

N° d'Ordre : 3549

THÈSE

Présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

pour obtenir

le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

Mention Mathématiques et Applications

par

Géraldine PICHOT

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale MATISSE

U.F.R. de Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE :

*Modélisation et analyse numérique
du couplage filet-écoulement hydrodynamique
dans une poche de chalut*

Soutenue le 6 décembre 2007 devant la Commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

M. Olivier Pironneau	Examineur
M. Frédéric Hecht	Rapporteur
M. Pierre Fabrie	Rapporteur
M. Roger Lewandowski	Directeur de thèse
M. Lalaonirina R. Rakotomanana	Examineur
M. Gabriel Caloz	Examineur
M. Daniel Priour	Invité, Parrain de thèse IFREMER

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu mon directeur de thèse Roger Lewandowski qui m'a dirigé durant ces trois années. Je lui suis très reconnaissante pour les moments (nombreux) qu'il m'a consacrés et pour ses précieux conseils qui ont été les clés de la réussite de ce projet. J'ai beaucoup appris à ses côtés et cette thèse a été le moteur d'une collaboration très enrichissante.

Je remercie également chaleureusement mon parrain de thèse IFREMER, Daniel Priour. Ses remarques pertinentes et ses conseils m'ont permis de progresser dans mes recherches. Cela a toujours été un grand plaisir pour moi d'aller lui rendre visite à Brest pour des journées de discussions toujours passionnantes.

Je les remercie également tous deux pour la lecture de mon manuscrit, qui grâce à leurs conseils, a gagné en clarté.

Ce fut un grand honneur que Pierre Fabrie et Frédéric Hecht aient accepté de rapporter sur cette thèse. Je leur suis très reconnaissante et les remercie vivement pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux et pour leurs remarques et suggestions lors de la lecture de mon manuscrit. Un grand merci également à Olivier Pironneau, Gabriel Caloz et Lalaonirina R. Rakotomanana d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

J'ai eu la chance de planifier et de pouvoir suivre de très près des campagnes expérimentales en bassin d'essais. Mes sincères remerciements vont à toute l'équipe de l'IFREMER de Boulogne-sur-Mer, plus particulièrement à Grégory Germain et Jean-Valéry Facq pour leur accueil toujours chaleureux. Merci à eux d'avoir eu la patience et la gentillesse de m'initier aux techniques de vélocimétries laser et d'avoir toujours fait le maximum pour me fournir les précieuses données que je réclamais.

Merci à tous ceux qui ont suivis de près ou de loin mes travaux, à ceux qui m'ont invitée pour parler de mes recherches.

Ce travail a été entrepris dans le cadre d'une thèse IFREMER, financée par l'IFREMER et la Région Bretagne, je tiens à les remercier pour leur soutien et pour la confiance qu'ils m'ont accordée. Je remercie également l'Institut de Recherche Mathématique de Rennes (IRMAR) pour les très bonnes conditions de travail dont nous bénéficions.

Je remercie également Karine Falc'Hon, Claude Boschet, Danielle Lanneau, Pasquale Breger, Marie-France Chériaux, Chantal Halet, Marie-Annick Paulmier et Patricia Barthélémy pour leur gentillesse, leur patience et leur disponibilité sur les questions administratives. Un grand merci également à toute l'équipe de la bibliothèque de l'Irmar qui fait un travail remarquable, avec efficacité et toujours avec le sourire.

Un merci tout particulier à ceux qui ont partagé le même bureau ou le bureau voisin et qui ont été proches de moi pendant ces trois ans, dans les bons moments comme dans

les moments où "empêtrée dans mes filets", leur soutien a été très précieux, je pense notamment à Nicolas, Polynice, Emmanuel, Anne-Claire, Victor, Fanny. Plus généralement, merci à tous les thésards et jeunes docteurs de la tour de maths pour leur bonne humeur et l'ambiance conviviale qui y règne.

Merci à mes amis, vos encouragements et votre amitié ont compté énormément ces trois années. Merci à Françoise pour son écoute et sa gentillesse.

Je remercie du fond du coeur mes parents et mon frère Mikaël qui m'ont toujours soutenue et encouragée dans ce que j'entreprends. Merci à mes grand-parents, rien de mieux pour me ressourcer que de venir vous voir dans ce petit village jurassien qui m'a vu grandir. Merci à la famille Lemarchand et à la famille Mabileau. Enfin, Yohann, je ne saurais dire avec des mots combien je te suis reconnaissante. Tous ces moments de bonheur partagés apportent à ma vie les rayons de soleil qui m'aident à m'épanouir et à réaliser mes rêves.

Table des matières

Remerciements	ii
Introduction	1
I Les bases d'un couplage fluide-filet-prise - Etat de l'art	9
1 Modélisation mécanique et simulation d'un filet	13
1.1 L'approche discrète	14
1.1.1 Définition discrète d'un filet	14
1.1.2 Forces exercées sur un filet immergé	15
1.1.3 Calcul de la position d'équilibre	25
1.2 Approche de globalisation des mailles	40
1.2.1 Historique	41
1.2.2 Une globalisation simple des mailles	43
1.2.3 Estimation du profil du filet	44
1.2.4 Une technique éléments finis pour le filet	44
2 Modélisation et simulations des poissons	51
2.1 FEMNET	51
2.2 PRESEMO	53
2.3 BehaviorRis	55
2.4 Analyse	57
3 Modèles fluides existants	59
3.1 Hypothèse d'un écoulement uniforme	59
3.2 Hypothèse d'un fluide parfait	60
3.3 Hypothèse d'un fluide visqueux	60
3.3.1 Simulation numérique directe : les difficultés	61
3.3.2 Modélisation axisymétrique	63
3.3.3 Vers une modélisation 3D	66
3.4 Vers un couplage fluide/filet/poissons	73
II Vers une modélisation du fluide plus réaliste	75
4 Etude expérimentale	79
4.1 L'équipement	79
4.1.1 Le bassin d'essais	79
4.1.2 Les moyens de mesures	79

4.2	Une maquette de poche de chalut rigide	83
4.2.1	Rappels sur la théorie de la similitude	83
4.2.2	Géométrie	86
4.3	Résultats expérimentaux	89
4.3.1	Géométrie des deux configurations étudiées	89
4.3.2	Résultats et analyse de la première configuration : filet ouvert	89
4.3.3	Résultats et analyse de la deuxième configuration : filet fermé	99
4.4	Remarques sur l'acquisition des données	104
4.5	Conclusion	104
5	Modélisation de l'écoulement	107
5.1	Les équations de Navier-Stokes	108
5.2	Les équations de Navier-Stokes moyennées	109
5.2.1	Décomposition de Reynolds	109
5.2.2	Les équations du mouvement moyen	110
5.2.3	Bilans d'énergie cinétique	111
5.3	Un modèle de turbulence à une équation de transport	113
5.3.1	Hypothèse de Boussinesq	113
5.3.2	Dérivation de l'équation pour l'énergie cinétique turbulente	114
5.3.3	Système fermé d'équations	116
5.4	Prise en compte de la géométrie	117
5.4.1	Modélisation du filet par une membrane poreuse	118
5.4.2	Méthode des domaines fictifs	118
5.4.3	Calcul des efforts hydrodynamiques exercés sur les poissons	118
5.5	Description du problème mathématique en dimension 2	119
5.5.1	La géométrie	119
5.5.2	Les inconnues	120
5.5.3	Le système d'équations	120
5.5.4	Conditions aux limites	122
5.5.5	Conditions initiales	123
5.5.6	Sur les viscosités turbulentes	123
5.6	Analyse du problème mathématique en dimension 2	124
5.6.1	Les équations	124
5.6.2	Relèvement des conditions aux limites	125
5.6.3	Formulation variationnelle	127
5.6.4	Estimation A priori	130
5.6.5	Fin de la preuve du Théorème	131
5.6.6	Condition aux limites de type Neumann pour l'ECT	134
6	Tests du modèle fluide	137
6.1	Ecriture du modèle fluide sous forme axisymétrique	137
6.1.1	Hypothèse d'axisymétrie	137
6.1.2	Formulation variationnelle	139
6.1.3	Discrétisations par la méthode des éléments finis	140
6.1.4	Discrétisation en temps	142
6.1.5	Initialisation des schémas	144
6.1.6	Liste des paramètres mis en jeu	145
6.2	Test du modèle : Filet ouvert	145
6.2.1	Un modèle simplifié de perméabilité	145

6.2.2	Choix des paramètres numériques	151
6.2.3	Influence de la perméabilité	155
6.2.4	Influence du pas de temps	158
6.2.5	Influence de la longueur de mélange	161
6.2.6	Utilisation d'un maillage non conforme	164
6.2.7	Des modèles plus élaborés de perméabilité	169
6.3	Test du modèle : Filet fermé	179
6.4	Bilan	191
Conclusion		195
A Outil de prise en compte d'obstacles 3D		197
A.1	Cas simple d'un obstacle à frontière paramétrée	198
A.1.1	Cadre 2D	198
A.1.2	Cadre 3D	206
A.2	Cas d'obstacles dont la frontière est donnée par des points discrets	209
A.2.1	Méthode 2D pour définir la perméabilité	209
A.2.2	Généralisation au cas 3D	211
A.2.3	Application au cas de la prise de la maquette de Boulogne-sur-Mer	213
B Publications		217
Bibliographie		225

Introduction

Cette thèse de doctorat est une contribution à la simulation numérique du phénomène de capture au niveau de la poche d'un chalut. Notre ambition est de réunir dans ce mémoire des outils nécessaires à la réalisation d'un logiciel simulant le couplage entre le filet, le fluide et les poissons. Ce travail est motivé par sa contribution à l'amélioration de la sélectivité des chaluts. Par sélectivité, on entend la capacité des chaluts à laisser s'échapper les juvéniles et les poissons sans valeur marchande. En effet, l'objectif à terme consistera à tester grâce aux simulations, les mécanismes de sélectivité existants (ajout de mailles carrées, augmentation de la taille des mailles par exemple), à les améliorer et également à promouvoir leur utilisation auprès des pêcheurs. Utiliser un tel outil de simulation sera beaucoup moins coûteux que réaliser des mesures en mer et présentera l'avantage de pouvoir tester rapidement différentes configurations de filets.

Motivation et objectifs

Simuler les mécanismes intervenant au niveau de la poche d'un chalut est l'objet de notre étude. Il s'agit de trouver des modèles, reproduisant autant que possible les phénomènes réels. Déjà sujet de nombreuses études, la mécanique du filet est relativement bien comprise et simulée. Plus récemment des études portant sur les poissons et leurs comportements ont permis de mettre en place les premiers couplages filet/poissons. Reste la modélisation et la simulation de l'écoulement qui pose de nombreux problèmes, du fait de la complexité de la géométrie du filet et de ses mouvements.

Or la mise en oeuvre d'un logiciel de couplage complet du phénomène de capture ne peut se faire sans une étude plus approfondie de l'écoulement. Celui-ci influe sur la forme de la prise, sur la fatigue des poissons, et par ces biais sur la sélectivité.

Notre objectif est de fournir :

1. Un bilan complet des connaissances actuelles sur la modélisation du filet, des poissons et du fluide ;
2. Une meilleure compréhension de l'écoulement autour de la poche ;
3. Un modèle fluide, applicable en 3D, qui pourra être couplé aux modèles filets et poissons existants ;

Deux projets européens (PREMECS I et PREMECS II ¹) ont porté sur l'étude et la simulation du mécanisme de capture afin de réduire le nombre de prises accidentelles. Notre travail s'inscrit dans la continuité de ces projets.

Mais qu'en est-il réellement de l'état des ressources marines ? Afin de mieux montrer la pertinence de cette étude, dressons un bilan de l'état actuel des ressources.

¹PREMEdive ModEl of Cod-end Selectivity, <http://www.ifremer.fr/premecs/>

Contexte : le déclin des ressources marines

Dernièrement, les médias ont largement diffusé la problématique du déclin des ressources marines. Si la tendance actuelle se poursuit, les espèces les plus couramment pêchées aujourd'hui auront entièrement disparu en 2048. Telle est l'alarmante conclusion à laquelle est parvenue une équipe internationale de 14 chercheurs parue dans la revue Science en novembre 2006 (voir [WBB⁺06]) si nous ne faisons pas le nécessaire aujourd'hui pour assurer la pérennité des ressources.

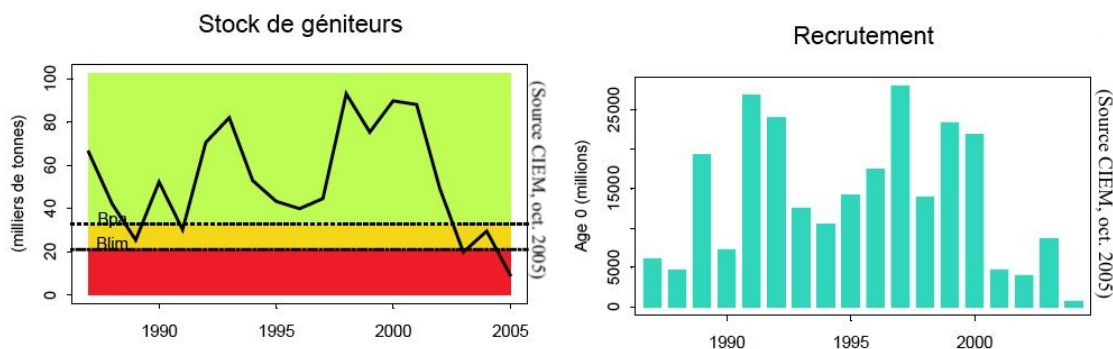
Quelles en sont les causes ? Elles sont multiples, on peut citer notamment la surpêche, la pollution, la destruction des habitats et le réchauffement climatique.

Un tel déclin de la biodiversité accélère le dérèglement du système océanique dans son ensemble (efflorescences d'algues vertes comme dans la Baltique par exemple, eutrophication, ...). Car c'est précisément une plus grande biodiversité qui augmente la capacité des océans à produire des poissons et des crustacés, à résister au développement de certaines algues, à produire de l'oxygène et à filtrer les substances polluantes. Il est donc essentiel de permettre aux espèces menacées et surexploitées de recouvrir des stocks raisonnables.

Des mesures ont d'ores et déjà été déployées en ce sens.

La principale mesure, qui doit rester une mesure d'urgence consiste en la fermeture de la pêche d'une espèce menacée pendant une période donnée et un lieu donné. Par exemple, en 2005, au vue du très faible nombre de géniteurs et du faible recrutement des anchois dans le Golfe de Gascogne (voir figure 1), la fermeture de cette pêche a été décidée par la Commission Européenne durant une période s'étalant de juillet 2005 à décembre 2005. Le recrutement se définit par le nombre de poissons qui entrent dans la phase exploitable, suite à leurs déplacements sur les lieux de pêches ou lorsqu'ils atteignent la taille minimale de capture. Cette fermeture a été renouvelée au printemps 2006 suite aux chiffres estimés par le CSTEP (Comité Scientifique, Technique et Economique pour la Pêche) d'un "stock d'anchois adultes de 18640 tonnes pendant la période de frai, ce qui est bien en deçà des seuils biologiques de sécurité". En juin dernier, la fermeture a été maintenue au moins jusqu'en juillet 2008.

Figure 1: Stock de géniteurs et recrutement pour l'anchois - Sources CIEM (Conseil international pour l'Exploration de la Mer), oct. 2005



Ces mesures d'urgences doivent garder un caractère exceptionnel. Avec 200 millions de personnes dans le monde qui gagnent tout ou une partie de leur revenu grâce à la pêche et aux activités qui lui sont liées, des mesures à long terme sont nécessaires.

Parmi ces mesures à long terme, on retrouve les accords de pêche entre Etats afin de définir des Taux Admissibles de Captures (TAC), des quotas par pays, par zones, par espèces, de fixer les tailles minimales de captures, d'établir des zones dites de cantonnements i.e. des zones dans lesquelles la pêche est limitée voire interdite du fait de la forte concentration de petits poissons (nourriceries) ou de poissons en frai. Plus largement, il s'agit également de prendre des mesures pour lutter contre le réchauffement climatique (Protocole de Kyoto ², 1998) et la pollution.

Parallèlement, des mesures techniques peuvent être prises. "Des engins et pratiques de pêche sélectifs et respectueux de l'environnement devraient être mis au point et utilisés, dans la mesure du possible, pour préserver la biodiversité et conserver la structure des populations et les écosystèmes aquatiques, et protéger la qualité du poisson" (article 6.6 du code de conduite pour une pêche responsable, 1995 [dnuple195]). La sélectivité se définit comme la "propriété pour un engin de pêche, de capturer une espèce plutôt qu'une autre (sélectivité interspécifique) ou de retenir, pour une espèce déterminée les individus d'une certaine taille (sélectivité intraspécifique)" (définition extraite de [Des03]).

C'est sur cette question de l'amélioration de la sélectivité des engins de pêche que notre étude s'inscrit.

Les engins de pêche et la sélectivité

Parmi les engins de pêche, on distingue les engins tractés, dits "arts traînants" (chaluts de fond, sennes danoises, chaluts pélagiques), des engins fixes, dits "arts dormants" (filets dérivants, ...). Parmi toutes ces techniques de pêche, la pêche au chalut est la plus utilisée. Elle fait intervenir un ou deux bateaux qui tractent un filet (le chalut) pendant 2 à 3 heures, fatiguant les poissons jusqu'à ce qu'ils tombent au fond du filet, partie appelée le cul (ou poche) du chalut. Le filet est ensuite retiré de l'eau et la prise, se trouvant dans la poche, ramenée sur le pont. Il existe des chaluts de fonds, traînés sur les fonds marins capturant ainsi morues, merlus, aiglefin, ... et des chaluts pélagiques qui sont tirés à mi-profondeur pour capturer sardines, chinchards, bars, ...

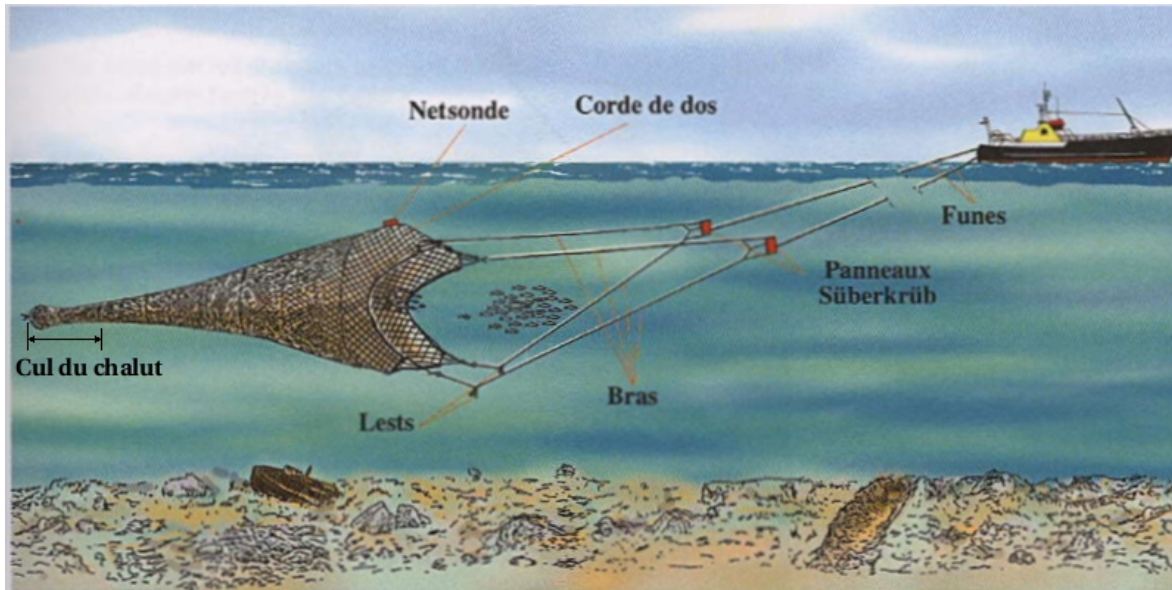
Les chaluts sont des filets, traditionnellement à mailles losanges, tractés à l'aide de deux câbles d'acier, dénommés les funes. Leur ouverture horizontale peut être réalisée à l'aide de panneaux (voir la figure 2) et l'ouverture verticale à l'aide de poids et de flotteurs. De grandes mailles sont utilisées sur l'avant du chalut alors que des mailles plus petites et plus nombreuses sont utilisées pour la poche, là où les poissons sont capturés.

Avec l'avancée des techniques de pêche (localisation des bancs de poissons, filets plus résistants, ...) le chalutage est devenue une technique très efficace de sorte que tous types de poissons sont capturés y compris des juvéniles et des poissons sans valeur marchande. Ces poissons non souhaités, en majorité morts avec la remontée du filet, sont rejetés par dessus bord.

En 1996, la FAO (Organisation des Nations Unies pour l'Alimentation et l'Agriculture) a estimé que les rejets annuels moyens de poissons au niveau mondial s'élevaient à environ 20 millions de tonnes [Kou04]. Depuis, ce nombre a diminué pour passer à 7,3 millions de tonnes en moyenne par an pour un total de prises annuelles mondiales plafonné à environ 100 millions de tonnes. Cette baisse vient sans doute des efforts réalisés pour améliorer la sélectivité des chaluts, par exemple, en augmentant la taille des mailles,

²texte en ligne à l'adresse http://unfccc.int/kyoto_protocol/items/2830.php

Figure 2: Chalut pélagique à panneaux - Extrait de [Des03]



en utilisant une grille séparatrice au sein du chalut (comme c'est le cas pour séparer les crevettes des poissons en Norvège, voir figure 3) ou encore en ajoutant des mailles carrées dans la poche. Ces dernières présentent l'avantage de rester ouvertes pendant la traction contrairement aux mailles losanges qui tendent à se fermer, offrant ainsi une possibilité plus grande aux petits poissons de s'échapper.

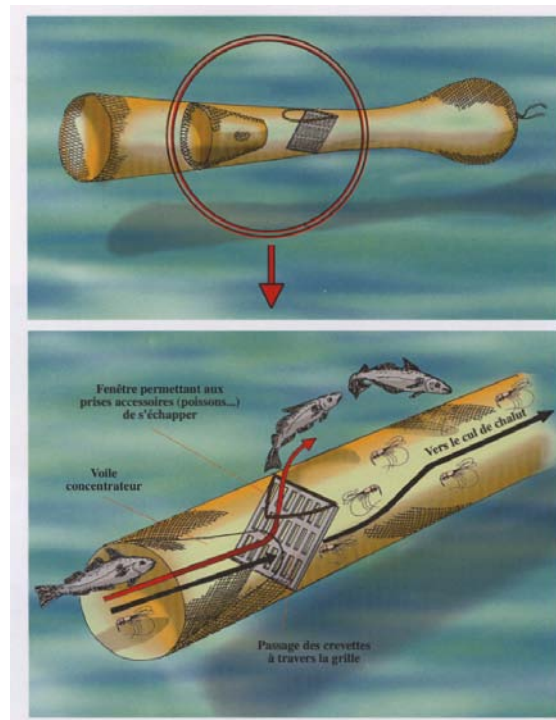
Cette baisse dans les rejets vient également d'une plus grande utilisation des poissons qui étaient auparavant rejetés. Pourtant elle ne s'est pas accompagnée d'une augmentation du volume des débarquements. Comme pose la FAO, l'utilisation de plus en plus grande de ces poissons auparavant rejetés ne cache-t-elle pas en réalité un déclin dans les captures ?... Aussi les efforts doivent se poursuivre pour diminuer ce nombre de rejets.

Il n'est pourtant pas aisé de déterminer l'efficacité des mécanismes de sélectivité mis en place. Des tests en mer apportent des éléments de réponse mais leur coût est très élevé. Pratiquement, pour déterminer la sélectivité d'un chalut, la méthode consiste à envelopper la poche du chalut par une deuxième poche et de compter, après le chalutage, le nombre de poissons qui sont parvenus à s'échapper de la première poche pour se retrouver dans la deuxième. L'ajout d'un deuxième filet pose le problème de la perturbation de l'écoulement, il s'agit néanmoins d'une méthode qui fournit des données plus facilement exploitables que celles collectées par des caméras disposées sur la poche (du fait de la turbidité de l'eau, du mouvement du chalut, des poissons, ...).

Les dispositifs de sélectivité n'ont par ailleurs pas la même efficacité en fonction des pêcheries [peV00]. Par exemple, l'utilisation des mailles carrées se révèlent inefficace pour la sélectivité des poissons plats.

De plus, la complexité de l'installation des mécanismes, le surcoût sur l'ensemble de l'engin et parfois la diminution du rendement font qu'il n'est pas aisé de convaincre les professionnels d'utiliser ces techniques, même s'ils sont sensibilisés aux questions de la

Figure 3: Principe de la grille "Nordmore" - Extrait de [Des03]



sélectivité. Il apparaît alors nécessaire d'élaborer un moyen fiable permettant de comparer la sélectivité de différents chaluts.

La simulation numérique au service de la sélectivité

Une alternative prometteuse et beaucoup moins coûteuse que les essais en mer ou en bassin vient de l'utilisation de simulations numériques. Pour cela, il faut développer un logiciel permettant de simuler le mécanisme de capture au niveau d'une poche de chalut, puisque c'est à ce niveau que se produit la sélectivité. Notre contribution porte sur le développement d'un tel outil qui permettrait à terme de déterminer l'endroit optimal où placer les mécanismes de sélectivité. Nous donnons dans ce mémoire les ingrédients nécessaires à l'élaboration d'un tel logiciel.

Pour traiter ce problème complexe d'interactions entre le fluide, le filet et les poissons, il faut avant tout trouver les modèles mathématiques adéquats i.e. ceux qui reproduisent au mieux, par la simulation, les phénomènes physiques observés.

Cette étape est majeure dans le projet. Le choix des modèles mathématiques doit se faire avec pour objectif de les résoudre numériquement, on cherchera donc à faire une modélisation qui conduise à une simulation numérique qui soit, autant que possible, la moins coûteuse, en terme de puissance d'ordinateurs.

L'étape de programmation et de simulation vient alors ensuite. Elle permet de résoudre numériquement les problèmes mathématiques précédemment posés et ce, à l'aide d'algorithmes convenablement choisis.

Ces simulations doivent être menés conjointement à des campagnes expérimentales qui permettent de tester et d'améliorer les modèles mathématiques par comparaison entre les résultats des simulations numériques et les résultats expérimentaux.

Contribution

La thèse défendue ici a pour objectif de donner et compléter les bases nécessaires à l'écriture d'un logiciel de couplage entre le fluide, le filet et les poissons.

Notre contribution porte ainsi :

1. **Sur la réalisation d'un bilan de connaissances sur le sujet.** Cela nous a permis d'approfondir les approches adoptées pour simuler les mécanismes intervenant lors de la capture. Les modèles employés sont variés, de même que les hypothèses formulées et les résolutions numériques. Dès que nécessaire, nous avons apporté des précisions sur les outils mathématiques utilisés. Ce bilan a guidé la suite de notre travail dans la mesure où il a mis en évidence l'absence d'un modèle fluide adapté pour la simulation 3D du processus de capture ;
2. **Sur la collecte de données expérimentales** qui permettent de mieux comprendre l'écoulement autour d'une poche de chalut. Une série de tests est ainsi disponible pour tout modèle fluide ;
3. **Sur l'élaboration d'un modèle fluide applicable en 3D.** Nous avons identifié deux difficultés inhérentes à la simulation de l'écoulement :
 - Le premier problème repose sur la prise du filet dans le domaine fluide. Le filet étant une structure complexe et poreuse, l'étude de l'écoulement se produisant autour exigerait un maillage très complexe et très demandeur de ressources informatiques.
 - Le deuxième problème vient du caractère turbulent de l'écoulement. La présence de la prise et le mouvement du filet créent des recirculations à l'arrière qui font renoncer à toute simulation directe.

Nous avons proposé, pour répondre à ces deux problèmes, un modèle fluide basé sur les équations de Navier-Stokes moyennées avec viscosité turbulente couplées à un modèle de turbulence à une équation pour l'énergie cinétique turbulente. Afin de s'affranchir d'une géométrie complexe telle celle du filet, nous avons utilisé une méthode de la classe des méthodes de frontières immergées, qui donne des résultats prometteurs, d'autant plus dans l'objectif d'un couplage avec un filet en mouvement.

4. **Sur une étude mathématique en 2D du problème que pose notre modèle.** Nous avons démontré l'existence d'une solution faible au problème posé et déduit des conditions aux limites ne perturbant pas l'écoulement sortant ;
5. **Sur l'écriture d'un code de simulation *SeaNet*, développé sous le logiciel *FreeFem++* (<http://www.freefem.org/>) qui permet la simulation de l'écoulement autour d'une poche de chalut rigide axisymétrique.** Nous avons procédé à la validation de notre modèle dans ce cas simplifié par comparaison aux résultats expérimentaux précédemment collectés ;

6. Sur l'écriture d'un code sous Matlab permettant de prendre en compte des obstacles 3D dans un domaine fluide par l'intermédiaire de leurs perméabilités respectives.

Ce travail a conduit à l'écriture de quatre articles. Les trois articles [LP07b], [Pic07], [LP07a] sont acceptés et le quatrième concernant la partie expérimentale de ce travail est soumis. Ces articles sont fournis en Annexe B de ce mémoire.

Organisation du mémoire

Ce mémoire s'articule en deux parties.

La première partie présente un état de l'art des connaissances sur le sujet. Nous donnerons une description précise des modèles et logiciels existants pour le filet, le fluide et les poissons à travers plusieurs chapitres :

- Le premier chapitre présente les modèles de filet existants. Nous avons mis en évidence deux approches de modélisation. La première est une approche discrète, qui prend en compte tous les noeuds et fils du filet. Elle donne des résultats intéressants et nous conduit à dresser un bilan complet des efforts qui s'exercent sur un filet immergé. La deuxième approche trouve son origine dans la volonté de réduire le nombre de mailles à considérer. Il s'agit d'une approche de globalisation. Nous en détaillerons les méthodes et mettrons en évidence les avantages de leur utilisation.
- Le deuxième chapitre sera consacré aux modèles de poissons. Trois modèles seront mis en évidence par la description de trois logiciels FEMNET, PRESEMO et behavioRis, à finalités différentes. Le premier permettra de déterminer la forme de la prise dans la poche, le second est destiné à évaluer la sélectivité des chaluts et le troisième est plus largement dédié à la modélisation et la simulation de comportements d'animaux et peut ainsi être plus particulièrement appliqué à tester des hypothèses quant au comportement des poissons dans la poche de chalut.
- Le troisième et dernier chapitre de cette partie met en évidence l'absence d'un modèle fluide réaliste 3D pouvant être couplé aux modèles filet et poissons existants.

La deuxième partie de ce mémoire sera consacrée à présenter l'élaboration d'un modèle fluide applicable en 3D. Cette partie s'articulera autour de trois chapitres :

- Le premier chapitre donnera les résultats des campagnes expérimentales menées au bassin d'essais de l'Ifremer de Boulogne-sur-Mer. Ces dernières permettent de mieux comprendre l'écoulement se produisant au niveau de la poche et fournissent des tests très précieux pour le modèle fluide.
- Le deuxième chapitre expose le modèle fluide que nous proposons. Son avantage est qu'il permet de prendre en compte les obstacles sans nécessiter de maillage coûteux. Il traite également le problème du caractère turbulent de l'écoulement. Nous en ferons une analyse mathématique en dimension 2.
- Le dernier chapitre montre les résultats des simulations réalisées à l'aide du logiciel *SeaNet* réalisé sous *FreeFem++*. Nous verrons ainsi la capacité de notre modèle à reproduire les résultats expérimentaux.

Ce mémoire sera finalisé par un bilan de ce que ce travail a apporté. Nous proposerons également une série de perspectives qu'il est à présent possible d'envisager.

Partie I

Les bases d'un couplage fluide-filet-prise - Etat de l'art

Orientations

Simuler le couplage au niveau d'une poche de chalut nécessite la compréhension des différentes mécaniques et interactions entre le filet, les poissons et le fluide. La simulation numérique présente l'avantage de pouvoir tester différentes configurations de filet à moindre coût, ce qui a tout son sens dans une démarche d'amélioration de la sélectivité. Il s'agit donc de trouver des modèles adéquats reproduisant le plus fidèlement possible les comportements du filet, du fluide et des poissons. La présence de ces trois éléments (filet, fluide et poissons) conduit dans un premier temps à les étudier, dans la mesure du possible, séparément. Les trois premiers chapitres de cette partie sont dédiés à la présentation des modélisations proposées dans la littérature pour chacun de ces éléments. Cette partie est essentiellement la partie bibliographique de ce travail de thèse.

Chapitre 1

Modélisation mécanique et simulation d'un filet

Ce chapitre est consacré à la présentation des modèles élastiques de filets existants et les résultats des simulations numériques associées.

Avant toute chose, précisons le cadre de notre étude, à savoir quels types de filet nous intéressent.

Plusieurs types de chaluts existent, suivant les poissons capturés et la localisation géographique, les deux étant par ailleurs liés. Le filet à mailles losanges reste le type de filet le plus utilisé par les pêcheurs et de ce fait, sur lequel porte notre étude. Des études menées sur ces autres formes de mailles (filets à mailles hexagonales ou carrées) sont également riches d'informations puisqu'elles permettent de mieux comprendre l'effet de ce changement de mailles sur la sélectivité (le lecteur intéressé pourra par exemple consulter [O'N99] ou [Pri03]). Aussi même si elles ne font pas l'objet de notre étude, dès qu'une étude similaire à été menée sur ces autres formes de mailles, nous le préciserons.

Un chalut entier peut présenter plusieurs milliers de mailles. La sélectivité se produisant principalement au niveau de la poche, nous nous intéresserons plus particulièrement à cette partie du chalut. A ce niveau, le nombre de mailles varie suivant les pêcheries. Par exemple, une poche de chalut utilisée en Mer du Nord possède environ 4000 mailles alors qu'une poche utilisée en Mer Adriatique en possède environ 40000. Ainsi, le nombre de mailles dans le cul du chalut peut être grand, ce qui présente un coût numérique important lorsqu'il s'agit de toutes les modéliser.

