrémité de l'émerillon en maintenant l'allongement constant. On mesure alors l'évolution de l'effort axial en fonction de la rotation imposée. L'évolution de l'effort axial en fonction de la déformation de torsion $\theta_{z,z}$ est donnée figure 5.9. Cette évolution est linéaire, et symétrique. Ces résultats nous permettent d'obtenir le terme de $k_{\epsilon\theta}$ (pente de la courbe) à partir d'équation (5.3)₁.

D'autre part, pour une rotation imposée d'un tour (dans le sens trigonométrique et dans le sens opposé), on mesure la rotation le long du toron. Ces mesures d'angle sont effectuées en collant des repères à différents endroits du toron, et en utilisant un rapporteur. On observe que lorsqu'on impose une rotation à une extrémité, elle se distribue de façon parfaitement linéaire tout le long du toron, ça veut dire que la déformation de torsion est bien constante le long du toron, cf. figure 5.10. Sur la figure 5.10, d et L représentent respectivement la distance à partir de l'extrémité bloquée, et la longueur du câble.

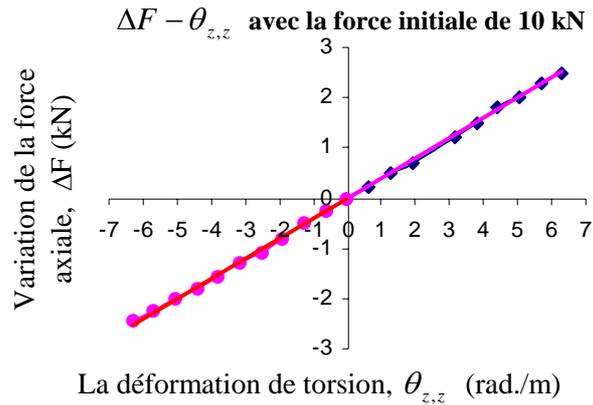


Figure 5.9 : variation de l'effort axial en fonction de la déformation de torsion.

Finalement les torons sont chargés une dernière fois jusqu'à rupture. En total, les essais sont réalisés sur 4 torons du câble 25T. Les résultats sur les deux premiers ne sont pas fiables car les torons ont glissé et décollé de la résine pendant le premier chargement. Si on compare les résultats du toron 4 avec ceux du toron 3, on obtient une faible variation de raideur. De ce point de vue, ces essais peuvent être considérés comme reproductibles. On a réalisé le même essai sur l'âme du câble 25T. Les résultats sont présentés ci-dessous, tableau 5.5.

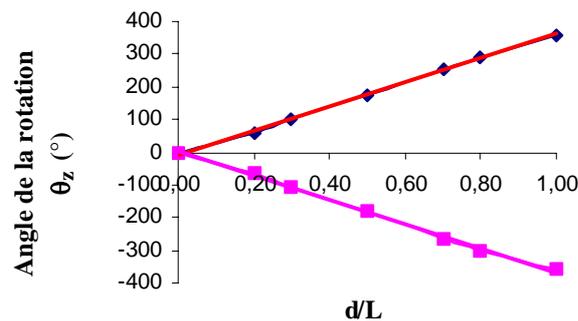


Figure 5.10 : variation des rotations le long du toron.

Tableau 5.5 : résultats d'essais sur le toron et l'âme du câble 25T à l'IFREMER.

Eprouvette	Raideur en traction $k_{\varepsilon\varepsilon}$ (kN)	Terme de couplage $k_{\varepsilon\theta}$ (kN.m)	Force à la rupture (kN)
Toron	1500	0.407	28.2
Ame	1770	----	35

On remarque ici que le nombre d'essais réalisé sur les torons et l'âme n'est pas suffisant pour discuter sur la qualité et la précision des résultats : il n'y a en effet que deux essais sur le toron et un seul essai sur l'âme. Pour avoir des résultats plus fiables, des essais supplémentaires seraient nécessaires. Ils n'ont pas pu être réalisés car nous n'avons pas davantage d'éprouvettes.

5.7.4 Essais sur câble 25T

Comme on l'avait déjà précisé, dans la littérature, les données expérimentales pour les câbles synthétiques sont rares, les quelques références disponibles correspondent aux petits câbles et concernent seulement la raideur en traction. Des études expérimentales sur ce type de câbles sont absolument nécessaires pour valider les modèles analytiques, et en particulier on verra par la suite que des essais de torsion sont essentiels.

Pour vérifier la validité du modèle analytique (1+6) deux séries d'essais ont été réalisées sur le câble 25T. La première série est consacrée à un essai de traction simple qui nous permet d'obtenir la raideur en traction. Cet essai a été réalisé à l'IFREMER. Cet essai étant insuffisant, une deuxième série concernant la caractérisation en traction – torsion, a été menée à l'Ecole des Mines de Paris (L'ENSMP). Ces derniers essais nous ont permis d'obtenir les quatre composantes de la matrice raideur $[K]$ du câble.

5.7.4.1 Essai à l'IFREMER

Le but de ces essais était de déterminer la raideur en traction de câble 25T. Les essais sont effectués sur différentes éprouvettes (câbles) avec une longueur de 8 m, sur le banc d'essai de 100 tonnes à l'IFREMER.

Pour tous les essais, la charge a été introduite par des épissures aux deux extrémités du câble et les conditions aux limites sont rotation bloquée aux deux extrémités. Pour ce faire, les épissures sont fixées entre deux plaques métalliques. Un chargement de 5 cycles de stabilisation jusqu'à 15T, puis une nouvelle mise en charge jusqu'à 15T, sont imposés. Au cours de la 6^{ème} mise en charge, on mesure l'allongement du câble en utilisant deux caméras et un logiciel d'analyse d'image. La force a été enregistrée par un capteur de force de 100 tonnes. Les courbes de *déformation axiale – force axiale* nous permettent d'obtenir la raideur en traction du câble, cf. figure 5.11 a)). On observe des petites ondulations sur cette courbe, qui viennent de la mesure de déformation avec les caméras, car une fois qu'on est passé à un extensomètre (voir le résultat de l'essai à l'ENSMP par exemple, cf. figure 5.11 b)), les résultats sont moins perturbés. La raideur varie peu au cours de l'essai, et on estime la raideur par une droite approchant au mieux cette courbe, dans l'intervalle de déformation [0 1.25%].

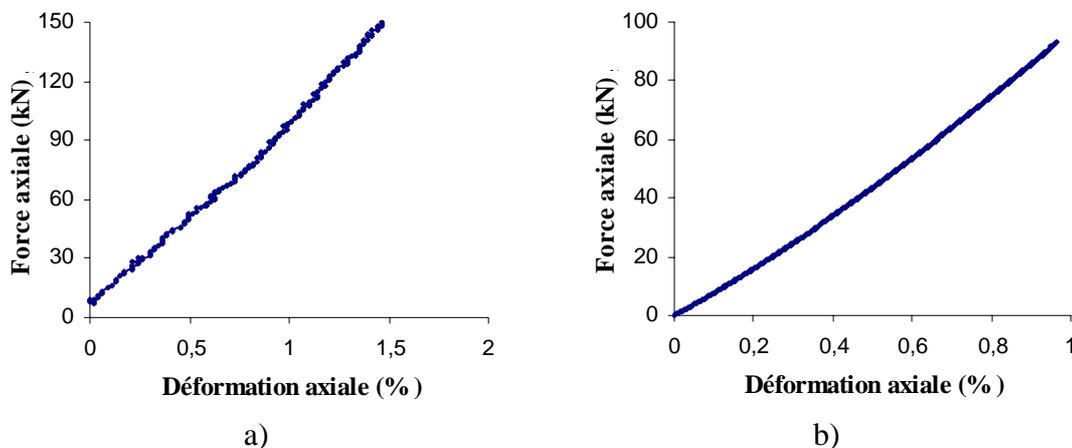


Figure 5.11 : effort axial en fonction de déformation axiale pour le câble 25T en aramid : a) capteur de force de 100T à l'IFREMER et b) capteur de force de 10T à L'ENSMP.

En total, le même essai a été réalisé sur 5 éprouvettes du même câble, nous disposons donc de cinq valeurs. Pour chacun des essais, nous avons tracé les courbes de *déformation axiale – force axiale* dont la pente fournit la raideur en traction du câble, voir équation (5.2)₁. Les raideurs axiales sont présentées ci-dessous, tableau 5.6.

Tableau 5.6 : résultats d'essais de traction en rotation bloquée sur le câble 25T à l'IFREMER.

Numéro d'éprouvette	1	2	3	4	5	moyenne
Raideur en traction $k_{\varepsilon\varepsilon}$ (10^3 kN)	9.71	9.50	10.2	10.6	11.2	$10.2 \pm 7.5\%$
Force à Rupture (kN)	268	256	264	252	249	$258 \pm 3.5\%$

La raideur en traction du câble 25T est évaluée à $10.2 \cdot 10^3 \text{ kN} \pm 7.5\%$, c'est cette valeur qui servira pour mettre en valeur la qualité des modèles analytiques dans le chapitre suivant.

5.7.4.2 Essai à L'ENSMP

L'objectif de ces essais est la détermination du terme de torsion ainsi que des termes de couplage, mais en plus, on peut comparer la raideur axiale obtenue avec celle provenant des essais à l'IFREMER.

Les différents essais sont réalisés ici par une machine de traction - torsion de 10-tonnes sur le câble 25-tonnes. Les premiers essais sont effectués sur la même éprouvette (câble) avec une petite longueur de 200 mm. Pour tous les essais, la charge a été introduite par des cônes métalliques remplis de résine.

Dans chaque essai, l'éprouvette a subi 5 cycles de stabilisation jusqu'à 10-tonnes suivi de la mesure lors de la 6^{ème} mise en charge de :

- l'allongement à partir du déplacement des mors
- la rotation aux deux extrémités du câble
- la force axiale et moment de torsion

Dans un premier temps, la raideur axiale $k_{\varepsilon\varepsilon}$ obtenue pendant la dernière mise en charge sur le câble (3900 kN) est plus petite que la raideur obtenue lors des essais précédents à l'IFREMER ($10.2 \cdot 10^3$ kN). Cet écart était prévisible parce que la mesure de l'allongement est effectuée entre mors, ce qui a pour effet de majorer la déformation.

Par la suite, la mesure de déplacement du câble pendant l'essai a été améliorée. Pour ce faire, un extensomètre attaché au milieu du câble a été utilisé pour mesurer les déplacements. De plus, la longueur d'éprouvette (câble) maximale possible sur cette machine (soit 440mm) a été utilisée. Après ces modifications, la raideur axiale $k_{\varepsilon\varepsilon}$ obtenue pendant la dernière mise en charge sur le câble est de $9.49 \cdot 10^3$ kN. Cette valeur est en accord avec la raideur obtenue lors des essais précédents à l'IFREMER ($10.2 \cdot 10^3$ kN).

Après vérification de la raideur en traction du câble, deux différents types d'essais sont considérés:

- 1^{ère} série : traction avec rotation axiale bloquée ($\theta_z(l) - \theta_z(0) = const.$)
- 2^{ème} série : torsion avec déplacement axial bloquée ($u_z(l) - u_z(0) = const.$)

On peut donc déterminer toutes les composantes de la matrice raideur du câble, \mathbf{K} , à partir des résultats de ces essais, décrits ci-après.

Pour la 1^{ère} série d'essais, on a bloqué la rotation aux extrémités, imposé la force axiale et puis mesuré à la fois la force axiale, la déformation axiale et le moment de torsion induit. En effet, au cours de la 1^{ère} série d'essais, on a $\theta_{z,z} = const.$, donc les pentes des courbes *force axiale – déformation axiale* et *moment de torsion – déformation axiale* donnent respectivement $k_{\varepsilon\varepsilon}$ et $k_{\theta\varepsilon}$. Pour chacun des essais les résultats au cours de la 6^{ème} mise en charge sont présentés tableau 5.7. Les essais sont menés sur la même éprouvette, mais la valeur de $\theta_z(l) - \theta_z(0)$ change en fonction du numéro d'essai.

Tableau 5.7 : résultats d'essai de traction en rotation bloquée sur le câble 25T (ENSMP).

Numéro d'essai	1	2	3	4	5	moyenne
$k_{\varepsilon\varepsilon}$ (10^3 kN)	8.96	9.23	9.34	9.74	10.2	$9.49 \pm 5.9\%$
$k_{\theta\varepsilon}$ (kN.m)	6.03	6.31	6.55	7.06	6,70	$6.53 \pm 7.3\%$

Après avoir dépouillé ces résultats, on a constaté que les raideurs augmentent avec le numéro d'essai. Ceci est dû fait à la différence de l'état initial du câble (il y a des rotations initiales différentes pour chaque essai, la longueur d'éprouvette est petite, 0.44m, la géométrie est donc modifiée par cette rotation initiale).

Il y a un petit écart entre la raideur en traction obtenue à l'ENSMP et celle de l'IFREMER. Cet écart s'explique par le fait que d'une part la longueur initiale de l'extensomètre est trop petite, ce qui est à l'origine d'incertitudes sur les déplacements mesurés. D'autre part, pour les essais à l'ENSMP, on n'a pas le même état initial pour l'éprouvette. En plus, le câble n'est mis en place comme à l'IFREMER (effort maximal de 10T au lieu de 15T).

C'est pourquoi on utilisera par la suite la raideur en traction du câble obtenue à IFREMER comme référence.

Pour la 2^{ème} série d'essais, après avoir appliqué un effort initial de traction, on bloque le déplacement axial, on impose une rotation et puis on mesure en même temps la force axiale induite, la déformation de torsion et le moment de torsion pendant le chargement. On a tracé les courbes de *force axiale – déformation de torsion* et *moment de torsion – déformation de torsion*. Ces courbes sont très bien approchées par une droite, et les valeurs des pentes fournissent respectivement le terme de couplage, $k_{\varepsilon\theta}$, et le terme de torsion, $k_{\theta\theta}$, du câble. En effet, au cours de cet essai, on a $u_{z,z} = const.$, donc les équations (5.3)₁₋₂ donnent respectivement $k_{\varepsilon\theta}$ et $k_{\theta\theta}$. Ces courbes sont données figure 5.12.

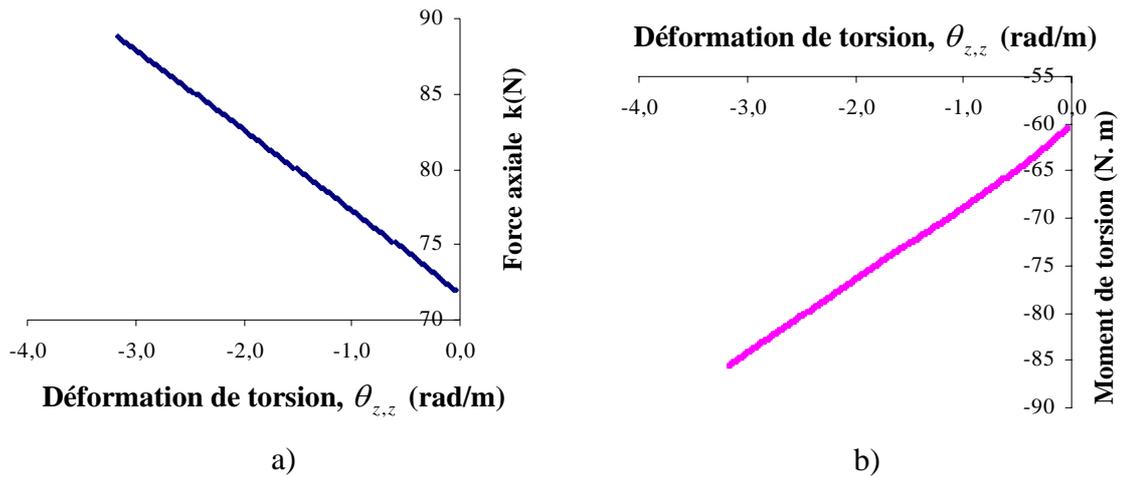


Figure 5.12 : résultats des essais de torsion sur le câble 25T, a) effort axial b) moment de torsion en fonction de la déformation de torsion.

Au total, 6 essais (numérotés de 6 à 11) ont été réalisés pour la 2^{ème} série, respectivement avec une force de traction initiale de 0.7, 5, 20, 40, 60 et 80 kN, les résultats sont présentés ci-dessous, tableau 5.8.

Tableau 5.8 : résultats d'essais de torsion en translation bloquée sur le câble 25T (ENSMP).

N° d'essai	6	7	8	9	10	11
Force initiale (kN)	0.7	5	20	40	60	80
$k_{\varepsilon\theta}$ (kN.m)	3.01	4.06	4.51	5.15	5.45	5.36
$k_{\theta\theta}$ (N.m ²)	3.23	4.33	5.24	6.5	7.36	7.82

On observe que les résultats des essais varient de façon importante, même si les valeurs ont tendance à se stabiliser pour les derniers essais.

Sur cet essai, on ne dispose pas de la mesure de la déformation mesurée à l'extensomètre, on n'a que celle du déplacement entre mors, qui est présentée figure 5.13 a). Même si on a déjà indiqué que cette mesure n'est pas très précise, au vu des variations observées sur cette figure, on suppose qu'au cours de l'essai on n'a pas réussi à respecter la condition $u_{z,z} = \text{const.}$

Il faut donc soit ne pas tenir compte de ces essais, soit en modifier le dépouillement. C'est ce que nous nous proposons de faire ci-après.

On rappelle que la force axiale et le moment de torsion sont donnés par (cf. éq. (5.1)) :

$$\begin{cases} F_z = k_{\varepsilon\varepsilon} u_{z,z} + k_{\varepsilon\theta} \theta_{z,z} \\ M_z = k_{\theta\varepsilon} u_{z,z} + k_{\theta\theta} \theta_{z,z} \end{cases} \quad (5.4)$$

Sachant que les rapports de $\frac{k_{\varepsilon\varepsilon}}{k_{\varepsilon\theta}}$ et $\frac{k_{\theta\varepsilon}}{k_{\theta\theta}}$ sont de l'ordre de 10^3 , on observe qu'une petite

variation de la déformation axiale peut perturber la réponse du câble. Il faut donc tenir compte du fait que $u_{z,z}$ n'est pas constant.

Pour ce faire, on va d'abord déterminer la valeur de $u_{z,z}$ sur cet essai en utilisant l'équation (5.4)₁. En effet, dans cette équation, les mesures sur cet essai de l'effort axial et de la déformation de torsion sont connues, et on prend pour $k_{\varepsilon\varepsilon}$ et $k_{\theta\varepsilon}$ les valeurs mesurées lors de l'essai précédent (tableau 4.7).