Dès lors, la question se pose de savoir comment prendre en compte une telle géométrie au sein d'un code de calcul.

De notre étude bibliographique, nous avons mis en évidence deux approches :

1. La première, que nous nommerons l'approche discrète, consiste à considérer les forces qui s'exercent sur chaque noeud puis faire la somme de ces efforts et calculer leur position à l'équilibre. Il s'agit de l'approche la plus naturelle mais également la plus coûteuse en ressources informatiques, nous la décrirons dans une première partie. Elle nous amenera à donner plus précisément :
 - Une définition mathématique d'un filet ;
 - Les efforts à prendre en considération ;
 - Les méthodes pour obtenir la configuration à l'équilibre, ainsi que les résultats des simulations.

2. Dans une deuxième partie, nous détaillerons une autre approche, plus efficace, que nous appellerons approche de globalisation. L'idée consiste à prendre en compte plusieurs mailles simultanément. A notre connaissance, il n'existe pas encore d'équations homogénéisées régissant le comportement global du filet. On trouve des telles équations pour le cas plus simple d'un réseau plan de fils élastiques. Nous rappellerons ces travaux puis nous présenterons ces méthodes alternatives qui permettent de réduire de façon significative le nombre d'inconnues.

A présent, décrivons ces deux approches et leurs mises en oeuvre.

1 L'approche discrète

L'approche la plus naturelle est celle qui consiste à écrire le bilan des efforts sur chaque noeud et à calculer la position associée du filet à l'équilibre. Pour cela, il est nécessaire de disposer d'une définition rigoureuse d'un filet.

1.1 Définition discrète d'un filet

Le concept de filet peut s'écrire mathématiquement comme suit (extrait de [LDLPC04]) :

Définition 1.1.1 *Un filet de N noeuds sont définis en donnant :*

- un ensemble de N points $\mathcal{N} = \{P_1, \dots, P_N\} \in (\mathbb{R}^3)^N$,
- une courbe Γ , à laquelle appartiennent les q_0 premiers points P_i ($1 \leq i \leq q_0 < N$),
- une matrice de connectivité (booléenne) A qui définit les jonctions du filet (la composante (i, j) dans la matrice vaut 0 s'il n'y a pas de fil entre les noeuds i et j et 1 dans le cas contraire).

On parle de poche de chalut à mailles losanges si, de plus,

- (2 connections pour les noeuds frontières) pour tous $1 \leq i, j \leq q_0$, $a_{ij} = 0$ et pour tous $1 \leq i \leq q_0$, il existe exactement deux indices $k_i \neq q_i$ tels que $a_{ik_i} = a_{iq_i} = 1$,
- (4 connections pour les noeuds intérieurs) pour tous $q_0 < i < N$, il existe exactement 4 indices k_i, q_i, r_i et s_i tels que $a_{ik_i} = a_{iq_i} = a_{ir_i} = a_{is_i} = 1$, à l'exception peut-être pour un des indices,
- (condition de losange) soit i, j tels que $a_{ij} = 1$, sans être l'indice exceptionnel du point 4. Si $i, j > q_0$, il existe exactement deux couples d'indices (k_i^+, k_j^+) et (k_i^-, k_j^-) tels que :

$$a_{ik_i^\pm} = a_{jk_j^\pm} = a_{k_i^\pm k_j^\pm} = 1 \text{ and } a_{jk_i^\pm} = a_{ik_j^\pm} = 0.$$

Si $i \leq q_0$ ou $j \leq q_0$, idem avec exactement un couple d'indices.

De cette définition, il est aisé de définir mathématiquement un fil physique.

Définition 1.1.2 *(Fil) Un vecteur $u_{ij} \in \mathbb{R}^3$ commençant en P_i et terminant en P_j est considéré comme un fil du filet si le coefficient (i, j) de la matrice A , notés a_{ij} , est égale à 1. Alors la longueur tendue d'un fil (i, j) est donnée par la norme du vecteur \mathbf{u}_{ij} .*

1.1. L'APPROCHE DISCRÈTE

Cette écriture mathématique possède l'avantage de nommer les éléments constitutifs d'un filet et permet donc de mieux formaliser mathématiquement la notion de déformations. En effet, prenons un filet $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ de base Γ comme configuration de référence, on définit les déformations du filet comme suit :

Définition 1.1.3 (*Déformations du filet*) Soit $H(\mathcal{N})$ un ensemble de fonctions β de \mathcal{N} dans \mathbb{R}^3 . Il est fini car le filet a un nombre fini de noeuds et peut être identifié avec $(\mathbb{R}^3)^N$. Seul le sous-ensemble de $H(\mathcal{N})$ qui respecte les conditions aux limites est pris en considération. Il est noté $V(\mathcal{N})$ et est formé de toutes les déformations admissibles, i.e. des fonctions β pour lesquelles $\beta(P_i) = P_i$ pour tous $1 \leq i \leq q_0$.

Définissons à présent les efforts appliqués en chaque noeud.

1.2 Forces exercées sur un filet immergé

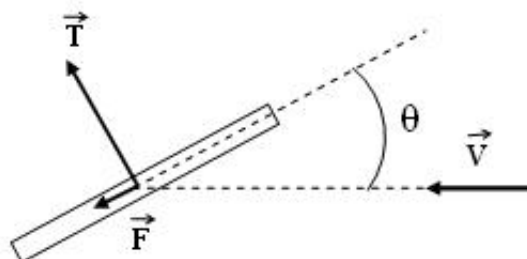
Chaque noeud de connection du filet sous l'eau est soumis :

1. A la poussée d'Archimède ;
2. Au poids du filet ;
3. Aux forces de traînée et de portance exercées par l'écoulement sur les fils ;
4. A une force d'inertie agissant le long de la direction perpendiculaire à la direction de la barre et dépendant de son accélération relative, uniquement dans le cas dynamique ;
5. A la tension et/ou la compression dans les fils ;
6. A la résistance du maillage à l'ouverture (appelée aussi flexion des fils dans le plan du filet) ;
7. A la flexion des fils hors du plan du filet ;
8. Aux efforts exercés par les poissons sur le filet.

a/ Forces hydrodynamiques

Dans le cas statique, les efforts hydrodynamiques sont représentés par deux forces, à savoir la force de traînée \mathbf{F} et la force de portance \mathbf{T} (figure 1.1).

Figure 1.1: Forces hydrodynamiques exercées sur un fil - cas statique



Nombreux sont les auteurs qui négligent les interactions entre les côtés des mailles, supposant que les forces hydrodynamiques agissent sur chaque fil comme s'il était isolé.

Suivant l'approche de Morisson [LBM98], cela leur permet d'utiliser les expressions des forces de portance et de traînée données par Landweber pour un câble animé par un mouvement de translation uniforme dans un fluide au repos, [LP47], [The93], [LBM98]. L'amplitude de chacune de ces deux forces est donnée par les expressions suivantes :

$$(1.1.1) \quad \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho C_d d \ell (|V| \sin \theta)^2, \\ F &= f \frac{1}{2} \rho C_d d \ell |V|^2, \end{aligned}$$

où :

d est le diamètre d'un fil, généralement quelques mm

ℓ est la longueur du fil [m],

C_d est le coefficient de traînée d'un fil, généralement pris à 1.2 (ou 1.8 pour les câbles circulaires de grande longueur),

$|V| \sin \theta$ est la composante normale au câble du vecteur vitesse,

f est le coefficient de friction d'un fil ($f = 0.08$).

ρ est la densité de l'eau (1000 kg.m^{-3} pour l'eau douce, $\approx 1025 \text{ kg.m}^{-3}$ pour l'eau de mer)

La force de portance T agit normalement sur le fil alors que la force de traînée F agit tangentiellement. Les coefficients impliqués se déduisent de résultats expérimentaux.

Notons que la force de traînée F est constante et ne dépend pas de θ , c'est pourquoi elle peut être considérée comme une force morte. A l'inverse, T dépend de θ et donc n'est pas une force potentielle.

Par la suite, les formules de Landweber ont été modifiées. L'hypothèse de Richtmeyer consiste à utiliser la composante de la vitesse tangentielle au câble :

$$(1.1.2) \quad F = f \frac{1}{2} \rho C_d d \ell (|V| \cos \theta)^2.$$

D'après Théret, ce dernier modèle est considéré comme le plus approprié pour reproduire les efforts du fluide sur le filet.

Dans le cas dynamique s'ajoute une nouvelle force hydrodynamique. Il s'agit d'une force d'inertie qui doit être considérée pour chaque fil (i, j) , connectant les noeuds i et j . Bessonneau ([Bes97], [LBM98]) la définit comme la force \mathbf{F}_{ij}^m agissant dans le plan parallèle à l'accélération et orthogonal à celui du fil :

$$(1.1.3) \quad \mathbf{F}_{ij}^m = \rho \frac{\pi d^2}{4} \ell_{ij} C_m \boldsymbol{\gamma}_{ij},$$

où $\boldsymbol{\gamma}_{ij}$ est l'accélération relative d'un fil (i, j) projetée dans un plan orthogonal à celui du fil, et C_m est le coefficient de masse ajoutée ($C_m = 1$). Le vecteur $\boldsymbol{\gamma}_{ij}$ est approché comme suit :

$$(1.1.4) \quad \boldsymbol{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{V}_i}{dt} + \frac{d\mathbf{V}_j}{dt} \right)$$

avec \mathbf{V}_i (respectivement \mathbf{V}_j) la vitesse du noeud i (respectivement j).

Cet effort se réduit uniquement à une action contenue dans le plan orthogonal au fil dans la mesure où un élément cylindrique circulaire n'entraîne pas de fluide lorsque ce dernier se déplace parallèlement à son axe longitudinal.

b/ Tensions dans les fils

Dans la poche de chalut, plus la prise est grande, plus les fils tendent à s'allonger. Cet allongement est dépendant du matériau dont est constitué le filet et est modélisé au travers du module d'Young. Ces forces dues aux tensions dans les fils peuvent être calculées directement en utilisant une expression linéaire, [Pri99]. Quand les déplacements sont petits, la loi de comportement est linéarisée, ce qui donne que la tension T_{ij} dans un fil (i, j) est proportionnelle à l'allongement $\ell_{ij} - \ell_{ij}^0$:

$$(1.1.5) \quad T_{ij} = EA \frac{\ell_{ij} - \ell_{ij}^0}{\ell_{ij}^0},$$

où :

- ℓ_{ij}^0 est la longueur initiale (non étirée) du fil considéré, en [m],
- ℓ_{ij} est la longueur étirée du fil (i, j) , en [m],
- E est le module d'Young, en [N.m^{-2}],
- A est l'aire de la section droite d'un fil, en [m^2].

Suivant le type de matériau dont est constitué le filet considéré, une loi constitutive linéaire peut ne pas être convenable pour la mise en oeuvre numérique, [LDL04]. Ainsi, Le Dret & al. [LDLPC04] ont ajouté un terme non-linéaire de correction, conduisant à une tension dans les fils non linéaire par rapport à l'allongement, d'ordre p . La tension T_{ij} dans le fil (i, j) est alors calculée par :

$$(1.1.6) \quad T_{ij} = \sum_{p=1}^n k_p \left(\frac{(\ell_{ij} - \ell_{ij}^0)_+}{\ell_{ij}^0} \right)^p,$$

où $k_p, p = 1, \dots, n$ sont des coefficients à déterminer (notons que $k_1 = E.A$ avec E le module d'Young et A l'aire de la section droite d'un fil) et $f_+ = \sup(f, 0)$. Le signe $+$ dans la formule signifie que seule la partie positive de l'allongement est prise en compte, cette hypothèse, raisonnable dans la poche du chalut, signifie que les effets de compression sont négligés par rapport à ceux de tension.

Des résultats expérimentaux sur un échantillon de fil (en polyamide tressé de 3 mm de diamètre) a conduit à une loi d'ordre 3 :

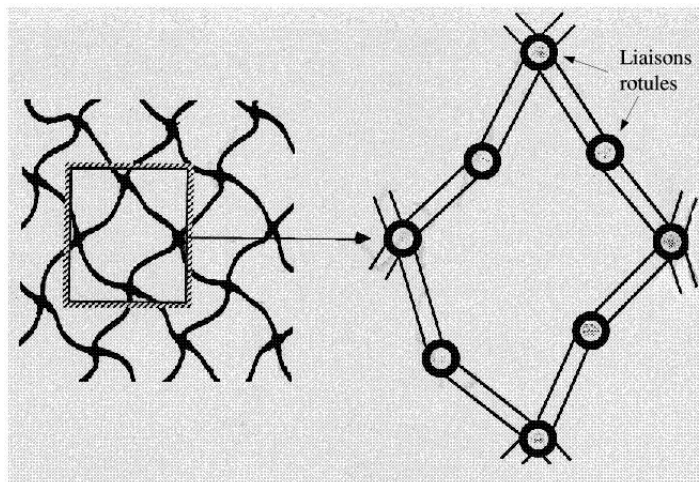
$$(1.1.7) \quad T_{ij} = \sum_{p=1}^3 k_p \left(\frac{(\ell_{ij} - \ell_{ij}^0)_+}{\ell_{ij}^0} \right)^p,$$

avec $k_1 = 2777N$, $k_2 = 7884N$ et $k_3 = 86618N$.

c/ Efforts de compression dans les fils

Pour traiter le cas de la compression, Théret [The93] modélise chaque fil du filet par deux barres rigides et cylindriques (figure 1.2). Augmenter le nombre de barre permet de décrire de façon plus précise cet effet mais augmenterait aussi le nombre d'inconnues. Les simulations montrent que prendre seulement deux barres conduit à des résultats satisfaisants. Les caractéristiques d'un fil sont données par son diamètre, la longueur de chaque barre, et les points de jonction (liaison rotule) des barres.

Figure 1.2: Modélisation d'un fil de filet par deux barres rigides - Extrait de [Bes97]



Une autre possibilité est de considérer que chaque fil est fait d'un matériau élastique, isotrope avec un bimodule, i.e. un module d'Young différent en traction et en compression, [Pri99].

Rappelons toutefois que Théret et Priour prennent en compte la totalité du chalut. Si l'on se concentre sur la poche, il est raisonnable de supposer les efforts en compression négligeables par rapport aux efforts de tension (module d'Young en compression nul). En effet, dès lors que celle-ci contient une prise, cette dernière va tendre les fils, qui restent alors droits et uniformément déformés. Les tensions dans les fils sont alors mises à zéro dès lors que celles-ci prennent une valeur négative (seule la partie positive est considérée). On retrouve cette approche dans les travaux de Le Dret et al. [LDLPC04] qui portent effectivement sur la poche d'un chalut.

d/ Résistance du maillage à l'ouverture

La résistance du maillage à l'ouverture joue un rôle non négligeable dans le processus de sélectivité dans la mesure où l'ouverture des mailles donne la porosité du filet. Cette résistance s'appelle aussi flexion des fils dans le plan du filet.

Si la prise est importante, les mailles en amont de la prise vont être tendus et donc peu ouvertes, contrairement aux mailles de la poche qui vont avoir tendance à s'ouvrir. C'est en début de chalutage que se pose le problème de l'ouverture des mailles au niveau de la poche. En effet, plus la prise est petite, plus les mailles au niveau de la poche seront fermées. Paradoxalement, la sélectivité ne peut dès lors s'opérer que lorsqu'une quantité non négligeable de poissons a déjà été capturée.

On trouve l'expression de la résistance du maillage à l'ouverture en terme de forces sur le filet dans les travaux de O'Neill et Xu [OX94] et Priour, [Pri01].

L'approche de O'Neill and Xu [OX94] consiste à utiliser la théorie des poutres afin d'estimer les forces à appliquer aux noeuds pour maintenir les fils proches. Il démontrent qu'il est possible, en ajustant cette théorie avec les résultats expérimentaux, d'estimer le paramètre de raideur à l'ouverture des mailles, notés EI (en N m^2).

Une autre approche [Pri01] consiste à modéliser la résistance du maillage à l'aide d'un couple entre les fils issus d'un noeud. Ce couple tend à garder les fils parallèles. Un tel couple C est supposé varier linéairement avec l'ouverture :

$$(1.1.8) \quad C = H\theta,$$

avec C en $[\text{N.m}]$, θ en radian, et H est la raideur du couple en $[\text{N.m/radian}]$.

Pour quantifier la force à appliquer sur chaque noeud, Priour applique le principe des puissances virtuelles, [Pri01]. L'idée principale est de calculer la force extérieure qui résulte d'un déplacement virtuel d'un noeud en égalant le travail intérieur et le travail extérieur créés par ce déplacement. Cette force est ainsi fonction du couple et donc du coefficient de raideur à l'ouverture H .

Suivant la théorie des poutres, il est possible de relier H à la raideur à l'ouverture des mailles EI [POS⁺06] :

$$(1.1.9) \quad H = \frac{6EI}{\ell},$$

avec ℓ la longueur du côté de maille $[\text{m}]$.

Les résultats numériques montrent que la forme du filet dépend de façon significative de la raideur à l'ouverture des mailles. La figure 1.3 montre la déformation d'une nappe de filet étiré par ses frontières supérieure et inférieure pour une valeur de H de 0.001 N.m/radian . La figure 1.4 montre le même filet, mais tourné de 90° . Pour permettre l'utilisation de cet effort dans les modèles mathématiques existants pour le filet, il est nécessaire de connaître EI . A cette fin, Sala et al. ont proposé une méthode expérimentale décrite dans [SOB⁺04].

Figure 1.3: Déformation d'une nappe de filet étiré par ses frontières supérieure et inférieure. H de 0.001 N.m/radian - Extrait de [Pri01]

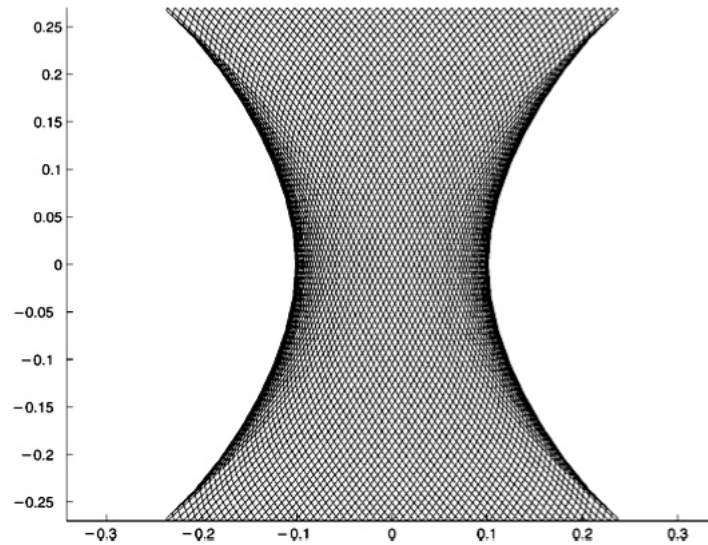
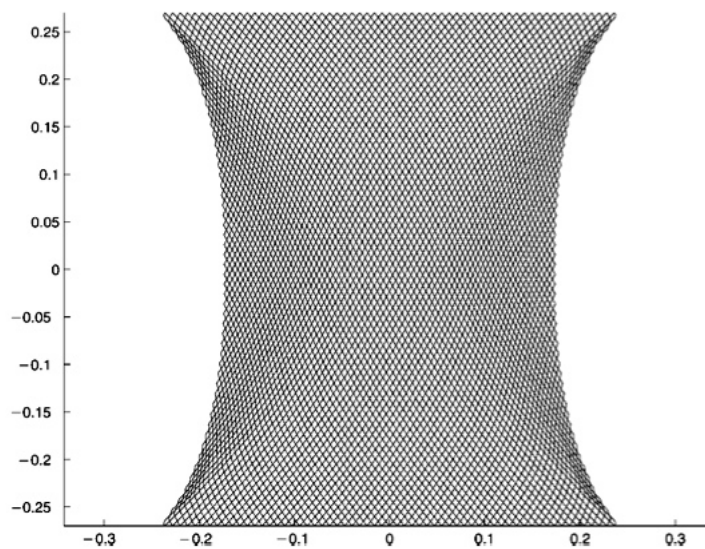


Figure 1.4: Déformation d'une nappe de filet étiré par ses frontières supérieure et inférieure et tournée de 90° relativement à la figure 1.3. H de 0.001 N.m/radian - Extrait de [Pri01]



e/ Efforts de flexion des fils hors du plan du filet

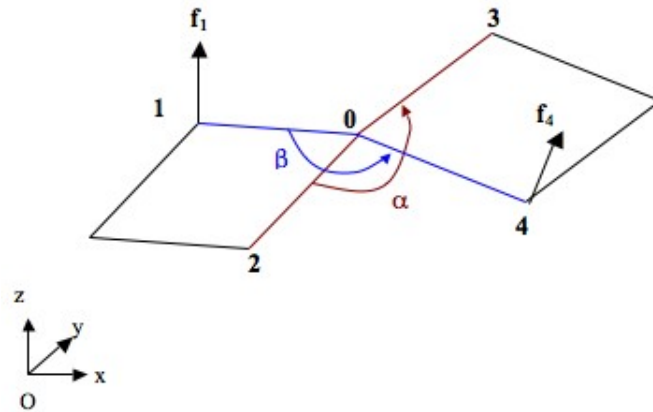
L'approche discrète laisse supposer que les fils restent droits lors de la déformation. De ce fait, cela suppose que la flexion se produit uniquement aux noeuds du filet, ce qui est une approximation car, en réalité, le fil peut se courber lui aussi.

Considérons un noeud, numéroté 0, entouré de 4 voisins, numérotés de 1 à 4 et β

1.1. L'APPROCHE DISCRÈTE

l'angle entre le fil 01 et le fil 04 (figure 1.5).

Figure 1.5: Noeud 0 entouré de ses 4 voisins



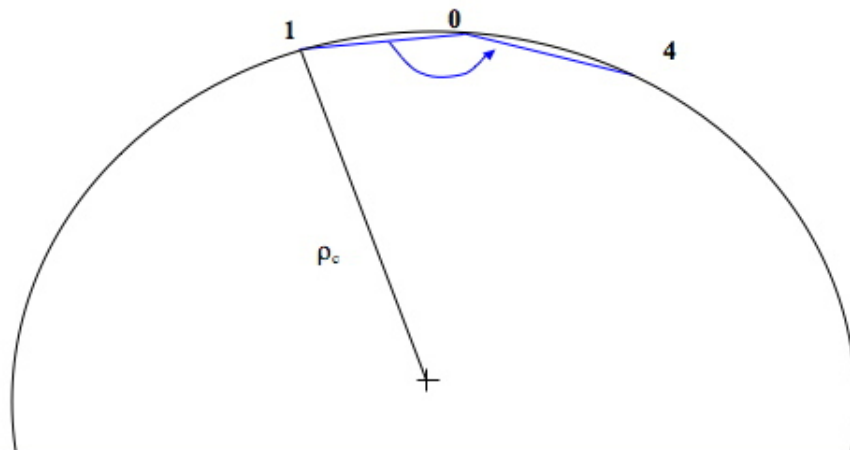
Nous reprenons ici l'approche proposée par Priour (voir [Pri06]) pour traiter la flexion dans des câbles et qu'il a généralisé ensuite au sein de l'approche globalisée décrite au paragraphe 1.2.4. Il est nécessaire d'estimer le moment de flexion, noté \mathcal{M} défini par :

$$(1.1.10) \quad \mathcal{M} = \frac{EI}{\rho_c},$$

avec \mathcal{M} en N.m, EI la raideur à la flexion [N.m^2] et ρ_c le rayon de courbure [m].

On peut définir le rayon de courbure ρ_c comme le rayon du cercle passant par les noeuds 0, 1 et 4 (figure 1.6).

Figure 1.6: Rayon de courbure



La force exercée sur chaque noeud est estimée à l'aide du principe des travaux virtuels. Un petit déplacement dx du noeud 1 le long de l'axe des x conduit à un travail extérieur :

$$(1.1.11) \quad W_e = f_{x1} dx.$$

Ce déplacement cause également une petite variation d'angle entre les deux fils. La connaissance du moment de flexion nous permet de déduire le travail interne qui en résulte :

$$(1.1.12) \quad W_i = \mathcal{M} d\beta.$$

En égalant le travail des forces extérieures et celui des forces intérieures, on obtient ainsi une estimation de la composante suivant x de la force de flexion appliquée au noeud 1. On fait de même pour les autres composantes. On réitère ainsi la procédure pour tous les autres noeuds.

f/ Efforts exercés par les poissons

Les poissons qui nagent dans la poche interagissent avec le filet et entre eux. Ici nous abordons l'interaction poisson/filet. Les poissons capturés et entassés dans la fond de la poche forment la prise.

Sur les poissons nageants encore. Les poissons, avant d'être capturés dans la poche, nagent et peuvent interagir entre eux et avec le filet. Considérons les efforts qu'ils exercent sur le filet. Il faut seulement prendre en compte les poissons qui entrent en contact avec le filet. Exposons l'approche suggérée par Priour pour calculer, en 2D, les efforts exercés. Le poisson est modélisé par un disque élastique de centre (x_P, y_P) et le filet par un ensemble de barres rigides. Considérons l'une de ces barres, d'extrémités A et B et de longueur ℓ (Figure 1.7). La généralisation au cadre 3D d'une bille qui entre en contact avec un filet 3D se déduit de cette méthode.

Le déplacement du poisson (le disque) se calcule de façon itérative (par pas de temps). Supposons qu'à un moment donné, il entre en contact avec le filet (le disque chevauche une barre). Pour calculer les efforts élastiques réciproques qui en résultent, le principe est suivant :

- On calcule la distance h séparant le centre du disque à la barre, on note C le projeté orthogonal du centre du disque sur la barre, il a pour composantes (x_c, y_c) ,
- Le rayon du disque se réduit à la distance h ,
- On calcule l'amplitude de l'effort élastique sur le disque associé à la diminution de son rayon,

$$(1.1.13) \quad |\mathbf{F}_P| = \frac{r-h}{r} * \kappa,$$

avec κ la raideur du disque (en N),

- La direction de cet effort est portée par le centre du disque P et le point de contact C . On projette sur les axes Ox et Oy pour obtenir les composantes de cet effort exercé sur le disque

$$(1.1.14) \quad \mathbf{F}_P = \mathbf{F}_{x,P} + \mathbf{F}_{y,P},$$

avec

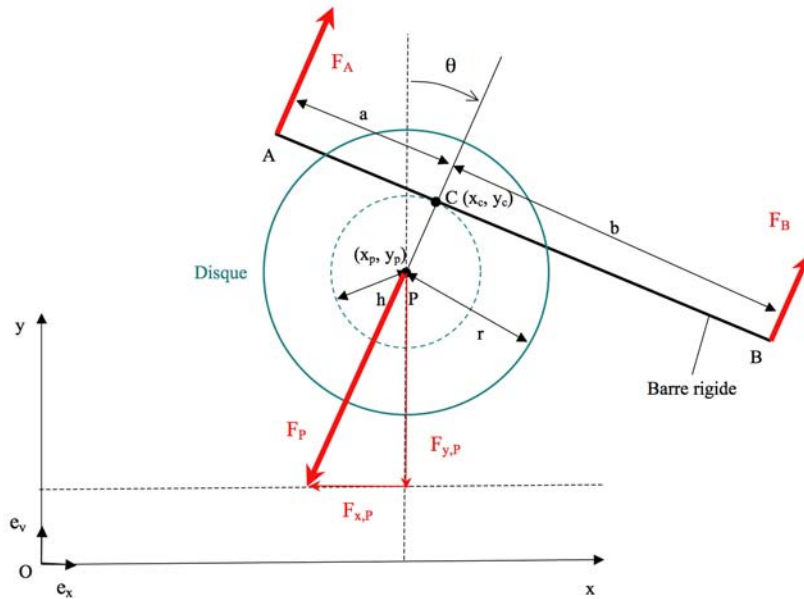
$$(1.1.15) \quad \mathbf{F}_{x,P} = -|\mathbf{F}_P| * \frac{x_c - x_P}{h} \mathbf{e}_x$$

et

$$(1.1.16) \quad \mathbf{F}_{y,P} = -|\mathbf{F}_P| * \frac{y_c - y_P}{h} \mathbf{e}_y.$$

L'effort réciproque qui s'exerce sur la barre a même amplitude et même direction mais est de sens opposé. On peut choisir de le répartir sur l'extrémité A (respectivement B) par pondération d'un coefficient $\frac{a}{\ell}$ (respectivement $\frac{b}{\ell}$) comme représenté sur la figure 1.7 par les vecteurs \mathbf{F}_A et \mathbf{F}_B , avec a la distance entre les points A et C et b celle entre C et B de telle sorte que l'ensemble barre-disque soit en équilibre.

Figure 1.7: Efforts élastiques réciproques exercés lors du contact d'un disque avec une barre rigide



Dans le cas d'un filet 3D, il faut procéder de la même façon, en considérant les mailles comme des panneaux. Les efforts élastiques calculés sont alors répartis sur les sommets des mailles avec une pondération fonction de la distance au point de contact.

Poissons dans la prise. Les poissons dans la prise constituent un obstacle imperméable à l'écoulement. On peut alors modéliser les efforts qu'ils exercent sur le filet par l'intermédiaire d'une force de pression constante qui pourrait s'écrire, [Pri03] :

$$(1.1.17) \quad P = \frac{1}{2} \rho C_{dc} |\mathbf{V}|^2.$$

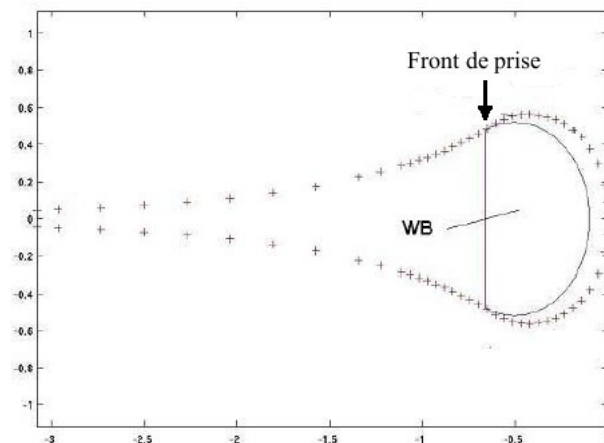
avec :

C_{dc} le coefficient de traînée sur la prise,
 $|\mathbf{V}|$ l'amplitude de la vitesse de l'eau [m/s].

O'Neill et O'Donoghue [OO97] considèrent le cas d'une prise axisymétrique et proposent également de modéliser les efforts de la prise sur le filet par des efforts de pression.

Reste à estimer la partie du filet soumise à cette pression. Cela nécessite donc d'estimer la forme de la prise. Pour cela, un modèle statistique a été élaboré par Priour et Herrmann [POS⁺06] basé sur des tests en bassin. Le modèle prend en compte plusieurs paramètres pour retrouver la forme de la prise, supposée axisymétrique : le volume de la prise, la taille des poissons, la vitesse de chalutage, la raideur à l'ouverture des mailles, le périmètre du filet, ... Les tests en bassin ont été réalisés aux bassins de Hirtshals (Danemark) et de Boulogne-sur-Mer (France), les poissons étant modélisés par des poches d'eau. Néanmoins cette modélisation pose un problème d'échelle car les poches d'eau sont beaucoup trop grosses comparativement aux poissons et sont moins nombreuses. Mais en raison du coût d'une expérimentation qui respecterait les ordres de grandeur, l'utilisation des poches d'eau a été conservée. L'idée est de pouvoir quantifier la forme de la prise. Cette forme est estimée par le volume total dans la poche derrière la limite de capture, noté WB (figure 1.8). WB est donc égal au volume d'eau derrière le front moins le volume de la prise. Les tests en bassins permettent de fixer les paramètres du modèle statistique régissant la forme de la prise. De plus on suppose :

Figure 1.8: Volume total WB dans la poche à l'arrière de la limite de capture - Extrait de [POS⁺06] La capture est la zone délimitée par l'ellipse et le filet (+)



1. Le filet et la prise axisymétriques,
2. La surface interne de la prise estimée à l'aide d'une ellipsoïde et la forme du filet donnée par sa méridienne.

Connaissant le volume de la prise (en m^3), le périmètre étiré (en m), la taille des poissons (en m^3), la résistance du maillage à l'ouverture (en $N \cdot m^2$), la vitesse de chalutage (en $m \cdot s^{-1}$), le modèle statistique proposé est capable de calculer WB et ainsi la surface interne de la prise et la limite de capture. Un exemple est donnée figure 1.9 pour une poche de chalut utilisé en Mer du Nord avec les caractéristiques suivantes :

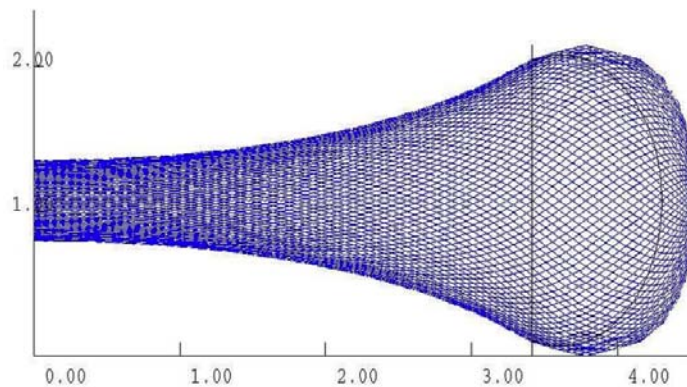
- Taille de maille : 115.3 mm,

1.1. L'APPROCHE DISCRÈTE

- Matériau : Polyéthylène (PE),
 - Nombre de mailles au périmètre : 100,
 - Nombre de mailles sur la méridienne : 40,
 - Diamètre de fil : 5.66 mm,
 - Raideur du maillage à l'ouverture : $2.513e^{-3}$ N. m⁻²,
 - Volume de prise : 1.112 m³,
 - Volume de chaque poisson : 1 dm³,
 - Vitesse de chalutage : 1.923 m.s⁻¹,
- Le volume WB calculé par le modèle statistique est de 3.12 m³.