$u_{z,z}$ étant ainsi déterminé, on va utiliser l'équation (5.4)₁, en supposant que la matrice raideur est symétrique, soit :

$$k_{\varepsilon\theta} = k_{\theta\varepsilon} = 6.53 \text{ kN.m}$$

Finalement, cette équation devient :

$$M_z = \frac{k_{\theta\varepsilon}}{k_{\varepsilon\varepsilon}} F_z + \left(k_{\theta\theta} - \frac{k_{\theta\varepsilon}^2}{k_{\varepsilon\varepsilon}} \right) \theta_{z,z} \quad (5.5)$$

Ceci montre que la pente de la courbe moment de torsion en fonction de la déformation de torsion, doit être corrigée pour obtenir la raideur de torsion $k_{\theta\theta}$.

En procédant ainsi, on obtient les valeurs données tableau 5.9 pour la raideur de torsion : on constate que les résultats modifiés varient moins que les résultats initiaux (dans lesquels $u_{z,z}$ était supposé nul), cf. figure 5.13 b).

On remarque que compte tenu de ce mode de dépouillement, il n'est pas possible de mesurer à partir de cet essai le terme de couplage $k_{\varepsilon\theta}$.

Tableau 5.9 : raideur en torsion corrigée.

N° d'essai	6	7	8	9	10	11
$k_{\theta\theta}$ (N.m ²)	5.69	5.88	6.48	7.34	8.05	8.55

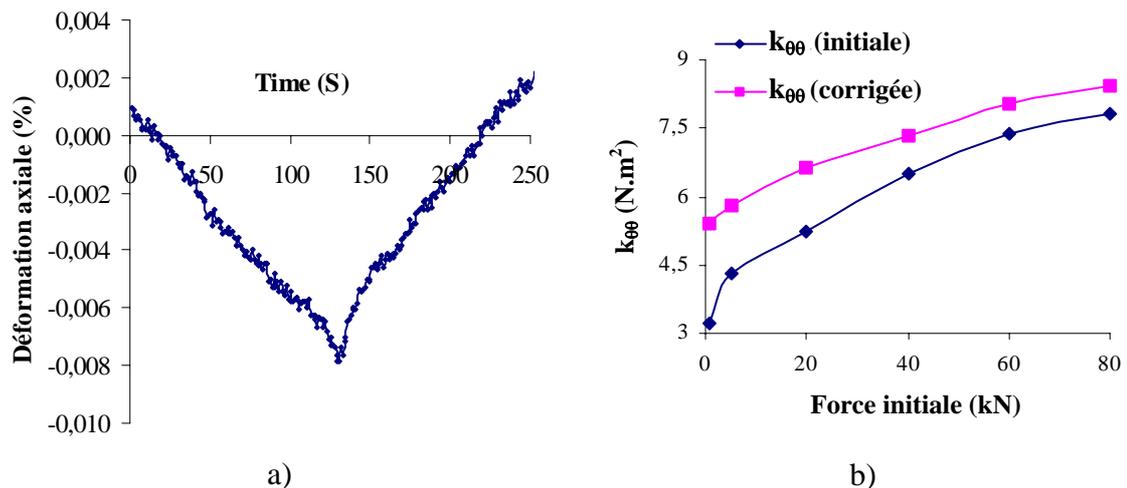


Figure 5.13 : a) variation de la déformation axiale entre mors pendant un cycle d'essai de torsion et b) raideur de torsion $k_{\theta\theta}$ (valeurs initiales et modifiées) en fonction de la force initiale.

Enfin, pour l'essai de torsion, on remarque qu'en pratique, on utilise la distance entre les deux extrémités des cônes comme longueur effective de l'éprouvette pour déterminer la

déformation de torsion. Mais en réalité, (voir figure 5.4), on peut sous-estimer la longueur effective si la prise de résine n'est pas de très bonne qualité. Il est donc possible que le terme de torsion $k_{\theta\theta}$ soit sous-évalué. Pour minimiser cette incertitude, il serait préférable d'utiliser une éprouvette plus longue lors des prochains essais, mais la longueur est limitée par les dimensions de la machine.

5.7.4.3 Bilan

On a réalisé deux séries d'essai sur le câble 25T :

- essai de traction simple sur des éprouvettes de 8m à l'IFREMER
- essais de traction et de torsion sur une éprouvette de 0.44m à l'ENSMP.

Pour l'essai de traction, il y avait un écart entre la raideur en traction obtenue à l'ENSMP et celle de l'IFREMER. On considère que les résultats de l'IFREMER sont plus précis car la longueur de l'éprouvette à l'IFREMER est 18 fois plus grande que celle de l'ENSMP ainsi que la longueur utilisée pour la mesure des déplacements (5m à l'IFREMER entre les deux cibles visées par les caméras, et 0.0515 m pour l'extensomètre à l'ENSMP).

Pour l'essai de torsion, au départ les résultats semblaient être dépendants de la force initiale de traction. Ceci était dû en fait à un mauvais respect, lors de l'essai, de la condition d'allongement constant. On a pris en compte cet effet afin d'obtenir des résultats plus précis.

Finalement, les résultats expérimentaux pour le câble 25T en aramide qui serviront pour la validation du modèle analytique au chapitre suivant sont présentés ci-dessous, tableau 5.10.

Tableau 5.10 : résultats d'essais sur le câbles 25T en aramide.

	$k_{\varepsilon\varepsilon}$ (10^3 kN)	$k_{\theta\varepsilon}$ (kN.m)	$k_{\theta\theta}$ (N.m ²)
Câble 25T	10.2	6.53	8.55

5.7.5 Essais sur câble 205T

Deux types d'essai sur le câble 205T ont été réalisés au LCPC. Dans un premier temps, on a réalisé un essai de traction simple sur une éprouvette de 12 m en mesurant la force axiale et la déformation du câble. Ce test a été réalisé au banc d'essai de 3000 tonnes. Un chargement de 5 cycles de stabilisation jusqu'à 100 tonnes, puis une nouvelle mise en charge jusqu'à 100 tonnes ont été imposés. Au cours de la 6^{ème} mise en charge, on obtient la raideur en traction du câble.

Pour chacun des essais, nous avons tracé les courbes de *déformation axiale – force axiale* dont la pente définit la raideur en traction du câble.

Dans un deuxième temps on a refait un essai de traction simple sur une éprouvette beaucoup plus longue (46 m) au banc d'essai de 500 tonnes au LCPC. Cette fois-ci, on mesure la force axiale, la déformation axiale et le moment de torsion induit par la traction

du câble. Pour chacun des essais, nous avons tracé les courbes de *déformation axiale – force axiale* et *déformation axiale – moment de torsion*, ces courbes sont très bien approchées par une droite, et les valeurs des pentes fournissent respectivement, la raideur en traction, $k_{\varepsilon\varepsilon}$ et le terme de couplage, $k_{\theta\varepsilon}$, du câble. Ces raideurs sont obtenues au cours de la 6^{ème} mise en charge. Les résultats sont présentés graphiquement figure 5.14.

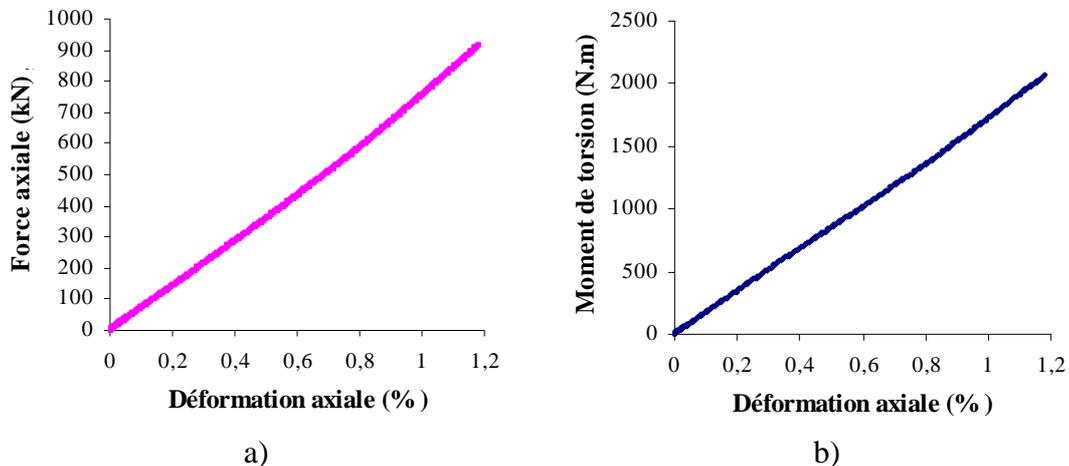


Figure 5.14 : résultats d'essai sur le câble 205T, a) force axiale en fonction de la déformation axiale, b) moment de torsion induit en fonction de la déformation axiale.

Pour les deux cas (éprouvettes de 12 et 46m), la charge a été introduite par épissures aux deux extrémités du câble, et les conditions aux limites sont de type rotation bloquée aux deux extrémités. Pour ce faire, les épissures sont fixées entre deux plaques métalliques, cf. figure 5.15 a). La déformation du câble a été définie à partir d'extensométrie et corrélée par des mesures de provenant de caméras. La force axiale est obtenue par le capteur de force du vérin (5000kN) et vérifiée par un capteur de force de 3000 kN qui a été installé sur le côté fixe. Le moment de torsion a été enregistré par un capteur de couple (torque – mètre) de 10000 N.m, installé au côté fixe, cf. figure 5.15 b).

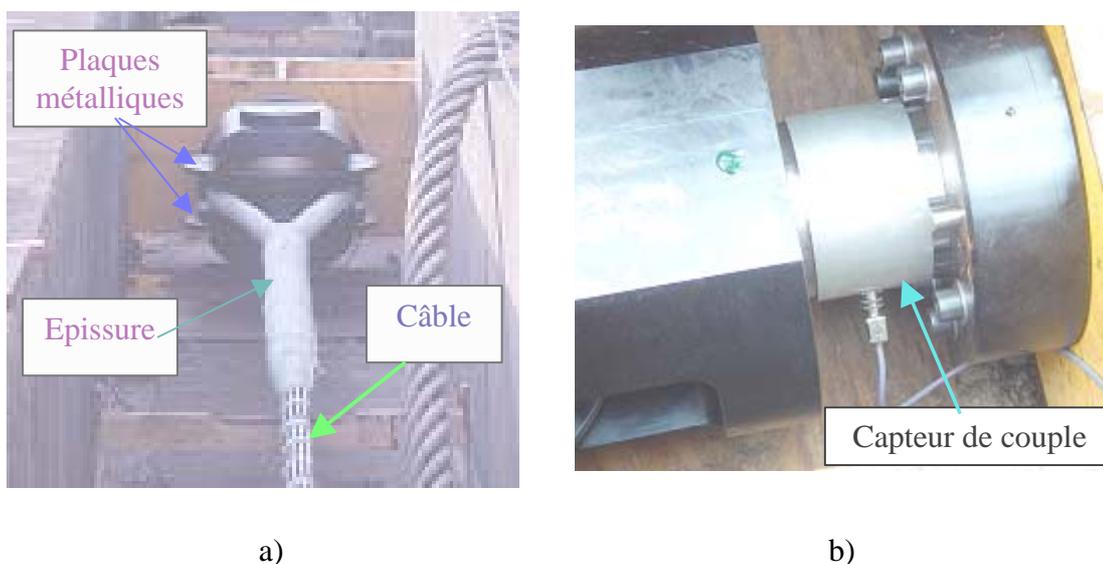


Figure 5.15 : extrémité du banc d'essai de 500T, a) épissure et plaques métalliques b) capteur de couple installé du côté fixe.

Au total, 5 essais ont été réalisés pour la 2^{ème} série d'essais, nous disposerons donc de 5 valeurs pour faire la moyenne et voir si elles sont compatibles, cf. tableau 5.11.

Tableau 5.11 : résultats d'essai en rotation bloquée sur le câble 205T.

N° d'essai	1	2	3	4	5	moyenne
Raideur en traction $k_{\varepsilon\varepsilon}$ (10^3 kN)	79.1	81.0	81.9	83.1	83.8	$81.8 \pm 2.8\%$
Terme de couplage $k_{\theta\varepsilon}$ (kN.m)	175	179	181	183	185	$181 \pm 2.8\%$
$\frac{k_{\varepsilon\varepsilon}}{k_{\theta\varepsilon}}$ (m^{-1})	453	453	453	454	453	$453 \pm 0.1\%$

Après avoir dépouillé ces résultats d'essai sur le câble 205T, on a constaté que les raideurs augmentent légèrement avec le nombre de cycles. Cela peut être expliqué soit par le fait que la raideur n'est pas stable après cinq cycles soit par la précision de la mesure. Signalons ici que pour l'essai du câble 205T sur le banc 3000T des cycles supplémentaires entre 10 et 30% de la charge de la rupture ont été réalisés mais les résultats ont montré que la réalisation de ces cycles supplémentaires ont résulté en un changement de moins de 1% de la raideur initiale du câble. Pour l'instant on suppose donc que ce faible écart vient de la mesure. Mais, à l'avenir, il serait souhaitable de faire des cycles supplémentaires pour définir son origine.

Finalement la raideur en traction et le terme de couplage du câble 205T sont évalués respectivement de $81.8 \cdot 10^3$ kN $\pm 2.8\%$ et 181 kN.m $\pm 2.8\%$. Les écarts pour les différents essais sont faibles, donc ces essais sont reproductibles. On note que ces valeurs seront utilisées pour évaluer la qualité des modèles analytiques dans le chapitre suivant.

5.7.6 Bilan

Dans ce paragraphe, on a présenté les résultats d'essais réalisés sur différentes structures. Pour les échelles inférieures (brin, brins assemblés), les essais se réduisent à la traction simple (obtention de la raideur en traction) car les autres raideurs jouent un rôle négligeable dans la réponse du câble. Pour le toron et l'âme du câble 25T, la raideur en traction a également été obtenue expérimentalement. En outre, pour le toron, le terme de couplage traction/torsion a été mesuré. Pour le câble 25T, les essais de traction et de torsion ont été réalisés et toutes les composantes de la matrice raideur du câble ont pu être évaluées à partir des résultats.

En plus, un essai de traction sur le câble 205T a été réalisé pour mesurer la raideur en traction et le terme de couplage. On rappelle que le constituant de base de ce câble est le Twaron 1000 (même brin que sur le câble 25T) pour lequel on dispose de résultats d'essais.

5.8 Conclusion

Ce chapitre est consacré à la présentation des essais réalisés sur les différentes structures afin de disposer des données expérimentales nécessaires pour confronter les modèles développés précédemment avec l'expérience.

On rappelle ici que dans la littérature les données expérimentales pour les câbles synthétiques sont rares, et que les modèles analytiques sont également peu nombreux. De plus, la complexité de la géométrie ne nous permet pas d'envisager l'utilisation d'un modèle EF 3D en tant qu'outil complémentaire des essais, comme dans le cas métallique. Pour ces raisons, les études expérimentales sur les câbles sont absolument nécessaires pour mieux comprendre leur comportement et pour mettre en place des modèles validés aux différentes échelles.

Deux câbles sont étudiés : 25T et 205T, qui sont fabriqués avec des fibres en aramide. Et pour faire des essais aux différentes échelles des constituants du câble, plusieurs dispositifs expérimentaux ont été mis en oeuvre.

Dans le cas du câble 25T, les essais ont été réalisés sur tous ses constituants ainsi que sur le câble. Pour le brin, le brin assemblé, le toron et l'âme, la raideur en traction a été évaluée, et pour le toron, le terme de couplage a été aussi déterminé. Pour le câble lui-même, toutes les composantes de la matrice raideur ont été mesurées.

Pour le câble 205T, seul un essai de traction sur le câble a été réalisé. Cet essai nous a permis d'obtenir expérimentalement la raideur en traction et le terme de couplage du câble.

Les raideurs obtenues par les essais présentés dans ce chapitre pour plusieurs structures nous permettront de confronter les modèles analytiques aux expériences pour différentes échelles (voir chapitre 6). Les incertitudes sur les différentes mesures ont été évaluées, la réalisation d'essais plus nombreux permettrait de les réduire.

Chapitre 6. Confrontations Modèles / Expériences

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, on cherchera à évaluer la qualité des deux modèles développés précédemment (modèle continu et modèle 1+6) ainsi que celui du logiciel FRM. Pour ce faire, on applique les modèles théoriques à différentes échelles, jusqu'au câble. Les résultats obtenus sont alors comparés aux résultats expérimentaux.

6.2 Les données expérimentales

Pour pouvoir appliquer les modèles théoriques, les données nécessaires sont la géométrie et les propriétés mécaniques des composants (sous – structures) de la structure. Comme on l'avait déjà précisé au chapitre 5, les données géométriques fournies par le constructeur sont insuffisantes. Les paramètres inconnus seront déterminés par analyse d'image ou par mesure directe. De même, les propriétés mécaniques obtenues par essais au chapitre précédent ne sont pas complètes pour tous les composants. On présentera donc la démarche pour obtenir les données manquantes, à partir du logiciel FRM.

6.2.1 Caractéristiques géométriques

Comme on vient de le rappeler, les données géométriques fournies par le constructeur, voir les tableaux 5.1 et 5.2, sont incomplètes.

Les données manquantes sont le diamètre du brin, du brin assemblé et du câble, le pas du câble, l'arrangement des brins dans le brin assemblé et celui des brins assemblés dans le toron. Au chapitre 3, nous avons montré que même si les données étaient imprécises pour le brin ou le brin assemblé, cela influençait de façon négligeable le comportement à l'échelle supérieure (brin assemblé et toron). Le problème est différent pour le diamètre et le pas du câble, et son angle d'enroulement.

6.2.1.1 Angle d'enroulement

A partir des images enregistrées par la caméra numérique, il est possible de mesurer l'angle d'enroulement des constituants (brin assemblé dans le toron et toron dans le câble).

Par exemple, les angles d'enroulement mesurés pour le toron du câble 25T sont rassemblés dans le tableau 6.1 ci-dessous, où les points 1 à 9 sont espacés tous les dixièmes de longueur du toron.

Tableau 6.1 : mesure de l'angle d'enroulement du brin assemblé dans le toron du câble 25T à partir des images de la caméra

Points		1	2	3	4	5	6	7	8	9
α°	Avant charge	8.72	14.33	9.91	6.50	13.20	12.27	9.22	11.56	12.24
	Sous charge	8.31	9.98	8.28	9.17	9.21	10.92	9.95	8.66	11.53

Tout d'abord, il faut noter que les mesures de l'angle sont difficiles à partir des images, car le contour d'un constituant est une courbe. En pratique, on prend la tangente à cette courbe au milieu du constituant pour estimer l'angle d'enroulement, cf. figure 6.1.