La validation des résultats obtenus doit être poursuivie par comparaison avec la forme de la prise observée effectivement en mer. De plus les paramètres du modèle sont basés sur des essais en bassin qui ne reproduisent pas les échelles réelles, de ce fait, ce modèle statistique nécessiterait une étude spécifique sur sa sensibilité et sa précision.

Figure 1.9: Calcul de la forme de la prise pour une poche de chalut utilisé en Mer du Nord. L'ellipsoïde donne la surface interne de la prise - Extrait de [POS⁺06]



Une fois connus les efforts appliqués sur les noeuds du filet, il est possible de calculer l'équilibre du filet. Plusieurs techniques sont envisageables, telles que celles décrites dans la partie suivante.

1.3 Calcul de la position d'équilibre

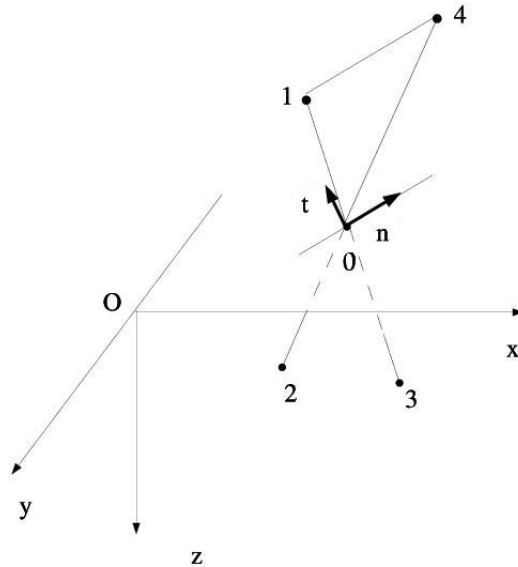
L'équilibre de la structure peut s'obtenir par deux méthodes décrites dans les paragraphes suivants : à l'aide du principe fondamental de la dynamique ou par une minimisation de l'énergie totale du filet.

a/ Par le principe fondamental de la dynamique

L'équation d'équilibre en chaque point de connection est obtenue en écrivant que la somme des forces est égale à zéro.

Soit un noeud (ou rotule si on reprend la modélisation de Théret [The93]) noté 0 et entouré de quatre voisins, numérotés de 1 à 4 (voir figure 1.10) dans le référentiel (O, x, y, z) .

Figure 1.10: Une rotule et ses quatre voisins



On note \mathbf{F}_0 la force totale qui s'exerce sur le noeud 0. On a :

$$(1.1.18) \quad \mathbf{F}_0 = \begin{cases} \sum_{j=1}^4 F_{0j}^x \\ \sum_{j=1}^4 F_{0j}^y \\ \sum_{j=1}^4 F_{0j}^z \end{cases}$$

avec $F_{0j}^x, F_{0j}^y, F_{0j}^z$ les composantes suivant Ox, Oy et Oz de la force qui s'exerce sur le fil $0j$.

La position à l'équilibre du noeud 0 est gouverné par le système suivant :

$$(1.1.19) \quad \mathbf{F}_0 = 0.$$

Ce système doit être satisfait par tout noeud du filet, conduisant à un système de la forme $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, avec \mathbf{F} la force qui contient les efforts globaux sur chaque noeud et \mathbf{X} le vecteur positions de ces noeuds.

Différentes méthodes sont alors envisageables pour résoudre ce système. On peut citer par exemple l'algorithme de Newton-Raphson utilisé par Wan et al. [WHS⁺04] et Priour [Pri99]. Cette méthode sera détaillée dans la partie 1.2.4.

Un autre algorithme, plus spécifique au filet, a été proposé par Théret [The93]. Il s'agit d'un algorithme itératif. Son étude porte plus généralement sur le chalut entier. De ce fait, il prend en compte seulement les forces de tensions dans les fils, ainsi que les forces hydrodynamiques.

1.1. L'APPROCHE DISCRÈTE

Par projection sur les axes Ox , Oy , Oz , il obtient l'expression suivante pour le noeud 0 :

$$(1.1.20) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^4 T_{0j} \frac{x_j - x_0}{l_{0j}} + \sum_{j=1}^4 \frac{H_{0j}^x}{2} &= 0, \\ \sum_{j=1}^4 T_{0j} \frac{y_j - y_0}{l_{0j}} + \sum_{j=1}^4 \frac{H_{0j}^y}{2} &= 0, \\ \sum_{j=1}^4 T_{0j} \frac{z_j - z_0}{l_{0j}} + \sum_{j=1}^4 \frac{H_{0j}^z}{2} &= 0, \end{aligned}$$

où H_{ij}^x , H_{ij}^y , H_{ij}^z représentent les composantes de la force hydrodynamique H_{ij} sur les axes Ox , Oy , Oz respectivement, x_j , y_j , z_j les composantes du noeud j dans le repère $Oxyz$, et T_{0j} la tension dans le fil $0j$.

En définissant :

$$(1.1.21) \quad d = \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2},$$

nous obtenons une expression des vecteurs \mathbf{n} et \mathbf{t} :

$$(1.1.22) \quad \begin{aligned} \mathbf{n} &= \begin{pmatrix} \frac{x_4 - x_1}{d} \\ \frac{y_4 - y_1}{d} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{t} &= \begin{pmatrix} -\frac{y_4 - y_1}{d} \\ \frac{x_4 - x_1}{d} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc, par projections sur les axes On , Ot , Oz , nous obtenons les équations suivantes :

$$(1.1.23) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^4 T_{0j} \left[\frac{x_j - x_0}{l_{0j}} (x_4 - x_1) + \frac{y_j - y_0}{l_{0j}} (y_4 - y_1) \right] \\ + (x_4 - x_1) \left[\sum_{j=1}^4 \frac{H_{0j}^x}{2} \right] + (y_4 - y_1) \left[\sum_{j=1}^4 \frac{H_{0j}^y}{2} \right] = 0, \end{aligned}$$

$$(1.1.24) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^4 T_{0j} \left[\frac{x_j - x_0}{l_{0j}} (-y_4 - y_1) + \frac{y_j - y_0}{l_{0j}} (x_4 - x_1) \right] \\ + (-y_4 - y_1) \left[\sum_{j=1}^4 \frac{H_{0j}^x}{2} \right] + (x_4 - x_1) \left[\sum_{j=1}^4 \frac{H_{0j}^y}{2} \right] = 0, \end{aligned}$$

$$(1.1.25) \quad \sum_{j=1}^4 T_{0j} \frac{z_j - z_0}{l_{0j}} + \sum_{j=1}^4 \frac{H_{0j}^z}{2} = 0.$$

Pour compléter le système, il écrit les relations donnant la longueur des côtés en fonction des coordonnées des points :

$$(1.1.26) \quad \begin{aligned} (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 &= l_{01}, \\ (x_4 - x_0)^2 + (y_4 - y_0)^2 + (z_4 - z_0)^2 &= l_{04}, \end{aligned}$$

avec l_{0j} la longueur du côté $0j$.

L'algorithme utilisé par Théret [The93] pour résoudre numériquement ces équations est le suivant :

Algorithme itératif :

1. Définition d'une forme initial arbitraire pour le filet, $k=0$,
2. A l'aide de la forme du filet donnée par l'itération précédente, calcul des efforts hydrodynamiques (hypothèse de Richtmeyer, voir paragraph 1.1.2),
3. Calcul des tensions T_{0j} dans les fils en utilisant les équations (1.1.23) - (1.1.25) et ce pour tous les fils, en les parcourant de l'arrière du chalut jusqu'au grément,
4. Calcul des nouvelles coordonnées x_j , y_j and z_j du noeud j et ce pour tous les noeuds, en utilisant les équations (1.1.24) et (1.1.26) et les valeurs de T_{0j} précédemment calculées, $k=k+1$,
5. Retour à l'étape 2, tant que l'équilibre n'est pas atteint *i.e.* jusqu'à ce que la forme du filet ne change plus de façon significative.

Cette méthode itérative conduit à des résultats en accord avec les données expérimentales. Cependant, elle pose des problèmes de convergence et de temps de calculs, d'autant plus lorsque le filet comporte un grand nombre de mailles.

La généralisation du travail de [The93] au cas dynamique a été réalisée par Besson-neau [Bes97]. Pour le noeud 0, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$(1.1.27) \quad \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^4 m_{0j} \right) \frac{d\mathbf{V}_0}{dt} = \sum_{j=1}^4 \left(\mathbf{T}_{0j} + \frac{(\mathbf{H}_{0j} + \mathbf{F}_{0j}^m)}{2} \right)$$

où :

- m_{0j} est la masse du fil $0j$,
- \mathbf{V}_0 est la vitesse du noeud 0,
- T_{0j} est la tension dans le fil $0j$ (inconnue),
- \mathbf{H}_{0j} les forces hydrodynamiques (expressions données dans la section 1.1.2)
- \mathbf{F}_{0j}^m les forces d'inerties exercées sur le fil $0j$ (expressions données dans la section

1.1.2)

avec $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Comme dans [The93], le système est complété par des relations donnant la longueur des côtés de maille en fonction des coordonnées des points :

$$(1.1.28) \quad (x_j - x_0)^2 + (y_j - y_0)^2 + (z_j - z_0)^2 = l_{0j},$$

pour $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Deux méthodes sont données pour résoudre numériquement ces équations.

La première est la méthode itérative décrite précédemment, combinée à une méthode de différences finies pour traiter le caractère instationnaire. La convergence est atteinte lorsque les noeuds ne se déplacent plus que d'une quantité faible prédéterminée.

Par cette méthode, la simulation numérique donne des résultats satisfaisants. La mise en mouvement du chalut par une vitesse donnée (par exemple transversale ou oscillante) conduit à des déformations du chalut en accord avec ce que l'on peut en attendre. Cependant des problèmes de convergence dus à la méthode de calculs apparaissent dans certaines configurations.

La deuxième méthode repose sur une reformulation du problème. On note \mathbf{X} les coordonnées des noeuds. Soient \mathbf{X}_i les coordonnées du noeud i et \mathbf{V}_i sa vitesse. Par définition, le vecteur vitesse \mathbf{V}_i du noeud i est exprimé par :

$$(1.1.29) \quad \frac{\partial \mathbf{X}_i}{\partial t} = \mathbf{V}_i.$$

Soit \mathbf{f}_i^{n+1} la force globale exercées sur la noeud i , calculée à l'étape $n + 1$. Soit m_i la masse de la rotule i . En utilisant une méthode de différences finies décentrées et une méthode d'Euler semi-explicite, au temps $t = n\Delta t$, où Δt est le pas de temps, nous obtenons le système suivant pour chaque noeud i :

$$(1.1.30) \quad \mathbf{X}_i^{n+1} = \mathbf{X}_i^n + \Delta t \mathbf{V}_i^{n+1},$$

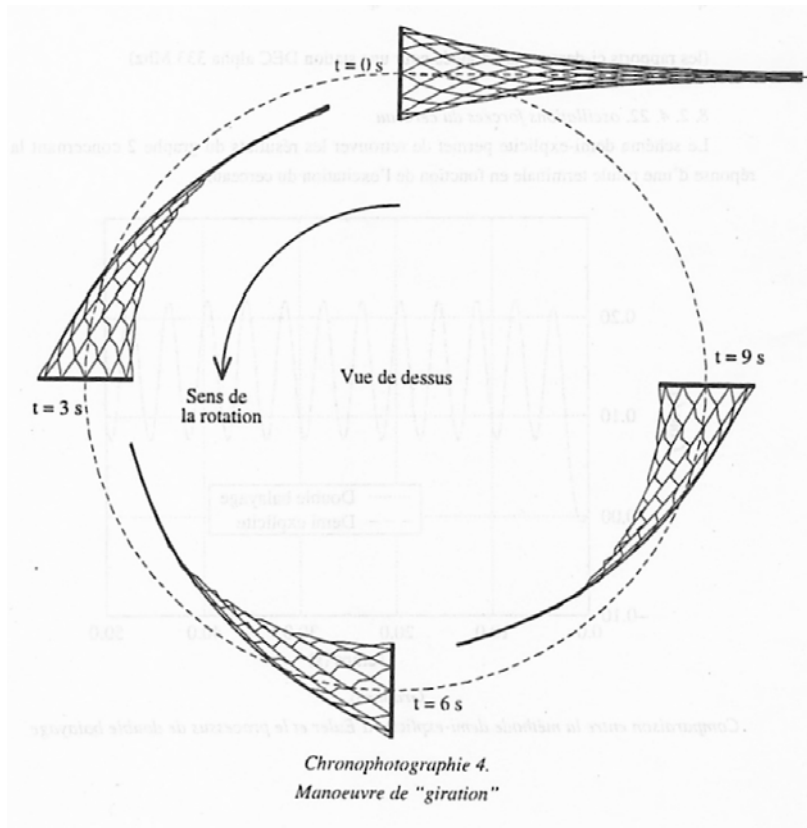
$$(1.1.31) \quad \mathbf{V}_i^{n+1} = \mathbf{V}_i^n + \frac{\Delta t}{m_i} \mathbf{f}_i^{n+1},$$

$$(1.1.32) \quad 0 = l_{ij}^2 - \|\mathbf{X}_i^{n+1} - \mathbf{X}_j^{n+1}\|^2.$$

Les coordonnées à l'étape n sont connues. Ce système se réduit à un système linéaire avec pour inconnues les \mathbf{f}_i^{n+1} (en injectant l'équation (1.1.31) dans (1.1.30), puis le tout dans (1.1.32), résolu par une élimination de Gauss. Dès lors, le vecteur vitesse \mathbf{V}_i^{n+1} est calculé en utilisant l'équation (1.1.31). Finalement, on en déduit la nouvelle position de chaque noeud i , \mathbf{X}_i^{n+1} , en utilisant l'équation (1.1.30).

Cette méthode exige plus de mémoire que la précédente mais est plus efficace puisqu'elle prend moins de temps et est plus robuste. Les simulations ont été réalisées sur un cul de chalut possédant une entrée circulaire et rigide, et qui se déplace sur une trajectoire circulaire. Les résultats obtenus sont en accord avec le comportement attendu du filet. Ce travail permet de traiter le cas dynamique et des mouvements plus complexes du filet, comme des manoeuvres de giration (figure 1.11).

Figure 1.11: Manoeuvres de giration d'un chalut - Extrait de [Bes97]



b/ Par minimisation de l'énergie du filet

Au lieu de résoudre les équations issues du principe fondamental de la dynamique, Le Dret *et al.* [LDLPC04] proposent de minimiser directement l'énergie totale du filet.

Rappelons que $\beta \in V(\mathcal{N})$ dénote une déformation admissible (cf. définition 1.1.3).

Energie totale du filet. L'énergie totale, notée $E_t(\beta)$, est égale à l'énergie élastique $E_l(\beta)$ moins le travail des forces extérieures $W_e(\beta)$ (principalement les forces hydrodynamiques et les forces exercées par les poissons sur le filet) :

$$(1.1.33) \quad E_t(\beta) = E_l(\beta) - W_e(\beta).$$

Rappelons que les données expérimentales réalisées par Le Dret *et al.* conduisent à choisir une loi de comportement non linéaire pour la tension dans les fils (voir section 1.1.2). Alors, E_l est la somme de l'énergie élastique dans chaque fil (nous rappelons que N est le nombre total de noeud du filet) :

$$(1.1.34) \quad E_l = \sum_{i,j=1}^N E_{ij}$$

en notant l'énergie élastique (non linéaire) du fil (i, j) , E_{ij} . Celle-ci est obtenue en intégrant la tension T_{ij} dans le fil (i, j) :

$$(1.1.35) \quad E_{ij} = \sum_{p=1}^3 \frac{k_p}{p+1} \frac{((l_{ij} - l_{ij}^0)_+)^{p+1}}{(l_{ij}^0)^p},$$

avec $k_1 = 2777$ N, $k_2 = 7884$ N and $k_3 = 86618$ N pour un fil en polyamide tressé de 3 mm de diamètre.

Notons F_e^i les forces extérieures exercées sur le noeud i . Le travail total des forces extérieures est alors la somme du travail extérieur sur chaque noeud :

$$(1.1.36) \quad W_e = \sum_{i=1}^N W_i,$$

où W_i est le travail sur le noeud P_i :

$$(1.1.37) \quad W_i = F_e^i \cdot OP_i.$$

Dans le cas étudié, les forces extérieures sont principalement les forces hydrodynamiques *i.e.* les forces de traînée et de portance. En effet, l'étude porte ici sur la position à l'équilibre d'un filet vide immergé. Ainsi :

$$(1.1.38) \quad W_i = \sum_{j=1}^{j=4} \frac{H_{ij}}{2} \cdot OP_i.$$

Les forces hydrodynamiques sur le fil (i, j) , notées H_{ij} sont ici supposées constantes et sont modélisées par des forces mortes qui doivent être orientées de façon appropriée et appliquées sur chaque noeud du filet.

L'état d'équilibre est alors celui, parmi toutes les déformations admissibles, avec le minimum d'énergie, *i.e.* que nous avons à résoudre le problème variationnel suivant :

Trouver $\beta_* \in V(\mathcal{N})$ tel que :

$$(1.1.39) \quad E_t(\beta_*) = \inf_{\beta \in V(\mathcal{N})} E_t(\beta).$$

Comme l'énergie est positive, convexe, et telle que :

$$(1.1.40) \quad \lim_{|\beta| \rightarrow +\infty} E_t(\beta),$$

il existe, au moins, un minimum.

Notons que si β_* est le minimum, la condition nécessaire d'Euler conduit à

$$(1.1.41) \quad \nabla E_t(\beta_*) = 0.$$

Puisque les forces considérées sont potentielles, elle correspond à l'équation d'équilibre, *i.e.* telle que la somme des forces est égale à zéro.

Il faut à cette étape disposer d'un outil de minimisation d'une fonctionnelle non linéaire. Le Dret *et al.* [LDLPC04] proposent d'utiliser l'algorithme de Polak-Ribière décrit dans la section suivante.

L'algorithme de Polak-Ribière. Partant d'une configuration initiale β_0 , la méthode du gradient conjugué non linéaire (Polak-Ribière) est appliquée pour trouver le minimum de l'énergie totale, qui est non linéaire. L'algorithme de Polak-Ribière est un algorithme itératif qui calcule, à chaque itération, une nouvelle position du filet β_k , $k \geq 1$, jusqu'à ce que la position d'équilibre (le minimum) soit atteinte.

Algorithme de Polak-Ribière :

Partant de $d_0 = \nabla E(\beta_0)$ (force initiale appliquée),

1. Résolution du problème à une dimension : Trouver $\rho((\beta_k, d_k))$ tel que :

$$(1.1.42) \quad E_t(\beta_k - \rho(\beta_k, d_k)d_k) = \inf_{\rho \in \mathbb{R}} E_t(\beta_k + \rho d_k),$$

afin de savoir le pas à effectuer dans la direction d_k considérée ;

2. Calcul de l'itérée suivante : $\beta_{k+1} = \beta_k - \rho(\beta_k, d_k)d_k$ (cette nouvelle configuration β_{k+1} est alors telle que $E(\beta_{k+1}) \leq E(\beta_k)$) ;
3. Calcul de la prochaine direction de descente :

$$d_{k+1} = \nabla E_t(\beta_{k+1}) + \max\left(\frac{(\nabla E_t(\beta_{k+1}), \nabla E_t(\beta_{k+1}) - \nabla E_t(\beta_k))}{\|\nabla E_t(\beta_k)\|^2}, 0\right)d_k ;$$

4. Si la convergence n'est pas atteinte, retour à l'étape 1 avec $k=k+1$.

Cet algorithme fait appel à une technique de minimisation 1D (étape 1.). Plusieurs méthodes sont possibles. Nous avons choisi de détailler un peu plus ces méthodes afin de préciser les éléments nécessaires à la mise en oeuvre de cet algorithme. Le prochain paragraphe peut par conséquent ne pas être lu sans conséquence sur la compréhension de la suite du mémoire.

Sur les techniques de minimisation 1D. Posons le problème. Soit f une fonction à valeurs réelles, deux fois continûment dérivable sur un intervalle compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$, telle que $f''(\rho) > 0$ pour $\rho \in [a, b]$. On suppose établie l'existence d'un point $c \in [a, b]$ tel que avec $f'(c) = 0$ que l'on cherche à localiser le mieux possible (un tel point est unique puisque la fonction f est strictement convexe).

Deux méthodes pour localiser c sont expliquées ici. Elles sont basées sur la suite de Fibonacci, une méthode dite directe et la méthode de la section en proportion du nombre d'or (en anglais *Golden section search*). La méthode directe est théoriquement meilleure mais la méthode de la section en proportion du nombre d'or est la plus utilisée en pratique car elle est numériquement plus efficace. A noter que cette dernière peut être améliorée en la combinant à une interpolation parabolique (méthode de Brent).

Les nombres de Fibonacci sont donnés par : soit $n \geq 2$

$$(1.1.43) \quad \begin{aligned} u_0 &= 0, \\ u_1 &= 1, \\ u_{n+1} &= u_{n-1} + u_{n-2}, n \geq 2. \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_n$ a les propriétés suivantes :

Lemme 1.1.1 (i) La suite $(u_n)_n$ est croissante,

$$(ii) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \Phi, \text{ avec } \Phi \text{ le nombre d'or, } \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Preuve (i) Soit $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Alors la formule de récurrence qui définit $(u_n)_n$ conduit à :

$$(1.1.44) \quad v_n = 1 + \frac{1}{v_{n-1}}.$$

La fonction $x \rightarrow 1 + \frac{1}{x}$ est supérieure à 1, pour $x \geq 0$. Ainsi v_n est supérieure à 1 et $(u_n)_n$ est croissante.

(ii) La suite $(u_n)_n$ est défini par la formule de récurrence : $u_{n+1} = u_{n-1} + u_{n-2}$, $n \geq 2$.

L'équation caractéristique associée s'écrit : $r^2 - r - 1 = 0$.

Comme le discriminant vaut 5, il existe deux solutions réelles Φ et Ψ telles que

$$(1.1.45) \quad \begin{aligned} \Phi &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \\ \Psi &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Les solutions de la formule de récurrence sont les suites définies par

$$(1.1.46) \quad u_n = \alpha\Phi^n + \beta\Psi^n \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Les deux constantes , α and β sont calculées en utilisant les données initiales. Dans notre cas, on a :

$$(1.1.47) \quad \begin{aligned} u_0 &= 0, \text{ ce qui donne } \alpha = -\beta, \\ u_1 &= 1, \text{ ce qui donne } \alpha = \frac{1}{\Phi - \Psi}. \end{aligned}$$

Et par conséquent,

$$(1.1.48) \quad \begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\Phi - \Psi} ((\Phi)^n + (\Psi)^n), \\ u_n &= \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{1 - \Phi^n}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Comme $\Psi \approx -0.61 < 1$, nous avons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \Phi$. □

On cherche à localiser le minimum c dans un intervalle aussi petit que possible. Supposons que nous disposons d'un intervalle grossier pour c , disons c appartient à l'intervalle $[a, b]$.

L'idée principale des deux premières méthodes est de construire deux suites adjacentes $(a^k)_k$ et $(b^k)_k$, définies à l'aide de la suite de Fibonacci, avec $a^0 = a$ et $b^0 = b$, de sorte que, après un certain nombre d'itérations, nous obtenons un petit intervalle dans lequel se trouve le minimum.

Pour définir $(a^k)_k$ and $(b^k)_k$, on utilise la proposition suivante qui localise c dans un plus petit intervalle par l'intermédiaire de quelques calculs avec la fonction f .

Proposition 1.1.1 *Soit f une fonctionnelle à une dimension, deux fois différentiable sur un intervalle compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$, telle que $f''(\rho) > 0$ pour $\rho \in [a, b]$. Soient x_1 et x_2 deux réels, avec $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$.*

(i) *Si $f(x_1) \geq f(x_2)$, alors $x_1 \leq c < b$.*

(ii) *Si $f(x_2) \geq f(x_1)$, alors $a < c \leq x_2$.*

Preuve (i) Nous avons $x_1 \leq x_2$. Supposons que $f(x_1) \geq f(x_2)$ et $c < x_1 \leq x_2 < b$.

Nous avons supposé que $f''(\rho) > 0$ pour $\rho \in [a, b]$. Donc f' est strictement croissante sur $[a, b]$. De plus, $c \in [a, b]$ est l'unique minimum de f . Ainsi il satisfait la condition nécessaire d'Euler $f'(c) = 0$. Donc, $f'(x) > 0$ pour $x > c$, et f est strictement croissante sur $[c, b]$. On obtient une contradiction, $f(x_2) \geq f(x_1)$.

(ii) Supposons $f(x_2) \geq f(x_1)$ et $x_2 < c$. Nous avons de la même manière $f'(x) < 0$, pour $x < c$, donc f est strictement décroissante sur $[a, c]$ et $a < x_1 \leq x_2 < c$. On obtient $f(x_1) \geq f(x_2)$, soit une contradiction. \square

Ainsi, deux autres suites sont nécessaires pour définir les suites $(a^k)_k$ et $(b^k)_k$, notons les $(x_1^k)_k$ et $(x_2^k)_k$. Par un choix approprié des relations entre les différentes suites, on obtient une longueur précise de l'intervalle où il est possible trouver c .

Algorithme de minimisation 1D : Méthode directe.

Soit $a^0 = a$, $b^0 = b$, $Tol > 0$ (tolérance pour estimer la convergence) donné et $k = 0$.

1. On pose :

$$(1.1.49) \quad \begin{aligned} x_1^{k-1} &= a^{k-1} \frac{u_{n-k+1}}{u_{n-k+2}} + b^{k-1} \frac{u_{n-k}}{u_{n-k+2}}, \\ x_2^{k-1} &= a^{k-1} \frac{u_{n-k}}{u_{n-k+2}} + b^{k-1} \frac{u_{n-k+1}}{u_{n-k+2}}. \end{aligned}$$

Avec ce choix, on conserve $x_1^{k-1} \leq x_2^{k-1}$.

2. On compare $f(x_1^{k-1})$ avec $f(x_2^{k-1})$ pour définir a^k and b^k .
 a. Si $f(x_1^{k-1}) \geq f(x_2^{k-1})$ alors on pose :

$$(1.1.50) \quad \begin{aligned} a^k &= x_1^{k-1}, \\ b^k &= b^{k-1}. \end{aligned}$$

On exprime x_2^{k-1} en terme de a^k et b^k grâce à la relation (ii) de la proposition (1.1.1), que l'on note x_1^k et on définit x_2^k tels que

$$(1.1.51) \quad \begin{aligned} x_1^k &= a^k \frac{u_{n-k}}{u_{n-k+1}} + b^k \frac{u_{n-k-1}}{u_{n-k+1}}, \\ x_2^k &= a^k \frac{u_{n-k-1}}{u_{n-k+1}} + b^k \frac{u_{n-k}}{u_{n-k+1}}. \end{aligned}$$

3. b. Si $f(x_2^{k-1}) \geq f(x_1^{k-1})$ alors on pose :

$$(1.1.52) \quad \begin{aligned} a^k &= a^{k-1}, \\ b^k &= x_2^{k-1}. \end{aligned}$$

On exprime x_1^{k-1} en terme de a^k et b^k grâce à la relation (ii) de la proposition (1.1.1), que l'on note x_2^k et on définit x_1^k tels que :

$$(1.1.53) \quad \begin{aligned} x_1^k &= a^k \frac{u_{n-k}}{u_{n-k+1}} + b^k \frac{u_{n-k-1}}{u_{n-k+1}}, \\ x_2^k &= a^k \frac{u_{n-k-1}}{u_{n-k+1}} + b^k \frac{u_{n-k}}{u_{n-k+1}}. \end{aligned}$$

4. Test de convergence : on définit :

$$(1.1.54) \quad L = |b_k - a_k|.$$

Si $L > Tol$, retour à l'étape 2 et $k=k+1$. Sinon, l'algorithme s'arrête (convergence atteinte).

Le choix des différentes suites impliqués dans la méthode fait que les hypothèses de la proposition (1.1.1) sont satisfaites.

On trouve que la méthode directe conduit aux résultats suivants :

Lemme 1.1.2 *A chaque itération, l'intervalle $[a^k, b^k]$ est réduit d'un facteur $\frac{u_{n-k+1}}{u_{n-k+2}} (< 1)$.*

Preuve. a. Si $f(x_1^{k-1}) \geq f(x_2^{k-1})$, alors

$$(1.1.55) \quad b^k - a^k = b^{k-1} - a^{k-1} \frac{u_{n-k+1}}{u_{n-k+2}} - b^{k-1} \frac{u_{n-k}}{u_{n-k+2}} = \frac{u_{n-k+1}}{u_{n-k+2}} (b^{k-1} - a^{k-1}).$$

Alors l'intervalle est réduit d'un facteur $\frac{u_{n-k+1}}{u_{n-k+2}} (< 1)$.

b. Si $f(x_2^{k-1}) \geq f(x_1^{k-1})$,

$$(1.1.56) \quad b^k - a^k = a^{k-1} \frac{u_{n-k}}{u_{n-k+2}} + b^{k-1} \frac{u_{n-k+1}}{u_{n-k+2}} - a^{k-1} = \frac{u_{n-k+1}}{u_{n-k+2}} (b^{k-1} - a^{k-1}).$$

Et l'intervalle est réduit d'un facteur $\frac{u_{n-k+1}}{u_{n-k+2}} (< 1)$. □

Théorème 1.1.1 *Soit $\varepsilon > 0$. Il est possible de localiser c dans un intervalle de longueur $\leq (\frac{b-a}{u_{n+1}} + \varepsilon) = \Delta_n$ avec seulement n applications de f .*

Preuve. On peut vérifier qu'à l'itération $k^{\text{ième}}$, nous avons effectué $(k+1)$ applications de f , et l'intervalle $[a^{k-1}, b^{k-1}]$ est réduit d'un facteur $\frac{u_{n-k+1}}{u_{n-k+2}}$.

Considérons que nous sommes à l'itération $n-2$. Alors la longueur du segment $[a^{n-2}, b^{n-2}]$ est

$$(1.1.57) \quad \begin{aligned} & b^{n-2} - a^{n-2} \\ &= \frac{u_3}{u_4} (b^{n-3} - a^{n-3}) \\ &= \frac{u_3}{u_4} \frac{u_4}{u_5} \dots \frac{u_n}{u_{n+1}} (b^0 - a^0) \\ &= \frac{u_3}{u_{n+1}} (b - a) \\ &= \frac{2}{u_{n+1}} (b - a) \end{aligned}$$

et nous obtenons le résultat avec $(n-1)$ applications de f .

Calculons à présent les nouvelles valeurs de x_1^{n-1} et x_2^{n-1}

$$(1.1.58) \quad \begin{aligned} x_1^{n-1} &= a^{n-2} \frac{u_2}{u_3} + b^{n-2} \frac{u_1}{u_3} = a^{n-2} \frac{1}{2} + b^{n-2} \frac{1}{2}, \\ x_2^{n-1} &= a^{n-2} \frac{u_1}{u_3} + b^{n-2} \frac{u_2}{u_3} = a^{n-2} \frac{1}{2} + b^{n-2} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi $x_1^{n-1} = x_2^{n-1}$ et il s'agit du milieu du segment $[a^{n-2}, b^{n-2}]$.

Soit ε arbitraire, calculons $f(x_1^{n-1} + \varepsilon)$. Nous avons effectué jusqu'ici seulement n calculs avec f .

Si $f(x_1^{n-1}) \geq f(x_1^{n-1} + \varepsilon)$ alors on pose

$$(1.1.59) \quad \begin{aligned} a^{n-1} &= x_1^{n-1}, \\ b^{n-1} &= b^{n-2}, \end{aligned}$$

sinon

$$(1.1.60) \quad \begin{aligned} a^{n-1} &= a^{n-1}, \\ b^{n-1} &= x_2^{n-2}. \end{aligned}$$

Ainsi, avec seulement n applications de f , il est possible de localiser c dans un intervalle $[a^{n-1}, b^{n-1}]$ de longueur $\leq \left(\frac{b-a}{u_{n+1}} + \varepsilon\right) = \Delta_n$ et le théorème (1.1.1) est prouvé. \square

Du fait de la facilité de son implémentation, une autre méthode est utilisée en pratique, la méthode de la section en proportion du nombre d'or qui fait intervenir le nombre d'or $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Cette méthode est basée sur la même idée, sauf que l'on s'affranchit du calcul de la suite $(u_n)_n$ en utilisant le fait que la suite $(v_n)_n$, avec $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$, converge vers Φ pour $n \rightarrow +\infty$. Cette méthode est donc moins coûteuse en terme de calculs et de mémoire d'ordinateur. Comme pour la méthode précédente, on définit $(a^k)_k$ et $(b^k)_k$, avec $a^0 = a$ et $b^0 = b$, et les deux suites $(x_1^k)_k$ et $(x_2^k)_k$.

Algorithme de minimisation 1D : Méthode de la section en proportion du nombre d'or.

Soient $a^0 = a$, $b^0 = b$, $Tol > 0$ donné (tolérance pour estimer la convergence) et le nombre d'itérations $k = 0$.

1. On pose :

$$(1.1.61) \quad \begin{aligned} x_1^{k-1} &= a^{k-1}(\Phi - 1) + b^{k-1}(2 - \Phi), \\ x_2^{k-1} &= a^{k-1}(2 - \Phi) + b^{k-1}(\Phi - 1). \end{aligned}$$

Avec ce choix, on conserve $x_1^{k-1} \leq x_2^{k-1}$.

2. On compare $f(x_1^{k-1})$ avec $f(x_2^{k-1})$ pour définir a^k et b^k .

a. Si $f(x_1^{k-1}) \geq f(x_2^{k-1})$ alors on pose :

$$(1.1.62) \quad \begin{aligned} a^k &= x_1^{k-1}, \\ b^k &= b^{k-1}. \end{aligned}$$

b. Si $f(x_2^{k-1}) \geq f(x_1^{k-1})$ alors on pose :

$$(1.1.63) \quad \begin{aligned} a^k &= a^{k-1}, \\ b^k &= x_2^{k-1}. \end{aligned}$$

3. Test de convergence : on définit :

$$(1.1.64) \quad L = |b_k - a_k|.$$

Si $L > Tol$, retour à l'étape 2 et $k=k+1$. Sinon, l'algorithme s'arrête (convergence atteinte).

On trouve que la méthode de la section en proportion du nombre d'or conduit aux résultats suivants :

Lemme 1.1.3 *A chaque itération l'intervalle est réduit d'un facteur $(\Phi - 1) \approx 0.618 (< 1)$.*

Preuve. Cela se prouve simplement en utilisant la définition de $(a^k)_k$ et $(b^k)_k$:

$$(1.1.65) \quad b^k - a^k = (\Phi - 1)(b^{k-1} - a^{k-1}).$$

□

Théorème 1.1.2 *Il est possible de localiser c dans un intervalle de longueur $\leq (b-a)(\Phi - 1)^{n-1} = \delta_n$, $n \geq 2$, avec seulement n applications de f .*

Preuve. Considérons que nous sommes à l'itération $(n - 1)$, alors

$$(1.1.66) \quad \begin{aligned} &b^{n-1} - a^{n-1} \\ &= (\Phi - 1)(b^{n-2} - a^{n-2}) \\ &= (\Phi - 1)(\Phi - 1) \dots (\Phi - 1)(b^0 - a^0) \\ &= (\Phi - 1)^{n-1}(b^0 - a^0), \end{aligned}$$

avec seulement n calculs avec f , le théorème (1.1.2) est prouvé. □

Comparons les deux méthodes.

Théorème 1.1.3 *Soit Δ_n (respectivement δ_n) la longueur de l'intervalle dans lequel on peut localiser c en utilisant la méthode directe (respectivement la méthode la section en proportion du nombre d'or).*

Si n est suffisamment grand, le rapport $\frac{\delta_n}{\Delta_n}$ est proche de 1.17.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ un paramètre suffisamment petit. Nous avons établi que :

$$(1.1.67) \quad \Delta_n \leq \frac{b-a}{u_{n+1}} + \varepsilon,$$

et

$$(1.1.68) \quad \delta_n \leq (b-a)(\Phi-1)^{n-1}.$$

Alors :

$$(1.1.69) \quad \frac{\delta_n}{\Delta_n} = u_{n+1}(\Phi-1)^{n-1}, \text{ quand } \varepsilon \text{ est suffisamment petit.}$$

A présent, utilisons l'expression de u_n donnée par la formule (1.1.48),

$$(1.1.70) \quad \begin{aligned} \frac{\delta_n}{\Delta_n} &\approx (\Phi-1)^{n-1} \frac{\Phi^{n+1} - (1-\Phi)^{n+1}}{\sqrt{5}}, \\ \frac{\delta_n}{\Delta_n} &\approx (\Phi-1)^{n-1} \frac{\Phi^{n-1}\Phi^2 - (1-\Phi)^{n-1}(1-\Phi)}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Rappelons l'équation satisfaite par Φ : $\Phi^2 = \Phi + 1$. Comme $\Phi - 2 \approx -0.38$,

$$(1.1.71) \quad \frac{\delta_n}{\Delta_n} \approx \frac{\Phi^2 - (\Phi-2)^n}{\sqrt{5}} \rightarrow \frac{\Phi}{\sqrt{5}} \approx 1.17 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

□

Le théorème précédent montre que la méthode directe est théoriquement meilleure. Cependant, comme nous l'avons déjà précisé, la méthode de la section en proportion du nombre d'or est plus efficace numériquement.

Résultats des simulations. Pour obtenir la configuration à l'équilibre du filet immergé, Le Dret *et al.* ont utilisé l'algorithme de Polak-Ribière couplé à la méthode de la section en proportion du nombre d'or décrite précédemment [LDLPC04].

L'obtention de l'équilibre du filet par minimisation de son énergie totale exige beaucoup de calculs mais ce nombre peut être réduit en partant d'une configuration proche du minimum, soit conique (figure 1.12).

Figure 1.12: Configuration initiale conique - Extrait de [LDLPC04]

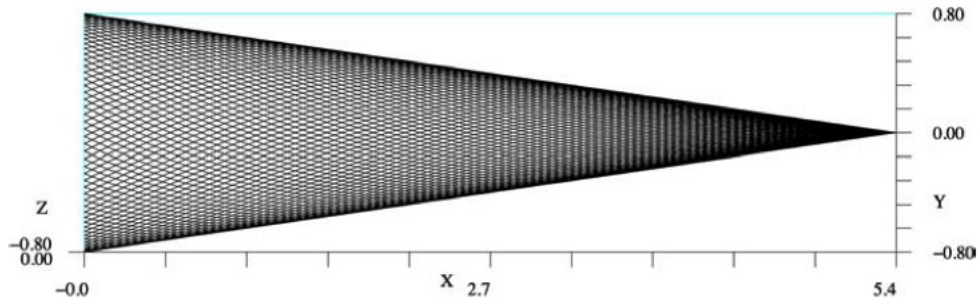
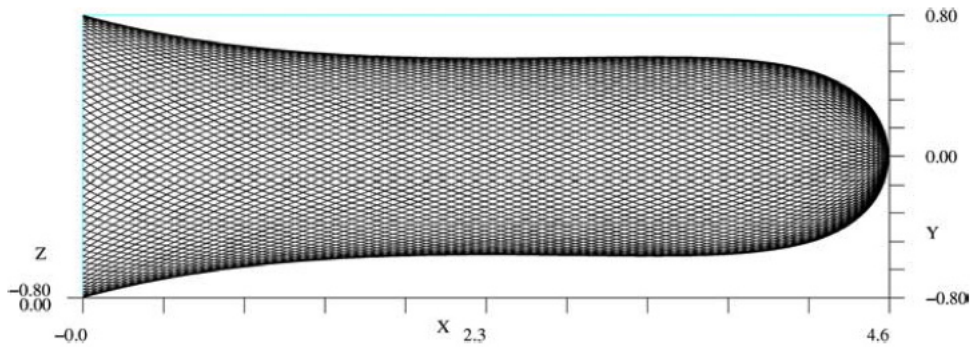


Figure 1.13: Configuration finale d'un filet vide immergé - Extrait de [LDLPC04]



Le Dret *et al.* [LDLPC04] ont obtenu ainsi une configuration d'un filet immergé de bonne qualité, en accord avec celle obtenue expérimentalement (Figure 1.13). L'inconvénient de cette méthode est qu'elle exige que les forces considérées soient potentielles i.e. dérivant d'une énergie. Or ce n'est, en général, pas le cas (voir par exemple l'expression des forces hydrodynamiques, section 1.1.2).

Cette démarche de prise en compte de tous les noeuds du filet pose des problèmes de ressources informatiques lorsque la poche contient beaucoup de noeuds. L'idéal serait de disposer d'équations homogénéisées du comportement du filet. En attendant plusieurs méthodes ont vues le jour pour réduire le coût de calcul des déformations du filet et comme nous allons le voir dans la partie suivante, les résultats obtenus sont très prometteurs.

2 Approche de globalisation des mailles

L'approche discrète décrite dans la partie précédente nécessite de considérer toutes les mailles de la poche, dont le nombre, rappelons-le, peut être très grand. Pour économiser du temps de calcul et de la mémoire, plusieurs auteurs ont eu recours à une modélisation supplémentaire pour réduire le nombre de noeuds.

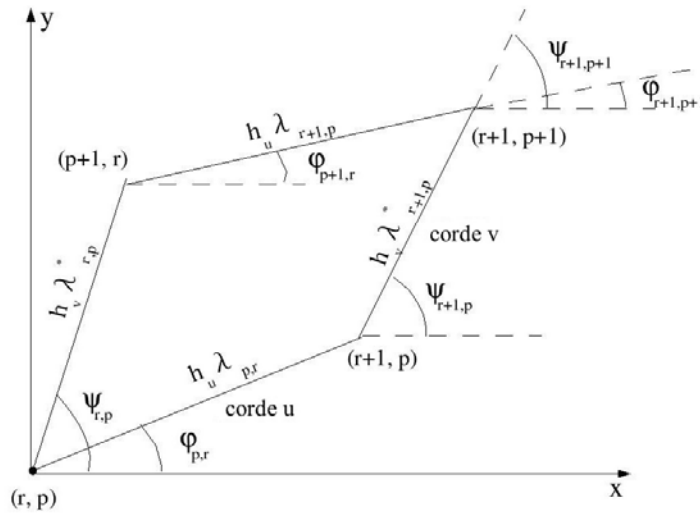
2.1 Historique

Historiquement, une telle démarche de globalisation des mailles trouve sa motivation dans les travaux initiés par Rivlin [Riv55] puis Green et Shi [GS90a] appliqués à l'étude de la réponse mécanique de la peau et des tissus collagènes.

Considérons une maille losange, par exemple celle donnée sur la figure 1.14. Celle-ci est formée de 4 fils joints par des noeuds. Une telle cellule de référence est ainsi complètement définie en donnant :

1. l'angle entre les cordes, dites u (voir figure 1.14), et l'axe des x , noté $\Phi_{p,r}$, et l'angle entre les cordes, dites v et l'axe des y , noté $\Psi_{r,p}$,
2. Les coordonnées du noeud (r, p) après déformation dans le repère Oxy , notées $(x_{r,p}, y_{r,p})$,
3. le rapport d'allongement dans les fils u et v , noté $\lambda_{p,r}$ pour le fil u joignant les noeuds (r, p) et $(r+1, p)$, et $\lambda_{p,r}^*$ pour le fil v joignant les noeuds (r, p) et $(p+1, r)$,
4. la longueur initiale séparant deux cordes u adjacentes, h_u et séparant deux cordes v adjacentes, h_v .

Figure 1.14: Cellule de référence



D'ores et déjà, il est possible d'écrire un système d'équations régissant la position des noeuds les uns par rapport aux autres.

En effet, il est aisé de vérifier que les relations géométriques entre deux noeuds adjacents sont les suivantes :

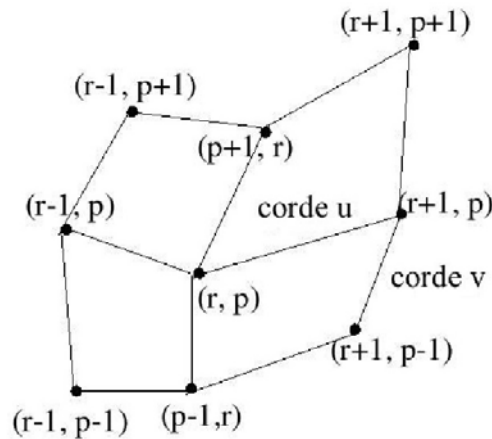
$$(1.2.1) \quad \begin{cases} x_{r+1,p} = x_{r,p} + h_u \lambda_{p,r} \cos \Phi_{p,r}, \\ y_{r+1,p} = y_{r,p} + h_u \lambda_{p,r} \sin \Phi_{p,r}, \\ x_{r,p+1} = x_{r,p} + h_v \lambda_{r,p}^* \cos \Psi_{p,r}, \\ y_{r,p+1} = y_{r,p} + h_v \lambda_{r,p}^* \sin \Psi_{p,r}. \end{cases}$$

De même, on peut écrire les équations pour les deux branches du réseau entre les points (r, p) et $(r + 1, p + 1)$. On obtient les conditions de compatibilité suivantes :

$$(1.2.2) \quad \begin{cases} h_u \lambda_{p,r} \cos \Phi_{p,r} + h_v \lambda_{r+1,p}^* \cos \Psi_{r+1,p} & = h_u \lambda_{p+1,r} \cos \Phi_{p+1,r} + h_v \lambda_{r,p}^* \cos \Psi_{r,p}, \\ h_u \lambda_{p,r} \sin \Phi_{p,r} + h_v \lambda_{r+1,p}^* \sin \Psi_{r+1,p} & = h_u \lambda_{p+1,r} \sin \Phi_{p+1,r} + h_v \lambda_{r,p}^* \sin \Psi_{r,p}. \end{cases}$$

Intégrons cette maille dans un ensemble plus grand (voir figure 1.15).

Figure 1.15: Ensemble de mailles



Au noeud (r, p) , nous avons les conditions d'équilibre :

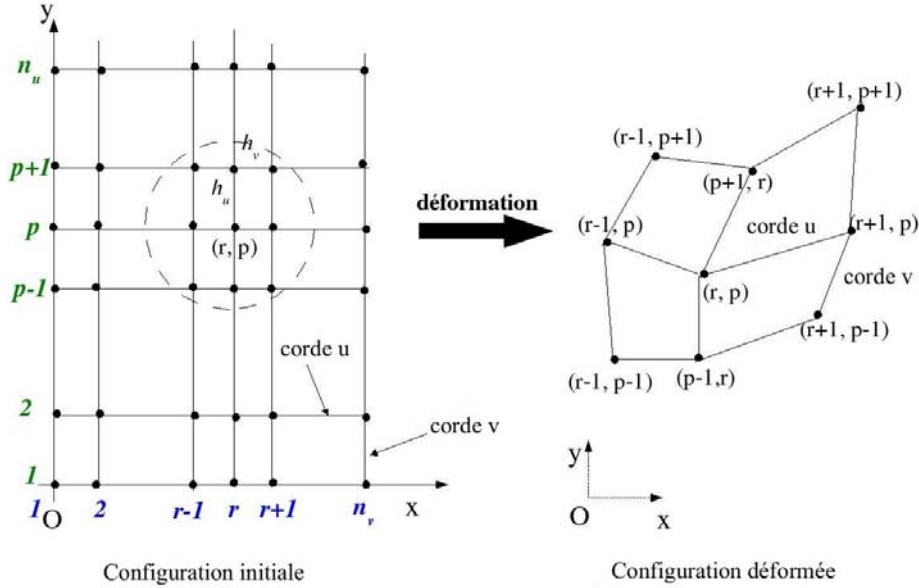
$$(1.2.3) \quad \begin{cases} T_{p,r} \cos \Phi_{p,r} - T_{p,r-1} \cos \Phi_{p,r-1} + S_{r,p} \cos \Psi_{r,p} - S_{r,p-1} \cos \Psi_{r,p-1} & = 0, \\ T_{p,r} \sin \Phi_{p,r} - T_{p,r-1} \sin \Phi_{p,r-1} + S_{r,p} \sin \Psi_{r,p} - S_{r,p-1} \sin \Psi_{r,p-1} & = 0, \end{cases}$$

avec $T_{p,r}$ et $S_{r,p}$ les tensions dans les segments dont les rapports d'allongement sont $\lambda_{p,r}$ et $\lambda_{p,r}^*$ respectivement. Elles sont liées à $\lambda_{p,r}$ et $\lambda_{p,r}^*$ par les lois constitutives suivantes :

$$(1.2.4) \quad \begin{cases} T_{p,r} & = \begin{cases} T(\lambda_{p,r}) & \text{si } \lambda_{p,r} > 1 \\ 0 & \text{si } \lambda_{p,r} \leq 1 \end{cases} & (p = 1, \dots, n_u; r = 1, \dots, n_v - 1), \\ S_{r,p} & = \begin{cases} S(\lambda_{p,r}^*) & \text{si } \lambda_{p,r}^* > 1 \\ 0 & \text{si } \lambda_{p,r}^* \leq 1 \end{cases} & (p = 1, \dots, n_u - 1; r = 1, \dots, n_v), \end{cases}$$

Considérons à présent un système encore plus large formant un réseau de cordes élastiques s'intersectant. On part d'une configuration initiale où l'on a n_u cordes dites u (i.e. les cordes qui ont la même direction que \mathbf{u}) parallèles à l'axe x et n_v cordes v parallèles à l'axe y . Les cordes u sont numérotées $1, 2, \dots, p, \dots, n_u$ du bas vers le haut et les cordes v $1, 2, \dots, r, \dots, n_v$ de gauche à droite. Les cordes sont distribuées uniformément mais la distance h_u entre les deux cordes u adjacentes peut être différente de celle h_v entre deux cordes v adjacentes. Après déformation, on obtient une configuration déformée, comme celle présentée sur la figure 1.16

Figure 1.16: Déformation d'un réseau discret de cordes élastiques.



D'après les équations précédentes, le nombre total d'inconnues que sont $\lambda_{p,r}^*$, $\lambda_{p,r}$, $T_{p,r}$, $S_{r,p}$, $\Phi_{p,r}$ et $\Psi_{r,p}$, est de $3[2n_u n_v - n_v - n_u]$ et nous avons $6n_u n_v - 7n_u - 7n_v + 10$ équations. En posant des conditions aux limites au bord (en traction ou en déplacement), on obtient un système complet d'équations pour $T_{p,r}$, $S_{r,p}$, $\Phi_{p,r}$ et $\Psi_{r,p}$ ou des équations pour $\lambda_{p,r}^*$, $\lambda_{p,r}$, $\Phi_{p,r}$ et $\Psi_{r,p}$ si la relation 1.2.4 est inversible.

Du fait de la non linéarité du système obtenu, il n'est, en général, pas possible d'obtenir une solution exacte pour un tel problème et des méthodes numériques sont nécessaires pour obtenir des solutions approchées. L'approche alternative adoptée par Green et Shi est d'utiliser des méthodes dites semi-inverses pour obtenir des solutions exactes. L'idée consiste à étudier plusieurs types de déformations et d'en déduire des classes de solutions.

Une telle approche trouve tout son intérêt lorsque l'on augmente indéfiniment le nombre de cordes, i.e. en faisant tendre vers zéro l'espace entre les cordes. On pense dès lors à la théorie de l'homogénéisation. Green et Shi [GS90a] déduisent la forme limite des solutions précédentes. Ils obtiennent les mêmes résultats que ceux fournis par la théorie des membranes, ce qui les conduit à étudier le problème directement sous sa forme continue, [GS90b].

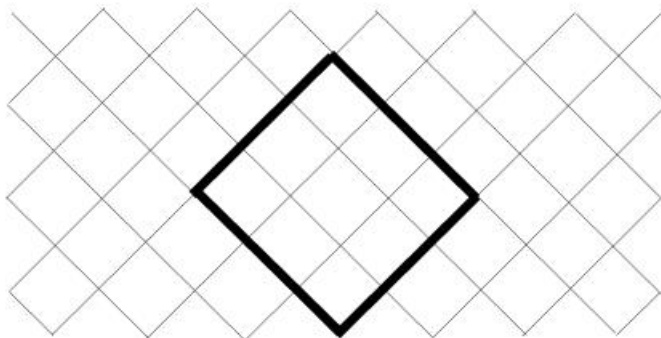
Disposer de telles équations pour le filet serait très prisé. C'est pourquoi, il semblerait pertinent de mentionner ici une telle démarche. En attendant de disposer de telles équations, décrivons les méthodes de globalisation qui ont été développées progressivement.

2.2 Une globalisation simple des mailles

Une globalisation simple des mailles repose sur la définition d'un maillage numérique plus grossier [The93]. Ce maillage repose sur les frontières physiques des mailles, i.e. une maille virtuelle inclut plusieurs mailles physiques (en gras sur la figure 1.17). Ces travaux

ont conduit au développement d'un logiciel commercial, DynamiT ¹.

Figure 1.17: Une globalisation possible du filet



En réduisant le nombre d'inconnues, cette méthode permet de réduire de façon significative le temps de calcul. En revanche, elle ne permet pas de représenter des détails plus petits que la taille de maille globalisée et notamment de raffiner localement. Pour s'affranchir de cette limitation, des méthodes plus flexibles ont été élaborées.

2.3 Estimation du profil du filet

Pour obtenir le profil de filets axisymétriques soumis à des efforts, O'Neill établit un système d'équations différentielles gouvernant la géométrie d'un cul de chalut de section circulaire (à mailles losanges [O'N97] ou quelconque [O'N99]).

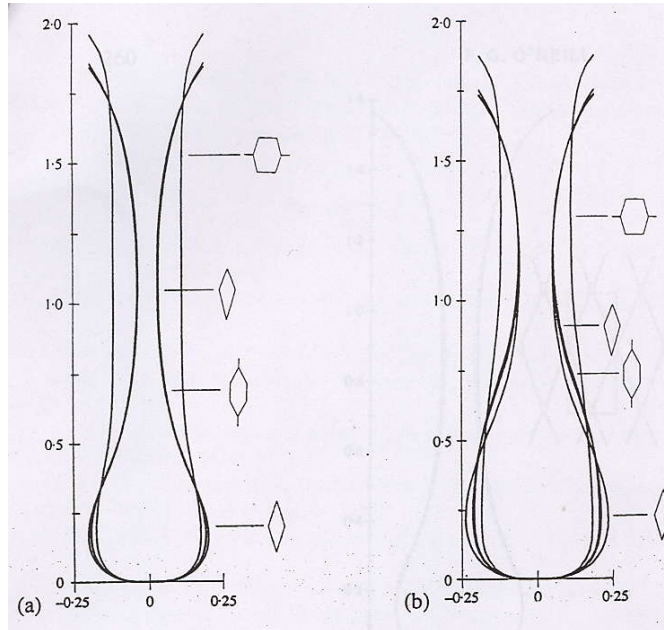
La comparaison des mesures expérimentales avec les solutions numériques pour le cas d'un filet partiellement rempli de poissons et soumis à la gravité montre que les équations différentielles décrivent de façon précise la géométrie du filet. Cette technique reste limitée aux structures de filets axisymétriques mais elle présente l'avantage d'offrir la possibilité de faire une comparaison directe entre plusieurs types de filets, qui diffèrent par leur nombre de mailles au périmètre, la taille de la maille, le type de maille, le poids de la prise ... De nouveaux types de filets peuvent être testés, avant même leur fabrication. Par exemple, comme le suggère la figure 1.18, on peut ainsi confirmer que la forme des mailles joue un rôle important dans l'ouverture des mailles.

2.4 Une technique éléments finis pour le filet

Pour s'affranchir d'une globalisation qui repose sur les fils comme celle proposée par Théret, Priour propose une méthode très efficace basée sur des éléments triangulaires dont la taille s'adapte localement aux détails à représenter [Pri99]. Cette technique utilisée majoritairement dans des cas statiques a également été appliquée en dynamique. Les noeuds ne coïncident pas nécessairement avec les noeuds de connections physiques des fils. Un tel maillage est beaucoup plus facile à raffiner. Par cette globalisation, un élément triangle inclut des fils dans deux directions, notées \mathbf{u} et \mathbf{v} (en gras sur la figure 1.19).

¹<http://www.ifremer.fr/dynamit/fr/index.htm>

Figure 1.18: Géométries des profils obtenues par simulations numériques pour différents types de mailles pour des filets soumis à la gravité et contenant une prise de a) 40 kg et b) 80 kg. - Extrait de [O’N99]



L’avantage de ces nouveaux éléments triangles est qu’à partir du calcul de la position d’équilibre de leurs sommets, la position finale de tout le filet est obtenue sans nécessiter beaucoup de ressources informatiques.

Cette méthode est implémenté dans un logiciel, FEMNET. Un maillage virtuel a été construit pour réduire le nombre d’inconnues du problème (voir la figure 1.20). Il est composé d’éléments triangles qui ajustent la forme du filet. Dans un élément triangle, les fils qui ont la même direction (u ou v) sont supposés rester parallèles, ce qui signifie que les éléments triangles sont suffisamment petits pour négliger toute variation d’angle entre les fils u et v à l’intérieur de chacun d’eux (Fig. 1.20).

Considérons un élément triangulaire de sommets notés 1, 2 et 3 (Fig. 1.21). Dans chaque élément triangulaire, l’allongement des fils ayant la même direction est constante. Tous les côtés de mailles du triangle ayant pour direction u ont la même longueur, noté $|\mathbf{u}|$ et tous les côtés de mailles ayant pour direction v ont également la même longueur, notée $|\mathbf{v}|$. Ainsi la tension T_u [N] le long de la direction u et T_v [N] le long de la direction v s’écrivent :

$$(1.2.5) \quad T_u = EA \frac{|\mathbf{u}| - n_0}{n_0},$$

$$T_v = EA \frac{|\mathbf{v}| - n_0}{n_0},$$

avec E le module d’Young [$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$], A la section du fil [m^2], n_0 la longueur du côté de maille non étiré [m], $|\mathbf{u}|$ et $|\mathbf{v}|$ sont les longueurs du côté de maille étiré dans les directions u et v respectivement [m].

Figure 1.19: Filet et éléments triangulaires

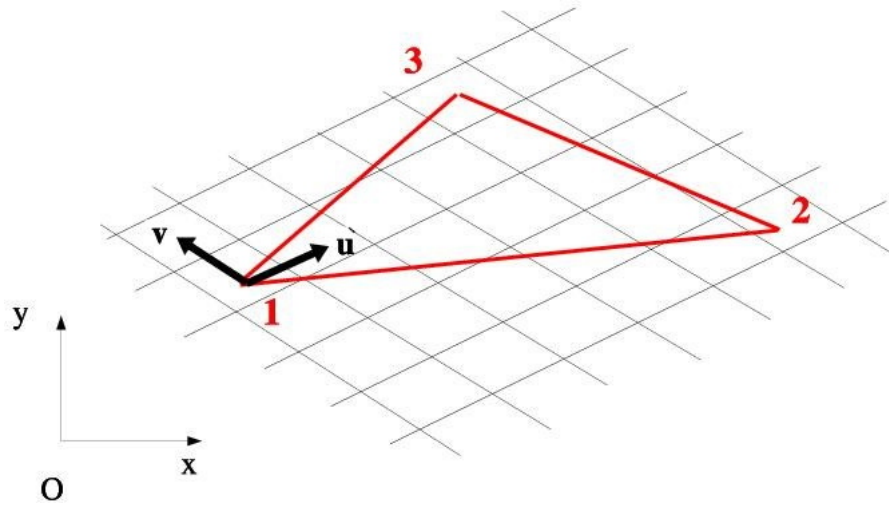
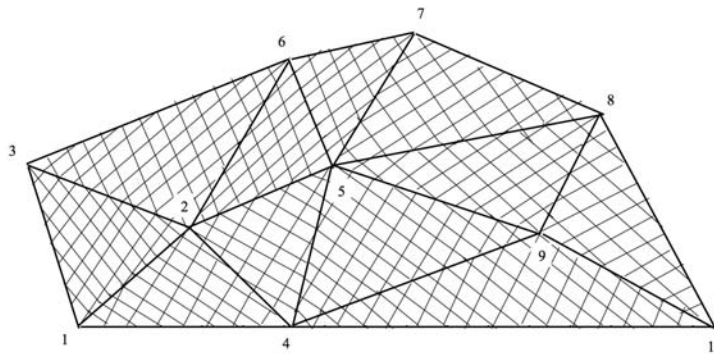


Figure 1.20: Découpage d'une nappe de filet en éléments triangulaires - Extrait de [Pri05]



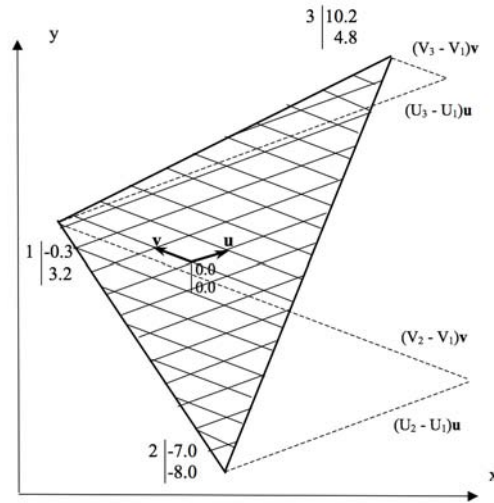
Pour calculer les tensions (1.2.5), il faut calculer les longueurs étirées $|\mathbf{u}|$ et $|\mathbf{v}|$. Pour cela, on écrit les vecteurs côtés du triangle, noté \mathbf{S}_{12} pour le vecteur joignant le sommet 1 au sommet 2, et \mathbf{S}_{13} celui joignant le sommet 1 au sommet 3, en fonction des vecteurs côtés \mathbf{u} et \mathbf{v} :

$$(1.2.6) \quad \begin{aligned} \mathbf{S}_{12} &= (V_2 - V_1)\mathbf{v} + (U_2 - U_1)\mathbf{u}, \\ \mathbf{S}_{13} &= (V_3 - V_1)\mathbf{v} + (U_3 - U_1)\mathbf{u}, \end{aligned}$$

avec U_1, U_2, U_3 et V_1, V_2, V_3 les nombres de mailles pour les trois sommets comme indiqués sur la Fig. 1.21.

A l'aide des deux équations (1.2.6), on en déduit les vecteurs étirés :

Figure 1.21: Un élément triangulaire - Extrait de [Pri05]



$$(1.2.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{V_2 - V_1}{n} \mathbf{S}_{13} + \frac{V_2 - V_1}{n} \mathbf{S}_{12}, \\ \mathbf{v} &= \frac{U_2 - U_1}{n} \mathbf{S}_{12} + \frac{U_2 - U_1}{n} \mathbf{S}_{13}, \end{aligned}$$

avec n le nombre de côtés de mailles dans le triangle :

$$(1.2.8) \quad n = (U_3 - U_1)(V_2 - V_1) - (U_2 - U_1)(V_3 - V_1).$$

Les forces sur chaque sommet sont calculées avec le principe des puissances virtuelles. Par exemple, la composante suivant x de la force sur le noeud 1 et notée f_{x1} est obtenu par un déplacement d_{x1} du noeud 1 le long de la direction x . Ce déplacement conduit à une force extérieure pour l'élément triangle et donc un travail :

$$(1.2.9) \quad W_e = f_{x1} d_{x1}.$$

Ce déplacement d_{x1} induit une variation de longueur dans les fils (notées $d|\mathbf{u}|$ et $d|\mathbf{v}|$) et par conséquent un travail interne dans l'élément triangulaire :

$$(1.2.10) \quad W_i = (T_u d|\mathbf{u}| + T_v d|\mathbf{v}|) \frac{n}{2}.$$

Suivant le principe des travaux virtuels, le travail interne doit être égal au travail externe, ce qui conduit à :

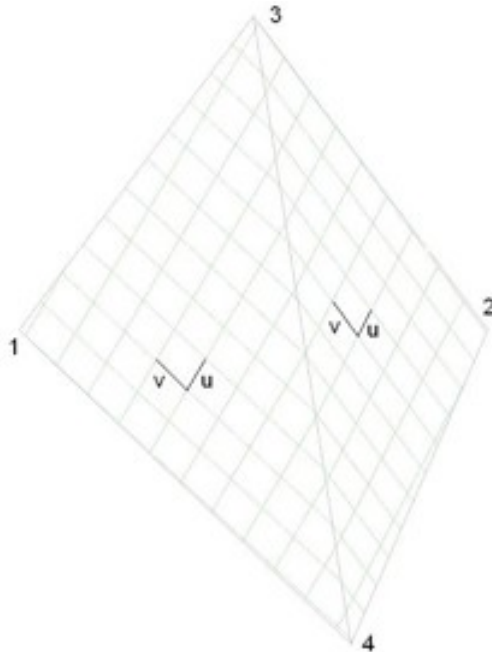
$$(1.2.11) \quad f_{x1} = \left(T_u \frac{d|\mathbf{u}|}{d_{x1}} + T_v \frac{d|\mathbf{v}|}{d_{x1}} \right) \frac{n}{2}.$$

Cela donne les forces dûes aux tensions dans les fils sur les trois sommets :

$$(1.2.12) \quad \begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= (V_3 - V_2)T_u \frac{\mathbf{u}}{2|\mathbf{u}|} + (U_2 - U_3)T_v \frac{\mathbf{v}}{2|\mathbf{v}|}, \\ \mathbf{f}_2 &= (V_1 - V_3)T_u \frac{\mathbf{u}}{2|\mathbf{u}|} + (U_3 - U_1)T_v \frac{\mathbf{v}}{2|\mathbf{v}|}, \\ \mathbf{f}_3 &= (V_2 - V_1)T_u \frac{\mathbf{u}}{2|\mathbf{u}|} + (U_1 - U_2)T_v \frac{\mathbf{v}}{2|\mathbf{v}|}, \end{aligned}$$

Ces forces de tensions sont calculées pour chacun des triangles. La force de tension globale sur chacun des noeuds est obtenue en sommant les forces calculées à ce noeud pour chaque triangle ayant ce noeud pour sommet. Le forçage total sur chaque noeud est la somme des forces appliquées sur ce noeud, à savoir le poids, la poussée d'Archimède, les efforts de tension et de flexion précédemment décrites, la traînée, la portance, la résistance du maillage à l'ouverture, les efforts dûs à la prise (voir le paragraphe 1.1.2 pour une description de ces efforts). A noter que les efforts de flexion sont alors une généralisation de la méthode décrite au paragraphe 1.1.2.e. La flexion estimée est celle se produisant entre deux triangles (voir figure 1.22).

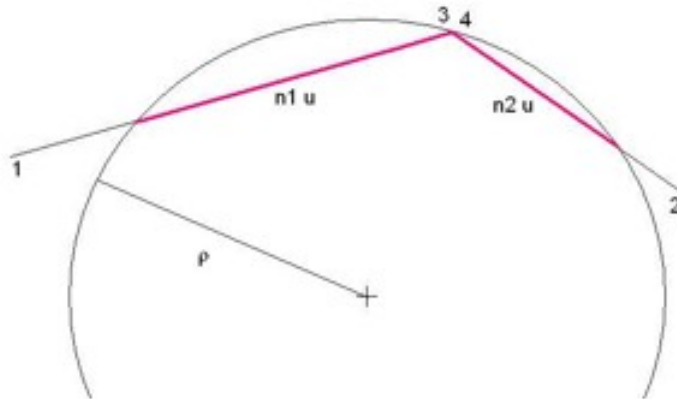
Figure 1.22: Deux éléments triangles 143 et 234. Le désalignement entre les fils u et v conduit à un moment de flexion entre les deux triangles - Extrait de [Pri06]



Remarque 1.2.1 Comme expliqué au paragraphe 1.1.2.e, les efforts de flexion exercés sur chaque sommet des triangles sont estimés à l'aide du principe des travaux virtuels. En revanche, la définition du rayon de courbure doit être adaptée. Si on considère les

fil u (respectivement v), le rayon de courbure est défini comme le rayon du cercle passant par les points caractéristiques de la longueur moyenne des fils u (respectivement v) dans chacun des triangles (voir figure 1.23). Pour le détail du calcul de la longueur moyenne, le lecteur intéressé pourra consulter [Pri06]. Le paramètre EI est quant à lui estimé expérimentalement (voir [O'N06a]).