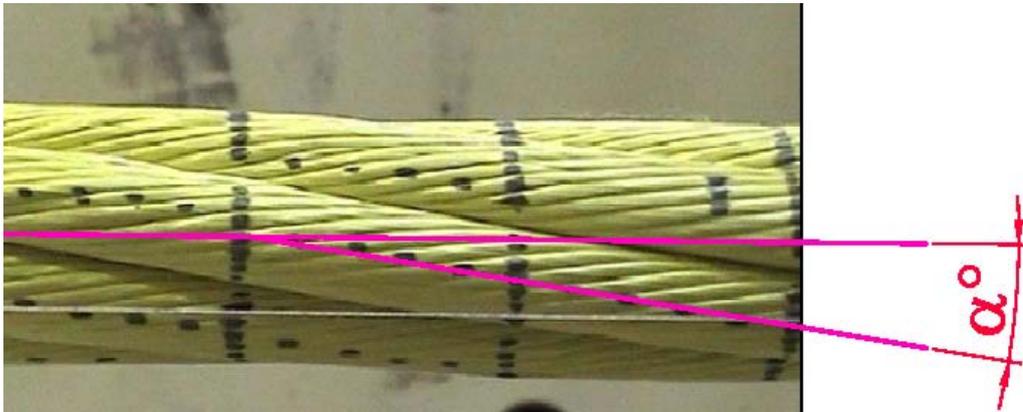


Figure 6.1 : câble 205T sous le chargement de 2% de l'effort à la rupture

Les résultats du tableau 6.1, et en particulier les écarts obtenus sur les valeurs aux différents points de mesure, mettent en évidence cette difficulté. De même, en traction, on devrait normalement obtenir un angle plus faible que dans l'état non chargé, ce qui n'est pas toujours le cas.

Outre ce problème, le toron ne présente pas une homogénéité le long de son axe. Ceci est dû au procédé d'obtention du toron (en le déroulant du câble) qui modifie sa géométrie.

La valeur moyenne de l'angle est de 10.88° après mise en place, et de 9.56° après application de la charge.

Le constructeur fournit pour le toron les valeurs du pas et du diamètre. Ces données conduisent à la valeur de 7.9° pour l'angle d'enroulement du toron.

On note ici que la mesure de l'angle n'est pas très précise, ce qui est en partie lié au fait que les torons ont une géométrie altérée (car on les déroule du câble). Lors des prochains essais, il serait préférable de mesurer le pas et le diamètre du toron plutôt que l'angle d'enroulement (ils sont plus faciles à mesurer).

Compte tenu des problèmes rencontrés, c'est la valeur de l'angle donnée par le constructeur qui sera utilisée dans les modèles.

La mesure de l'angle a cependant été effectuée sur un autre cas, à savoir le câble de 25T. Cette fois-ci, la dispersion des résultats était plus faible, cf. tableau 6.2.

On en déduit une valeur moyenne de l'angle d'enroulement pour le câble de 25T de 13.1° (pas de donnée constructeur sur cette valeur).

Tableau 6.2: mesure de l'angle d'enroulement du toron dans le câble 25T à partir des images de la caméra.

Numéro d'image	1	2	3	4	5	moyenne
α°	13.86	12.58	12.34	13.17	13.73	$13.14 \pm 5.8\%$

6.2.1.2 Diamètre et pas

A l'échelle du câble, les données fournies par le constructeur sont le diamètre de l'âme D_c et des torons D_w . Au vu de la figure 6.1, qui montre le câble 205T sous charge (à 2% d'effort à la rupture), il est plausible de supposer que l'âme et les torons ont une section circulaire. On en déduit alors que le diamètre du câble est donné par :

$$D_{\text{câble}} = D_c + 2 D_w \quad (6.1)$$

et est donc calculable à partir des données constructeur.

En ce qui concerne, le pas et l'angle d'enroulement du câble, ils sont reliés par :

$$P = \frac{\pi (D_c + D_w)}{\tan \alpha} \quad (6.2)$$

Sachant que D_c et D_w sont des données constructeur, on peut obtenir le pas à partir de la mesure de l'angle ou inversement.

En pratique, on a également effectué des mesures sur le diamètre du câble. On pourra constater que l'on a volontairement effectué des mesures redondantes, pour contrôler la cohérence des données avec les relations précédentes.

Mesure du diamètre

La mesure du diamètre du câble synthétique est effectuée avec un pied à coulisse. Cette mesure est délicate, cf. figure 6.2.

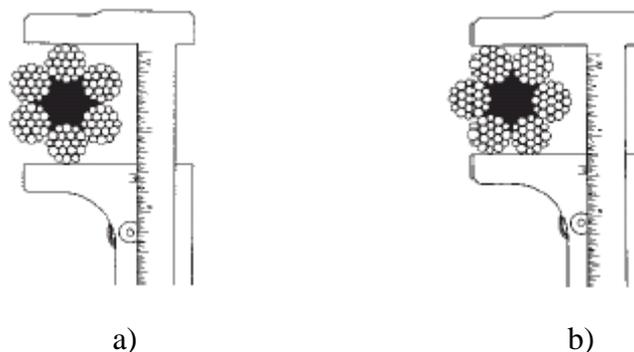


Figure 6.2 : mesure du diamètre du câble, a) correcte b) incorrecte.

De cette façon, le diamètre est évalué à $50 \text{ mm} \pm 2\%$ pour le câble 205T, ce qui est en accord avec la mesure obtenue à partir de l'analyse d'image.

Si on utilise la formule (6.1) et les données constructeurs pour D_c et D_w , on obtient la valeur de 57.6mm, soit un écart important avec la valeur mesurée. C'est la valeur de 50mm qui sera utilisée dans le modèle pour comparer aux résultats expérimentaux.

L'analyse d'image, sur le câble de 25T, conduit à un diamètre de 16.5 mm, alors que les données constructeurs avec la formule (6.1) fournissent la valeur de 19.2 mm.

Mesure du pas

On mesure le pas avec un mètre à partir de la distance entre 2 points d'un même constituant, les points sont alors séparés par un tour d'hélice. Pour une structure 1+6, avec 6 torons, on procède comme indiqué sur la figure 6.3.

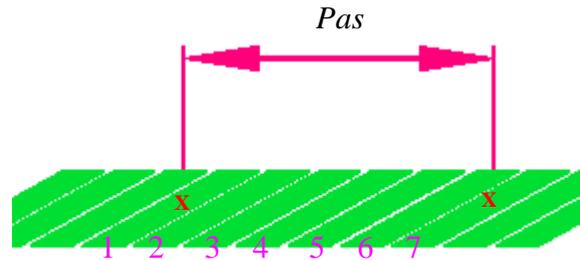


Figure 6.3 : pas sur un câble de construction 1+6.

Le pas ainsi obtenu pour le câble 205T est de 500 mm \pm 2%. Cette valeur est en accord avec celle obtenue par une mesure basée sur le même principe à partir de l'analyse d'image.

6.2.1.3 Bilan

Comme indiqué en introduction à cette section 6.2.1, si le manque de données n'est pas critique aux échelles inférieures, il n'en est pas de même à l'échelle du câble. A ce niveau, on a mis en évidence ici le manque de cohérence entre les données géométriques constructeur et des valeurs mesurées. Cela signifie qu'il est prudent de vérifier ces données, ou encore que la relation (6.1) (qui repose sur certaines hypothèses) n'est pas valable. Il faut donc mesurer des données objectives, qu'il importe ensuite de transcrire correctement pour les utiliser dans les modèles.

Finalement les données mesurées (par analyse d'image ou mesure directe) qui serviront par la suite dans les modèles théoriques à l'échelle du câble sont les suivantes :

Câble 25T : angle d'enroulement : 13.1°, diamètre : 16.5 mm

Câble 205T : pas : 500 mm, diamètre : 50 mm

Les autres données géométriques nécessaires pour les modèles théoriques sont reprises des tableaux 5.1 et 5.2.

6.2.1.4 Etude de sensibilité

Comme nous venons de le voir, il est difficile de mesurer l'angle d'enroulement et le diamètre du câble. Une étude sur la sensibilité du modèle analytique 1+6 à l'incertitude sur ces paramètres est donc menée dans ce paragraphe.

La sensibilité du modèle au diamètre et à l'angle d'enroulement du câble est étudiée de façon indépendante. On détermine la matrice raideur pour un diamètre constant en faisant varier α (13.1° \pm 20%). Et de même pour le diamètre pour un angle constant. Les résultats pour le diamètre constant et l'angle constante sont présentés respectivement sur les figures 2 a) et 2b).

Les résultats, cf. figure 6.4, montrent qu'une variation de 20% sur l'angle d'hélice ou le diamètre a très peu d'influence sur la raideur en traction, une influence de l'ordre de 25% sur les termes de couplages et de 50% environ sur le terme de torsion.

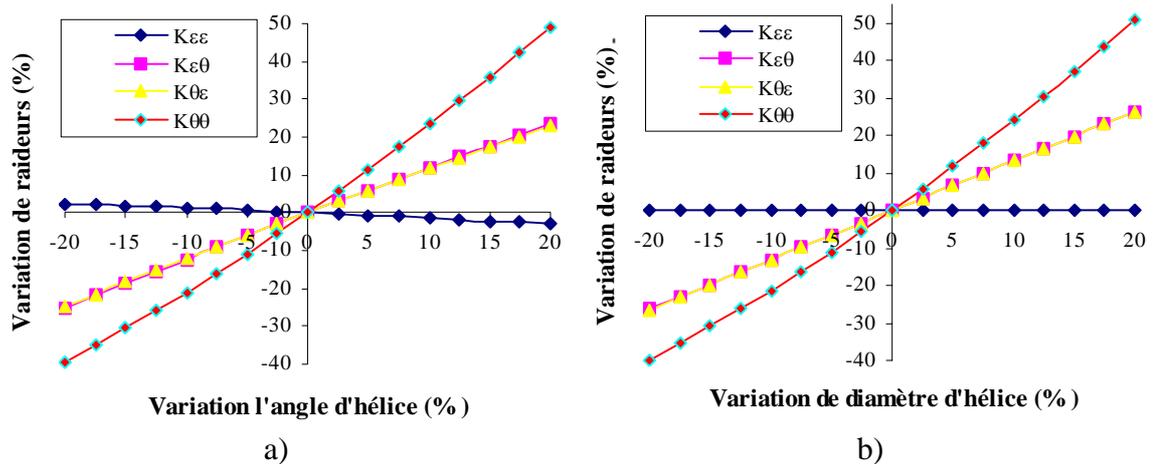


Figure 6.4 : a) variations de raideurs en fonction de la variation de l'angle d'hélice b) variations de raideurs en fonction de la variation du diamètre d'hélice.

Compte tenu des résultats ci-dessus, on peut dire que l'effet de l'incertitude des mesures est négligeable sur la raideur axiale, est important sur les termes de couplages et devient critique sur la raideur en torsion. Donc, il faut mesurer ces paramètres de façon la plus précise possible notamment pour le comportement en torsion. Pour ce faire, on utilise à la fois l'analyse d'image et la mesure directe sur le câble, nous disposons alors de deux valeurs et on peut les contrôler et voir si elles sont compatibles.

De plus, en considérant la facilité de mesurer le diamètre et le pas par rapport à la mesure directe de l'angle d'enroulement, il est préférable d'évaluer l'angle d'enroulement à partir de ce diamètre et du pas en utilisant la relation (6.2).

6.2.2 Caractéristiques mécaniques

Le chapitre précédent a présenté la détermination par essais d'une partie des caractéristiques mécaniques.

Comme il y a beaucoup d'échelles différentes, réaliser des essais sur tous les constituants serait très coûteux et d'autre part, pour les échelles inférieures, la raideur en traction a une influence prédominante sur la réponse globale du câble (l'influence des autres composants de la matrice raideur est négligeable). C'est la raison pour laquelle nous avons réalisé des essais de traction simple sur les composants des échelles inférieures (brin et brin assemblé) tandis que pour les échelles supérieures (câbles), des essais de traction – torsion sont réalisés.

Les raideurs disponibles à partir des résultats d'essais, pour le câble 25T et ses constituants, sont rassemblées dans le tableau 6.3. On note ici que la valeur de $k_{\varepsilon\theta}$ pour le câble 25T dans le tableau 6.3 (en gras), n'est pas la valeur expérimentale (on a supposé que la matrice raideur est symétrique, voir section 5.7.4.2), on ne compare donc pas, par la suite, les modèles analytiques avec l'expérience pour cette raideur.

Tableau 6.3 : résultats expérimentaux disponibles pour le câble 25T.

Câble 25T				
Structure	$k_{\varepsilon\varepsilon}$ (kN)	$k_{\varepsilon\theta}$ (kN.m)	$k_{\theta\varepsilon}$ (kN.m)	$k_{\theta\theta}$ (N.m ²)
Câble 25T	10.2 10 ³	6.53	6.53	8.55
Ame				
Structure	$k_{\varepsilon\varepsilon}$ (kN)	$k_{\varepsilon\theta}$ (kN.m)	$k_{\theta\varepsilon}$ (kN.m)	$k_{\theta\theta}$ (N.m ²)
Âme	1770	----	----	----
Brin assemblé	298.5	----	----	----
Brin (twaron1000)	21.4	----	----	----
Toron				
Structure	$k_{\varepsilon\varepsilon}$ (kN)	$k_{\varepsilon\theta}$ (kN.m)	$k_{\theta\varepsilon}$ (kN.m)	$k_{\theta\theta}$ (N.m ²)
toron	1500	0.407	----	----
Brin assemblé	228.2	----	----	----
Brin (twaron1000)	21.4	----	----	----

En théorie, on pourrait partir de la raideur en traction du brin et utiliser successivement les modèles analytiques pour aller jusqu'au câble (cf. conclusion du chapitre 2). Le problème est qu'à chaque échelle on introduit une erreur de modélisation, qui se cumule au fur et à mesure qu'on monte dans les échelles. Il est donc préférable, à chaque échelle, d'utiliser le comportement déterminé expérimentalement à l'échelle inférieure. Pour les raideurs expérimentales manquantes, on complétera les résultats expérimentaux en utilisant le logiciel FRM. En pratique, par exemple, on change le comportement du constituant de base (brin) pour que la raideur en traction donnée par FRM soit identique à celle obtenue par l'expérience pour le brin assemblé. Les autres composantes de la matrice raideur calculées par FRM sont ensuite utilisées comme données d'entrée pour la modélisation du toron.

On rappelle que ces données n'ont pas une influence significative sur la réponse globale des câbles, surtout sur la raideur en traction.

Pour le câble 205T les seules données expérimentales disponibles sont la raideur en traction du brin (les brins sont identiques pour les deux câbles : Twaron 1000), la raideur en traction du câble et le terme de couplage du câble. Donc ici, tous les résultats analytiques seront calculés à partir de cette raideur. Le tableau 6.4 présente les résultats expérimentaux disponibles pour le câble 205T.

Tableau 6.4 : résultats expérimentaux disponibles pour le câble 205T.

Câble 205T				
Structure	$k_{\varepsilon\varepsilon}$ (kN)	$k_{\varepsilon\theta}$ (kN.m)	$k_{\theta\varepsilon}$ (kN.m)	$k_{\theta\theta}$ (N.m ²)
Câble 205T	81.8 10 ³	----	180.59	----
Brin (twaron1000)	21.4	----	----	----

6.3 Modèle continu

Dans ce paragraphe, la validité du modèle continu est étudiée. Les constituants compatibles avec le modèle continu sont les suivants : les brins assemblés des câbles 25T et 205T, le toron et l'âme de câble 205T. Par la suite, on va appliquer les modèles théoriques à ces structures et les résultats obtenus seront comparés à ceux de l'expérience.

6.3.1 Brin assemblé du toron et de l'âme du câble 25T

Ici, on présente les résultats pour les brins assemblés de l'âme et du toron de câble 25T. Pour ces brins assemblés, les données constructeur sont le nombre de brins (16 et 12 respectivement pour l'âme et le toron) et le pas du brin assemblé (58,8 mm et 52,6mm pour l'âme et le toron), mais on ne connaît pas son rayon extérieur. D'autre part, pour le brin, on connaît sa raideur élastique notée k_b , (obtenue par l'expérience) ainsi que le rayon, r_b , cf. section 3.5.3.

Les données d'entrée pour le modèle continu et le logiciel FRM sont les suivantes, cf. section 3.5.3.1 :

- raideur en traction du brin : $k_b = 21.4 \text{ kN}$
- diamètre du brin : 0.572 mm (ce qui correspond à un arrangement en quinconce des fibres) ;
- Packing Factors : 0.966 et 0.953 respectivement pour les brins assemblés de l'âme et du toron.

La figure 6.5 compare graphiquement les différents résultats des modèles (continu et FRM) avec ceux des essais sur les brins assemblés de l'âme et du toron de câble 25T.

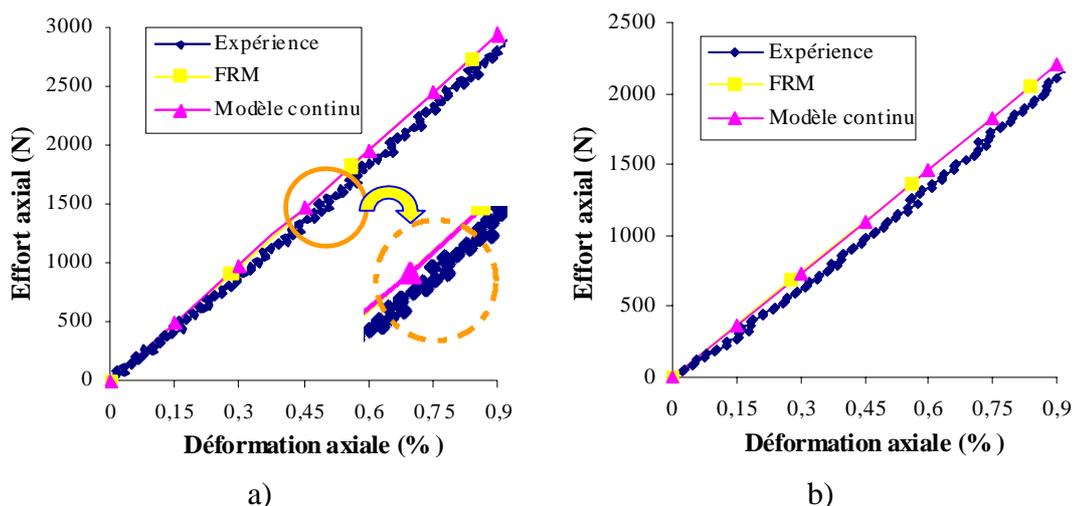


Figure 6.5 : comparaison des modèles avec l'expérience sur le câble 25T : a) brin assemblé de l'âme ; b) brin assemblé du toron.

On observe que les résultats expérimentaux sont quasiment linéaires, et donc, pour évaluer la qualité des modèles analytiques, il suffit de comparer les pentes des courbes

figure 6.5. Pour le brin assemblé de l'âme, les pentes sont de 298.5 , 336.7 et 336.9 kN respectivement pour l'expérience, le modèle continu et le logiciel FRM. De même pour le brin assemblé du toron, on obtient 228.2, 252.7 et 252.6 kN. Les incertitudes sur les résultats expérimentaux sont respectivement $\pm 3.6\%$ et $\pm 0.8\%$ pour les brins assemblés du toron et de l'âme.