Figure 1.23: Vue de côté des deux triangles 134 et 243. Rayon de courbure ρ pour les fils u - Extrait de [Pri06]



Ainsi, on peut écrire une force globale \mathbf{F} qui contient les efforts globaux sur chaque noeud. Elle dépend de la position des noeuds virtuels. Soit \mathbf{X} le vecteur de positions de ces noeuds. La force globale \mathbf{F} est notée $\mathbf{F}(\mathbf{X})$.

Commençant avec une configuration initiale (généralement une configuration telle que $\mathbf{F}(\mathbf{X}) \neq \mathbf{0}$), Priour utilise l'algorithme de Newton-Raphson pour calculer l'équilibre des noeuds virtuels i.e. trouver la position \mathbf{X}_{final} de ces noeuds virtuels, pour laquelle

$$(1.2.13) \quad \mathbf{F}(\mathbf{X}_{final}) = \mathbf{0}.$$

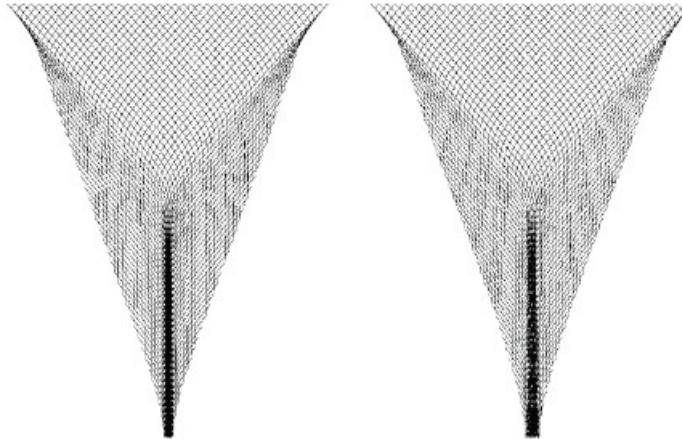
Les itérations sont stoppées quand la moyenne des résidus de la force sur chaque noeud est suffisamment petite [Pri99].

Algorithme de Newton-Raphson :

1. Lecture du fichier d'entrée, $k = 0$
2. Calcul de la force globale $\mathbf{F}(\mathbf{X}_k)$ contenant les forces pour chaque sommet virtuel,
3. Calcul de la matrice jacobienne $\nabla\mathbf{F}(\mathbf{X}_k)$,
4. Résolution du système linéaire $\nabla\mathbf{F}(\mathbf{X}_k)\delta_k = \mathbf{F}(\mathbf{X}_k)$,
5. Calcul de la nouvelle configuration : $\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - \delta_k$, $k = k + 1$,
6. Retour à l'étape 2, si la convergence n'est pas atteinte.

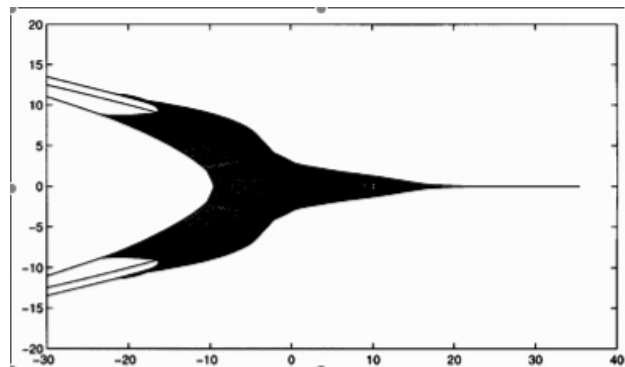
Ce modèle a été validé par comparaison avec un autre modèle qui repose sur une modélisation des fils du filet par des barres (voir figure 1.24).

Figure 1.24: Etat d'équilibre d'un filet maintenu par sa frontière supérieure et soumis à son propre poids. A gauche, modèle de référence; A droite, résultat obtenu avec FEMNET - Extrait de [Pri99]



Donnons un exemple de résultat obtenu avec FEMNET. L'exemple choisi est un chalut de fond de 130000 mailles et 260000 noeuds, à une profondeur de 100 m. La vitesse de l'eau est de 1 m/s. La modélisation par des triangles a permis de réduire de façon significative le nombre d'inconnues, puisque le nombre de noeuds virtuels calculés est de 2232, les câbles sont modélisés par 180 barres et le maillage triangulaire comporte 4173 triangles. La figure 1.25 montre la forme du chalut obtenue.

Figure 1.25: Forme d'un chalut de fond calculée par une méthode éléments finis - Extrait de [Pri99]



Le premier avantage de cette méthode est qu'elle permet de raffiner localement le maillage, indépendamment des fils du filet. Le second est qu'elle permet de gagner du temps de calculs puisque le nombre d'inconnues est nettement réduit.

A noter que ce code de calcul est le plus abouti des codes existants. Il a par ailleurs été repris à de nombreuses reprises dans les codes simulants les poissons, comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Modélisation et simulations des poissons

Pour décrire les modèles de poissons, nous avons choisi de présenter les trois logiciels existants de couplage filet/poissons :

1. Le logiciel FEMNET, qui intègre un modèle mécanique de poissons en les modélisant par des billes élastiques ;
2. Le logiciel PRESEMO, qui permet d'estimer la sélectivité ;
3. Le logiciel BehavioRis, qui permet de simuler le comportement des poissons.

Chacun de ces logiciels satisfait à un objectif différent. Après une présentation de chacun d'eux dans les trois sections suivantes, nous ferons une proposition de combinaison possible.

1 FEMNET

Le logiciel FEMNET que nous avons décrit au chapitre précédent 1.2.4 intègre un modèle de poissons par des billes élastiques en 3D. Ce modèle est dédié plus particulièrement aux poissons inertes dans la prise. Des modèles de poissons "vivants" sont présentés dans les sections suivantes. Rappelons qu'il inclut les efforts de contact entre les poissons et le filet (voir paragraphe 1.1.2.f) ainsi que la traînée des poissons dans le courant par l'intermédiaire des formulations de Richtmeyer (voir paragraphe 1.1.2.a).

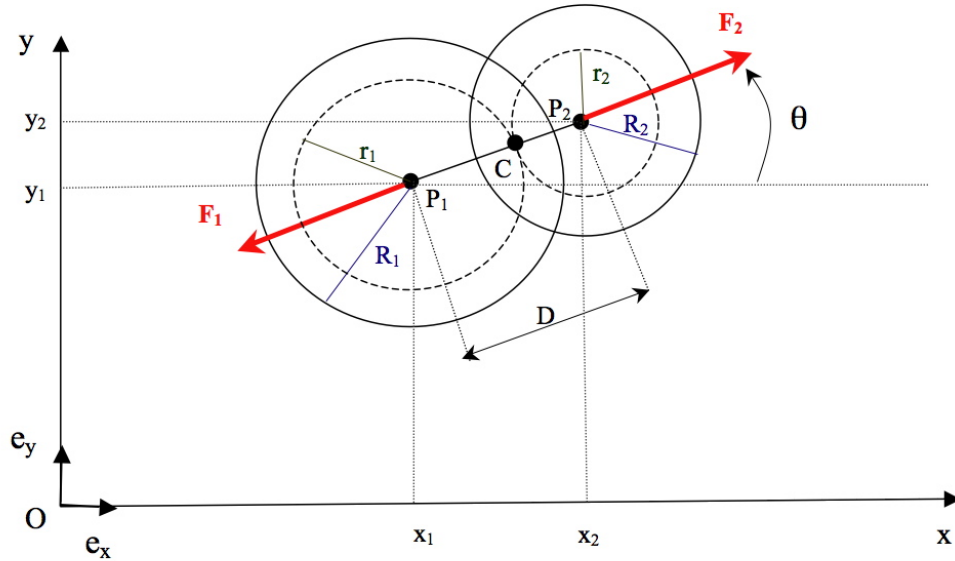
Lorsque la densité de poissons est faible, il n'est pas nécessaire d'introduire d'interactions entre les individus. En revanche, pour étudier par exemple, la nage en banc des poissons dans une poche de chalut, la position relative des individus ainsi que leurs interactions peuvent avoir une influence sur la sélectivité.

L'interaction entre les billes élastiques est modélisée comme suit.

Pour simplifier l'expression des efforts, décrivons la méthode dans le cadre 2D de l'interaction entre deux disques élastiques. Le modèle de billes élastiques est alors la généralisation de ce modèle dans un cadre 3D.

Supposons que deux disques élastiques à l'instant t se chevauchent. De même que pour le cas de l'interaction entre un disque élastique et un filet, on peut établir les forces élastiques entre ces deux disques. L'action réciproque générée sur le disque de centre P_1 de coordonnées (x_1, y_1) dans le repère $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ et de rayon R_1 est notée \mathbf{F}_1 et celle générée sur le disque de centre P_2 de coordonnées (x_2, y_2) et de rayon R_2 est notée \mathbf{F}_2 . Soit κ_1

Figure 2.1: Modèle d'interaction entre deux disques élastiques



la raideur du disque de centre P_1 et κ_2 celle du disque de centre P_2 . On note r_1 et r_2 les nouveaux rayons respectifs des disques de centre P_1 et P_2 . Le point de contact est noté C . L'amplitude de la force élastique \mathbf{F}_i qui s'exerce sur le disque de centre P_i est donnée par :

$$(2.1.1) \quad |\mathbf{F}_i| = \kappa_i * \frac{R_i - r_i}{R_i},$$

g

pour $i = 1, 2$. Pour déduire r_1 et r_2 , on utilise le principe d'action/réaction, $|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2|$, ainsi que la relation : $D = r_1 + r_2$ avec D la distance séparant les centres P_1 et P_2 . Il en résulte :

$$(2.1.2) \quad r_1 = \frac{\kappa_2 R_1 (D - R_2) - \kappa_1 R_2 R_1 + \kappa_2 R_1 R_2}{\kappa_1 R_2 + \kappa_2 R_1},$$

$$r_2 = \frac{\kappa_1 R_2 (D - R_1) - \kappa_1 R_2 R_1 + \kappa_2 R_1 R_2}{\kappa_1 R_2 + \kappa_2 R_1}.$$

Les efforts à appliquer sont les suivants :

$$(2.1.3) \quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{x,2} + \mathbf{F}_{y,2},$$

avec

$$(2.1.4) \quad \mathbf{F}_{x,2} = |\mathbf{F}_2| \frac{x_2 - x_1}{D},$$

et

$$(2.1.5) \quad \mathbf{F}_{y,2} = |\mathbf{F}_2| \frac{y_2 - y_1}{D},$$

$$(2.1.6) \quad \mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2.$$

Ce modèle décrit ici dans le cadre 2D se généralise facilement en 3D.

Les résultats obtenus par ce logiciel sont très prometteurs. Le temps de calcul est encore long mais son optimisation est en cours. Reste à coupler ce logiciel à un code simulant l'écoulement pour obtenir une forme de prise réaliste. En effet, l'écoulement est considéré ici comme uniforme, de ce fait, la prise ne présente pas une forme réaliste.

2 PRESEMO

Le logiciel PRESEMO (PREdictive SElective MOdel) développé par le DIFRES (Danish Institute for Fisheries Research) repose sur un modèle IBM (Individual-Based-Model). Il permet de déterminer la sélectivité de différents types de chalut [Her05a], [Her05b]. Chaque poisson possède des caractéristiques biométriques : un poids, une largeur maximale et une hauteur qui dépendent de sa longueur, et est supposé de section elliptique. Pour chacun est alloué un temps de traversée du chalut pour atteindre la poche, un temps de nage dans la poche au delà duquel il est considéré comme épuisé et se laisse emporter au fond de la poche, un temps entre deux tentatives d'échappement du filet, ... Une tentative d'échappement est considéré comme réussie si le poisson peut, par sa taille, passer à travers la maille où la tentative d'échappement a eu lieu. L'ouverture de maille est donnée par le logiciel FEMNET (voir partie 1.2.4). Les poissons qui ne sont pas parvenus à s'échapper tombent au fond de la poche, et appartiennent à la prise. La forme de la poche de chalut est mise à jour dynamiquement avec le grossissement de la capture à l'aide du logiciel FEMNET et la prise calculée à l'aide du modèle statistique décrit au paragraphe 1.1.2.f. Le logiciel PRESEMO permet d'estimer l'effet du design sur la sélectivité. Un exemple de visualisation est donnée figure 2.2.

Mathématiquement, la description la plus utilisée pour déterminer la sélectivité d'un engin de pêche est donnée par la probabilité qu'un poisson de taille ℓ soit retenu dans le filet. Cette probabilité de rétention, notée $r(\ell)$, où ℓ est la longueur du poisson, est définie comme suit :

$$(2.2.1) \quad r(\ell) = \frac{\exp\left(\frac{c(\ell - \ell_{0.5})}{s_r}\right)}{1 + \exp\left(\frac{c(\ell - \ell_{0.5})}{s_r}\right)}$$

avec

- $c = 2\ln(3) = 2.197$,
- $\ell_{0.5}$ la longueur de rétention à la probabilité 0.5,
- $s_r = \ell_{0.75} - \ell_{0.25}$ l'intervalle de sélection, i.e. la différence entre la longueur de rétention à la probabilité 0.75 et la longueur de rétention à la probabilité 0.25.

Figure 2.2: Exemple de visualisation obtenue avec le logiciel PRESEMO - Extrait de [Her05a]

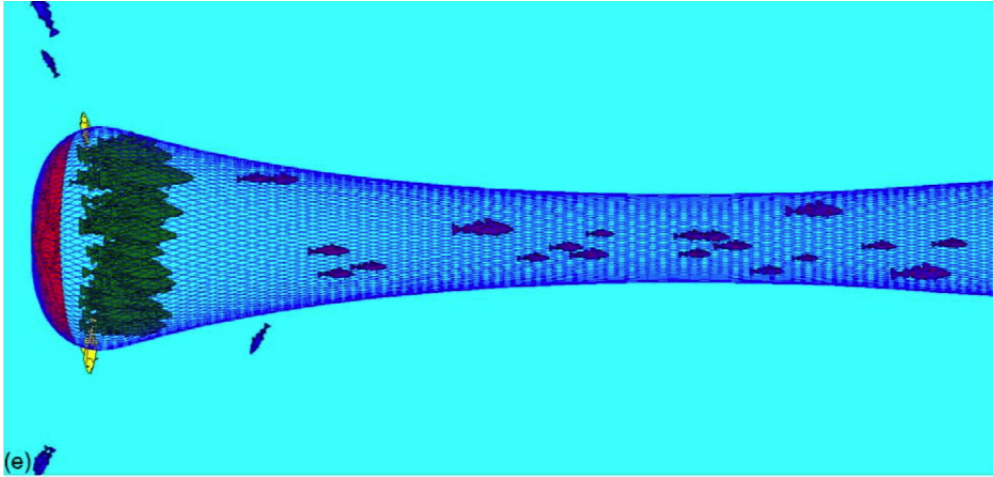
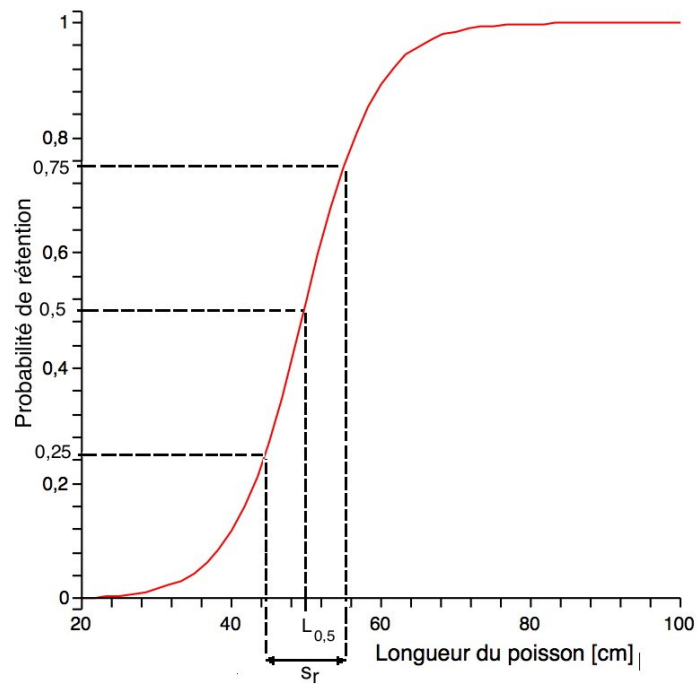


Figure 2.3: Forme typique d'une courbe de sélectivité



Un exemple de courbe est présenté sur la figure 2.3.

Dans la littérature, l'équation 2.2.1 est souvent écrite sous la forme :

$$(2.2.2) \quad r(\ell) = \frac{\exp(b\ell + a)}{1 + \exp(b\ell + a)}$$

avec $a = -\frac{c\ell_{0.5}}{s_r}$ et $b = \frac{c}{s_r}$, ce dernier donne la pente de la courbe de sélectivité.

Pour combiner rendement et respect de la taille minimale des captures, il faut une grande valeur de b (pente très raide) et la valeur de $\ell_{0.5}$ la plus proche possible de la limite de taille légale. A noter que plus l'intervalle de sélection s_r est grand, plus les poissons capturés sont de tailles différentes.

En sortie du logiciel PRESEMO, on obtient ainsi des estimations de la longueur de rétention à la probabilité 0.5, $\ell_{0.5}$, et de l'intervalle de sélection, s_r .

Les paramètres du modèle sont nombreux. La comparaison des résultats obtenus par le logiciel avec les données obtenues en mer permettent d'en faire l'ajustement. Cependant, beaucoup de simulations sont requises pour calibrer le modèle et établir des paramètres par défaut pour les différentes espèces de poissons. Pour l'instant, ce logiciel n'est en mesure que de traiter des filets axisymétriques à maille losange de taille de maille uniforme.

3 Behavioris

Le modèle behavioris a été développé [Coq05] pour permettre d'expérimenter des modèles de comportements d'animaux. L'utilisateur peut ainsi entrer des hypothèses sur le comportement d'un animal lorsque des stimuli lui parviennent et observer les mouvements résultant de l'animal dans un environnement dynamique complexe. Par exemple, pour le poisson dans le chalut, des hypothèses peuvent être formulées du type :

1. Le poisson est capable de percevoir les mailles les plus proches (pour pouvoir s'en approcher, s'en éloigner ou tenter de s'échapper au travers),
2. Le poisson est "conscient" de son orientation dans l'espace, i.e. les perceptions comme "au dessus", "en dessous", ... ont un sens,
3. Le poisson est capable de percevoir le point de la prise le plus proche de lui.

A la différence du logiciel PRESEMO, dédié à l'étude de la sélectivité, le modèle behavioris permet de tester des hypothèses comportementales. Ce logiciel repose sur un modèle informatique des BOIDS ¹ développé par Reynolds [Rey87] pour faire de l'animation de nuées d'oiseaux (*flock*), de troupeaux (*herd*) ou de bancs de poissons (*school*). Il permet de simuler des comportements d'animaux vivants. Ce modèle n'est pas un modèle mécanique. Dans cette modélisation chaque individu perçoit et se déplace de manière autonome. Trois comportements sont possibles pour un individu appartenant au groupe (figure 2.4) :

- la séparation : éviter les collisions avec son entourage,
- l'alignement : se déplacer comme son entourage,
- la cohésion : rester proche de son entourage.

Les entrées de Behavioris sont les moyennes de vitesses, les orientations et les positions de l'entourage de l'individu, la sortie pour chaque comportement est le vecteur accélération satisfaisant le comportement.

Une application a été réalisée dans le cadre de projet européen PREMECS II ² (PRedictive ModEl of Cod-end Selectivity) dont l'objectif est de simuler la sélectivité de la poche de chalut. Ce projet, piloté par l'IFREMER, est le résultat d'une collaboration

¹Boids : Background and Update, de Craig Reynolds, <http://www.red3d.com/cwr/boids>

²<http://www.ifremer.fr/premecs>

Figure 2.4: Modèles de comportements de déplacement dans un groupe (Reynolds, [Rey87]) - Extrait de [Coq05]

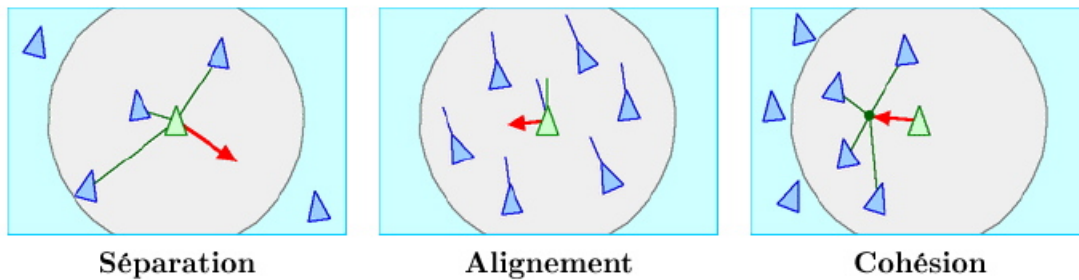
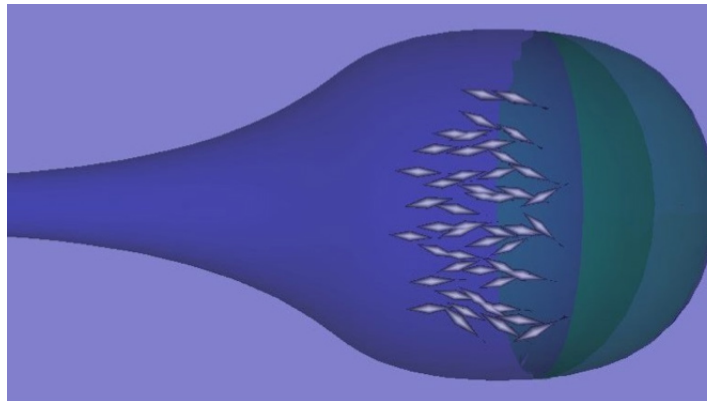


Figure 2.5: Simulation d'un banc de poissons (50 individus) nageant devant la prise dans la poche de chalut - Extrait d'une video de [Coq05]



entre les laboratoires FRS (Fisheries Research Services, Royaume-Uni), ISMAR (Istituto di Scienze Marine, Italie), LI2 (Laboratoire d'Ingénierie Informatique, ENIB, France), DIFRES (Danish Institute for Fisheries Research, Danemark) et le département TMSI (Technologies Marines et Systèmes d'Informations, IFREMER, Centre de Brest, France) pour simuler le comportement de poissons dans le cadre de la pêche au chalut. Le modèle behavioRis se base sur des observations des animaux dans leur environnement naturel : les données sont des règles régissant le comportement des poissons en fonction de stimuli et les sorties sont des observations visuelles des poissons en activité. Le modèle mécanique de filet utilisé est FEMNET [Pri99] (voir partie 1.2.4) et le modèle pour la prise est le modèle statistique décrit au paragraphe 1.1.2.f. Seule la poche est étudiée. Aucun modèle d'écoulement n'a été introduit en l'absence d'un modèle 3D pour le fluide. behavioRis a ainsi permis de tester des hypothèses de comportements, obtenues à l'aide d'enregistrements videos en mer ³. Les comportements des poissons dans le chalut sont mal connus du fait de la difficulté des observations en mer (peu d'éclairage, environnement dynamique, forte turbidité, ...), néanmoins quelques hypothèses peuvent être formulées, comme par exemple :

1. "La plupart des poissons semblent nager en suivant le chalut, de l'embouchure en

³<http://www.frs-scotland.gov.uk>

passant par la rallonge pour finir dans la poche. Dans la poche, les poissons semblent en constante activité pour nager dans une zone libre (évitement du filet ou de la prise)”,

2. ”Le comportement de nage en banc semble très présent à l’intérieur du chalut [...] Dans la poche, la formation spatiale peut avoir de l’influence sur les possibilités d’échappement des individus et donc sur la sélectivité. [...] C’est notamment parce que le banc est balloté par le courant (avec l’influence des pulsations dues au mouvement de la poche) que sa configuration peut être importante.”,
3. ”Ce sont plutôt les individus à la périphérie du banc qui tentent de s’échapper, et parmi eux, ce sont plutôt ceux situés dans la partie supérieure de la poche”.

Les résultats obtenus avec behavioRis sont encourageants (Figure 2.5). Les règles gouvernant le comportement des poissons et leur réponse face au filet donne des mouvements réalistes des poissons dans le filet. L’étape suivante serait de procéder à une validation de ces résultats, qualitative auprès d’experts du comportement et quantitative par comparaison avec des mesures sur un parcours de pêche. Il faudrait également inclure un modèle plus réaliste pour le fluide. Comme nous allons le voir, notre contribution porte essentiellement sur ce point.

4 Analyse

Ces trois logiciels pourraient se combiner pour modéliser le comportement des poissons dans la poche et estimer la sélectivité. En effet, le modèle statistique décrit au paragraphe 1.1.2.f n’est pas encore complètement satisfaisant pour estimer la forme de la prise. On peut dès lors très bien imaginer :

- Utiliser le modèle de filet et de billes élastiques de FEMNET pour traiter des déformations du filet et estimer la forme de la prise formée des poissons qui sont tombés au fond. Cela exige un modèle réaliste pour le fluide ;
- Prendre en compte les poissons ”nageants” et leurs comportement à l’aide du logiciel behavioRis, couplé lui aussi à un code fluide réaliste ;
- Estimer leurs possibilités d’échappement de la même façon que cela est réalisé dans PRESEMO.

On constate que l’étape nécessaire pour envisager une modélisation réaliste des poissons est d’intégrer à ces logiciels un modèle fluide réaliste. En conséquence, le prochain chapitre est dédié à l’étude des modèles fluides existants.

Chapitre 3

Modèles fluides existants

Le fluide est un élément indispensable à intégrer dans les codes de couplage filet/poissons dans la mesure où il a une forte influence sur la forme de la prise. Il contrôle le nombre de mailles du fond de la poche obstruées par des poissons, l'ouverture des mailles et donc la sélectivité. Il joue également un rôle non négligeable sur le comportement des poissons, sur leur fatigue et ainsi sur leur capacité à pouvoir s'échapper. Par conséquent, il est impossible de s'affranchir de sa modélisation et il faut qu'elle soit la plus réaliste possible afin d'estimer au mieux la sélectivité des chaluts.

Ce chapitre présente trois hypothèses différentes de modélisation du fluide, de la plus simple à la plus réaliste :

1. L'hypothèse d'un écoulement uniforme : souvent utilisée pour simplifier, elle ne conduit pas à une modélisation satisfaisante de l'écoulement au niveau de la poche.
2. L'hypothèse d'un fluide parfait : elle néglige les effets visqueux au niveau de la poche, ce qui rend son utilisation moins coûteuse mais reste peu réaliste.
3. L'hypothèse d'un fluide visqueux : hypothèse la plus réaliste, elle est également la plus coûteuse et la plus difficile à mettre en oeuvre pour deux raisons principales :
 - la nature turbulente de l'écoulement qui pose le problème de sa simulation numérique directe,
 - la géométrie du domaine fluide complexe et 3D et donc coûteuse à mailler.

Nous présenterons plus en détail cette dernière hypothèse et les modélisations qui en découlent. Cela nous amènera à considérer les difficultés posées par la nature turbulente de l'écoulement. Nous précisons les modèles de turbulence utilisés pour pallier ce problème. Dans le même temps, nous donnerons deux modélisations qui permettent de s'affranchir d'un maillage trop coûteux mais qui s'appliquent seulement pour des configurations axisymétriques du filet. Leurs généralisations au cas d'une configuration 3D du filet s'avèrent en effet délicates. Or dans la perspective d'un couplage, il faut disposer d'un modèle fluide applicable en 3D et pour lequel l'étape de maillage du domaine fluide n'est pas trop coûteuse lorsque le filet est amené à bouger. Nous mettrons évidence les difficultés liées à ce passage au 3D et les techniques que cela nous a amené à considérer pour permettre la simulation de l'écoulement autour d'une géométrie aussi complexe que celle d'un filet de pêche.

1 Hypothèse d'un écoulement uniforme

L'hypothèse d'un écoulement uniforme permet de simplifier le problème de l'interaction fluide/structure. Les efforts hydrodynamiques sur le filet sont calculés à l'aide de la vitesse

d'entrée (cf. partie 1.1.2). Si cette hypothèse reste raisonnable pour les trois-quart avant du chalut ([The93], [Bes97]), elle ne peut se justifier au niveau de la poche de chalut, où les mailles sont très fermées et où les poissons constituent un obstacle à l'écoulement.

2 Hypothèse d'un fluide parfait

Pour étudier l'écoulement autour d'un chalut à plancton, O'Neill [O'N05], [O'N06b] choisit de modéliser l'écoulement à l'aide d'un modèle de fluide parfait. Cette approche possède l'avantage d'être beaucoup moins coûteuse qu'une approche de fluide réel. En revanche, les effets visqueux sont négligés. La méthode utilisée est la méthode des singularités avec distribution de sources, très utilisée dans l'industrie aéronautique pour résoudre des problèmes d'écoulements potentiels. L'écoulement incompressible non visqueux autour d'un profil est modélisé en remplaçant la surface du profil par une répartition de sources et de puits (dans le cas d'un écoulement sans portance). Ainsi, la méthode consiste à mailler la surface du profil en segments (2D) ou panneaux (3D). Cependant la répartition de ces puits et sources sur le profil n'est pas toujours évidente.

3 Hypothèse d'un fluide visqueux

En réalité, des effets visqueux sont générés par la présence du filet et un modèle de fluide parfait ne peut rendre compte des phénomènes liés à cette viscosité. En effet, les mailles du cul du chalut sont petites, et le fluide ne peut pas s'écouler librement à travers les mailles. Son écoulement dépend de la longueur du côté de maille, de l'épaisseur des fils, de l'ouverture des mailles, ... De plus, les poissons constituent un obstacle qui modifie l'écoulement. Le fait de ne pas négliger les effets visqueux conduit à écrire que le comportement du fluide est régi par les équations de Navier-Stokes incompressibles. Celles-ci sont formées de deux équations, une pour la quantité de mouvement du fluide et une équation de continuité,

$$(3.3.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases}$$

où $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ est la vitesse du fluide, p sa pression et ν sa viscosité cinématique.

La quantité $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$, appelée dérivée particulaire, a pour composantes :

$$(3.3.2) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_i}{\partial x_l},$$

pour $i = 1, 2, 3$, avec la convention que la répétition d'un indice implique la sommation par rapport à cet indice.

L'équation $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ traduit l'incompressibilité du fluide. Sous forme indicielle, elle s'écrit :

$$(3.3.3) \quad \frac{\partial u_l}{\partial x_l} = 0,$$

toujours avec la convention de sommation des indices répétés.

3.1 Simulation numérique directe : les difficultés

Le calcul du nombre de Reynolds, noté Re , autour d'une poche de chalut laisse supposer que l'écoulement est turbulent. Prenons pour exemple une poche de chalut de 6 m de long, partiellement remplie de poissons, dont le diamètre maximal D_p de la prise est de 2.7 m et tractée à une vitesse de $u_0 = 1.25$ m/s. Le nombre de Reynolds pour ce cas vaut

$$(3.3.4) \quad Re = \frac{u_0 D_p}{\nu} = 3.10^6.$$

Ce nombre est très grand et les ressources informatiques requises pour simuler un tel écoulement seraient bien trop importantes pour les ordinateurs actuels.

Expliquons pourquoi. Pour résoudre numériquement les équations de Navier-Stokes, celles-ci sont discrétisées de sorte de ne chercher les valeurs de la vitesse et de la pression qu'en chaque point de l'espace de calcul, basé sur un maillage de l'espace préalablement construit.

Considérons un domaine de calcul de dimensions $L_x \times L_y \times L_z$, discrétisé à l'aide d'un maillage cartésien de $n_x n_y n_z$ points de grille. Soient $\Delta_x = \frac{L_x}{n_x - 1}$ le pas d'espace en x , $\Delta_y = \frac{L_y}{n_y - 1}$ le pas d'espace en y , $\Delta_z = \frac{L_z}{n_z - 1}$ le pas d'espace en z .

Notons L_t la taille des plus grands tourbillons, v_{L_t} la vitesse caractéristique et θ le temps caractéristique associées. Soit ℓ_t la taille des petites structures, v_{ℓ_t} la vitesse caractéristique et τ le temps caractéristique associées.

Dans le régime turbulent, l'écoulement est caractérisé par des mouvements irréguliers et tourbillonnants, se produisant à des échelles spatiales très différentes, mais étroitement liées : pour traiter le comportement à grande échelle, il est nécessaire de connaître les phénomènes de la petite échelle. Une simulation numérique directe d'un écoulement turbulent demanderait donc un maillage très fin pour prendre en compte toutes les échelles, jusqu'à la plus petite. Il faut alors que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$L_x > L_t, L_y > L_t, L_z > L_t, \Delta_x < \ell_t, \Delta_y < \ell_t, \Delta_z < \ell_t.$$

Ce qui se réécrit :

$$(3.3.5) \quad \frac{L_x L_y L_z}{\Delta_x \Delta_y \Delta_z} = n_x n_y n_z > \left(\frac{L_t}{\ell_t} \right)^3.$$

On définit le nombre de Reynolds turbulent, noté Re_t le nombre qui correspond aux échelles de longueur et de taille des grands tourbillons :

$$(3.3.6) \quad Re_t = \frac{v_{L_t} L_t}{\nu}.$$

A cette étape, il est nécessaire de définir quelques quantités, que nous introduirons plus naturellement au Chapitre 5

Lorsque l'écoulement est turbulent et incompressible, on décompose la vitesse selon le procédé de moyenne d'ensemble :

$$(3.3.7) \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' ,$$

où $\bar{\mathbf{u}}$ est la moyenne de la vitesse et \mathbf{u}' sa fluctuation.

On appelle le tenseur des vitesses de déformation (symétrique), la quantité notée $\varepsilon(\mathbf{u})$ définie par :

$$(3.3.8) \quad \varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) .$$

On définit l'énergie cinétique turbulente, notée k , par :

$$(3.3.9) \quad k = \frac{\overline{u'_1 u'_1} + \overline{u'_2 u'_2} + \overline{u'_3 u'_3}}{2}$$

On définit le taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente (unité $[\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}]$), noté \mathcal{E} comme étant :

$$(3.3.10) \quad \mathcal{E} = 2\nu \overline{\varepsilon(\mathbf{u}') : \varepsilon(\mathbf{u}')} .$$

En turbulence développée, dans le contexte d'une cascade d'énergie des grandes vers les petites échelles, la théorie de Kolmogorov (1941) (voir par exemple [Cou89]) propose :

$$(3.3.11) \quad \ell_t = \left(\frac{\nu^3}{\mathcal{E}}\right)^{1/4} .$$

Par analyse dimensionnelle, on peut écrire

$$(3.3.12) \quad \mathcal{E} = \frac{v_{L_t}}{L_t} .$$

D'où la relation

$$(3.3.13) \quad \frac{L_t}{\ell_t} = Re_t^{\frac{3}{4}}$$

Ce qui conduit à un nombre de points de grille tel que :

$$(3.3.14) \quad n_x n_y n_z > Re_t^{\frac{9}{4}} .$$

L'échelle des tourbillons porteurs d'énergie, L_t , est environ égale à celle de l'installation étudiée.

3.3. HYPOTHÈSE D'UN FLUIDE VISQUEUX

Le nombre de Reynolds turbulent derrière la poche d'un chalut est donc de l'ordre de 10^6 , le nombre de points du maillage devrait alors être de 3.10^{13} ! Un tel calcul ne peut être réalisé sur les ordinateurs actuels et le temps de calcul serait extrêmement grand.

Par conséquent, toute simulation directe de ce type d'écoulement n'est pas encore possible au vu de la puissance des ordinateurs actuels.

A grand nombre de Reynolds vient aussi des problèmes de stabilités numériques. Cela signifie en effet que le terme visqueux est négligeable devant les autres termes, or c'est précisément ce terme qui stabilise numériquement le code de calcul. Il est par conséquent très difficile de résoudre numériquement un tel problème.

Néanmoins, il est possible de simuler l'écoulement moyen, suivant l'hypothèse dite de décomposition de Reynolds, qui consiste à séparer la vitesse en sa partie moyenne et sa partie fluctuante (équation (3.3.7)). Cette approche est une approche dite RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) qui consiste à utiliser un filtre statistique pour moyennner les équations. L'application de ce filtre aux équations de Navier-Stokes incompressibles génère un système qui n'est pas fermé et une ou plusieurs équations doivent être ajoutées. Il s'agit par exemple d'équations gouvernant l'énergie cinétique turbulente k , le taux de dissipation \mathcal{E} ,... Pour plus de détails sur la modélisation de la turbulence par une approche RANS, se référer au chapitre 5. A noter que d'autres techniques existent, qui reposent sur des filtres en espace, ce sont les techniques LES (Large Eddy Simulation). Nous n'aborderons ici que des approches RANS. Comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, ce sont des approches RANS qui sont employées.

3.2 Modélisation axisymétrique

a/ Modèles de tores.

Parmi les modèles axisymétriques de filet, on trouve les modèles de tores qui reposent sur la modélisation du filet à l'aide de tores répartis suivant la position des noeuds (voir figure 3.1). Ces modèles permettent de réaliser des simulations numériques axisymétriques, moyennant une hypothèse d'axisymétrie de l'écoulement. Deux campagnes de simulations ont été menées de façon parallèle. L'une d'elle a été réalisée à l'aide du logiciel Fluent par Marichal [Mar05]. L'autre simulation a été réalisée en utilisant le logiciel FreeFem++ par Lewandowski [Lew04].

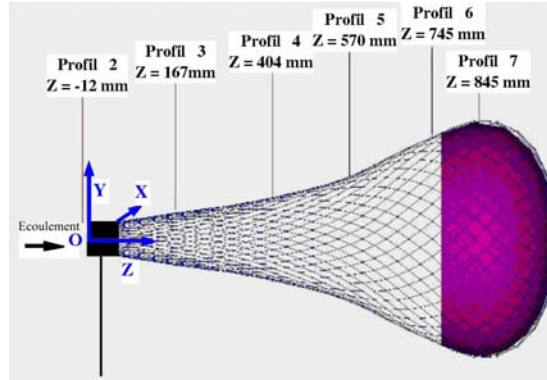
Figure 3.1: Géométrie considérée comme modèle de filet 2D et axisymétrique



Pour fermer le systèmes régissant la vitesse moyenne et la pression moyenne, Marichal a utilisé un modèle $k - \mathcal{E}$. Il a comparé les résultats des simulations numériques obtenues avec le modèle de tores sous Fluent avec des résultats issus de l'expérimentation.

La composante axiale de la vitesse moyenne a en effet été mesurée autour d'une maquette rigide de chalut à l'aide d'un vélocimètre laser doppler le long de six profils, représentés sur la figure 3.2. Ces mesures ont été réalisées dans une veine d'essais à circulation d'eau et surface libre de l'IFREMER de Boulogne-sur-Mer. Pour plus de renseignements sur le dispositif expérimental, permettant d'obtenir ces mesures, se référer au chapitre 4.

Figure 3.2: Position des profils de mesures LDV autour d'une maquette rigide de chalut



Les profils numériques obtenus avec le modèle de tores dans Fluent ont été tracés et comparés à ceux obtenus expérimentalement (Figures 3.3 à 3.8).

À l'extérieur de la maquette, les champs de vitesse obtenus numériquement concordent relativement bien avec ceux expérimentaux. La vitesse est accélérée au voisinage de la prise et l'écoulement à l'arrière est caractérisé par deux zones symétriques de recirculation. En revanche, à l'intérieur de la maquette, les valeurs de la vitesse sont nettement sous-estimées par la simulation. De plus ce modèle n'est pas généralisable en 3D, notamment en terme de maillage du domaine fluide, du nombre de tores à considérer et de la prise en compte des poissons.

b/ Modèles de membrane.

Le cas intéressant d'une membrane poreuse axisymétrique immergée dans un fluide a été traité par [Vin96]. A nouveau, ce sont les équations de Navier-Stokes incompressibles moyennées qui sont considérées, couplées à un modèle de fermeture $k - \mathcal{E}$. La méthode de résolution proposée consiste à construire un maillage cartésien à partir de la géométrie de la membrane, en utilisant des coordonnées curvilignes. Le calcul des inconnues de vitesse et de pression est effectué itérativement à l'aide de la méthode des différences finies. Pour prendre en compte la présence de la membrane dans le domaine fluide, les composantes de la vitesse au niveau de la membrane poreuse sont données par des équations traduisant les effets mixtes de glissement/adhérence à la paroi. L'écoulement tangentiel au filet est régi par la loi de Shaffman, caractéristique d'effets d'adhérence et de glissement à la paroi :

$$(3.3.15) \quad u_t = B \frac{\partial u_t}{\partial \mathbf{n}},$$

où u_t est la composante de la vitesse tangentielle au filet et \mathbf{n} la normale extérieure. Choisir B égal à zéro conduit à exprimer une condition d'adhérence et faire tendre B vers l'infini conduit à une condition de glissement.

3.3. HYPOTHÈSE D'UN FLUIDE VISQUEUX

Figure 3.3: Profil 2

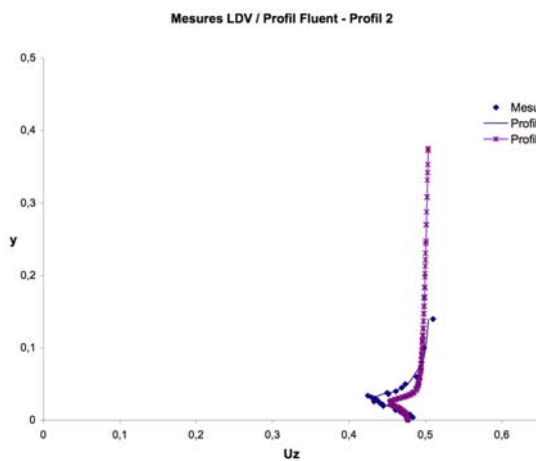


Figure 3.4: Profil 3

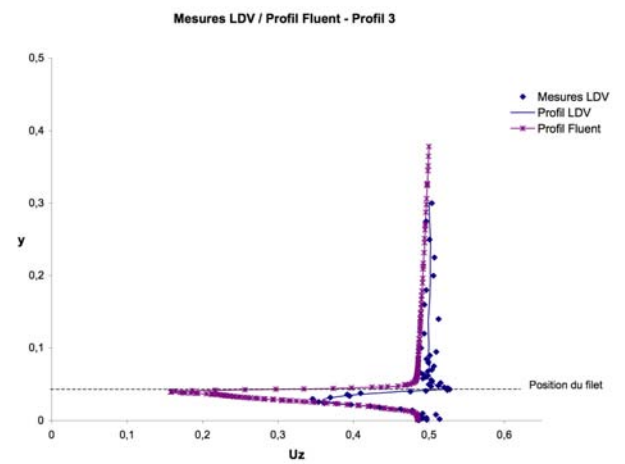


Figure 3.5: Profil 4

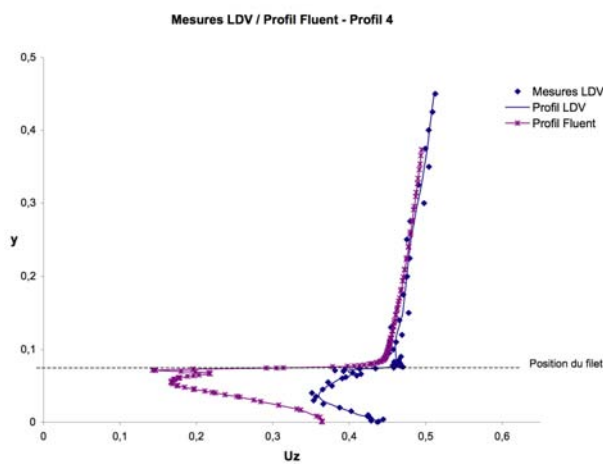


Figure 3.6: Profil 5

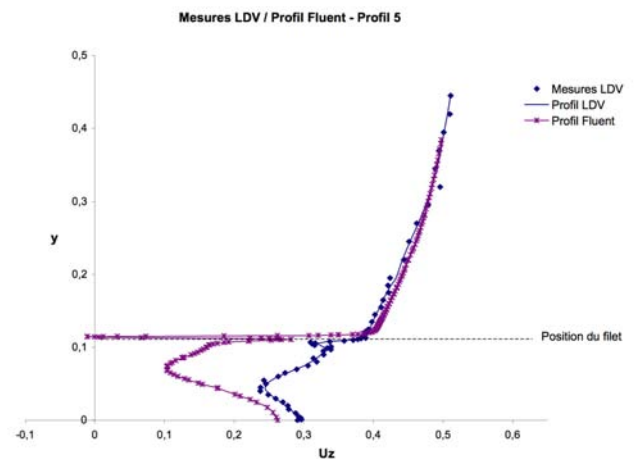


Figure 3.7: Profil 6

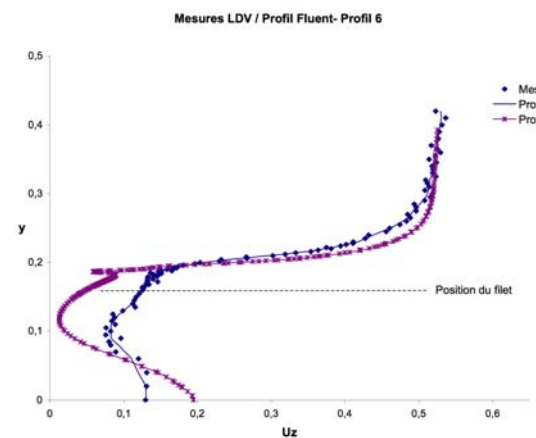
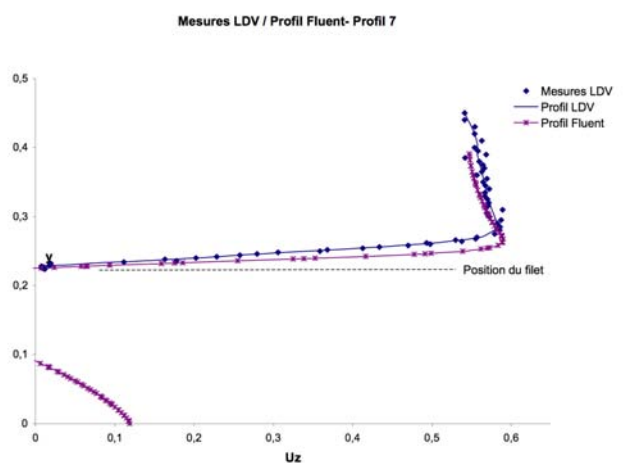


Figure 3.8: Profil 7



La composante normale de la vitesse est régit par la loi de Darcy, afin d'exprimer un transfert de masse :

$$(3.3.16) \quad u_n = -\mathbf{K}\nabla p$$

où \mathbf{K} est un tenseur de perméabilité.

Le coefficient B dépend de la vitesse tangentielle, il peut donc être déterminé par la valeur de la vitesse obtenue à l'itération précédente dans l'algorithme de résolution. En revanche, le coefficient \mathbf{K} doit être trouvé expérimentalement, par comparaison entre les résultats des simulations numériques et les résultats expérimentaux.

Des essais ont été réalisés en bassin et en soufflerie autour d'une membrane de filet cylindrique ou conique. La comparaison des profils de vitesse expérimentaux avec ceux obtenus numériquement sont satisfaisants pour des paramètres bien choisis. L'évolution de l'épaisseur des couches limites internes et externes est bien simulée par le modèle numérique [Vin96].

La présence d'un paramètre empirique dans un modèle mathématique est toujours un inconvénient, puisque des expériences doivent être menées chaque fois que l'on souhaite étudier des configurations différentes de filet. Ce point est délicat dans la mesure où il n'est pas aisé de trouver des lois pour de tels paramètres. L'idéal est bien entendu de disposer d'un modèle dont tous les paramètres sont calculables, à partir de caractéristiques physiques par exemple, comme la porosité des mailles dans le cas du chalut.

Cette technique semble difficile à généraliser au cas du filet entier, qui est par nature 3D, du fait de l'utilisation d'un maillage cartésien qui repose sur la géométrie de la membrane. En revanche, voir la poche de chalut comme une membrane présente l'avantage non négligeable de s'affranchir des mailles et des noeuds du filet, nous expliquerons par la suite tout l'intérêt d'une telle modélisation.

3.3 Vers une modélisation 3D

Les modèles fluides existants sont axisymétriques et leur généralisation dans le cadre 3D n'est, en général, pas évidente. Or le passage au 3D apparaît indispensable dans l'objectif d'un futur couplage avec un code filet. La capture des poissons entraîne des déformations du filet qui ne sont pas axisymétriques. Aussi ne pouvant pas imaginer simuler des poissons dans une configuration axisymétrique (cela reviendrait à considérer qu'ils sont en forme de tores), l'étape de modélisation 3D du fluide est incontournable mais reste complexe du fait de la nature turbulente de l'écoulement et de la structure complexe de la géométrie du filet.

La prise en compte de ces difficultés a été cruciale pour la suite de notre travail. Elle nous a conduit à chercher un modèle fluide directement applicable en 3D, et ce dernier point est très important. L'application à la configuration axisymétrique ne doit pas être une finalité mais seulement une étape de validation du modèle. Cette configuration est en effet idéale pour de premiers tests dans la mesure où sa mise en oeuvre est rapide et son coût en ressources informatiques est faible, comparativement au 3D complet. Il s'agit donc de trouver un modèle fluide 3D, de le tester dans un premier temps sur des cas simples pour lesquels nous disposons de données de validation avant d'envisager le passage au 3D complet. C'est précisément cette démarche que nous avons adoptée.

Exposons les difficultés liées au 3D. Rappelons que les méthodes numériques couramment utilisées pour calculer le comportement des fluides sont les méthodes des éléments finis et des volumes finis. Un maillage est construit pour discrétiser le domaine fluide. Dans

notre cas, le domaine fluide, partie de l'espace tout autour du filet, a une géométrie très complexe. La construction de ce maillage pose un problème majeur. De ce fait, l'approche classique ne permet pas de résoudre de tels écoulements, comme nous le verrons dans le premier paragraphe.

Le filet pouvant être considéré comme un milieu poreux (plus précisément une membrane poreuse), cela nous a naturellement conduit à faire un rapprochement avec les problèmes d'écoulements dans les milieux poreux. La théorie de l'homogénéisation est communément utilisée pour ce type de problème. L'idée consiste à trouver une équation équivalente régissant l'écoulement autour d'un filet. De telles équations existent effectivement, et nous les avons utilisées. En revanche, la démonstration permettant de déduire ces équations par la théorie de l'homogénéisation pour le cas d'un écoulement autour d'un filet reste un problème ouvert. Cela nous aurait permis de disposer d'une expression pour les constantes issues du processus d'homogénéisation et présents dans les équations. Comme nous le verrons au Chapitre 6, le calage de ces paramètres a , de ce fait, été réalisé par comparaison aux résultats expérimentaux disponibles.

Comme nous allons le voir dans le deuxième paragraphe, de telles équations homogénéisées sont d'autant plus intéressantes lorsqu'elles sont couplées à des méthodes qui permettent de travailler avec des maillages qui ne reposent pas sur la géométrie des obstacles et donc très faciles à générer.

a/ Méthode classique : maillage conforme à la géométrie.

Générer un maillage 3D autour des fils et noeuds apparaît comme une tâche difficile dans la mesure où ils ont une épaisseur et qu'il faudrait des ressources informatiques importantes pour y parvenir. Une idée, qui simplifie le problème, consiste à voir le filet comme une membrane poreuse. Il serait alors envisagé de réaliser un maillage 2D reposant sur cette membrane puis à partir de ce maillage 2D, il faudrait créer un maillage 3D. Un tel maillage est possible (avec le mailleur de *FreeFem++*¹ ou celui de *Mephisto*² par exemple) mais reste coûteux et d'autant plus dans un objectif de couplage avec un code filet+poissons qui nécessiterait alors un maillage adaptatif. Or du fait de la dégénérescence des mailles dans le mouvement, il serait requis de remailler à chaque paquet d'itérations, voire pire à chaque itération. De plus un tel remaillage serait combiné à une technique de projection de la solution dans la nouvelle grille qui introduirait des erreurs supplémentaires. D'autres techniques doivent être mises en oeuvre de sorte que le fluide 'voit' le filet sans pour autant nécessiter un maillage conforme à sa géométrie.

La présence d'un domaine poreux pose alors la question d'utiliser les techniques de l'homogénéisation pour établir les équations gouvernant l'écoulement.

b/ Homogénéisation et méthodes de frontières Immergées

Modèles macroscopiques déduits par la théorie de l'homogénéisation. En mécanique des fluides, de nombreux problèmes font intervenir deux échelles d'espace : une échelle macroscopique et une microscopique. Mais pour étudier le comportement à l'échelle macroscopique, on ne peut négliger les phénomènes à l'échelle microscopique. On peut alors tenter de résoudre le problème en discrétisant l'espace, mais alors le niveau de discrétisation requis devrait alors être plus fin que la taille des plus petits événements microscopiques.

¹<http://www.freefem.org/>

²<http://www.ann.jussieu.fr/~perronet/mefisto.gene.html>

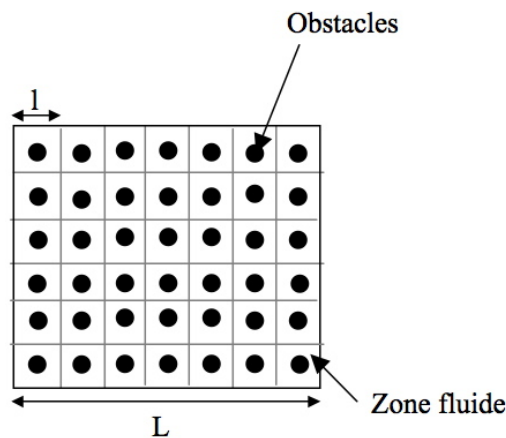
Malgré l'amélioration significative des puissances de calculs des ordinateurs ces dernières années, cela ne permet toujours pas de faire de tels calculs en un temps raisonnable.

L'idée consiste alors à modéliser les effets microscopiques de façon à les intégrer dans les équations macroscopiques. L'homogénéisation est une méthode basée sur ce principe.

Le travail d'homogénéisation des équations de Navier-Stokes a été réalisé par G. Allaire. Il se place dans un cas non classique en homogénéisation puisqu'il suppose que la taille des obstacles tend vers 0 quand ϵ tend vers 0 alors que classiquement le volume des obstacles tend vers une constante strictement positive quand ϵ tend vers 0. Pour l'opérateur de Laplace, cette approche non classique a été étudié par exemple par Murat et Cioranescu, [MC82]. L'originalité par rapport au cas du Laplacien provient du traitement du terme de pression. Aussi les résultats obtenus à partir du problème de Stokes se généralisent au cas d'un problème de Navier-Stokes.

Considérons un milieu poreux comme celui donné à la figure 3.9. Il est constitué d'une partie fluide Ω_ϵ et contenant de nombreux obstacles solides S_ϵ . Le domaine entier est noté $\Omega = \Omega_\epsilon \cup S_\epsilon$.

Figure 3.9: Exemple de milieu poreux



Soit ϵ est le rapport de l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique :

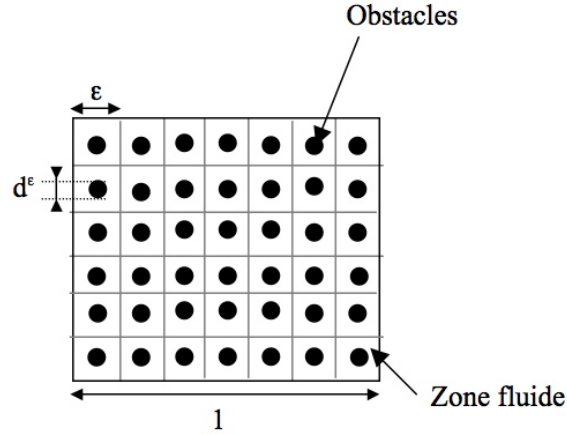
$$(3.3.17) \quad \epsilon = \frac{l}{L}$$

Ce changement d'échelle conduit à travailler avec la géométrie donnée figure 3.10.

A noter qu'il est important de bien choisir correctement les échelles représentatives dans la mesure où cela donne le paramètre clé, ϵ . Différents choix pour ϵ conduisent à différents problèmes homogénéisés, dont les solutions sont proches "dans un certain sens".

Une approche standard serait de modéliser un tel écoulement dans le milieu poreux par les équations de Stokes incompressibles et des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur les frontières solides :

Figure 3.10: Milieu poreux après changement d'échelle



$$(3.3.18) \quad \begin{cases} -\nabla \mathbf{u}^\epsilon + \nabla p^\epsilon = f, \text{ dans } \Omega_\epsilon \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^\epsilon = 0, \text{ dans } \Omega_\epsilon \\ \mathbf{u}^\epsilon = 0 \text{ sur le bord des obstacles } \delta S_\epsilon, \end{cases}$$

avec f les forces volumiques externes exercées sur la partie fluide (par exemple, la gravité).

Des hypothèses abstraites sur les obstacles permettent de passer à la limite dans le problème initial et d'obtenir un système homogénéisé en les variables (\mathbf{u}_0, p_0) . Plusieurs régimes d'écoulement sont ainsi déduits suivant la taille des obstacles d^ϵ par rapport à ϵ , [All89], [All91a] et [All91b] (en dimension 3) :

- Si la taille des obstacles est du même ordre que ϵ , l'écoulement est gouverné par la loi de Darcy, caractérisant un écoulement visqueux lent (frictions importantes) :

$$(3.3.19) \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{K}(f - \nabla p_0) \text{ dans } \Omega,$$

- Si la taille des obstacles est inférieure à ϵ , de l'ordre de ϵ^3 , on obtient la loi de Brinkman (frictions sur les obstacles caractérisées par le tenseur \mathbf{K}) :

$$(3.3.20) \quad \begin{cases} \nabla p_0 - \Delta \mathbf{u}_0 + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_0 = f, \text{ dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_0^\epsilon = 0, \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{u}_0^\epsilon = 0 \text{ sur le bord des obstacles } \delta S_\epsilon. \end{cases}$$

- Si la taille des obstacles est très inférieure à une constante fois ϵ^3 , on retrouve le problème de Stokes (pas de frictions sur les obstacles) :

$$(3.3.21) \quad \begin{cases} -\nabla \mathbf{u}_0^\epsilon + \nabla p_0^\epsilon = f, & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_0^\epsilon = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}_0^\epsilon = 0 & \text{sur le bord des obstacles } \delta S_\epsilon. \end{cases}$$

Les lois (3.3.19) et (3.3.20) font appel à un tenseur de perméabilité, \mathbf{K} , défini localement dans le domaine et qui dépend de la porosité dans chaque direction. Ce tenseur caractérise le milieu poreux et traduit au niveau macroscopique les effets microscopiques. La technique d'homogénéisation présente l'avantage de pouvoir donner, dans certaines configurations pour les obstacles, une expression explicite de ce tenseur en déduisant rigoureusement les lois données ci-dessus. Traditionnellement ce tenseur était donné par l'expérimentation pour chaque type de milieu poreux.

Rappelons que les mêmes lois peuvent se déduire pour un problème de Navier-Stokes, le terme non linéaire ne posant pas de difficulté. Le tenseur \mathbf{K} reste le même pour les problèmes de Stokes et Navier-Stokes en dimension 2 et 3.

Le point délicat est la déduction de telles lois par homogénéisation dans le cadre de la modélisation de l'écoulement autour d'un filet. Ceci reste un problème ouvert [AM05]. Le fait est que le filet se présente sous forme d'une membrane poreuse dans un espace 3D. Pourtant, comme il sera expliqué par la suite, il s'est avéré pertinent de modéliser un tel écoulement par les équations de Navier-Stokes/Brinkman. Son implémentation s'en est par ailleurs trouvée simplifiée à l'aide de techniques dites de frontières immergées comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant.

Méthodes de frontières immergées. Historiquement les méthodes de frontières immergées viennent des travaux de Peskin [Pes72] en 1972 pour simuler l'écoulement sanguin dans le coeur. Ces méthodes introduisent l'idée d'un maillage qui ne repose pas sur la géométrie de la structure étudiée. Ainsi les frontières physiques des obstacles coupent le maillage. Cependant il n'est pas évident de savoir comment imposer les conditions aux limites sur les obstacles, ni même de pouvoir raffiner le maillage au niveau de leurs frontières. En revanche, le processus de maillage est grandement simplifié. De plus l'intérêt de ces méthodes est clair pour traiter des écoulements à frontières en mouvement.

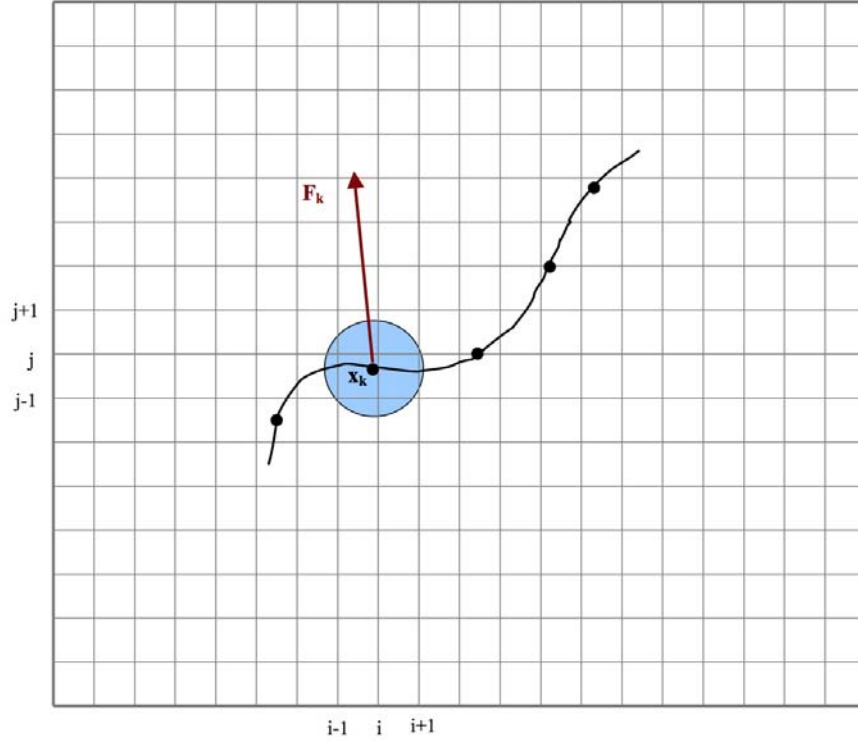
Depuis Peskin, plusieurs variantes ont été développées [MI05]. Elles diffèrent par la prise en compte des obstacles dans leur formulation. Deux familles de méthodes se distinguent. La première famille inclue les méthodes qui reproduisent l'effet de la frontière des obstacles en ajoutant un terme source continûment dans les équations qui gouvernent l'écoulement. La deuxième famille de méthode regroupe les techniques pour lesquelles le terme de forçage, qui permet de prendre en compte les frontières, est introduit après discrétisation des équations. L'avantage de la première famille de méthode est que la formulation du problème est indépendante de la discrétisation. Au vu de notre travail, nous ne décrirons ici que la première famille de méthodes.

La méthode originale de Peskin [Pes72] a été développée pour simuler le couplage entre l'écoulement sanguin et la contraction musculaire dans le coeur. L'écoulement est gouverné par les équations de Navier-Stokes incompressibles. Elles sont résolues sur une grille cartésienne stationnaire. Les frontières immergées sont les fibres musculaires. Ces fibres sont traitées de façon Lagrangienne et sont maillées elles aussi de façon à les localiser

3.3. HYPOTHÈSE D'UN FLUIDE VISQUEUX

(voir figure 3.11). Les noeuds de ce maillage se déplacent à la vitesse locale du fluide. Soit \mathbf{x}_k le $k^{\text{ième}}$ point de la frontière d'une fibre, il vient :

Figure 3.11: Exemple de fibres intersectant le maillage cartésien



$$(3.3.22) \quad \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial t} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_k, t),$$

où $\mathbf{u}(\mathbf{x}_k, t)$ est la vitesse locale du fluide au point \mathbf{x}_k .

L'effet de la frontière immergée sur le fluide environnant est obtenu par un forçage local, noté $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, au second membre dans les équations du moment, avec $\mathbf{x} = (x, y)$:

$$(3.3.23) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \sum_k \mathbf{F}_k(t) I_h(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|),$$

et $\mathbf{F}_k(t)$ est la densité de force au noeud \mathbf{x}_k , au temps t . Si on suppose la fibre élastique, la contrainte et la déformation des fibres sont reliées par une loi constitutive telle que la loi de Hooke (voir Chapitre 1). Comme la position des points sur la fibre ne coïncide pas nécessairement avec les noeuds du maillage cartésien, la force $\mathbf{F}_k(t)$ au point \mathbf{x}_k est distribuée sur les noeuds du maillage cartésien par l'intermédiaire de la fonction I_h , dont une expression possible est donnée dans [LP00] :

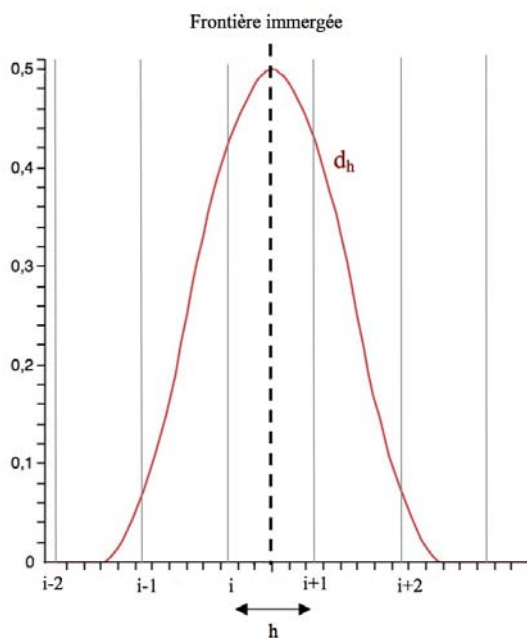
$$(3.3.24) \quad I_h(\mathbf{x}) = d_h(x) d_h(y),$$

et

$$(3.3.25) \quad d_h(r) = \begin{cases} \frac{1}{8h} \left(3 - 2\frac{|r|}{h} + \sqrt{\left(1 + 4\frac{|r|}{h} - 4\left(\frac{|r|}{h}\right)^2 \right)} \right), & |r| \leq h, \\ \frac{1}{8h} \left(5 - 2\frac{|r|}{h} + \sqrt{\left(-7 + 12\frac{|r|}{h} - 4\left(\frac{|r|}{h}\right)^2 \right)} \right), & h \leq |r| \leq 2h, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où h est le pas du maillage, pris ici constant et égal dans les deux directions x et y . La figure 3.12 donne l'allure de cette fonction.

Figure 3.12: Fonction de distribution d_h



D'autres choix pour cette fonction sont possibles, [Pes72], [BL92], [SB03]. Ces méthodes ont donné des résultats satisfaisants pour résoudre des problèmes variés, tels que l'écoulement sanguin dans le coeur [Pes72], l'écoulement autour de filaments flexibles [ZP03], ...