Il apparaît que les résultats du modèle continu coïncident avec ceux du logiciel FRM. Par contre il y a un écart de 11.4% et 9.7% respectivement entre les théories et l'expérience pour les brins assemblés de l'âme et du toron. D'après la forme des courbes expérimentales (voir figure 6.5), il apparaît une certaine variabilité des mesures. Celle-ci provient des mesures de déplacement, en effet les déplacements des marqueurs sur le brin sont très faibles. On note qu'ici on néglige cette variation sur la raideur et on prend la pente des courbes dans l'intervalle de [0 à 0.9%].

On rappelle ici que pour le brin assemblé, les termes de couplages ainsi que le terme de torsion n'ont pas d'influence significative sur la réponse globale du câble. Cette confrontation théorie/expérience ne concerne donc à cette échelle que la raideur en traction.

6.3.2 *Toron du câble 205T*

D'une manière générale, le modèle continu et le logiciel FRM conduisent à des raideurs de traction très proches. Par contre, comme nous l'avons montré au chapitre 3, pour les autres composantes de la matrice raideur, et en particulier le terme de torsion, ils fournissent des valeurs différentes.

L'âme et le toron du câble 205T conviennent pour la confrontation des modèles continu et FRM, car ils ont une raideur de torsion importante, et une géométrie adaptée au modèle continu (assemblage d'un grand nombre de constituants torsadés : 42 brins assemblés).

Malheureusement, les résultats expérimentaux sont disponibles uniquement pour le brin et le câble, cf. tableau 6.4. La seule confrontation possible est donc la comparaison des résultats expérimentaux sur le câble 205T avec ceux obtenus par le logiciel FRM et par les modèles analytiques présentés aux chapitres 3 et 4 (modèles continu et 1+6). Cette comparaison sera faite à la fin de ce chapitre.

6.3.3 *Bilan*

Les résultats du modèle continu présentés au chapitre 3 ont été comparés à ceux de l'expérience et du logiciel FRM. Cette confrontation a été faite seulement pour la raideur en traction car à cette échelle l'influence des autres termes sur la réponse globale du câble est négligeable. Les résultats montrent que le logiciel FRM et le modèle continu nous donnent des résultats identiques mais que ces résultats surestiment de 11% les résultats d'essai.

Pour les prochains essais, il serait souhaitable de faire des essais à une échelle plus grande, afin d'étudier la raideur de torsion (par exemple sur le toron ou l'âme du câble 205T). Par contre, les essais de torsion à cette échelle ne sont pas faciles à réaliser.

6.4 Modèle 1+6

Le toron et l'âme du câble 25T, le câble 25T et le câble 205T, sont des structures avec une construction de type 1+6 pour lesquelles le modèle 1+6 présenté au chapitre 4 a été développé. La qualité du modèle 1+6 est donc étudiée ici en confrontant ses résultats aux résultats expérimentaux sur ces structures.

On rappelle ici, que pour les données expérimentales manquantes à chaque échelle, on utilise les résultats du modèles FRM.

6.4.1 Ame et toron du câble 25T

A ce stade, pour obtenir les résultats analytiques du toron et de l'âme du câble 25T, on dispose de résultats d'essais de traction sur le brin assemblé, et on connaît sa raideur en traction, $k_{\varepsilon\varepsilon}$. Pour les autres termes de la matrice raideur de brin assemblé, on utilise les résultats obtenus par logiciel FRM, en sachant que ces termes n'ont pas une influence importante sur la réponse de l'âme et du toron. Les paramètres géométriques utilisés sont ceux du tableau 6.5. 1. Les données d'entrée pour le modèle 1+6 et le logiciel FRM sont présentées ci-dessous, tableau 6.5.

Tableau 6.5 : composantes de la matrice raideur des brins assemblés de l'âme et du toron du câble 25T, utilisées comme données d'entrée pour les modèles du toron et de l'âme.

Structure	Modèle	$k_{\varepsilon\varepsilon}$ (kN)	$k_{\varepsilon\theta}$ (N.m)	$k_{\theta\varepsilon}$ (N.m)	$k_{\theta\theta}$ (N.m ²)
Brin assemblé de l'âme	FRM	298.5	19.14	20.78	0.0035
Brin assemblé du toron	FRM	228.2	14.30	13.18	0.0023

Les diamètres de l'âme et de son brin assemblé sont respectivement 7 et 2.33 mm . De même 6.1 et 2.03 mm pour le toron et son brin assemblé. Les *Pas* sont 18.868 t/m et 10.87 t/m respectivement pour l'âme et le toron.

Les raideurs en traction de l'**âme** du câble 25T obtenues sont de 1770, 1881.7 et 1901.1 kN respectivement par l'expérience, le logiciel FRM et le modèle 1+6, cf. figure 6.6. Il apparaît que les raideurs des deux modèles sont quasiment identiques (1% écart) et sont en accord avec celle de l'expérience (l'écart relatif maximal est inférieur à 7%).

La figure 6.7 compare les résultats expérimentaux sur le **toron** du câble 25T avec ceux fournis par les modèles (1+6 et FRM). On a les mêmes conclusions que sur l'âme : les raideurs en traction obtenues par le modèle 1+6, le logiciel FRM et l'expérience sont respectivement de 1558.8, 1554.7 et 1500 kN, soit moins de 4% d'écart entre les modèles et l'expérience).

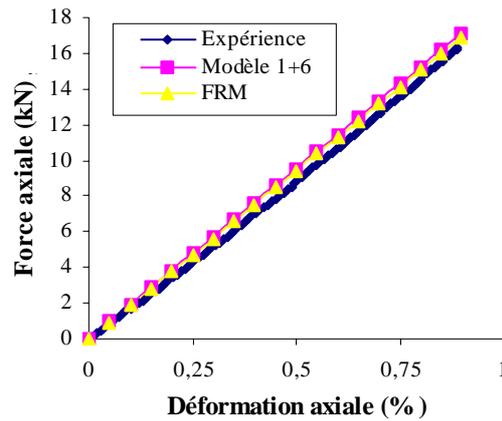


Figure 6.6 : comparaison des modèles avec l'expérience pour la raideur en traction de l'âme du câble 25T.

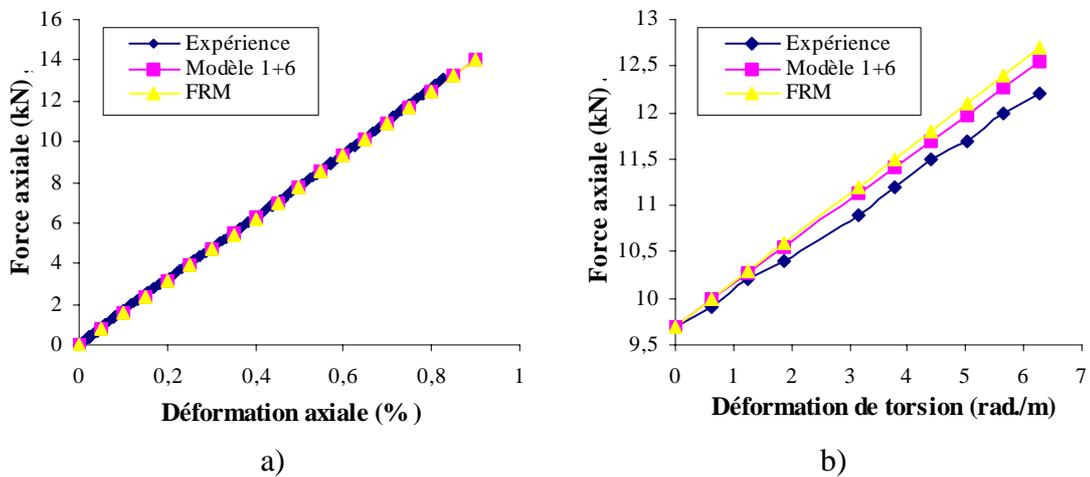


Figure 6.7 : comparaison entre modèles et expérience pour le toron du câble 25T : a) raideur en traction ; b) le terme de couplage.

Les résultats pour le terme de couplage, $k_{e\theta}$ (497, 472 et 407 N.m respectivement pour le logiciel FRM, modèle 1+6 et l'expérience), montrent que les modèles nous fournissent des résultats proches (environ 5% écart). Par contre, entre les modèles et l'expérience il y a un écart de 19.5% et 15.1% respectivement pour le logiciel FRM et le modèle 1+6. Compte tenu des incertitudes sur les données d'entrée des modèles et sur les résultats expérimentaux, cet écart reste raisonnable.

On rappelle, cf. chapitre 4, que l'écart entre les modèles, sur les termes de couplage et de torsion, est dû à des hypothèses géométriques différentes (forme de la section du toron).

6.4.2 Câble 25T

Dans ce paragraphe, on étudie le câble de 25T.

D'après le tableau 6.3, les raideurs disponibles sont pour l'âme, la raideur en traction, et pour le toron, la raideur en traction et le terme de couplage. On doit donc utiliser le logiciel FRM pour les compléter et avoir sur le toron et l'âme le comportement couplé en traction - torsion. Il est à noter ici que lorsqu'on étudie le câble avec le logiciel FRM, il

n'est pas possible de rentrer le comportement des constituants à l'échelle de l'âme et du toron. Il est nécessaire de décrire le câble en partant de la raideur du brin. On a donc ajusté celle-ci pour se caler sur la raideur en traction de l'âme et du toron. De ce fait, la raideur de couplage ainsi obtenue pour le toron présente un écart avec la valeur expérimentale (360 au lieu de 407 N.m). Ceci est lié au fait que le rayon extérieur de l'âme et du toron sont connus, ce qui fait que la seule variable d'ajustement est la raideur de leur constituant.

Les résultats pour le toron et l'âme du câble 25T sont présentés ci-dessous, tableau 6.6. Ces valeurs seront donc les données d'entrée du modèle de câble, de type 1+6 et pour le logiciel FRM.

Tableau 6.6 : composantes de la matrice raideur pour l'âme et le toron du câble 25T

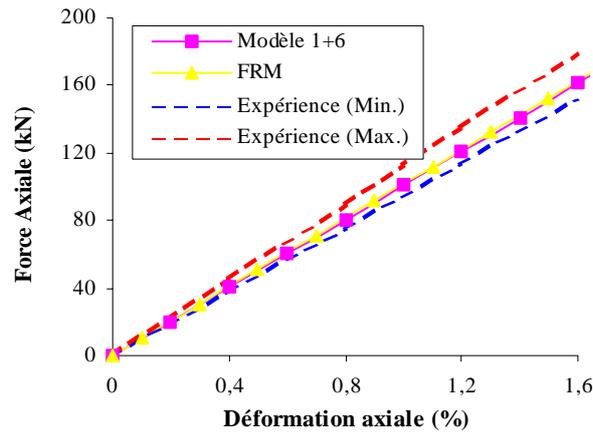
câble	Structure	modèles	$k_{\varepsilon\varepsilon}$ (kN)	$k_{\varepsilon\theta}$ (N.m)	$k_{\theta\varepsilon}$ (N.m)	$k_{\theta\theta}$ (N.m ²)
25T	Ame	FRM	1770	727	684	0.4356
	toron	FRM	1500	360	355	0.1325

Le comportement du câble 25T obtenu par essai est comparé graphiquement sur la figure 6.8 avec ceux du modèle 1+6 et du logiciel FRM. En effet, le pente des courbes sur la figure 6.8 a), b) et c) nous donnent respectivement $k_{\varepsilon\varepsilon}$, $k_{\theta\varepsilon}$ et $k_{\theta\theta}$, les composantes de la matrice de raideur du câble 25T en aramide. Les résultats sont rassemblés dans le tableau 6.7. Dans les modèles, on a utilisé pour le diamètre du câble la valeur de 16.5mm obtenue par analyse d'image, et non pas celle de 19.2mm donnée par le constructeur.

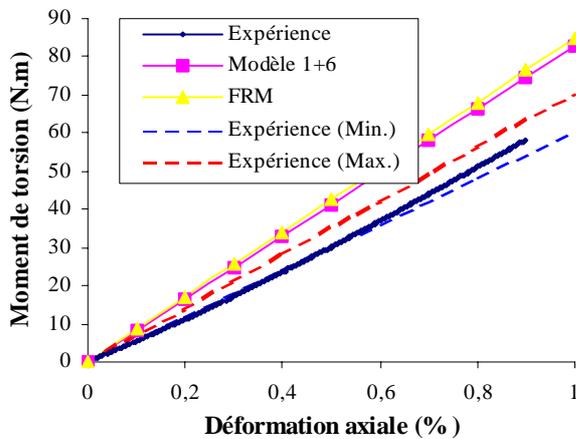
On constate que les résultats varient très peu entre les modèles et l'expérience pour la raideur en traction. L'écart atteint 23% et 21% pour le terme de couplage, respectivement pour FRM et 1+6, et 40% et 18% pour la raideur de torsion. On rappelle que les écarts entre les modèles sont discutés au chapitre 4. Les écarts entre les modèles et l'expérience seront discutés en section 6.4.3. On peut d'ores et déjà remarquer que si certains écarts sont importants, ils le seraient plus encore si on prenait les données constructeur pour le diamètre du câble, dont la valeur est supérieure à celle prise ici. Ceci aurait pour effet de ne pas changer la raideur en traction des modèles, mais d'augmenter de l'ordre de 20 et 40% respectivement leurs raideurs de couplage et de torsion (elles dépendent en effet du diamètre de façon linéaire et quadratique, cf. équation (4.58)).

Tableau 6.7 : composantes de la matrice raideur pour le câble 25T

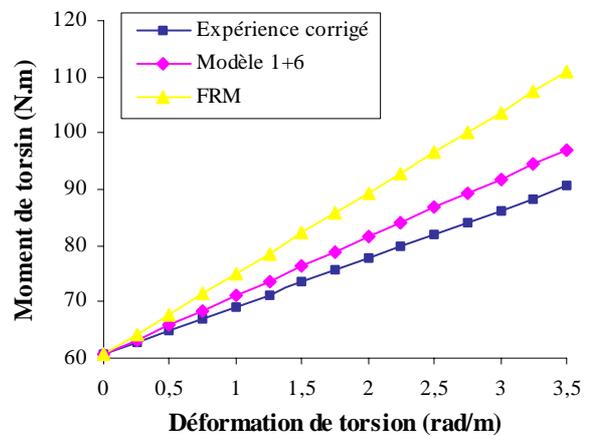
Structure	Modèle	$k_{\varepsilon\varepsilon}$ (10 ³ kN)	$k_{\varepsilon\theta}$ (kN.m)	$k_{\theta\varepsilon}$ (kN.m)	$k_{\theta\theta}$ (N.m ²)
Câble 25T	FRM	10.2	8.87	8.50	14.3
	Modèle 1+6	10.1	8.31	8.28	10.4
	Expérience	10.2	6.53	6.53	8.55



a) effort axial en fonction de déformation axiale (rotation bloquée).



b) moment de torsion en fonction de la déformation axiale (rotation bloquée).



c) moment de torsion en fonction de déformation de torsion (translation bloquée).

Figure 6.8 : Comportement du câble 25T obtenu par différents modèles et par essai.

6.4.3 Bilan

Nous avons constaté que les modèles (analytique 1+6 et FRM) nous fournissent la même raideur en traction, et compte tenu des incertitudes de mesures, cette raideur est en bon accord avec l'expérience pour le toron, l'âme et le câble 25T (l'écart modèle/expérience est inférieur à 7%).

Pour les autres termes de la matrice de raideur on peut dire qu'il y a un écart important entre les modèles et l'expérience. Le modèle analytique 1+6 nous donne des résultats plus proches de l'expérience, mais l'erreur dépasse 18 %.

Les écarts entre les modèles et l'expérience peuvent être expliqués par :

- un manque de précision sur les mesures expérimentales, notamment dans les essais où la torsion est mise en jeu. Ainsi, pendant l'essai de torsion, la déformation axiale lors de la rotation ne reste pas constante, cf. section 5.7.4.2 au chapitre 5. En plus, l'éprouvette utilisée pour cet essai était courte, et les sollicitations de torsion

induisaient un changement de géométrie (angle d'enroulement) pouvant modifier sa raideur.

- Des incertitudes sur les données d'entrée. Certaines composantes de la matrice de raideur des sous-structures (les termes de couplages et le terme de torsion pour le toron et l'âme) sont évalués par logiciel FRM. Ces raideurs ont une influence négligeable sur la raideur en traction, mais ce n'est pas le cas sur les termes de couplage et encore moins sur le terme de torsion, cf. équation (4.58).

On remarque que dans les calculs précédents, pour chaque échelle, les résultats expérimentaux disponibles aux échelles inférieures ont été utilisés (par exemple pour le câble, les résultats du toron et de l'âme sont utilisés). Si on utilise les résultats expérimentaux du brin comme seule donnée d'entrée, on obtiendra évidemment des écarts plus importants entre les modèles et l'expérience sur les réponses globales des structures, cf. tableau 6.8.

Tableau 6.8 : comparaison des résultats des modèles pour différentes données d'entrée, avec ceux de l'expérience.

Structure	modèle	Donnée d'entrée	$k_{\varepsilon\varepsilon}$ (10^3 kN)	$k_{\varepsilon\theta}$ (kN.m)	$k_{\theta\varepsilon}$ (kN.m)	$k_{\theta\theta}$ (N.m ²)
Toron	FRM	Brin	1.75	0.552	----	----
	Analytique	Brin	1.75	0.525	----	----
	Expérience	-----	1.50	0.407	----	----
Ame	FRM	Brin	2.19	----	----	----
	Analytique	Brin	2.20	----	----	----
	Expérience	-----	1.77	----	----	----
Câble	FRM	Brin	11.8	10.3	9.89	16.7
		Toron et âme	10.2	8.87	8.50	14.3
	Analytique	Brin	11.9	9.62	9.58	12.2
		Toron et âme	10.1	8.31	8.28	10.4
	Expérience	-----	10.2	6.53	6.53	8.55

6.5 Câble 205T

Comme on l'avait déjà précisé pour le câble 205T on a seulement les résultats expérimentaux suivants : la raideur en traction du brin, la raideur en traction du câble et le terme de couplage du câble. Donc la seule comparaison possible est à l'échelle du câble. Formellement, l'utilisation en cascade de ces différents modèles permet de passer du brin au câble. Pour ce faire il faut passer trois échelles successivement :

- du brin au brin assemblé (modèle continu)
- du brin assemblé au toron ou à l'âme (modèle continu)
- des toron et âme au câble (modèle 1+6)

Donc ici on compare l'ensemble de 2 modèles analytiques avec le logiciel FRM ainsi qu'avec les résultats des essais.

Les données géométriques sont reprises du tableau 5.2 (données de constructeur) si ce n'est qu'on utilise pour le diamètre du câble celui qui a été mesuré au cours des essais, et qui est différent de celui fourni par le constructeur (50mm au lieu de 57.6). La seule propriété mécanique utilisée est la raideur en traction du brin (voir tableau 6.4).