Une autre méthode dans cette famille a été développée par Angot et al. [ABF99] et Khadra et al. [KAPC00] et c'est elle qui nous intéresse particulièrement. Cette technique permet également de construire un maillage de tout le domaine, sans se préoccuper de la frontière des obstacles. L'originalité de cette méthode repose sur l'idée que le fluide est vu comme un milieu solide de perméabilité infinie. Les équations de bases sont les équations de Navier-Stokes incompressibles, auxquelles est ajouté un terme de pénalisation de la vitesse de la forme $\frac{\nu}{\mathbf{K}}\mathbf{u}$. Le paramètre \mathbf{K} est caractéristique de la perméabilité du milieu considéré.

L'ajout de ce terme de pénalisation conduit aux équations de Navier-Stokes/Brinkman, déjà rencontrées lors de la partie sur l'homogénéisation.

Une justification théorique de ce modèle comme modèle équivalent au modèle d'écoulement autour d'obstacles poreux et solides est donnée dans [ABF99], et plus récemment dans [CF03]. Comme nous le verrons dans la deuxième partie de ce mémoire, c'est cette technique que nous avons choisie pour modéliser l'écoulement autour de la poche d'un chalut. Une difficulté subsiste malgré tout, il s'agit de la détermination du tenseur de perméabilité \mathbf{K} dans l'obstacle poreux qu'est le filet. En effet l'homogénéisation d'un tel problème étant un problème ouvert, nous ne disposons pas d'expression pour ce tenseur de perméabilité dans le filet.

En pratique, dans le domaine occupé par le fluide, \mathbf{K} aura une valeur très grande (de l'ordre de 10^5). Le terme de pénalisation ne sera en effet présent que dans les parties poreuses et solides. Dans les parties poreuses, \mathbf{K} prendra une valeur caractéristique de la perméabilité de ces domaines (à déterminer en fonction de caractéristiques physiques du milieu considéré - des exemples de fonctions sont données au Chapitre 6). Dans les obstacles solides, sa valeur sera proche de zéro (de l'ordre de 10^{-5}), forçant ainsi la condition aux limites de Dirichlet homogène usuellement imposée aux frontières des obstacles solides.

Cette technique possède le gros avantage qu'elle prend en compte intrinsèquement dans sa formulation les conditions aux limites aux frontières des obstacles, souvent difficiles à imposer. La génération du maillage est également grandement simplifiée. Elle présente aussi tout son intérêt lorsqu'il s'agit de traiter des écoulements avec des frontières en mouvement puisque seul le paramètre de perméabilité doit être mis à jour.

Elle a été utilisée pour simuler l'écoulement autour d'un cylindre circulaire pour des nombres de Reynolds de 200, 400 et 1000, [KAPC00]. Pour le cas du nombre de Reynolds égal à 1000, l'écoulement obtenu numériquement est qualitativement satisfaisant, mais le coefficient de traînée est légèrement surestimé comparé aux valeurs de référence données par l'expérimentation. En fait, plus de noeuds seraient requis proche de la frontière du cylindre pour obtenir de meilleurs résultats.

En contraste avec cette approche, citons la technique mise au point par Glowinski et al. [GPP94] qui consiste à considérer les solides comme des parties fluides soumises à une contrainte de rigidité. La résolution du problème fluide s'effectue dans le domaine entier, y compris dans les solides. L'imposition des conditions aux bords des obstacles à l'aide des multiplicateurs de Lagrange est réalisée par la formulation du problème comme un problème de point selle.

4 Vers un couplage fluide/filet/poissons

Comme le montre cette première partie, beaucoup de travail a déjà été réalisé pour simuler le filet d'une part, les poissons d'autre part et de premiers essais de couplage filet/poissons sont en cours.

Une étape indispensable restant à réaliser pour envisager un code de couplage du processus de capture est l'élaboration d'un modèle fluide, applicable en 3D. C'est donc essentiellement sur ce point que porte notre contribution.

Le modèle fluide proposé par Vincent [Vin96] pour traiter l'écoulement autour d'une membrane poreuse axisymétrique, bien que non applicable tel quel en 3D présente l'intérêt de proposer une approche intéressante du filet, vu comme une membrane poreuse. Cette approche possède l'avantage de s'affranchir des noeuds et des fils du filet, dont on sait à présent que tout maillage autour d'une telle géométrie serait impossible. En revanche, il

n'est toujours pas aisé de mailler autour d'une membrane, et d'autant plus si on souhaite la faire bouger ce qui nécessiterait un remaillage coûteux...

En fin de ce chapitre, nous avons exposé un moyen d'intégrer une telle membrane poreuse 3D au sein d'un code fluide 3D. En effet, la technique de frontières immergées proposées par Angot et al. [ABF99] et Khadra et al. [KAPC00] semble très pertinente pour notre problème.

Elle nous permet de conserver la modélisation du filet par une membrane poreuse et de l'intégrer comme un obstacle poreux dans les équations fluides. Les poissons seront quant à eux intégrés de la même façon en tant qu'obstacles solides. Cela nous permet de plus de travailler avec les équations de Navier-Stokes/Brinkman issues de l'homogénéisation.

L'avantage non négligeable de cette méthode est que le processus de maillage est peu coûteux, seul un maillage raffiné proche des frontières des obstacles peut être requis de façon à bien repérer leurs frontières. Le mouvement du filet et des poissons n'est plus un problème, car seul le paramètre de perméabilité \mathbf{K} devra être mis à jour au cours des itérations, en utilisant la connaissance de la position du filet et des poissons obtenue avec un code filet/poissons couplé.

Comme nous le verrons dans la suite, nous proposons des exemples de lois pour le paramètre de perméabilité \mathbf{K} dans le filet, qui n'étaient pas connues *a priori* en l'absence d'application (du fait de sa difficulté) du processus d'homogénéisation à notre problème.

Nous proposons également de prendre en compte le caractère turbulent de l'écoulement, avéré par l'expérimentation (voir Chapitre 4), par l'intermédiaire d'un modèle de type RANS à une équation pour l'énergie cinétique turbulente.

Dans la partie suivante, nous proposons de vous présenter cette démarche et sa mise en oeuvre.

Partie II

Vers une modélisation du fluide plus réaliste

Orientations

On se propose d'établir un modèle fluide adapté qui pourra être utilisé pour réaliser le couplage avec les codes existants régissant le comportement du filet et des poissons. Afin de mieux comprendre l'écoulement au niveau de la poche, nous avons entrepris, en collaboration avec l'équipe de l'Ifremer de Boulogne-sur-Mer, des campagnes expérimentales en bassin d'essais que nous vous présenterons dans un premier chapitre. Puis nous exposons notre modèle fluide ainsi que son analyse mathématique en dimension 2. Enfin nous mettrons en oeuvre ce modèle au sein du code de calcul SeaNet réalisé sous FreeFem++ et nous comparerons les résultats des simulations avec les données expérimentales. Ce dernier chapitre permettra de caler les paramètres du modèle. Il mettra également en évidence les capacités de notre modèle à reproduire l'écoulement autour d'une poche de chalut, ainsi que ses limites. Enfin, cela nous conduira à exposer les perspectives ouvertes à l'issue de ce travail. Cette partie constitue l'essentiel de l'apport original de ce travail de thèse.

Chapitre 4

Etude expérimentale

En raison du coût important des mesures en mer, il apparaît nécessaire de travailler à échelle réduite. Cela offre aussi l'avantage de bien maîtriser les paramètres de l'expérience alors que, dans le milieu naturel, beaucoup de facteurs peuvent venir perturber les mesures (comme la météorologie par exemple).

Dans ce chapitre, nous présentons les campagnes expérimentales menées pendant trois semaines réparties en novembre 2004, mars 2005 et septembre 2006 au bassin d'essais IFREMER de Boulogne-sur-Mer (France). Nous décrivons en premier lieu le bassin d'essais et ses moyens de mesures hydrodynamiques. Puis, nous donnons les caractéristiques de la maquette de poche de chalut construite par l'équipe Ifremer de Boulogne-sur-Mer et autour de laquelle portent les mesures. Enfin nous présentons et analysons les résultats collectés autour de cette maquette dans deux configurations différentes : l'une avec l'entrée de la poche ouverte et l'autre avec l'entrée de la poche fermée. Avant de conclure, nous donnerons quelques remarques concernant les mesures et leur lien avec l'écoulement.

Présentons l'équipement utilisé lors des différentes campagnes expérimentales.

1 L'équipement

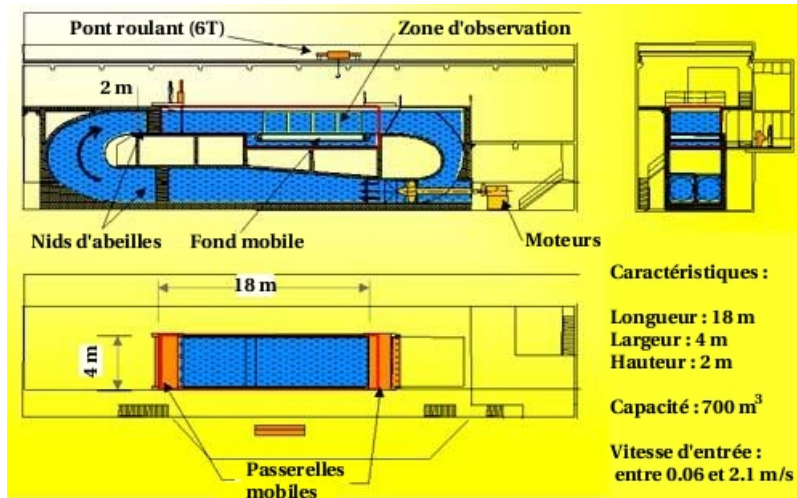
1.1 Le bassin d'essais

Les campagnes expérimentales décrites ici ont toutes été conduites au bassin d'essais de l'IFREMER de Boulogne-sur-Mer (France). Il s'agit d'un bassin à recirculation d'eau et à surface libre. Il mesure 18 m de long, 4 m de large et 2 m de profondeur. La fenêtre d'observation est de 8 m x 2 m. La turbulence naturelle du bassin est inférieure à 5 %. Il permet d'effectuer des mesures pour des écoulements allant de 0.2 à 2 m.s⁻¹. Des turbines permettent de mettre l'eau en mouvement et des grilles (nids d'abeille) de "redresser" l'écoulement (Figure 4.1).

1.2 Les moyens de mesures

Deux techniques de mesures de vitesse sont disponibles au bassin d'essais de Boulogne-sur-mer : une vélocimétrie laser Doppler à deux composantes (LDV - Laser Doppler Velocimetry) et une vélocimétrie par images de particules à deux composantes (PIV - Particle Image Velocimetry).

Figure 4.1: Bassin de circulation de l'IFREMER - Boulogne-sur-Mer



a/ Description de la méthode PIV

La PIV est une méthode optique non intrusive permettant d'obtenir une image du champ de vitesse dans un plan de l'écoulement étudié.

A Boulogne-sur-Mer, l'enregistrement des images PIV repose sur l'encerclement du bassin par des particules de billes de verre d'un diamètre moyen de $15 \mu\text{m}$. Un laser, placé au dessus de la maquette, émet deux impulsions lumineuses décalées d'un temps très court, Δt pris égal à 3 ms . Une caméra CCD 1280×1024 pixels et munie d'un objectif de 60 mm , prend deux photos synchronisées avec les impulsions du laser (voir figure 4.2). Plusieurs séries de "double-images" sont ainsi enregistrées. Le temps séparant deux double-images est fixé à $t = 250 \text{ ms}$ car la fréquence maximal de la caméra est seulement de 4 Hz contre 15 Hz pour le laser.

Le post-traitement des images (dont la taille est $270 \text{ mm} \times 216.7 \text{ mm}$, $1 \text{ pixel} = 0,212 \text{ mm}$) est effectué par intercorrélation d'images à l'aide du logiciel *Flow Manager de Dantec Dynamics*. Les deux images obtenues sont découpées en petites cellules, typiquement 32×32 pixels, appelées zones d'interrogation. Une zone de recouvrement peut aussi être définie (de 25% dans notre cas) afin de traiter les particules qui sortent de la zone d'interrogation étudiée. Et dans chacune de ces zones, on va chercher les positions des particules et ainsi en déduire leur déplacement moyen $\delta \mathbf{z}$. Cela permet de calculer la vitesse locale de l'écoulement par la relation :

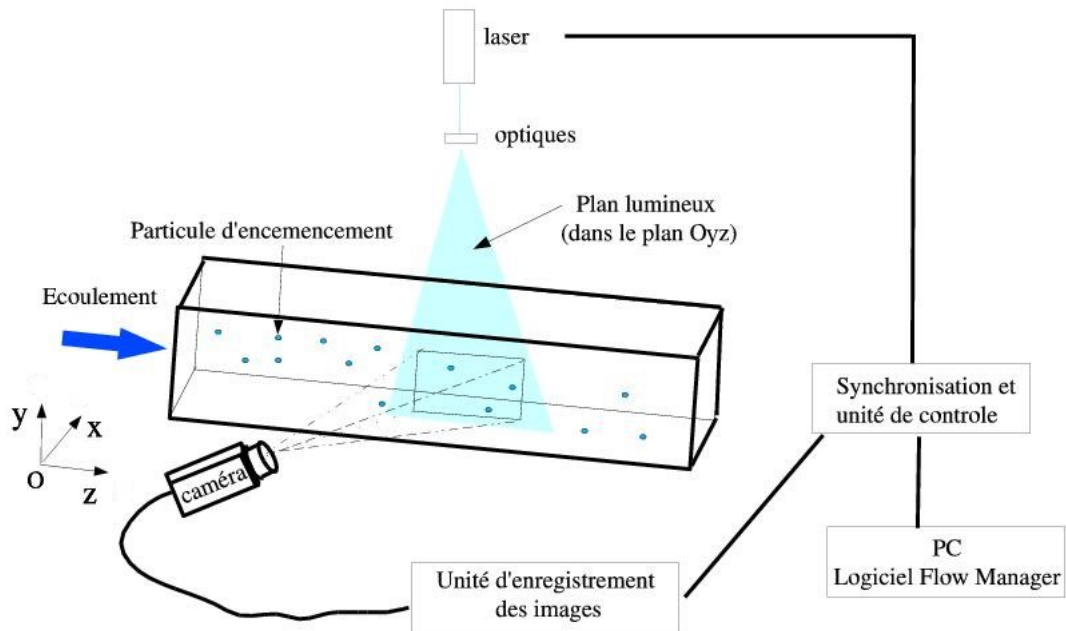
$$(4.1.1) \quad \mathbf{u} = S \frac{\delta \mathbf{z}}{\Delta t},$$

où S est le facteur d'échelle de l'image et \mathbf{u} le vecteur vitesse dans le plan du faisceau (u_y, u_z) .

A noter que la technique PIV ne donne des informations que sur les composantes de la vitesse dans le plan du laser, soit u_y et u_z dans notre cas. De plus, un écoulement complexe 3D est plus délicat à capter par cette technique dans la mesure où les particules n'évoluent pas forcément dans le plan du laser.

4.1. L'ÉQUIPEMENT

Figure 4.2: Principe de la technique PIV - Mesure des composantes (u_y, u_z) de la vitesse



Résumons les caractéristiques de la technique PIV :

Caractéristiques de la technique PIV :

- Diamètre des particules d'ensemencement : $15 \mu\text{m}$,
- Laser : un laser à deux chambres Gemini PIV Nid-Yag 2 x 120 mJ à 15 Hz,
- Caméra : Hi-sense, $1280 \times 1024 \text{ pixels}^2$, longueur focale de la lentille 60 mm avec un filtre de 3 nm de longueur d'onde,
- Plan de mesure : $260 \times 220 \text{ mm}^2$
- Logiciel : Flow Map 1500 (Dantec dynamics),
- Traitement de l'image : par intercorrélation d'images sur des régions de $32 \times 32 \text{ pixels}^2$, avec un taux de recouvrement de 25 %.

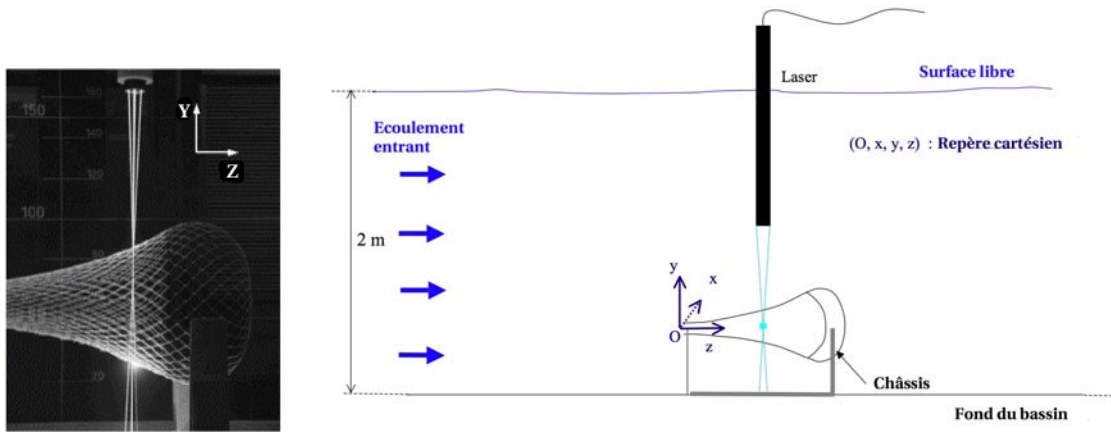
b/ Description de la technique LDV

La technique LDV est également non intrusive. Elle consiste à se placer en un point de l'écoulement et à éclairer cette zone à l'aide de deux faisceaux laser de même longueur d'onde (ils proviennent généralement de la même source), focalisés en ce point à l'aide d'une lentille (Fig. 4.3).

Le volume de mesure est formé de franges d'interférence. Dès qu'une particule (ici une bille de verre d'un diamètre de $15 \mu\text{m}$) traverse ce volume, elle émet une lumière de fréquence égale à $\frac{1}{d}$ fois la composante de vitesse perpendiculaire aux franges d'interférences, où d est la distance (connue) entre deux franges.

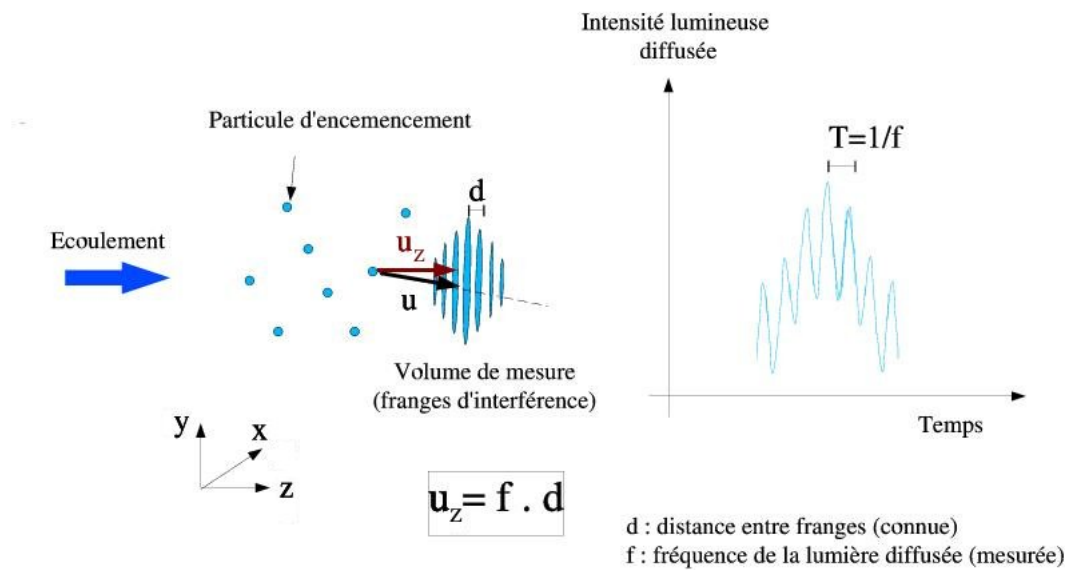
Par exemple, pour calculer la composante u_z de la vitesse, on mesure la fréquence f de la lumière diffusée et on obtient (voir figure 4.4) :

Figure 4.3: Principe de la technique LDV



$$(4.1.2) \quad u_z = f d,$$

Figure 4.4: Principe de la technique LDV [MSPM06] - Mesure de la composante u_z de la vitesse (volume de mesure dans le plan (O, x, y))



Pour obtenir une autre composante de la vitesse, un autre faisceau de longueur d'onde différente doit être utilisé, de même qu'un troisième de longueur d'onde différente

des précédentes pour mesurer la troisième composante. Au bassin d'essais, une même source laser est décomposée en deux pour donner deux longueurs d'ondes ce qui nous a permis de mesurer les composantes de la vitesse dans la direction x et dans la direction z .

Notons qu'à la différence de la PIV, le temps séparant deux mesures successives n'est pas fixe, il dépend en effet du passage des particules dans le plan lumineux.

Résumons les caractéristiques de la technique PIV :

Caractéristiques de la technique LDV :

- Diamètre des particules d'ensemencement : $15 \mu\text{m}$,
- La même source laser est décomposée en deux pour donner deux longueurs d'onde et ainsi mesurer deux composantes de la vitesse
- Longueur d'onde du laser mesurant la vitesse dans la direction z : 514.5 nm et dans la direction x : 488 nm ,
- Volume de mesure : 2.5 mm dans la direction z et 0.1 dans la direction x ,
- Lentille convergente de distance focale 400 mm dans l'air.

2 Une maquette de poche de chalut rigide

Pour comprendre l'écoulement au niveau de la poche du chalut, il a été convenu de travailler à échelle réduite dans la mesure où les données obtenues en mer sont difficiles à collecter, à exploiter et également très coûteuses.

Afin de respecter les conditions d'un écoulement réel, il est important de respecter certains critères d'échelles. Pour cela, il faut recourir à la théorie de la similitude. Nous allons la décrire plus particulièrement dans le cas des équations de Navier-Stokes incompressibles. Cela nous conduira à donner les paramètres de la maquette et à fixer la vitesse d'entrée.

2.1 Rappels sur la théorie de la similitude

Les lois de similitude permettent de rendre identiques, dans la mesure du possible, les conditions réelles et celles à échelle réduite. La théorie de la similitude a recours à l'usage de nombres sans dimension. Comme nous l'avons vu au Chapitre 3, une description réaliste de l'écoulement autour de la poche de chalut conduit à supposer qu'il est gouverné par les équations de Navier-Stokes incompressibles. Leur adimensionnalisation introduit quatre nombres sans dimension : le nombre de Reynolds, le nombre de Froude, le nombre d'Euler et le nombre de Strouhal.

Les équations de Navier-Stokes adimensionnalisées sont obtenues en posant :

$$(4.2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} = L \mathbf{x}^*; \\ \mathbf{u} = U \mathbf{u}^*; \\ p = P p^*; \\ t = T t^*; \\ \mathbf{g} = g_0 \mathbf{g}^*; \end{array} \right.$$

où L est la longueur de référence (en m), U la vitesse de référence, P la pression de référence, T le temps de référence, et $g_0=9.81 \text{ m.s}^{-2}$ l'accélération de la pesanteur ($\mathbf{g}^* = -\mathbf{e}_k$ si \mathbf{e}_k est le vecteur unitaire de l'axe dans la direction verticale).

Les quantités avec une astérisque représentent les quantités adimensionalisées.

Les opérateurs se réécrivent :

$$(4.2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla = \frac{1}{L} \nabla^*; \\ \nabla \cdot = \frac{1}{L} \nabla \cdot^*; \\ \Delta = \frac{1}{L^2} \Delta^*; \end{array} \right.$$

D'où les équations de Navier-Stokes incompressibles adimensionalisées :

$$(4.2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} St \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \nabla \mathbf{u}^* + Eu \nabla p^* - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}^* = \frac{1}{Fr} \mathbf{g}^*, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{array} \right.$$

avec les nombres sans dimension suivant :

$$(4.2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} St = \frac{L}{UT} \text{ le nombre de Strouhal;} \\ Eu = \frac{P}{\rho U^2} \text{ le nombre d'Euler;} \\ Re = \frac{UL}{\nu} \text{ le nombre de Reynolds;} \\ Fr = \frac{U^2}{g_0 L}; \text{ le nombre de Froude;} \end{array} \right.$$

où ν est la viscosité cinématique du fluide et ρ sa masse volumique (pour l'eau douce, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ et $\nu = 1.141\text{e-}6 \text{ m}^2/\text{s}$).

On choisit T tel que :

$$(4.2.5) \quad UT = L$$

et P comme la pression dynamique :

$$(4.2.6) \quad P = U^2 \rho$$

ce qui conduit à $St = 1$ et $Eu = 1$.

L'équation (5.1.1) devient :

$$(4.2.7) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \nabla \mathbf{u}^* + \nabla p^* - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}^* & = \frac{1}{Fr} g^*, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^* & = 0, \end{cases}$$

La première équation est l'équation de bilan de quantité de mouvement. Les deux premiers termes $\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \nabla \mathbf{u}^*$ forment la dérivée particulaire du champ de vitesse. Le terme non-linéaire, $\mathbf{u}^* \nabla \mathbf{u}^*$, est appelé terme d'advection. Le terme ∇p^* donne les forces de pression. Le terme $\frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}^*$ est le terme de diffusion qui traduit les effets visqueux du fluide sur l'écoulement. Le terme dans le membre de droite provient des forces de volumes qui s'exercent sur le fluide, ici ce sont les forces de gravité.

La deuxième équation est l'équation de continuité, traduisant ici l'incompressibilité du fluide.

La similitude de la maquette avec le modèle réel est garantie par l'égalité entre les deux échelles de tous les paramètres sans dimension obtenus lors de l'analyse dimensionnelle.

Dans notre cas, il faudrait avoir simultanément l'égalité des nombres de Froude et de Reynolds en mer et en bassin d'essai.

Soit le nombre de Froude à échelle réduite (en bassin d'essai par exemple) défini par :

$$(4.2.8) \quad Fr_{\text{réduit}} = \frac{U_b^2}{L_b g}$$

où $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur, U_b est la vitesse de référence de l'écoulement dans le bassin, et L_b la longueur de référence dans le bassin.

Soit le nombre de Reynolds à échelle réduite :

$$(4.2.9) \quad Re_{\text{réduit}} = \frac{U_b L_b}{\nu_b}$$

Soit le nombre de Froude dans le modèle réel défini de la même manière par :

$$(4.2.10) \quad Fr_{\text{réel}} = \frac{U_m^2}{L_m g},$$

où U_m est la vitesse de référence de l'écoulement réel, L_m la longueur de référence ;

Soit le nombre de Reynolds réel :

$$(4.2.11) \quad Re_{\text{réel}} = \frac{U_m L_m}{\nu_m}.$$

On voudrait que :

$$(4.2.12) \quad \frac{U_m^2}{L_m} = \frac{U_b^2}{L_b},$$

et simultanément que :

$$(4.2.13) \quad \frac{U_m L_m}{\nu_m} = \frac{U_b L_b}{\nu_b}.$$

La plupart du temps, on utilise le même fluide pour le modèle que dans la réalité à savoir, on prend $\nu_m = \nu_b$. Ceci implique que $L_b = L_m$, et donc que le modèle réduit aurait la même longueur caractéristique que le modèle réel... On constate donc que l'on ne peut pas satisfaire à la fois la similitude de Froude et celle de Reynolds. La similitude de Froude exprime le rapport entre les forces d'inertie et les forces de pesanteur et la similitude de Reynolds le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité. Dans la pratique, c'est la similitude la plus importante qu'il faut respecter.

Concernant l'écoulement étudié au bassin d'essai de Boulogne-sur-Mer, une similitude de Froude sera réalisée pour des raisons de faisabilité technique. En effet, réaliser une similitude de Reynolds conduirait à une valeur de vitesse trop importante, supérieure à la limite des vitesses applicable dans le bassin qui est de 2.1 m.s^{-1} .

2.2 Géométrie

La géométrie d'une maquette de poche de chalut a été obtenue suite à une campagne préliminaire menée en février 2004. Celle-ci avait pour objectif d'estimer la forme de la prise et les efforts de tension au niveau de la poche de chalut. Quelques maquettes de poches de chalut à l'échelle 1/3 ont été construites (pour différents types de fils et différents volumes de prise). Pour obtenir des images de la déformation de la poche, des poissons, modélisés par des poches d'eau, ont été envoyés dans chaque poche. Le profil du filet obtenu ainsi que la géométrie de la prise ont été relevés pour chaque cas, conduisant à des structures quasiment axisymétriques. L'écoulement n'a pas pu être mesuré lors de cette première phase étant donné les instabilités observées. Ainsi il a été décidé de réaliser une structure de poche de chalut plus petite (à l'échelle 1/6), rigide et axisymétrique à partir des mesures de formes collectés [GFP05]. La maquette obtenue mesure ainsi 1 m de long et la prise est modélisée par une masse rigide de 30 kg, ce qui correspond à une prise en mer de 6480 kg.

Le profil de la prise et celui du filet sont donnés par les coordonnées des tableaux 4.1 et 4.2 respectivement. Ces profils sont dessinés sur la figure 4.5. A noter que la forme interne de la prise est une partie d'ellipsoïde.

Tableau 4.1: Coordonnées du profil délimitant la prise.

z [m]	1.016	1.007	0.997	0.97	0.932	0.887	0.839	0.793	0.782	0.822
y [m]	0	0.064	0.122	0.172	0.207	0.225	0.227	0.215	0.204	0.175

z [m]	0.854	0.878	0.892	0.897	0.897
y [m]	0.143	0.107	0.069	0.027	0

4.2. UNE MAQUETTE DE POCHE DE CHALUT RIGIDE

Tableau 4.2: Coordonnées du profil de filet.

z [m]	0.747	0.696	0.647	0.596	0.543	0.487	0.431	0.374	0.313
y [m]	0.196	0.176	0.154	0.131	0.112	0.097	0.086	0.075	0.065

z [m]	0.254	0.191	0.13	0.068	0.06	0
y [m]	0.058	0.05	0.042	0.033	0.033	0.033

Les caractéristiques de cette maquette sont les suivantes :

Caractéristiques de la maquette :

- Longueur : 1 m
- Forme des mailles : losanges,
- Côté de mailles : ≈ 30 mm,
- Masse de la prise : 30 kg,
- Diamètre extérieur de la prise : 454 mm,
- Fils : PA (Polyamide) (1200 m/kg),
- Nombre de mailles au périmètres : 36,
- Nombre de mailles dans la longueur : 21.5.

Le fait de travailler sur une maquette rigide conduit à ne pas prendre en compte certains phénomènes comme le mouvement du filet dans l'écoulement, en revanche, cela permet de réaliser des mesures précises de vitesse. Une nappe de filet a ainsi été collée sur un moule matérialisant la prise (Fig. 4.6), puis rigidifiée à l'aide d'une résine. La maquette, fixée sur un châssis, a été déposée au fond de la veine d'essais à circulation d'eau et surface libre de l'IFREMER de Boulogne-sur-mer (figure 4.7).

L'estimation de la vitesse à imposer dans le bassin repose sur une similitude de Froude.

Le nombre de Froude (sans dimension) de la maquette, est défini par :

$$(4.2.14) \quad Fr = \frac{U_b^2}{L_b g}$$

où $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur, U_b est la vitesse de référence de l'écoulement dans le bassin, et L_b la longueur de référence de la maquette, prise égale au diamètre maximal de la prise, soit 0.45 m.

Le nombre de Froude en mer est défini de la même manière par :

$$(4.2.15) \quad Fr = \frac{U_m^2}{L_m g},$$

où U_m est la vitesse de chalutage, soit 1.25 m.s^{-1} , et L_m la longueur de référence, soit en utilisant le facteur d'échelle, $L_m = 6 L_b$. Le nombre de Froude vaut donc 0.059.

Réaliser une similitude de Froude consiste à égaliser les nombres de Froude en mer et dans le bassin, ce qui conduit à la relation :

$$(4.2.16) \quad U_b = \frac{U_m}{\sqrt{6}}.$$

Figure 4.5: Profil de la maquette de chalut

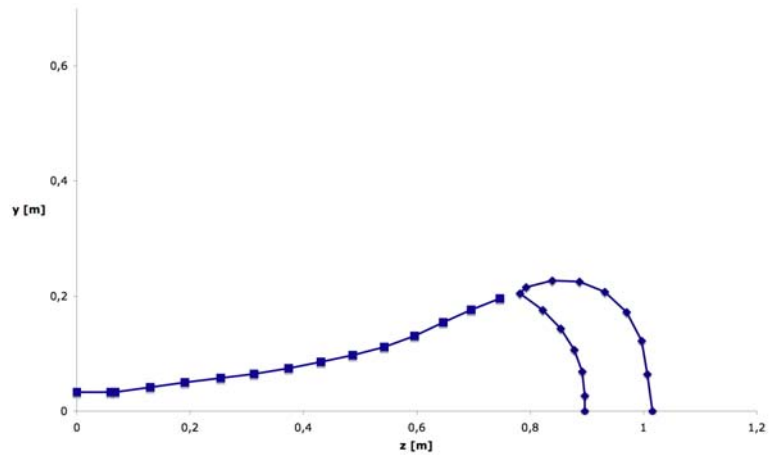


Figure 4.6: Forme de la prise collée sur l'alèse

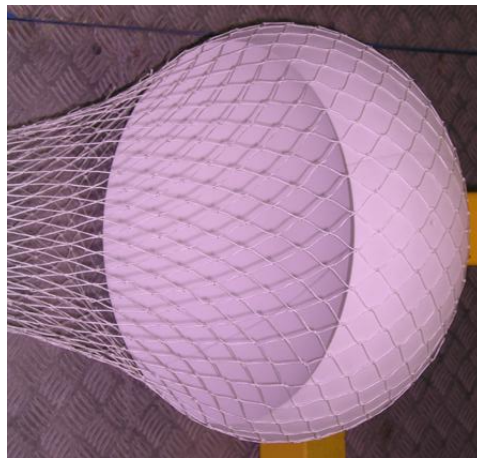
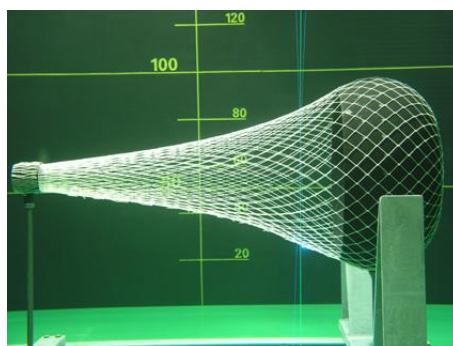


Figure 4.7: Maquette posée au fond du bassin



Or la vitesse du bateau est de 1.25 m.s^{-1} , donnant $U_b = 0.51 \text{ m.s}^{-1}$.