Les résultats d'essais disponibles pour le câble sont la raideur en traction du câble $k_{\varepsilon\varepsilon}$, et le terme de couplage $k_{\theta\varepsilon}$. Comme indiqué auparavant, les modèles théoriques sont comparés à l'expérience seulement pour ces deux composantes de la matrice raideur. Pour ce faire le modèle continu a été appliqué deux fois (passage brin/brin assemblé et passage brin assemblé/toron ou âme) et le modèle 1+6 a été appliqué à l'échelle du câble (passage toron/câble). La Figure 6.9 présente les courbes de *force axiale – déformation axiale* et *moment de torsion – déformation axiale* dont les pentes définissent respectivement la raideur en traction, $k_{\varepsilon\varepsilon}$, et le terme de couplage, $k_{\theta\varepsilon}$, pour le câble 205T.

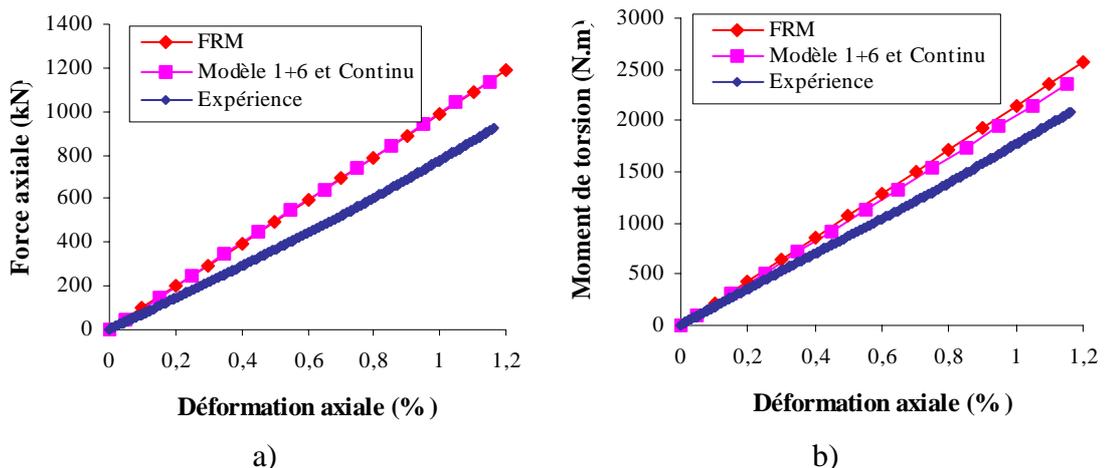


Figure 6.9 : câble 205T en traction à rotation bloquée a) force axiale ; b) moment de torsion.

Les résultats montrent que les écarts entre les modèles sont très faibles (inférieurs à 3%), cf. tableau 6.9. Par contre les écarts entre les modèles et l'expérience sont plus

importants, ils sont respectivement de 17.5% et 15.8% sur la raideur en traction et le terme de couplage. Comme sur le câble de 25T, ce dernier écart serait plus important si on avait pris la valeur constructeur du diamètre du câble.

On rappelle ici que les incertitudes pour les raideurs expérimentales du câble 205T sont $\pm 2.8\%$ (cf. chapitre 5 section 5.7.5).

Tableau 6.9 : composants de la matrice raideur pour le câble 205T.

Structure	modèles	k_{ee} (10^3 kN)	$k_{\theta e}$ (kN.m)
Câble 205T	FRM	98.8	215
	Analytique	99.1	205
	Expérience	81.8	181

6.5.1 Bilan

Les écarts obtenus entre le modèle et l'expérience étaient prévisibles car pour la modélisation du câble à partir de la raideur du brin, les modèles ont été utilisés en cascade (aux trois étapes) et à chaque étape un écart (erreur de modélisation) intervient dans les résultats. Si on suppose que pour chaque passage le même écart est intervenu dans les résultats, on peut dire que les écarts entre les modèles et l'expérience à chaque passage sont inférieurs à 5.5 % et 5% respectivement pour la raideur en traction et le terme de couplage. Cependant, pour pouvoir évaluer le modèle de façon plus critique, il serait intéressant de disposer de résultats d'essais plus nombreux, pour réduire ces incertitudes.

6.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la confrontation des modèles analytiques présentés précédemment aux chapitres 3 et 4 avec d'une part les résultats obtenus par le logiciel FRM et d'autre part avec ceux des expériences qui ont été réalisés pour cette étude (voir chapitre 5).

Pour le modèle continu (structure torsadée à grand nombre de sous-structures), des résultats ont été comparés pour les brins assemblés de l'âme et du toron du câble 25T. Pour des raisons que nous avons déjà évoquées dans ce chapitre, cette confrontation théorie/expérience ne concerne que la raideur en traction. Les résultats obtenus ont montré que, compte tenu des incertitudes de mesures, les raideurs axiales fournies par le modèle continu sont en accord avec les résultats expérimentaux, mais il reste à compléter ces résultats avec des mesures sur d'autres structures, et avec des mesures sur les raideurs en torsion et les termes de couplages.

Le modèle 1+6 a fait l'objet de différentes validations : le toron et l'âme du câble 25T et le câble lui-même. Les résultats obtenus sur la raideur en traction, k_{ee} , sont encourageants, car compte tenu des incertitudes, les résultats du modèle sont en accord avec les résultats expérimentaux, ce qui semble valider les hypothèses sur le contact et frottement. Cependant, pour pouvoir évaluer le modèle de façon plus critique, il serait

intéressant de disposer de résultats d'essais plus nombreux, pour réduire si possible ces incertitudes.

Pour la raideur en traction, il apparaît que les résultats des modèles analytiques (continu et 1+6) sont identiques aux résultats du logiciel FRM.

Pour les autres termes du modèle 1+6, la comparaison modèle/expérience a été faite sur le câble 25T. Les résultats ont montré que les modèles donnent des résultats plus raides. D'une manière générale, le modèle 1+6 fournit des résultats plus proches de la réalité que le logiciel FRM, notamment pour la raideur de torsion.

L'essai de torsion a été réalisé sur une éprouvette courte par rapport aux autres essais, ce qui peut introduire un biais dans les résultats expérimentaux.

Pour pouvoir évaluer le modèle de façon plus précise, il est nécessaire de disposer de résultats d'essais plus nombreux sur des éprouvettes plus longues. Il faut aussi souligner qu'une incertitude sur l'angle d'enroulement ou le diamètre ont une influence significative sur les termes de couplage et la raideur en torsion, comme l'a montré l'étude de sensibilité de la section 6.2.1.4.

Ensuite, nous avons passé en revue différents modèles pour l'analyse du comportement du câble 205T. En effet, l'utilisation en cascade de ces différents modèles (dans trois étapes) nous permet de passer du brin au câble. Les résultats ont été comparés pour la raideur en traction, $k_{\varepsilon\varepsilon}$, et le terme de couplage, $k_{\theta\varepsilon}$. Nous avons constaté que les résultats sont satisfaisants, compte tenu des incertitudes de mesures et aussi du passage par trois différents étapes. Les résultats des modèles sont en accord avec les résultats expérimentaux.

Enfin, on a constaté que la raideur en traction fournie par les modèles analytiques et logiciel FRM sont quasiment identiques, mais par contre, le terme de couplage fourni par les modèles analytiques est légèrement plus proche de la réalité de l'expérience que celui de FRM.

Chapitre 7. Conclusion générale et perspectives

7.1 Bilan

L'objectif de ce travail était le développement d'un modèle de comportement axial de câble synthétique, à partir des caractéristiques mécaniques du matériau constitutif et des paramètres géométriques de construction. À terme, il s'agit de disposer d'un outil de dimensionnement pour la conception d'un câble en fonction d'une application donnée. Dans notre cas, et pour l'application visée ici (câbles d'ancrage de plates-formes offshore et de manutention océanographique), l'étude doit fournir, outre la raideur en traction, les raideurs en torsion et de couplage traction-torsion, qui jouent un rôle important dans les opérations de manutention, ou d'assemblage avec un câble métallique. D'une manière générale, les câbles synthétiques présentent une architecture de type hiérarchique, un élément du câble est obtenu par assemblage (sans tressage) de constituants à l'échelle inférieure de deux façons différentes :

- grand nombre de constituants torsadés ;
- 7 constituants, organisés en une âme centrale droite, autour de laquelle sont enroulés en hélice les 6 autres (structure 1+6).

Cette construction nous a amenés à travailler sur deux modèles de transition d'échelles, pour chaque type de structure.

L'analyse bibliographique du chapitre 2 a montré l'existence de modèles pour des structures à grand nombre de constituants torsadés avec un matériau synthétique. Ce sont d'ailleurs ces mêmes modèles qui sont utilisés pour des structures synthétiques 1+6. D'autre part, de très nombreux modèles sont disponibles pour les câbles métalliques, certains d'entre eux étant spécifiques à la construction 1+6.

Pour les deux types de structures étudiés, il se dégage de l'analyse bibliographique qu'en chargement axial, le frottement entre les constituants peut être négligé. Les modèles font en revanche apparaître des différences quant aux géométries prises en compte. Ainsi, les modèles propres aux câbles métalliques supposent que la section des constituants reste circulaire (avec ou sans effet Poisson), alors que les modèles de câbles synthétiques considèrent des sections polygonales.

Les chapitres 3 et 4 ont été consacrés au développement d'un modèle de transition d'échelles pour les 2 types de structures. Beaucoup de modèles ont été étudiés et comparés, et dans les deux cas, au final, un modèle analytique a été développé. Pour la structure à grand nombre de constituants torsadés (respectivement 1+6), le modèle est une extension d'un modèle synthétique (respectivement métallique) existant. Ces modèles sont simples et analytiques, et représentent de ce fait une alternative au modèle de Leech mis en œuvre numériquement dans le logiciel FRM. Ils sont en outre bien adaptés à l'objectif initial de disposer d'un outil de conception. En effet, leur caractère analytique permet de mener facilement des études paramétriques. On a observé que les modèles développés donnaient, par rapport aux résultats issus du logiciel FRM, des résultats quasiment identiques sur la raideur en traction, l'écart devenant visible pour le couplage traction-torsion, et significatif en torsion. D'autre part, les écarts les plus importants sont observés sur la structure 1+6.

D'autre part, l'application de ces modèles à différents exemples a mis en évidence le fait que certaines données géométriques (utilisées en entrée dans les modèles) n'étaient pas connues. À l'avenir, il serait opportun d'en tenir compte pour ne retenir dans les données du modèle que celles qui sont facilement accessibles.

Pour valider ces modèles, leurs résultats ont été confrontés à des mesures. Ceci a donné lieu à la réalisation de différents essais, notamment à l'échelle du câble, où les résultats

disponibles dans la littérature sont rares (surtout pour les gros câbles). Ces essais ont en outre été menés sur les constituants aux différentes échelles : d'une part pour valider les deux types de modèles, et d'autre part pour évaluer correctement l'erreur due au modèle (à une échelle donnée, le comportement des constituants est donné par les essais, et non pas par un modèle). Il faut noter que ces essais, présentés au chapitre 5, sont souvent délicats à réaliser du fait du couplage traction-torsion (difficultés pour réaliser de façon convenable des essais en rotation libre, ou pour mesurer le couple en rotation bloquée). La confrontation des deux modèles, avec les résultats expérimentaux a été décrite au chapitre 6. Elle a montré le caractère prédictif des deux modèles pour la raideur en traction. Pour le couplage traction-torsion et la raideur en torsion, il est difficile de conclure. En effet, le nombre d'essais correspondant n'est pas suffisant, et leur fiabilité reste perfectible.

7.2 Perspectives

Comme indiqué dans le chapitre 1, cette thèse s'inscrit dans le cadre de projets en partenariat avec des sociétés d'ingénierie de l'industrie pétrolière marine. Le but de ces recherches est de développer des modèles permettant de prévoir la durabilité de ce type de câble multi-échelle en environnement marin. L'analyse de la construction et le développement de modèles analytiques de comportement mécanique est une première étape pour l'optimisation de la structure des câbles. La présente étude constitue donc une première étape pour ces travaux. Par la suite, il sera nécessaire d'intégrer l'effet du frottement dans les modèles même si nous avons montré que le frottement a un peu d'influence sur la réponse élastique globale du câble en chargement axial. Cependant, ces phénomènes de frottement ont un rôle prédominant au niveau de la durabilité. La prise en compte de cet aspect nécessite un travail important de modélisation. Mais avant d'aborder ces aspects, il sera aussi indispensable de faire des essais complémentaires pour définir le coefficient de frottement aux différentes échelles notamment dans l'eau pour étudier de l'influence de l'environnement marin. Finalement, il est clair que la validation de modèles de comportement passe par la mise au point d'essais appropriés : des essais de torsion pour les structures multicouches (modèle continu) et des essais supplémentaires pour les structures 1+6 avec des éprouvettes plus longues seront envisagés pour évaluer de façon plus précise les fiabilités des modèles développés dans cette étude.

On rappelle que différentes fibres synthétiques sont utilisées dans de nombreuses applications marines. Les propriétés varient beaucoup d'une fibre à l'autre : il existe des fibres avec un comportement linéaire (aramide, vectran) et aussi non linéaire (polyester, polyamide). Cet aspect de non-linéarité de fibres est évidemment une des perspectives envisagées pour la suite de la présente étude. En effet, le modèle 1+6 permet une prise en compte de la non-linéarité matériau des éléments constitutifs. Par contre, il sera nécessaire de modifier le modèle continu : afin de modéliser un module d'Young apparent fonction de la déformation locale en chaque point de la structure, et compte tenu de la complexité du comportement local, il est difficile dans ce cas d'obtenir une loi de comportement globale analytique de la structure comme présenté au chapitre 3. Une approche numérique complémentaire devra être envisagée. Egalement, dans le cadre de la modélisation de la loi matériau, l'aspect viscoélastique du comportement est une autre voie intéressante. De plus, la variabilité est aussi un phénomène que nous n'avons pas pris en compte dans la modélisation du comportement de la structure : il y a différentes sources de variabilité, passant de l'échelle moléculaire et la réponse statistique des fibres

à l'influence de la fabrication et les paramètres de structure (tensionnement, angles). Par exemple, pendant le premier chargement de mise en place, la raideur globale de la structure est fonction de la charge appliquée. Ceci traduit différents mécanismes, un réalignement des molécules ainsi qu'une redistribution de charge entre des éléments de différentes longueurs. Après un certain nombre de cycles de chargement, variable selon le type de câble, ce phénomène disparaît. En combinant les résultats d'essais et les modèles développés ici on doit pouvoir mieux comprendre ces phénomènes, qui peuvent assumer une grande importance dans l'installation de lignes d'ancrage en mer. Désormais, il sera possible d'intégrer ce phénomène dans les modèles analytiques développés, l'intervalle de la variabilité et sa dépendance à la charge appliquée pouvant être évalués d'après l'expérience.

Ce travail a permis d'aborder les mécanismes de déformation des câbles synthétiques et de faire le point sur ce qui existe et ce qui reste à faire. On constate que la complexité de ces structures nécessite une approche multi-disciplinaire. L'étude actuelle est une étude basée sur la mécanique, mais la compréhension du comportement à long terme nécessitera également des apports de la chimie (influence de l'élaboration des polymères, paramètres moléculaires, ensimages, chimie de vieillissement...), et de la thermique (phénomènes visqueux, évacuation de chaleur, conductivité...), ainsi qu'une bonne connaissance de l'environnement marin qui conditionne les chargements en service. Ceci rend de telles études difficiles mais l'importance des enjeux, l'exploration des fonds marins et l'exploitation des ressources offshore, garantit la poursuite de cet axe de recherche dans les années à venir.

Annexe A. Equations de Kirchhoff –Love

A.1 Equations de Kirchhoff –Love

Nous présentons ici les équations d'équilibre des poutres courbes de Kirchhoff-Love [LOV 1944]. Isolons un fil hélicoïdal du câble. Ce fil est en équilibre sous l'action des efforts extérieurs F_t^i , F_n^i , F_b^i , M_t^i , M_n^i , M_b^i , mais aussi sous l'action des efforts exercés sur lui par l'âme et transmis le long de la ligne de contact q_t^i , $-p_n^i$, q_b^i , m_t^i , m_n^i et m_b^i . Les équations de Kirchhoff-Love donnent

$$\frac{dF_n^i}{dl} - F_b^i \tau + F_t^i \kappa' - p_n^i = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{dF_b^i}{dl} + F_n^i \tau - q_b^i = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{dF_t^i}{dl} - F_n^i \kappa' - q_t^i = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{dM_n^i}{dl} - M_b^i \tau + M_t^i \kappa' - F_b^i + m_n^i = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{dM_b^i}{dl} + M_n^i \tau + F_n^i + m_b^i = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{dM_t^i}{dl} - M_n^i \kappa' + m_t^i = 0, \quad (\text{A.6})$$

on rappelle que F_n^i et F_b^i sont respectivement des efforts tranchants sur la section d'un fil et F_t^i est la force axiale d'un fil dans la direction de \vec{n}^i , \vec{b}^i et \vec{t}^i . M_t^i , M_n^i et M_b^i représentent respectivement le moment de torsion et les moments de flexion relativement aux directions \vec{t}^i , \vec{n}^i et \vec{b}^i .

q_t^i , $-p_n^i$ et q_b^i sont des forces linéiques interfilaire extérieures et de même m_t^i , m_n^i et m_b^i représentent les moments, relativement aux directions \vec{t}^i , \vec{n}^i et \vec{b}^i , cf. figure A.1.

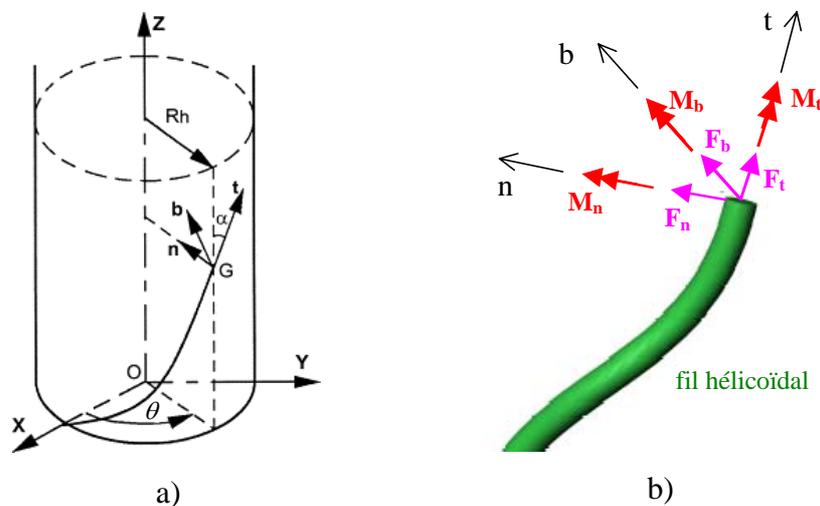


Figure A.1 : a) ligne moyenne d'un fil hélicoïdal et b) forces et moments sur une section.

Annexe B. Analyse de sensibilité

B.1 Maillage

Dans cette étude plusieurs maillages sont réalisés. Ces maillages diffèrent par la géométrie des sections extrêmes du câble et par le type d'élément utilisé.

En ce qui concerne les sections extrêmes, elles sont soit **planes**, soit **obliques**, lorsque la section de chaque constituant est prise orthogonale à sa ligne moyenne, cf. Figure B.1.

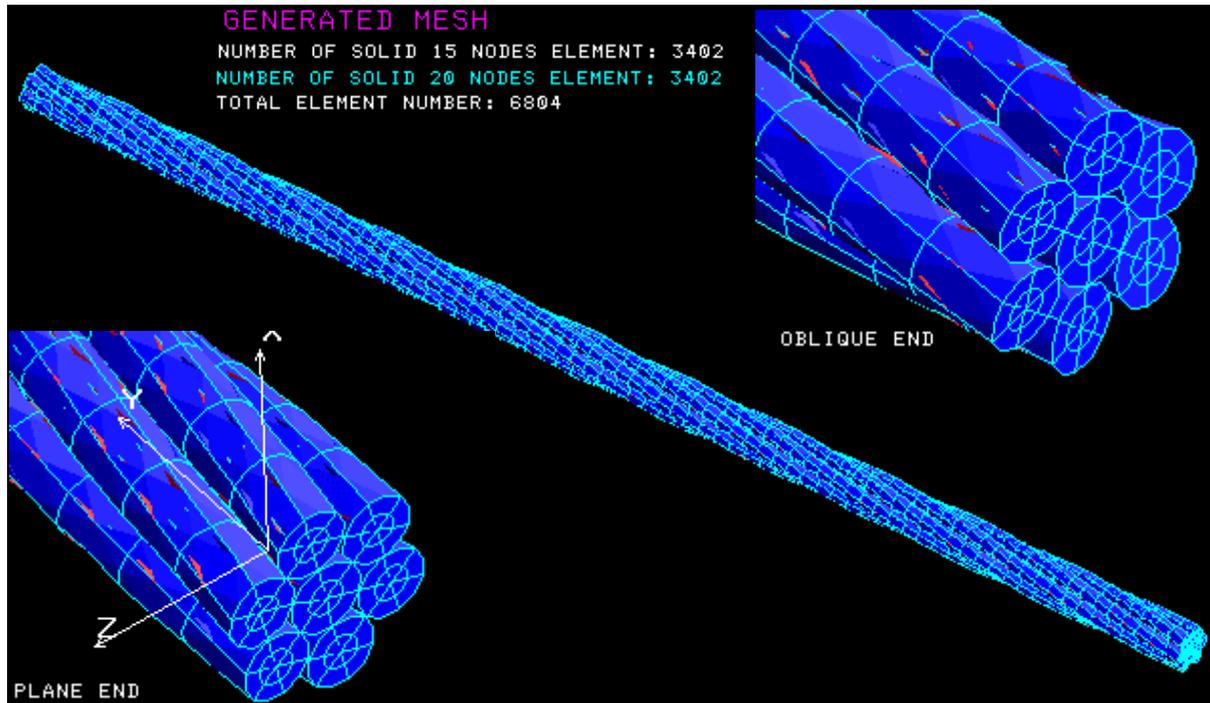


Figure B.1: Maillage réalisé avec des éléments solides à 15 et 20 nœuds. Les sections terminales du câble sont plane à l'origine, oblique à l'autre extrémité.

Pour tous les maillages, des éléments quadratiques sont utilisés. Cependant, il y a des modèles avec à la fois des éléments à 15 et 20 nœuds (cf. Figure B.1), et d'autres modèles ne comportant que des éléments à 20 nœuds (cf. Figure B.2).

Signalons que toutes les sections intermédiaires du câble sont obliques, et que le maillage est obtenu par répétition le long de l'axe du câble. Selon cet axe, la longueur des éléments est égale à environ 4 fois la plus petite dimension de l'élément dans le plan de la section ; on considère donc que le maillage est suffisamment fin.

Le tableau ci-dessous récapitule les caractéristiques des différents maillages étudiés :

Tableau B.1 : Liste les caractéristiques des différent maillages utilisés

N° maillage	Section (Z=0)	Section (Z=L)	Nœuds par EF
1	Oblique	Oblique	15 et 20
2	Oblique	Plane	15 et 20
3	Plane	Plane	15 et 20
4	Oblique	Oblique	20

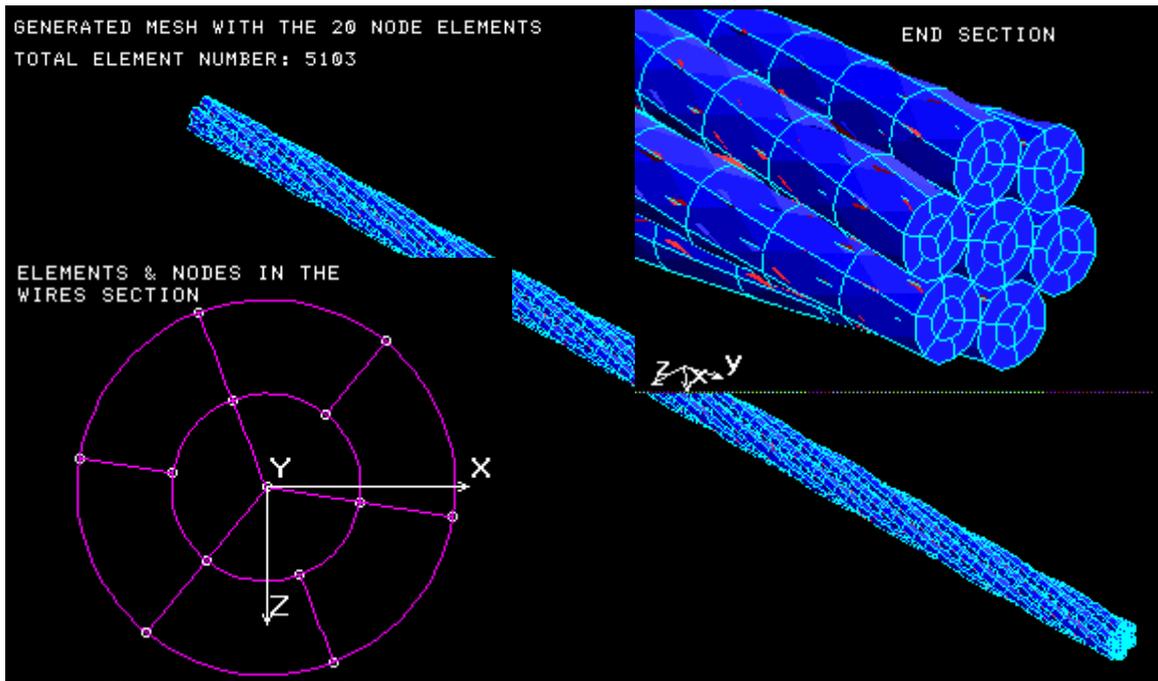


Figure B.2: Maillage 4 avec des éléments solides à 20 nœuds et les deux sections extrêmes obliques.

En ce qui concerne le contact, les calculs effectués considèrent l'hypothèse d'un contact collant. En pratique, il y a un nœud commun à l'âme et au fil le long de leur ligne de contact. Ce nœud possède des degrés de liberté de translation, ainsi, aucune translation relative de l'âme/fil n'est possible.

Une étude complémentaire, à laquelle nous ferons référence en section B.4, montre que les hypothèses sur le contact ont une influence négligeable sur le comportement global du câble.

On étudie ici l'influence du type d'élément choisi, et on compare les résultats des maillages 1 et 4, cf. Tableau B.1. Les écarts sur les résultats sont:

$$\begin{aligned}
 k_{\varepsilon\varepsilon} &= 2.856 \text{ e}7 \text{ N} \pm 0.00 \% \\
 k_{\varepsilon\theta} &= 1.807 \text{ e}4 \text{ N.m} \pm 0.03 \% \\
 k_{\theta\varepsilon} &= 1.811 \text{ e}4 \text{ N.m} \pm 0.003 \% \\
 k_{\theta\theta} &= 53.74 \text{ N.m}^2 \pm 0.02 \%
 \end{aligned}$$

Il apparaît donc que le type d'élément a une influence négligeable sur les résultats. Nous choisissons le premier maillage (deux types différents d'éléments) pour les prochaines étapes.

B.2 Représentation géométrique des sections extrêmes

Une analyse est menée avec différentes représentations des section extrêmes (plane ou oblique) cf. figure B.1. Les résultats sont présentés dans le Tableau B.2, où on fait référence aux numéros de maillages du Tableau B.1 de la section B.1.

Les variations sur les résultats sont:

$$k_{\varepsilon\varepsilon} = 2.856 \text{ e7 N} \pm 0.01 \%$$

$$k_{\varepsilon\theta} = 1.810 \text{ e4 N.m} \pm 0.11 \%$$

$$k_{\theta\varepsilon} = 1.812 \text{ e4 N.m} \pm 0.06 \%$$

$$k_{\theta\theta} = 53.57 \text{ N.m}^2 \pm 0.05 \%$$

Ces variations sont donc négligeables, et par la suite nous retenons les résultats du maillage 1 (sections extrêmes obliques).

On calcule les composants de la matrice raideur en évaluant les déformations globales ($u_{z,z}$ et $\theta_{z,z}$) du câble à partir des déplacements d'un nœud de la section au milieu du câble. Le choix du nœud (dans l'âme ou les fils hélicoïdaux) a donc une influence sur les résultats, mais la dispersion est très faible (les écarts maximums restent inférieurs à 0.06%, 0.28% et 0.05% respectivement pour $k_{\varepsilon\theta}$, $k_{\theta\varepsilon}$ et $k_{\theta\theta}$; pour $k_{\varepsilon\varepsilon}$, il n'y a pas d'écart sur la section).

Tableau B.2 : Résultats EF d'un câble 1+6 en acier pour différentes géométries des extrémités et différents types d'éléments.

Maillage N°	$k_{\varepsilon\varepsilon}$ (N)	$k_{\varepsilon\theta}$ (N.m)	$k_{\theta\varepsilon}$ (N.m)	$k_{\theta\theta}$ (N.m ²)
1	2.8565 e7	18116.1	18126.9	53.7720
2	2.8561 e7	18103.6	18130.7	53.7808
3	2.8563 e7	18068.3	18107.2	53.7343
4	2.8563 e7	18079.3	18108.5	53.7562
Diff. max. des coefficients pour les cas 1, 2 et 3. (%)	0.01 %	0.26 %	0.13 %	0.09 %
Diff. entre 1) et 4)	—	0.06 %	0.007 %	0.04 %

B.3 Logiciel (COSMOS / SAMCEF)

L'analyse EF est effectuée à l'aide de deux logiciels différents (COSMOS et SAMCEF). Le maillage 1 est utilisé dans les 2 cas. Les résultats sont comparés dans le Tableau B.3. La différence entre les résultats de SAMCEF et COSMOS est négligeable (moins de 0.80%).

Tableau B.3 : Résultats de SAMCEF et COSMOS pour un câble 1+6.

Coefficients	Résultats Cosmos	Résultats Samcef	Différence (%)
$k_{\varepsilon\varepsilon}$ (N)	2.8565 e7	2.8658 e7	0.32
$k_{\varepsilon\theta}$ (N.m)	1.812 e4	1.825 e4	0.71
$k_{\theta\varepsilon}$ (N.m)	1.813 e4	1.825 e4	0.65
$k_{\theta\theta}$ (N.m ²)	53.77	54.20	0.79

B.4 Conditions de contact

Jusqu'à présent, tous les calculs sont réalisés avec l'hypothèse d'un contact collant. Pour s'affranchir de toute hypothèse sur le contact, il faudrait effectuer un calcul en considérant un contact avec frottement. Cependant, un tel calcul est non-linéaire, c'est pourquoi on va pour simplifier envisager le cas d'un contact glissant. De ce fait, on peut affirmer que ce dernier calcul minore la raideur du câble, alors que le calcul avec contact collant la majore.

Si on compare les résultats de ces deux calculs (faits avec Samcef, cf. [MES 2003]), on observe les variations suivantes :

$$k_{\varepsilon\varepsilon} = 2.865 \text{ e7} \pm 0.03 \%$$

$$k_{\varepsilon\theta} = 1.829 \text{ e4} \pm 0.22 \%$$

$$k_{\theta\varepsilon} = 1.829 \text{ e4} \pm 0.22 \%$$

$$k_{\theta\theta} = 53.49 \pm 1.30 \%$$

Il s'avère par conséquent que les conditions du contact ont très peu d'influence sur les résultats. Ainsi, à l'avenir, nous choisirons le premier modèle (contact collant), qui est plus facile à mettre en œuvre. Nous choisissons le premier maillage (deux types différents d'éléments) pour les prochaines étapes

Annexe C. Matrice raideur adimensionnelle

On veut maintenant déterminer le domaine de validité du modèle analytique. On réalise donc une étude adimensionnée. Le comportement global du câble peut être exprimé comme auparavant sous la forme d'équation 4.1. On considère maintenant la forme adimensionnée suivante:

$$\begin{Bmatrix} f_z \\ m_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{\varepsilon\varepsilon} & \bar{k}_{\varepsilon\theta} \\ \bar{k}_{\theta\varepsilon} & \bar{k}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{z,z} \\ R_h \cdot \theta_{z,z} \end{Bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Où la matrice de force adimensionnée exprimé par :

$$\begin{cases} f_z = \frac{F_z}{\pi \cdot E \cdot R_h^2} \\ m_z = \frac{M_z}{\pi \cdot E \cdot R_h^3} \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

et la matrice raideur adimensionnée définit par :

$$\begin{cases} \bar{k}_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{k_{\varepsilon\varepsilon}}{\pi \cdot E \cdot R_h^2} \\ \bar{k}_{\varepsilon\theta} = \frac{k_{\varepsilon\theta}}{\pi \cdot E \cdot R_h^3} \\ \bar{k}_{\theta\varepsilon} = \frac{k_{\theta\varepsilon}}{\pi \cdot E \cdot R_h^3} \\ \bar{k}_{\theta\theta} = \frac{k_{\theta\theta}}{\pi \cdot E \cdot R_h^4} \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

On remarquera que les composants de la matrice raideurs adimensionnés s'expriment en fonction des seules variables géométriques $k_r = \frac{R_w}{R_c}$ et α . Pour étudier l'influence de ces paramètres géométriques, on choisit le modèle de Labrosse [LAB 1998] et on réécrit les composants de la matrice raideur sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \bar{k}_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{1 + 6k_r^2 \cos^3 \alpha}{(1 + k_r)^2} \\ \bar{k}_{\theta\varepsilon} = \bar{k}_{\varepsilon\theta} = \frac{6k_r^2}{(1 + k_r)^2} \cos^2 \alpha \sin \alpha \\ \bar{k}_{\theta\theta} = \frac{1}{4 \cdot (1 + \nu)(1 + k_r)^4} \cdot (1 + 6k_r^4 \cos^5 \alpha) + \\ \frac{6k_r^2}{(1 + k_r)^2} \cos \alpha \sin^2 \alpha \cdot \left(1 + \frac{k_r^2}{4 \cdot (1 + k_r)^2} (1 + \cos^2 \alpha) \right) \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

On note que ces coefficients adimensionnés s'expriment en fonction des seules variables géométriques $k_r = \frac{R_w}{R_c}$ et α . On va donc faire une comparaison entre des résultats EF 3D et analytiques en faisant varier ces paramètres $k_r = \frac{R_w}{R_c}$ et α .

C.1 Comparaison des résultats EF et Analytiques en faisant varier l'angle d'enroulement α .

Dans cette étape, pour déterminer d'influence de l'angle d'enroulement α sur les résultats, on fixe k_r . La figure C.1 présente les modèles EF avec 3 angles d'enroulement différents ($\alpha = 10^\circ$, 20° et 30°) et k_r fixé à 0.8505. Les caractéristiques du câble sont :

$R_c = 2.675$ mm, $R_w = 2.275$ mm et $R_h = 4.950$ mm.

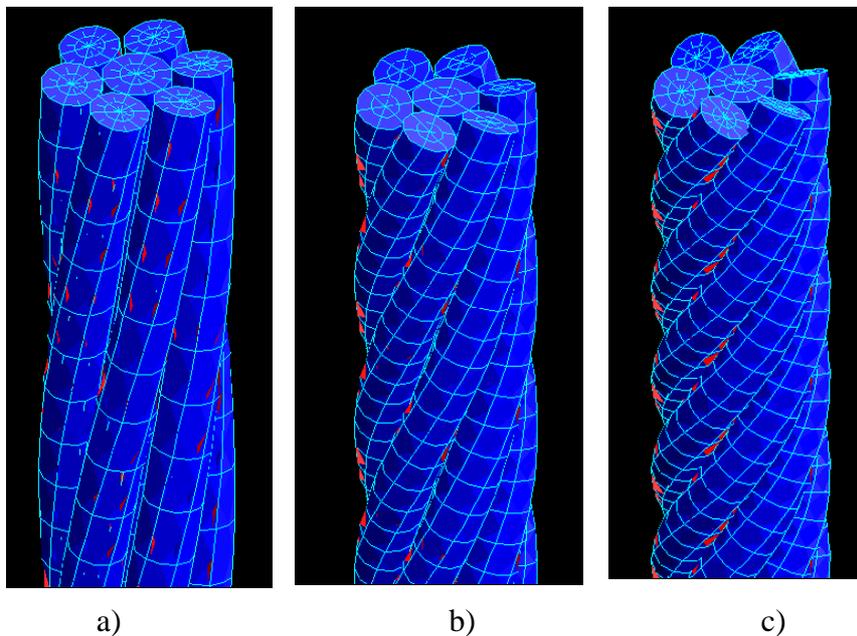


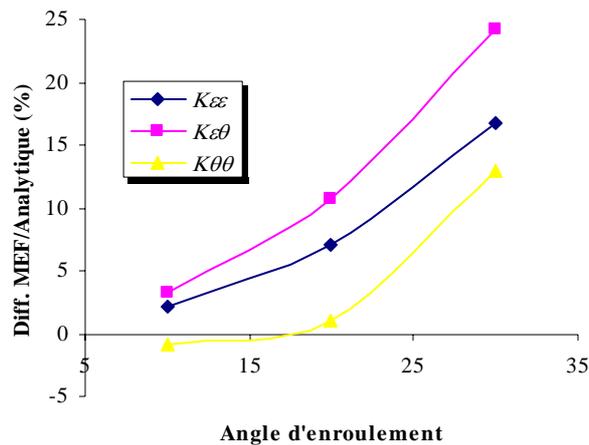
figure C.1 : Les modèles EF avec différents angles d'enroulement : a) $\alpha = 10^\circ$, b) $\alpha = 20^\circ$, c) $\alpha = 30^\circ$.

Les résultats sont présentés dans le tableau C.1 et figure C.2.

Il s'avère que la différence entre des résultats EF et analytiques augmente avec l'augmentation de l'angle d'enroulement. Il apparaît donc que la qualité de modèle analytique est sensible à l'angle d'enroulement.

Tableau C.1 : Comparaison des résultats EF et analytiques pour différentes valeurs de α .

Cas	Composants de la Matrice raideur	Résultats EF	Résultats Analytiques	Différence (%)
$\alpha = 10^\circ$ et $P = 176.39$ mm	$k_{\varepsilon\varepsilon}$	2.27 e7	2.31 e7	1.73
	$k_{\varepsilon\theta} = k_{\theta\varepsilon}$	1.57 e4	1.63 e4	3.68
	$k_{\theta\theta}$	40.5	39.8	-1.76
$\alpha = 20^\circ$ et $P = 85.45$ mm	$k_{\varepsilon\varepsilon}$	1.92 e7	2.07 e7	7.25
	$k_{\varepsilon\theta} = k_{\theta\varepsilon}$	2.61 e4	2.92 e4	10.35
	$k_{\theta\theta}$	77.2	78.2	1.33
$\alpha = 30^\circ$ et $P = 53.87$ mm	$k_{\varepsilon\varepsilon}$	1.43 e7	1.72 e7	16.86
	$k_{\varepsilon\theta} = k_{\theta\varepsilon}$	2.74 e4	3.62 e4	24.31
	$k_{\theta\theta}$	112	129	13.18

figure C.2 : différences EF/Analytique en fonction de α .

C.2 Comparaison des résultats EF et Analytiques en faisant varier k_r .

Pour déterminer d'influence de variation de k_r sur les résultats, on fixe l'angle d'enroulement α . La figure C.3 présente les modèle EF avec 3 valeurs différentes de k_r ($k_r = 0.8505$, 0.6262 et 0.4766) et l'angle d'enroulement fixé à 20° . Les caractéristiques du câble sont : $R_c = 2.675$ mm et $\alpha = 20^\circ$.

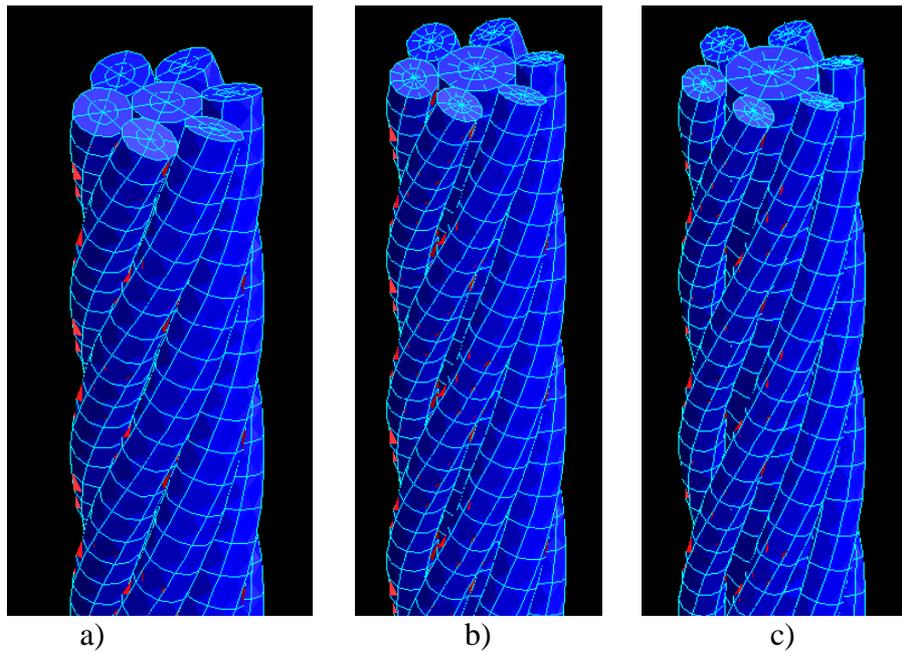


figure C.3 : Les modèles EF avec différents k_r ; a) $k_r = 0.8505$, b) $k_r = 0.6262$, c) $k_r = 0.4766$

Les résultats sont présentés dans le tableau C.2 et figure C.4.

Tableau C.2: Comparaison des résultats EF et analytiques pour différentes valeurs de k_r .

Cas	Composants de la Matrice raideur	Résultats EF	Résultats Analytiques	Différence (%)
$R_w = 2.275 \text{ mm}$ $P = 85.45 \text{ mm}$ et $k_r = 0.8505$	$k_{\varepsilon\varepsilon}$	1.92 e7	2.07 e7	7.25
	$k_{\varepsilon\theta} = k_{\theta\varepsilon}$	2.61 e4	2.92 e4	10.35
	$k_{\theta\theta}$	77.2	78.2	1.33
$R_w = 1.675 \text{ mm}$ $P = 75.09 \text{ mm}$ et $k_r = 0.6262$	$k_{\varepsilon\varepsilon}$	1.24 e7	1.33 e7	6.77
	$k_{\varepsilon\theta} = k_{\theta\varepsilon}$	1.26 e4	1.39 e4	9.35
	$k_{\theta\theta}$	33.2	33.9	1.98
$R_w = 1.275 \text{ mm}$ $P = 68.19 \text{ mm}$ et $k_r = 0.4766$	$k_{\varepsilon\varepsilon}$	9.13 e6	9.58 e6	4.70
	$k_{\varepsilon\theta} = k_{\theta\varepsilon}$	6.72 e3	7.31 e3	9.44
	$k_{\theta\theta}$	18.4	18.6	1.34

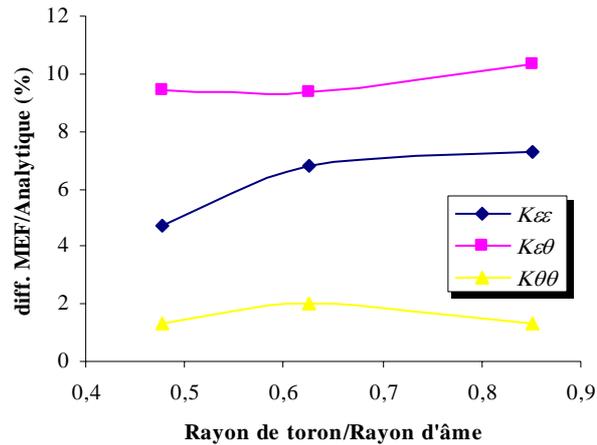


figure C.4 : différences EF/Analytique en fonction de k_r .

Il faut noter que en pratique pour les câbles usuels, les rayons de l'âme et des fils sont souvent proches (pour le câble 205T en aramide R_w et R_c sont respectivement 18.3 mm et 21 mm, pour le câble 25T en aramide 6.1 mm et 7 mm) et on peut donc considérer que $k_r \geq 0.85$.

Il apparaît que pour les valeurs pratiques de k_r , la différence entre les résultats EF et analytiques varie faiblement avec k_r . On peut donc supposer que la qualité des modèles analytiques est indépendante de k_r . Par conséquent, on va comparer les différents modèles en faisant varier α entre 2.5° et 35° .

Annexe D. composants de la matrice raideur adimensionnée

composants de la matrice raideur adimensionnée de différents modèles analytiques pour variation de α entre 2.5° et 35°.

α	Composant de la matrice Raideur	LAB	HRU	McC	MAC	KUM	SAT	RAM	COS	FEM
2.5	$k_{\varepsilon\varepsilon}$	1,74394	1,74394	1,74394	1,74394	1,74309	1,74394	1,74309	1,74	1,74
	$k_{\varepsilon\theta}$	0,06521	0,06521	0,06521	0,06521	0,06518	0,06520	0,06518	0,0652	0,0646
	$k_{\theta\varepsilon}$	0,0652	0,06521	0,06211	0,06521	0,06203	0,06520	0,06516	0,0620	0,0646
	$k_{\theta\theta}$	0,08682	0,01490	0,08681	0,08669	0,08688	0,08704	0,08704	0,0869	0,0873
5	$k_{\varepsilon\varepsilon}$	1,72591	1,72591	1,72591	1,72591	1,72255	1,72591	1,72255	1,72	1,71
	$k_{\varepsilon\theta}$	0,129	0,129	0,129	0,129	0,12879	0,12892	0,12878	0,129	0,127
	$k_{\theta\varepsilon}$	0,129	0,129	0,12305	0,12909	0,12244	0,12893	0,12861	0,122	0,127
	$k_{\theta\theta}$	0,09479	0,02344	0,09474	0,09425	0,09501	0,09564	0,09563	0,0951	0,0958
7.5	$k_{\varepsilon\varepsilon}$	1,69630	1,69630	1,69630	1,69630	1,68892	1,69633	1,68891	1,69	1,67
	$k_{\varepsilon\theta}$	0,18998	0,18998	0,18998	0,18998	0,18929	0,18975	0,18926	0,189	0,186
	$k_{\theta\varepsilon}$	0,18998	0,18998	0,18167	0,19034	0,17966	0,18975	0,18869	0,18	0,186
	$k_{\theta\theta}$	0,10772	0,03734	0,10762	0,10653	0,10814	0,10959	0,10952	0,108	0,11
10	$k_{\varepsilon\varepsilon}$	1,65578	1,65578	1,65578	1,65578	1,64309	1,65586	1,64308	1,64	1,62
	$k_{\varepsilon\theta}$	0,24686	0,24686	0,24686	0,24686	0,24527	0,24634	0,24521	0,245	0,238
	$k_{\theta\varepsilon}$	0,24686	0,24686	0,23687	0,24771	0,23226	0,24634	0,24388	0,232	0,238
	$k_{\theta\theta}$	0,125	0,0561	0,12497	0,12307	0,12570	0,12829	0,12808	0,126	0,128

α	Composant de la matrice Raideur	LAB	HRU	McC	MAC	KUM	SAT	RAM	COS	FEM
12.5	$k_{\varepsilon\varepsilon}$	1,60527	1,61	1,60527	1,60527	1,58627	1,60545	1,58624	1,59	1,56
	$k_{\varepsilon\theta}$	0,29845	0.298	0,29845	0,29845	0,29547	0,29752	0,29538	0,295	0,286
	$k_{\theta\varepsilon}$	0,29845	0.298	0,28759	0,30007	0,27897	0,29752	0,29285	0,279	0,286
	$k_{\theta\theta}$	0,14636	0,07907	0,14615	0,14325	0,14691	0,15099	0,15051	0,147	0,15
15	$k_{\varepsilon\varepsilon}$	1,54587	1,54587	1,54587	1,54587	1,51994	1,54623	1,51986	1,52	1,48
	$k_{\varepsilon\theta}$	0,34371	0,34371	0,34371	0,34371	0,33884	0,34228	0,33874	0,339	0,323
	$k_{\theta\varepsilon}$	0,34371	0,34371	0,33287	0,34637	0,31875	0,34228	0,33449	0,319	0,323
	$k_{\theta\theta}$	0,17057	0,10541	0,17034	0,16628	0,17084	0,17676	0,17581	0,171	0,173
17.5	$k_{\varepsilon\varepsilon}$	1,48	1,48	1,47890	1,47890	1,44575	1,47953	1,44560	1,45	1,39
	$k_{\varepsilon\theta}$	0,38180	0.382	0,38180	0,38180	0,37457	0,37983	0,37447	0,375	0,351
	$k_{\theta\varepsilon}$	0,38180	0.382	0,37183	0,38575	0,35082	0,37983	0,36794	0,35	0,351
	$k_{\theta\theta}$	0,19684	0.134	0,19665	0,19131	0,19646	0,20455	0,20289	0,197	0,197
20	$k_{\varepsilon\varepsilon}$	1,40583	1,40583	1,40583	1,40583	1,36556	1,40684	1,36529	1,37	1,3
	$k_{\varepsilon\theta}$	0,41208	0,41208	0,41208	0,41208	0,40208	0,40961	0,40204	0,402	0,37
	$k_{\theta\varepsilon}$	0,41208	0,41208	0,40375	0,41749	0,37464	0,40961	0,39265	0,374	0,37
	$k_{\theta\theta}$	0,22416	0,16439	0,22405	0,21737	0,22269	0,23323	0,23061	0,224	0,221
22.5	$k_{\varepsilon\varepsilon}$	1,32824	1,32824	1,32824	1,32824	1,28129	1,32975	1,28083	1,28	1,2
	$k_{\varepsilon\theta}$	0,43410	0,43410	0,43410	0,43410	0,42112	0,43128	0,42116	0,421	0,376
	$k_{\theta\varepsilon}$	0.434	0.434	0,42807	0,44108	0,38996	0,43128	0,40835	0,389	0,376
	$k_{\theta\theta}$	0,25147	0.195	0,25152	0,24348	0,24843	0,26164	0,25780	0,25	0,243

α	Composant de la matrice Raideur	LAB	HRU	McC	MAC	KUM	SAT	RAM	COS	FEM
25	$k_{\varepsilon\varepsilon}$	1,24778	1,25	1,24778	1,24778	1,19488	1,24992	1,19417	1,19	1,1
	$k_{\varepsilon\theta}$	0,44769	0,448	0,44769	0,44769	0,43164	0,44473	0,43183	0,432	0,373
	$k_{\theta\varepsilon}$	0,44769	0,44769	0,44439	0,45623	0,39682	0,44473	0,41507	0,396	0,373
	$k_{\theta\theta}$	0,27771	0,22468	0,27799	0,26862	0,27266	0,28867	0,28335	0,274	0,261
27.5	$k_{\varepsilon\varepsilon}$	1,16614	1,16614	1,16614	1,16614	1,10827	1,16907	1,10723	1,11	1,01
	$k_{\varepsilon\theta}$	0,45290	0,45290	0,45290	0,45290	0,43390	0,45010	0,43428	0,435	0,363
	$k_{\theta\varepsilon}$	0,45290	0,45290	0,45255	0,46288	0,39549	0,45010	0,41311	0,394	0,363
	$k_{\theta\theta}$	0,30186	0,25263	0,30244	0,29184	0,29441	0,31325	0,30624	0,296	0,275
30	$k_{\varepsilon\varepsilon}$	1,08500	1,08	1,08500	1,08500	1,02328	1,08889	1,02186	1,02	0,911
	$k_{\varepsilon\theta}$	0,45	0,450	0,45	0,45	0,42838	0,44773	0,42897	0,429	0,343
	$k_{\theta\varepsilon}$	0,45	0,450	0,45260	0,46121	0,38648	0,44773	0,40303	0,385	0,343
	$k_{\theta\theta}$	0,32298	0,278	0,32392	0,31224	0,31287	0,33441	0,32561	0,315	0,283
32.5	$k_{\varepsilon\varepsilon}$	1,00595	1,00595	1,00595	1,00595	0,94161	1,01105	0,93978	0,94	0,83
	$k_{\varepsilon\theta}$	0,43950	0,43950	0,43950	0,43950	0,41576	0,43814	0,41657	0,417	0,318
	$k_{\theta\varepsilon}$	0,43950	0,43950	0,44481	0,45162	0,37051	0,43814	0,38559	0,369	0,318
	$k_{\theta\theta}$	0,34025	0,29920	0,34159	0,32904	0,32737	0,35136	0,34072	0,329	0,287
35	$k_{\varepsilon\varepsilon}$	0,93054	0,93054	0,93054	0,93054	0,86482	0,93713	0,86254	0,863	0,699
	$k_{\varepsilon\theta}$	0,42210	0,42210	0,42210	0,42210	0,39689	0,42202	0,39792	0,398	0,261
	$k_{\theta\varepsilon}$	0,42210	0,42210	0,42972	0,43477	0,34845	0,42202	0,36177	0,347	0,261
	$k_{\theta\theta}$	0,35300	0,31621	0,35476	0,34158	0,33741	0,36346	0,35107	0,339	0,249

Annexe E. Les Machines d'essai

Pour des raisons que nous avons déjà évoquées dans le chapitre 5, pour faire des essais sur toutes les échelles, différents dispositifs expérimentaux sont nécessaires. Les caractéristiques principales de ces différents bancs d'essais sont données par la suite.

E.1 DMA (Dynamic Mechanical Analysis) Machine

Un appareil DMA (TA Instruments 2980) a été utilisé pour des essais sur des fibres. Les caractéristiques principales de cette machine sont définies par :

La longueur maximale possible entre des mors : 30 mm

La force maximale de traction : 18N

Cette machine est présentée sur la Figure E 1 a).

E.2 Instron et R&K (Roell & Korthaus) Machines

Pour réaliser les essais sur les brins et les brins assemblés, on a utilisé deux machines différentes de traction simple électromécaniques: Instron 4200 et Roell & Korthaus.

La machine d'essai Instron 4200 a une longueur maximale entre mors de 800 mm avec une force axiale maximale de 10 kN. Cette machine est capable d'enregistrer la force appliquée par un capteur de force de 10 kN, ou un capteur de 500N. Elle est équipée de mors arrondis pneumatiques aux deux extrémités, cf. Figure E 1 b).

La machine d'essai Roell & Korthaus a une longueur maximale entre mors de 1250 mm avec une force axiale maximale de 200 kN. Les charges ont été introduites par cônes métalliques, cf. Figure E 1 c).

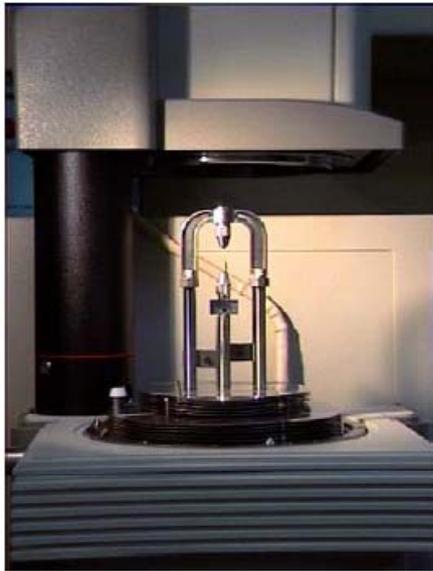
E.3 Banc d'essai de 100 tonnes

Des essais de traction pure sur le toron et l'âme du câble 25T et sur le câble 25T ont été réalisés au banc d'essai de 100 tonnes à l'IFREMER au centre Brest. Le banc d'essai est composé d'un vérin hydraulique de 100 tonnes d'un côté (partie mobile) et une partie fixe de l'autre côté. La longueur maximale possible entre deux extrémités est de 8 m et un capteur de force de 1000 kN a été installé côté mobile. Le vérin a une course de 1,5 mètres. Pour les essais sur le toron et l'âme, on a installé un capteur de force de 200kN côté fixe qui nous permet d'avoir des mesures plus précises. La Figure E 1 d) présente ce banc d'essai.

On rappelle ici que pour tous les bancs d'essai ci-dessus, deux cameras numériques ont été installées pour enregistrer les images, et l'allongement de la partie centrale de l'éprouvette a été déterminé à partir d'analyse d'images, sauf pour l'appareil DMA (déplacement par capteur optique intégré). Tous les résultats que nous présenterons dans le chapitre 5 ont été déterminés à partir des déplacements fournis par le système de cameras.

Les essais avec les machines présentées dans ce paragraphe nous permettent d'obtenir la raideur axiale de chaque éprouvette (essai de traction pure). Pour déterminer les autres

termes de la matrice de raideur on a utilisé d'autres dispositifs expérimentaux décrits par la suite.



a)



b)



c)



d)

Figure E. 1 : les différents bancs d'essais utilisés à l'IFREMER : a) DMA , b) Instron , c) R&K et d) banc d'essai de 100 tonnes.

E.4 Banc d'essai de 10 tonnes à Evry

Pour obtenir toutes les composantes de la matrice raideur, des essais de torsion et de traction sont nécessaires. Ces essais sur le câble 25T ont été réalisés au Centre des Matériaux Pierre-Marie Fourt (Ecole des Mines de Paris) à Evry. Pour ce faire, une machine de traction – torsion a été utilisée, dont les principales caractéristiques sont les suivantes :

La longueur maximale entre mors : 900 mm

La force maximale de traction : 100 kN



Figure E2 : Banc d'essai de 10 tonnes à Evry

Elle est équipée d'un capteur de force de 100 kN et un capteur de torque de 1.2 kN.m et pour mesurer le déplacement du câble un extensomètre est ancré au câble.

E.5 Banc d'essai de 3000 tonnes au LCPC

Les essais sur le câble 205T ont été réalisés au LCPC (Laboratoire Centrale des Ponts des Chaussées) de Nantes. On a fait deux séries d'essais sur ce câble. Dans un premier temps on a réalisé un essai de traction simple en mesurant la force axiale et la déformation du câble. Cet essai a été fait au banc d'essai de 30000kN. Le banc d'essai est composé de 3 vérins hydrauliques de 1000 tonnes d'un côté (partie mobile) et une partie fixe de l'autre. La longueur maximale entre deux extrémités est 15 m et la course maximum est un mètre. Un capteur de force de 30000 kN a été installé du côté mobile, cf. figure E3 a). Cet essai nous fournit la raideur axiale du câble.

E6 Banc d'essai de 500 tonnes au LCPC

Dans un deuxième temps, on a refait des essais de traction simple sur le câble 205T avec un éprouvette beaucoup plus longue que la précédente. Cette fois-ci, on mesure la force axiale, la déformation axiale et le moment de torsion induit par la traction du câble. Le banc d'essai est composé d'un vérin hydraulique de 500 tonnes d'un côté (partie mobile), avec une course de 3 m. Il y a un tunnel de 200 m devant le piston et une partie fixe de l'autre côté qui peut être installée à différentes distances le long du tunnel, en fonction de l'essai souhaité. La longueur maximale possible entre deux extrémités est la longueur du tunnel, mais ici on a testé un câble de 46 m. Un capteur de force de 3000 kN a été installé côté mobile (pour vérifier les résultats), un autre capteur de force de 1000 kN et un torque mètre de 10000 N.m sont installés de l'autre côté (parti fixe), cf. figure E3 b). Les

résultats obtenus sur ce banc d'essai nous ont permis de déterminer la raideur axiale, $k_{\varepsilon\varepsilon}$, ainsi que le terme de couplage, $k_{\theta\varepsilon}$, du câble.

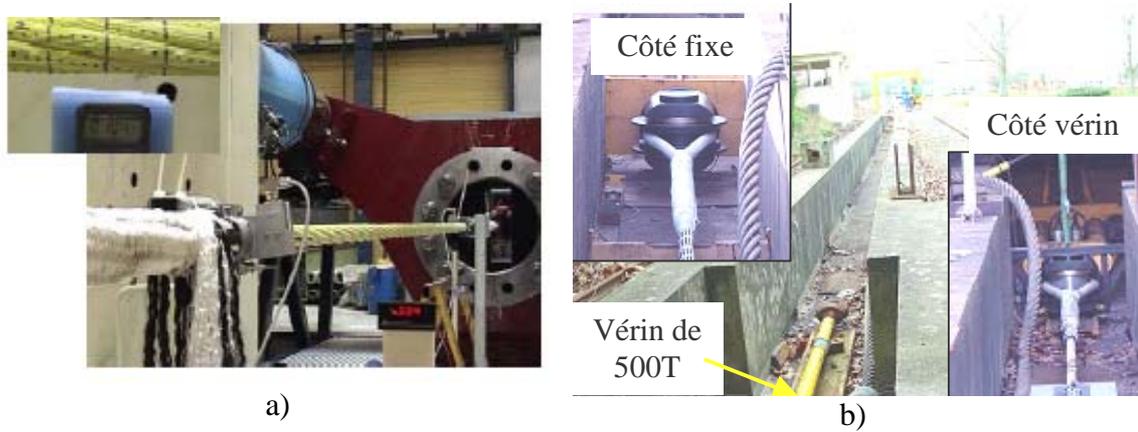


Figure E. 3 : les différents banc d'essais au LCPC, a) 30000 kN et b) 5000 kN

Bibliographie

- [BEL 2004] Beltran, J. F., and Williamson, E. B., "Investigation of the Damage-Dependent Response of Mooring Ropes," *Proc. 14 th Int. Offshore and Polar Eng. Conference, Toulon, France, May 23-28, 2004.*
- [BLO 1989] Blouin, F., and Cardou, A., "A study of helically reinforced cylinders under axially symmetric loads mathematical modelling," *Int. J. Solids Structures Vol. 25, No. 2, pp189-200, 1989.*
- [CAN 1993] Cantin, M. M., et al., "Experimental analysis and modelisation of the stiffness in torsion of wire ropes," *Proceeding of the Organisation International pour Etude de l'Endurance des cables (OIPEEC) Conference, Delft, the Netherlands, September 1993, pp. II-67-II-77.*
- [CAR 1973] Carlson A. D., et Kasper R. G., "A structural analysis of a multiconductor cable," Rapport technique AD-767 963, Naval underwater system center, New London Laboratory, 1973.
- [CAR 1997] Cardou, A., and Jolicoeur, C., "Mechanical models of helical strands," *Appl. Mech. Rev., Vol. 50, no 1, January 1997.*
- [CHA 2003] Chailleux E., and Davies P., "Modelling the non-linear viscoelastic and viscoplastic behaviour of aramid fiber yarns," *Mechanics of Time dependent materials journal Vol. 7, No. 3-4, pp. : 291 – 303, 2003.*
- [CHI 1996] Chiang Y. J., "Characterizing simple-stranded wire cables under axial loading," *Finite Elements in Analysis and Design Vol. 24, No. 2, pp. 49-66, 1996.*
- [COS 1976] Costello, G.A., and Philips, JW., "Effective Modulus of twisted wire cables," *J. of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol 102, pp 171_181, 1976.*
- [COS 1997] Costello, G.A., . " Theory of wire rope, ". 2nd edition, Springer, 1997.
- [CUT 1987] Cutchins M. A., Cochran J. E., Guest S., Fitz-Coy N. G. et Tinker M. L., "An investigation of the damping phenomena in wire rope isolator," *The Role of Damping in Vibration and Noise Contrôle, Vol. 5, (Boston, Massachusettes), pp 197-204, Proceedings of the 1987 ASME Design Technology Conference, 1987.*
- [FOS 2002] Foster G.P., "Advantages of fiber rope over wire rope," *J. of industrial textiles, Vol 32, No. 1, pp 67-75, July 2002.*
- [FRM 2003] FRM 2003, Fibre Rope Modeller, version 1.1.5, Tension Technology International Ltd.(TTI), 2003.

- [GHO 2004] GHOREISHI, S. R., MESSENGER, T., CARTRAUD, P., and DAVIES, P., "Assessment of Cable Models for Synthetic Mooring Lines," *Proceedings of The Fourteenth International Offshore and Polar Engineering Conference Toulon, France, May 23 –28, 2004*.
- [GIB 1972] Gibson, P. T., Minor J. C., and Cress, H. A., "Experimental investigation of an electromechanical cable," *8th Ann. MTS Conf., Washington D. C. (1972)*.
- [HOB 1982] Hobbs, R.E., and Raoof, M., "Interwire slippage and fatigue prediction in stranded cables for TLP tethers," *Behaviour of Offshore Structures, Hemisphere publishing/McGraw-Hill, New York, Vol 2, pp 77-99, 1982*.
- [HOP 1991] Hoppe, L.F.E., "Modeling the static behavior of Dyneema in wire-rope construction," *MTS RTM, 1991*.
- [HRU 1951] Hruska, F. H., "Calculation of stresses in wire ropes," *Wire and wire products, Vol 26, No 9, pp 766-767, 1951*.
- [HRU 1952] Hruska, F. H., "Radial forces in wire ropes," *Wire and wire products, Vol 27, No 5, pp 459-463, 1952*.
- [HRU 1953] Hruska, F. H., "Tangential forces in wire ropes," *Wire and wire products, Vol 28, No 5, pp 455-460, 1953*.
- [HUA 1978] Huang, N.C., "Finite extension of an elastic strand with a core," *J. Applied Mechanics, Vol. 45, pp 852-858, 1978*.
- [JIA 1999] Jiang W. G., Yao M. S., and Walton J. M., "A concise finite element model for simple straight wire rope strand," *Int. J. of Mechanical Sciences, Vol. 41, pp 143-161, 1999*.
- [JIA 2000] Jiang W. G., Henshall J. L., and Walton J. M., "A concise finite element model for three-layered straight wire rope strand," *Int. J. of Mechanical Sciences, Vol. 42, pp 63-89, 2000*.
- [JOL 1991] Jolicoeur, C., and Cardou, A., "A numerical comparison of current mathematical models of twisted wire cables under axisymmetric loads," *Journal of Energy Resources Technology, Vol. 113, December 1991*.
- [JOL 1996] Jolicoeur, C., and Cardou, A., "Semicontinuous Mathematical Model For Bending of Multilayered Wire Strands," *J. of engineering Mechanics, Vol. 122, No. 7, pp643-650, July 1996*.
- [KNA 1979] Knapp, R.H., "Derivation of a new stiffness matrix for helically armoured cables considering tension and torsion," *Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol.14, pp 515-520, 1979*.
- [KUM 1987] Kumar, K., and Cochran, Jr JE., "Closed-Form Analysis for Elastic Deformations of Multilayered Strand," *ASME J. Appl. Mech., Vol. 54, pp. 898-903, 1987*.

- [KUM 1990] Kumar, K., and Cochran, Jr JE., "Analytical Estimation for Static Elastic Deformations of Wire Ropes with Fibrous Core," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 57, pp. 1000-1003, 1990.
- [KUM 2001] Kumar, K., and Botsis J., "Contact Stresses in Multilayered Strands Under Tension and Torsion," *Journal of applied Mechanics*, Vol. 68, pp 432-440, May 2001
- [LAB 1998] Labrosse, M., "Contribution à l'étude du rôle du frottement sur le comportement et la durée de vie des câbles monocouches" PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 1998.
- [LAN 1985] Lanteigne J., " Theoretical estimation of the response of helically armored cables to tension, torsion and bending," *Journal of applied mechanics*, Vol. 52, pp 423-432, 1985.
- [LEE 1993] Leech C. M., Hearle J. W. S., Overington M. S., and Banfield S. J., "Modelling Tension and torque Properties of Fibre Ropes and Splices" *Proc. of the Third International Offshore and Polar Engineering Conference Singapore*, 6-11 June 1993.
- [LEE 2002] Leech C. M., " The modeling of friction in polymer fibre rope" *Int. J. of Mechanical Sciences*, Vol. 44, pp 621-643, 2002.
- [LOV 1944] Love A. E. H., "A treatise on the mathematical theory of elasticity," New York Dover Publications, 1944.
- [LUT 1969] Lutchansky M., " Axial stresses in armor wires of bent submarine cables," *Journal of Engineering for industry*, Vol. 91, pp 687-693, August 1969.
- [MAC 1973] Machida, S, and Durelli, AJ., "Response of a Strand to Axial and Torsional Displacements," *J. of Mechanical Engineering science*, Vol. 15, pp 241-251, 1973.
- [MCC 1982] McConnell, K. G., et Zemeke, W. P., "A Model to Predict the Coupled Axial Torsion Properties of ACSR Electrical Conductors," *J. Experimental Mechanics*, Vol. 22, pp. 237-244, 1982.
- [MES 2003] Messenger T., "Comportement élastique des câbles à 6 torons ; résultats MEF et analytiques," *rapport LMM-IFREMER (contrat universitaire n° 2002 22024357 du 8 novembre 2002) , Laboratoire de Mécanique et Matériaux UPRES EA 2166 , Ecole Centrale de Nantes, mai 2003.*
- [MIN 1949] Mindlin, R., D., "Compliance of Elastic Bodies in Contact" *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 16, pp 259-268, 1949.
- [NAW 1997] Nawrocki, A., " Contribution à la modélisation des câbles monotorons par éléments finis " PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 1997.

- [NAW 2000] Nawrocki, A., et Labrosse M., “ A finite element model for simple straight wire rope strands ” *Computers & Structures Vol. 77, pp 345-359, 2000.*
- [PAU 1970] Paul, W., “ Structural Mechanics of Ropes ” *Reweiw of synthetic fiber ropes, US. Coastal gaurd acad., Res. And Dev. Proj., 1970.*
- [PHI 1973] Philips, J. W., et Costello, G. A., “Contact Stresses in Twisted Wire Cables,” *J. of engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society Civil Engineering, Vol. 99, EM2, pp. 331-341, 1973.*
- [PHI 1985] Philips, J. W., et Costello, G. A., “Analysis of Wire Rope With Internal-Wire-Rope Cores,” *ASME J. Applied Mechanics, Vol. 52, pp 510-516, 1985.*
- [RAM 1988] Ramsey H., “ A theory of thin rods with application to helical constituent wires in cables,” *Int. J. of Mechanical Sciences Vol. 30, No. 8, pp 559-570, 1988.*
- [RAM 1990] Ramsey H., “ Analysis of interwire friction in multilayered cables under uniform extension and twisting,” *Int. J. of Mechanical Sciences Vol. 32, No. 8, pp 709-716, 1990.*
- [RAO 1988] Raoof, M., and Hobbs R. E., “Analysis of Multilayered Structural Strands,” *J. of engineering Mechanics Vol. 114, No. 7, pp1166-1182, July 1988.*
- [RAO 1990] Raoof, M., “Free-bending of spiral strands,” *J. of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol 116, No. 3, pp 512-530, 1990.*
- [RAO 1991] Raoof, M., “Method for analysing large spiral strands,” *J. Strain Anal. Vol. 26, No. 3, pp. 165-174, 1991.*
- [RAO 1995a] Raoof, M., and Kraincanic I., “Simple Derivation of the Stiffness Matrix for Axial/Torsional Coupling of Spiral Strands,” *Computers & Structures Vol. 55, No. 4, pp. 589-600, 1995.*
- [RAO 1995b] Raoof, M., and Kraincanic I., “ Characteristics of fiber – core wire rope,” *Journal of Strain Analysis Vol. 30, No. 3, pp.217-226, 1995.*
- [RAO 1995c] Raoof, M., and Kraincanic I., “ Analysis of Large Diameter Steel Ropes,” *Journal of Engineering Mechanics Vol. 121, No. 6, pp. 667-675, 1995.*
- [RAO 1997] Raoof, M., “Effect of Lay Angle on Various Characteristics of Spiral Strands,” *International Journal of Offshore and Polar Engineering, Vol. 7, No. 1, march 1997.*
- [RAO 1998] Raoof, M., and Kraincanic, I., “Determination of wire recovery length in steel cables and its practical applications,” *J. of Computers & Structures, Volume 68, Issue 5, Pages 445-459, September 1998.*
- [RUN 2002] Rungamornrat, J., Beltran, J. F., Williamson, E. B., “Computational Model for Synthetic-Fiber Rope Response” *Proc. 15 th Eng. Mechanics Conference, ASCE, New York, 2002.*

- [SAT 1996] Sathikh S., Moorthy M. B. K., et Krishnan M., "A symmetric Linear Elastic Model for Helical Wire Strands under Axisymmetric Loads," *Journal of Strain Analysis Vol. 31 No. 5 1996*.
- [SCA 1968] Scanlan, R. H., and Swart, R. L., "Bending stiffness and strain in stranded cables," *IEEE Winter Power Meeting, IEEE Press, Piscataway, N. J., Paper No. 68 CP 43-PWR, 1968*.
- [STR 1988] Strzemiecki, J., and Hobbs, R. E., "Properties of wire ropes under various fatigue loading," *CESLIC Rep. SC6, Engrg. Struct. Laboratories, Dept. Of Civ. Engegn., Imperial College, London, England, 1988*.
- [TRE 1963] Treloar, L. R. G., and Riding, G., "Theory of the Stress-Strain Properties of Continuous-Filament Yarns," *J. Text. Inst., Vol. 54, T156, 1963*.
- [TRE 1965] Treloar, L. R. G., "The Stress-Strain Properties of Multi-Ply Cords, Part I. Theory," *J. Text. Inst., Vol. 56, T477, 1965*.
- [UTT 1987a] Utting W. S., and Jones N., "The Response of Wire Rope Strands To Axial Tensile Loads-Part I. Experimental Results and Theoretical Predictions," *Int. J. Mech. Sci. Vol. 29, No. 9, pp 605-619, 1987*.
- [UTT 1987b] Utting W. S., and Jones N., "The Response of Wire Rope Strands To Axial Tensile Loads-Part II. Comparison of Experimental Results and Theoretical Predictions," *Int. J. Mech. Sci. Vol. 29, No. 9, pp 621-636, 1987*.
- [UTT 1988] Utting W. S., and Jones N., "Axial-torsional interactions and wire deformation in 19-wire spiral strand," *Journal of Strain Analysis for Engineering Design, Vol. 23, No. 2, pp. 79-86, 1988*.
- [VEL 1981] Velinsky S. A., "Analysis of wire rope with complex cross sections," Ph. D. thesis in theoretical and applied mechanics, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1981.
- [VEL 1984] Velinsky S. A., Anderson G. L., et Costello G. A., "Wire rope with complex cross sections," *Journal of Engineering Mechanics, Vol. 110 380-391, March 1984*.
- [VEL 1985] Velinsky S. A., "General Nonlinear Theory for Complex Wire rope," *Int. J. of Mechanical Sciences, Vol. 27, pp 497-507, 1985*.
- [VEL 1985b] Velinsky S. A., "Analysis of Fiber-Core Wire Rope," *Journal of Energy Resources Technology, Vol. 107, September 1985*.