A noter que le choix d'une similitude de Reynolds aurait conduit à une valeur de la vitesse d'entrée du bassin six fois plus grande que celle en mer, soit 7.5 m.s^{-1} ce qui est bien en deça des limites de vitesse qu'il est possible d'imposer dans le bassin.

Le nombre de Reynolds dans le bassin vaut dès lors :

$$(4.2.17) \quad Re = \frac{U_b L_b}{\nu} = 2e5.$$

où ν est la viscosité cinématique de l'eau, qui vaut $1.141e-6 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ à $15 \text{ }^\circ\text{C}$.

Des mesures hydrodynamiques ont été réalisées autour de cette maquette pendant trois semaines étalées de novembre 2004 à septembre 2006. Nous donnons dans la section suivante les résultats de ces campagnes.

3 Résultats expérimentaux

3.1 Géométrie des deux configurations étudiées

Les données ont été collectées dans deux situations différentes. Lors de deux semaines de campagnes, en novembre 2004 et mars 2005, nous avons enregistré des images de champ de vitesse instantané à l'aide de la technique PIV autour de la maquette disposée comme sur la figure 4.7 ainsi que des profils PIV et LDV de vitesse. Lors d'une troisième semaine de campagne, en septembre 2006, nous avons complété ces mesures par des mesures ponctuelles afin d'estimer l'énergie cinétique turbulente.

Dans la réalité, l'entrée de la poche du chalut est précédé par un long cylindre de filet, la rallonge. Nous souhaitions disposer de données dans une telle configuration. Mais la construction d'une maquette de la rallonge et sa fixation sur la maquette existante de la poche de chalut auraient pris du temps et générés un surcoût. Nous avons alors opté pour un compromis en réalisant une deuxième campagne autour d'une configuration peu coûteuse à mettre en oeuvre. Elle consiste en la mise en place d'un bouchon en résine sur l'entrée de la poche (voir figure 4.22).

Cette configuration n'a pas pour vocation de prédire que la rallonge entraîne un écoulement négligeable dans la poche, cela reste à vérifier. Les mesures en mer disponibles semblent indiquer une vitesse interne dans la zone précédant la poche proche de la vitesse de chalutage et une vitesse externe ralentie proche de la paroi du filet [Vin96], [The98]. En revanche, nous allons voir que cette configuration présente un intérêt dans la mesure où l'écoulement interne est fortement ralenti par ce bouchon, créant des phénomènes difficiles à reproduire numériquement sans un modèle très élaboré de la turbulence, comme nous le verrons au chapitre 6.

Présentons les résultats obtenus pour ces deux configurations.

3.2 Résultats et analyse de la première configuration : filet ouvert

Rappelons par l'intermédiaire de la figure 4.9 la configuration du filet ouvert.

Des mesures de profils de vitesse ont été réalisés à l'aide des deux techniques de mesures.

Figure 4.8: Maquette de filet dont l'entrée est bouchée

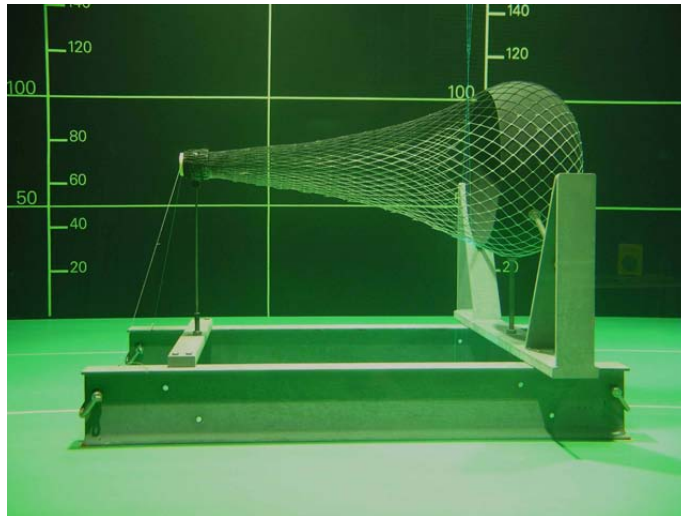
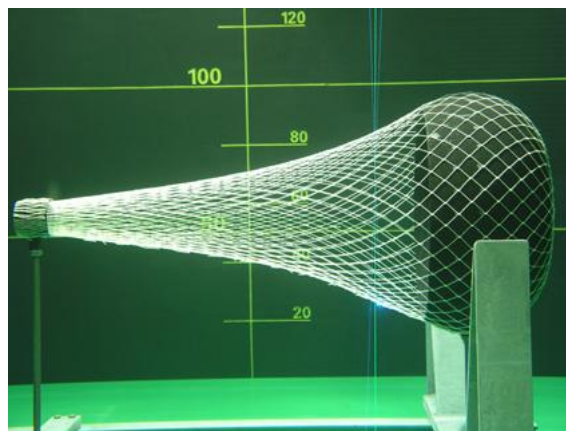


Figure 4.9: Maquette de filet dont l'entrée est ouverte



a/ Profils de vitesse LDV et PIV

La première campagne en Novembre 2004 a permis de disposer de données sur six profils (figure 4.10) en différentes positions le long de l'axe de la maquette par une technique LDV, [GFP05]. Le temps d'acquisition est choisi égal à 150 s pour chaque point, ce qui est raisonnable pour obtenir un nombre de données supérieur à 2000 pour chaque point. Les profils obtenus pour la composante selon z de la vitesse sont donnés à la figure 4.11.

Une démarche intéressante a été d'extraire pour ces mêmes positions les profils de vitesse obtenus à l'aide de la technique PIV. Le logiciel *Flow Manager* permet de moyenniser les vecteurs vitesses sur plusieurs images PIV de sorte d'obtenir l'écoulement moyen. La moyenne pour obtenir chaque profil PIV n'a été réalisée que sur 10 images. Mais ce choix était justifié au vu du temps imparti, de la fréquence d'acquisition de la caméra et de la capacité mémoire de l'ordinateur que nous avons à notre disposition. De plus, il est connu que la technique PIV est moins précise que la technique LDV. Malgré tout, elle fournit des

4.3. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Figure 4.10: Positions des profils de mesures

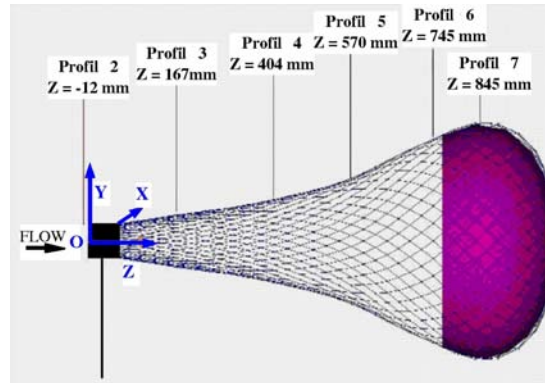
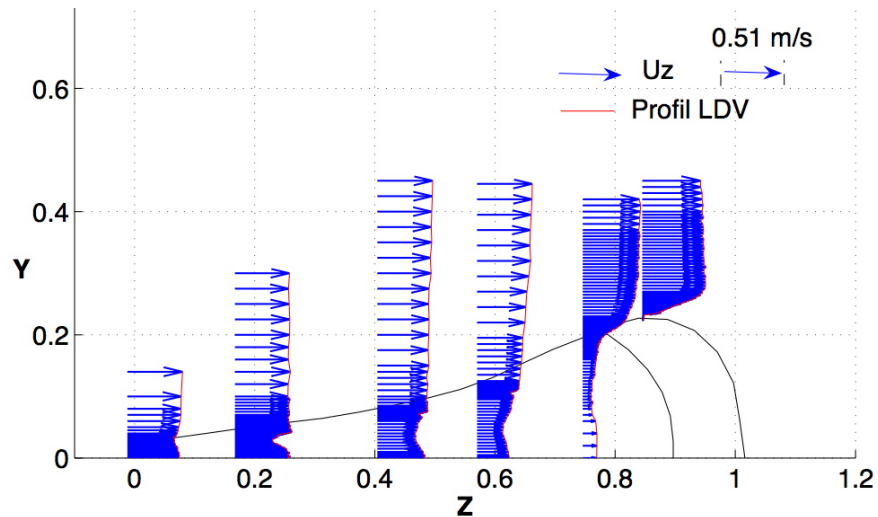
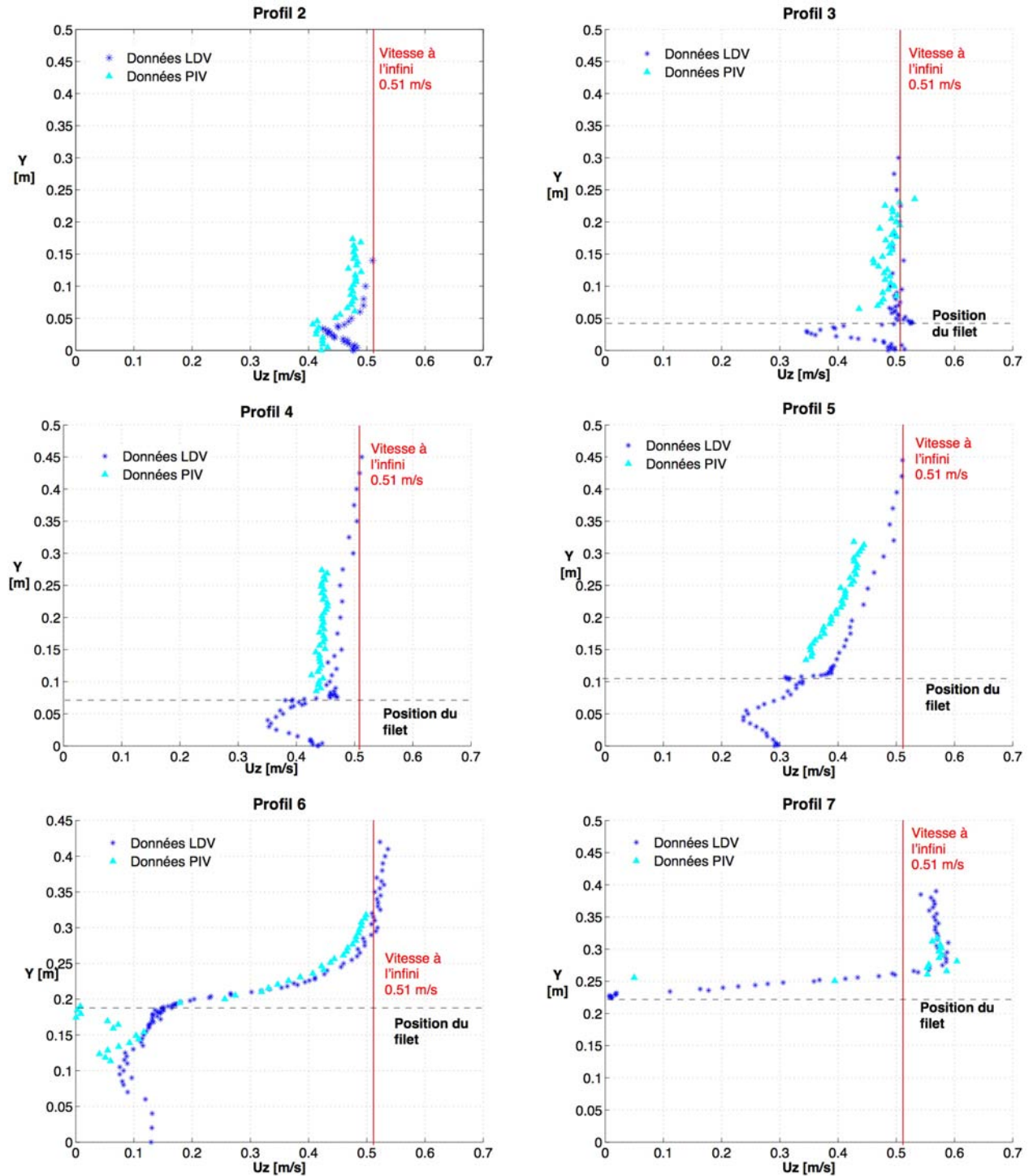


Figure 4.11: Allure de la composante u_z de la vitesse suivant les profils - Filet ouvert



résultats relativement proches de ceux obtenus avec la technique LDV comme le montre la figure 4.12. A noter un avantage de la technique LDV par rapport à la PIV est qu'elle permet de réaliser des mesures à l'intérieur du filet, en faisant passer le faisceau laser à travers les mailles.

Figure 4.12: Profils LDV et PIV - Filet ouvert



On observe un ralentissement du fluide au passage du filet, dû aux frottements du fluide sur les fils et les noeuds. La forme conique du filet conduit également à un ralentissement de l'écoulement interne au filet. A l'inverse, l'écoulement externe est accéléré. Cet écoulement externe est enrichi par l'écoulement interne juste avant la prise, obstacle imperméable que le fluide doit contourner. Une analyse plus complète est donnée par la suite par la donnée des composantes de vitesse en différents points (paragraphe 4.3.2.c).

b/ Images PIV

La technique PIV permet également d'obtenir des informations concernant les structures turbulentes de l'écoulement, dans la mesure où l'on dispose d'images de l'écoulement instantané.

Les figures 4.13 et 4.14 sont des images telles que celles obtenues avec le logiciel *Flow Manager*.

Figure 4.13: Image à l'instant t_0

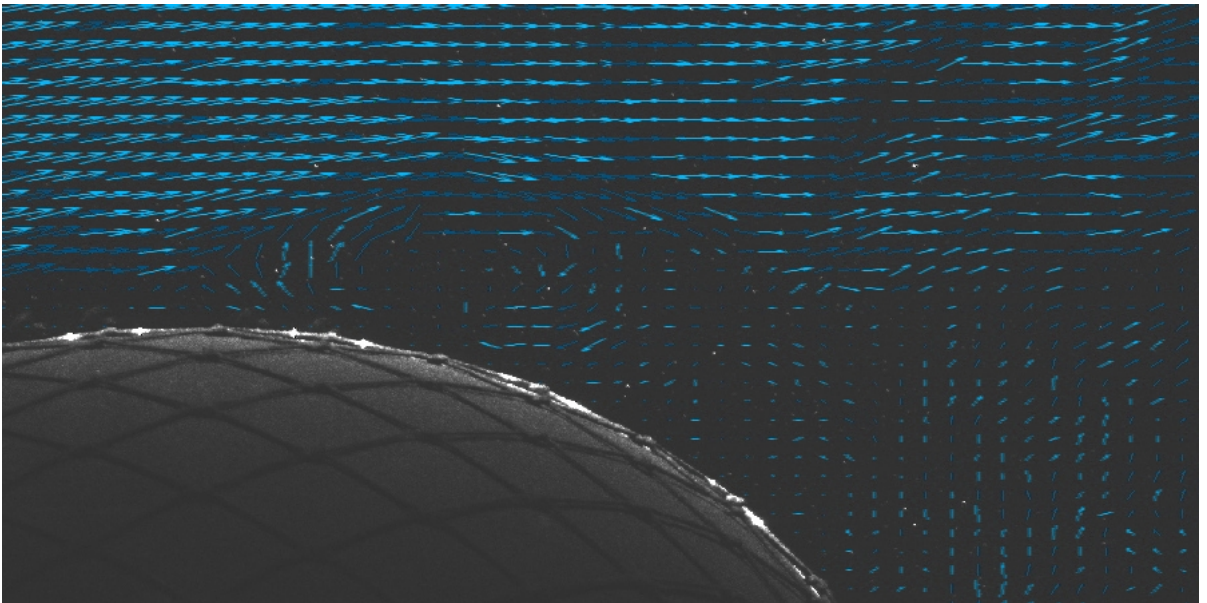


Figure 4.14: Image à l'instant $t_0 + 500ms$

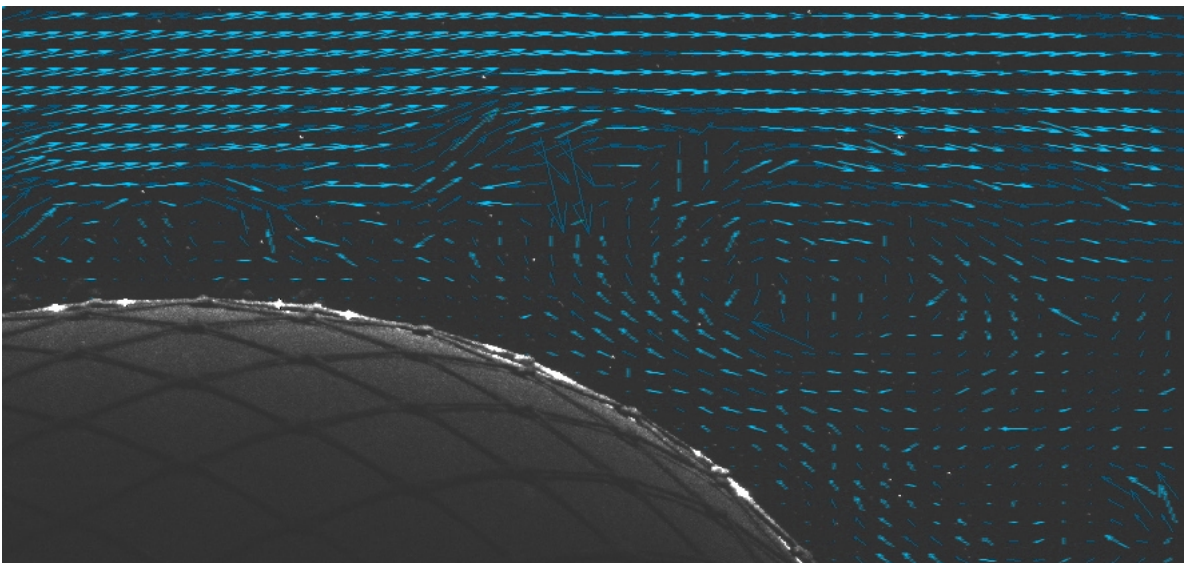
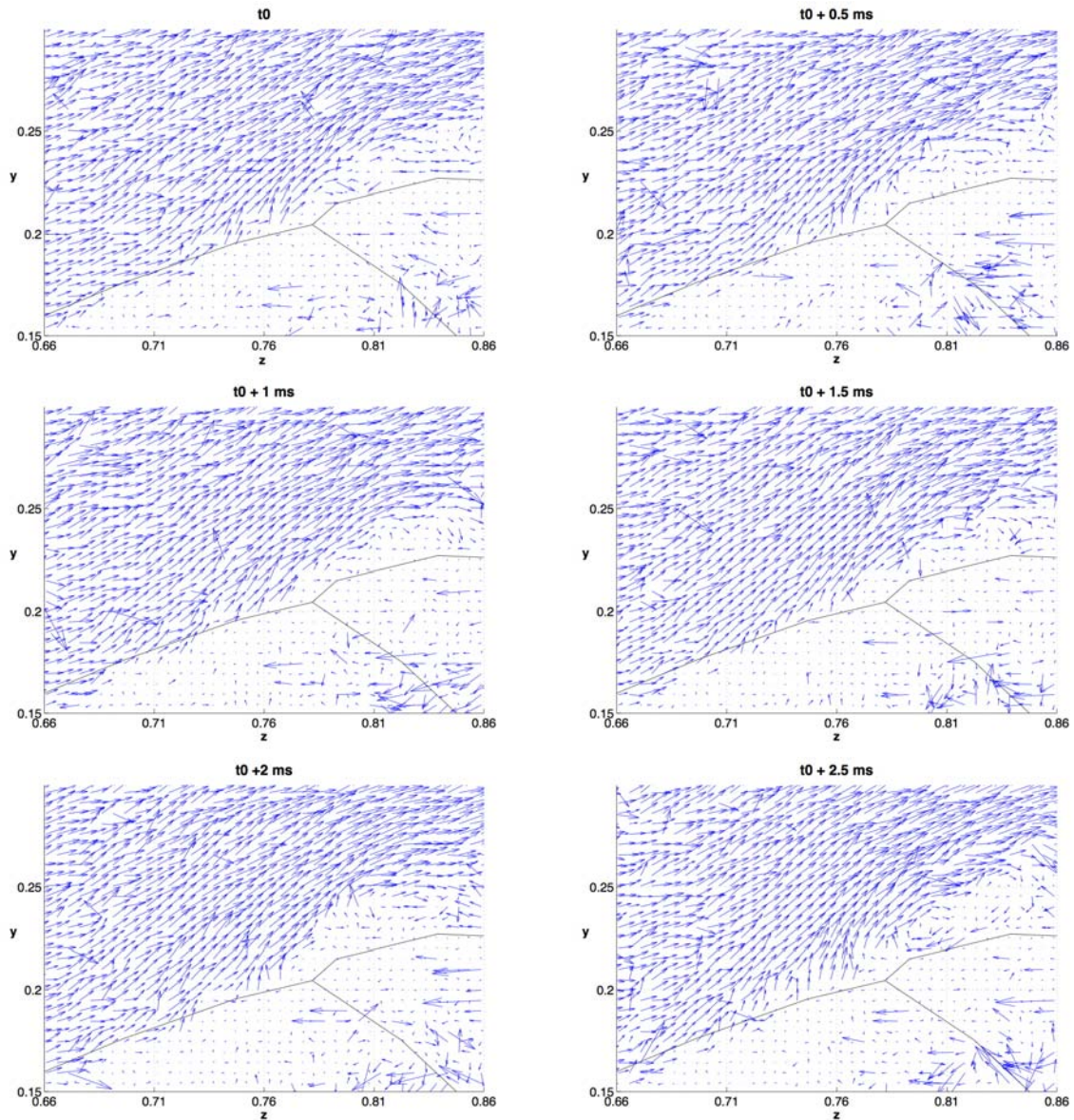


Figure 4.15: Images PIV du champ de vitesse instantané - Filet ouvert - zone d'échappement juste avant la prise



Les images 4.15 et 4.16, tracées sous *Matlab* à l'aide des fichiers textes de données, offrent la possibilité d'observer en direct la naissance, le grossissement et le mouvement dans le sens de l'écoulement de tourbillons, qui sont caractéristiques de la turbulence. Comme on pouvait le pressentir, la géométrie de l'obstacle que constitue la prise entraîne des recirculations et une zone de contournement. Ces mesures justifient l'utilisation d'un modèle de turbulence dans notre modèle.

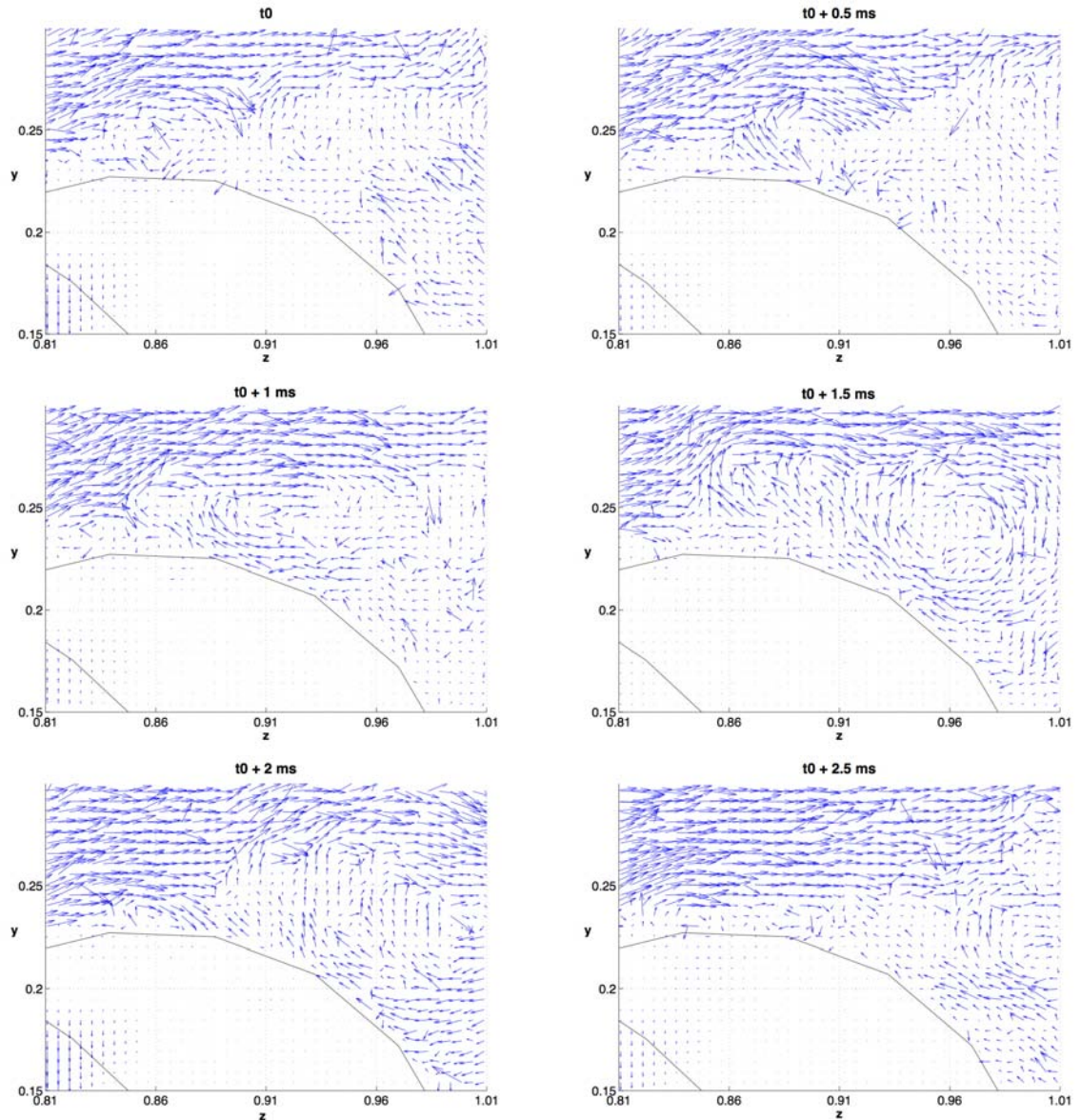
Des mesures en différents points ont été effectuées avec la technique LDV.

c/ Points de mesures LDV

La campagne expérimentale menée en septembre 2006 a permis d'obtenir des mesures de vitesse sur un temps long en différents points permettant d'accéder à l'énergie cinétique turbulente. Cette donnée mesure l'écart de la vitesse à la moyenne, nous renseignant ainsi

4.3. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Figure 4.16: Images PIV du champ de vitesse instantané - Filet ouvert - zone juste au dessus de la prise

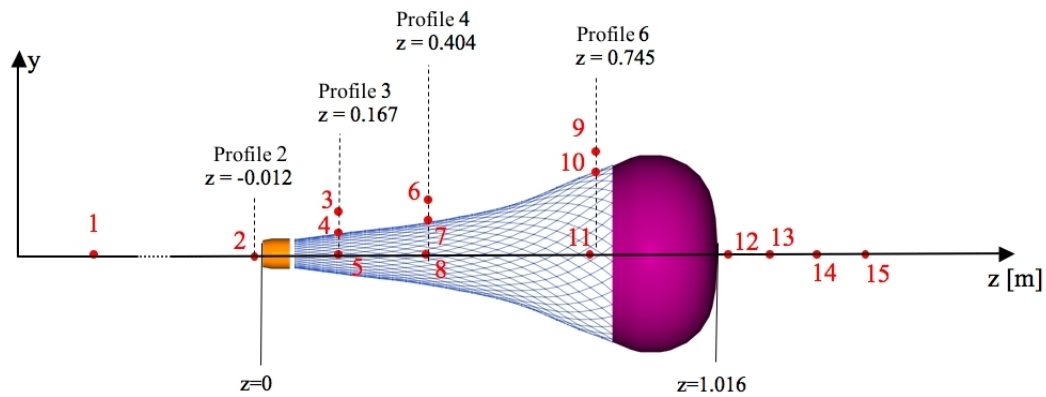


sur le taux de turbulence au point considéré. Le taux de turbulence en un point s'obtient en prenant la racine carrée de l'énergie cinétique obtenue en ce point et en la divisant par la vitesse d'entrée (0.51 m.s^{-1}).

La figure 4.17 donne les points où des mesures LDV ont été effectuées. Une acquisition de 15 minutes par points a permis d'obtenir des informations sur l'évolution temporelle de la vitesse. Le choix d'un temps long est justifié par la volonté de calculer des valeurs pertinentes de l'énergie cinétique turbulente. Rappelons, que dans le cas des profils de mesures LDV, ce temps n'était que de 150 s.

Rappelons que l'on note $(\mathbf{O}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, le repère de travail, \mathbf{O} étant situé à l'entrée de la maquette. La technique LDV disponible au bassin permet de mesurer simultanément deux composantes de la vitesse. Aussi lorsque le laser évolue dans le plan $(\mathbf{O}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, il mesure les composantes suivant les directions z et x de la vitesse (Fig 4.3).

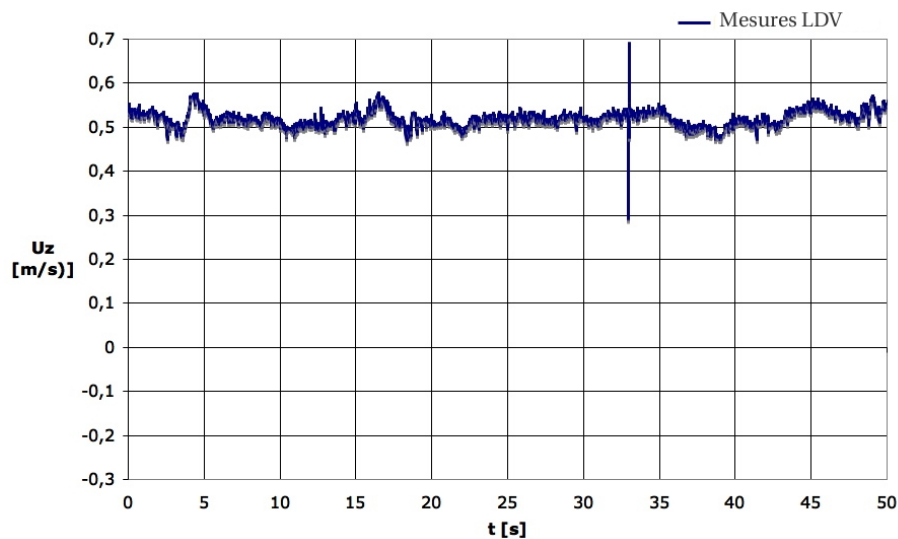
Figure 4.17: Points de mesures - Filet ouvert



Pour les points situés sur l'axe ou à l'arrière du filet, il est suffisant de mesurer la composante suivant z par hypothèse d'axisymétrie de la maquette et de l'écoulement. Les composantes de vitesse suivant les directions x et y sont censées être nulles. Comme on peut le voir dans la table 4.3 suivante, cette exigence est satisfaite. Pour les points 3, 4, 6, 7, 9 et 10, la composante suivant y doit être mesurée. L'astuce est alors de se placer pour chacun de ces points sur le côté de la maquette. On place le laser dans le plan (O, x, z) avec une composante suivant x égale à l'opposée de la composante suivant y du point considéré. Ainsi les composantes suivant z et x sont mesurées, elles correspondent aux composantes suivant z et y respectivement, de nouveau grâce à l'hypothèse d'axisymétrie.

Fig. 4.18, 4.19 et 4.20 montrent la composante suivant z de la vitesse mesurée aux points 1, 11 et 12 respectivement. Elle varie selon un motif irrégulier pour les point 11 et 12, une signature caractéristique de la turbulence.

Figure 4.18: Mesures LDV de u_z au point 1 pendant 50s - Filet ouvert



4.3. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Figure 4.19: Mesures LDV de u_z au point 11 pendant 50s - Filet ouvert

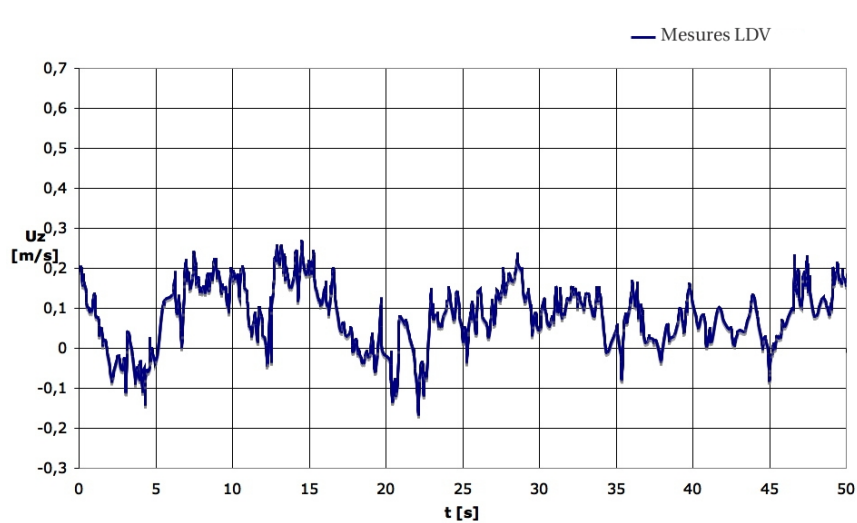
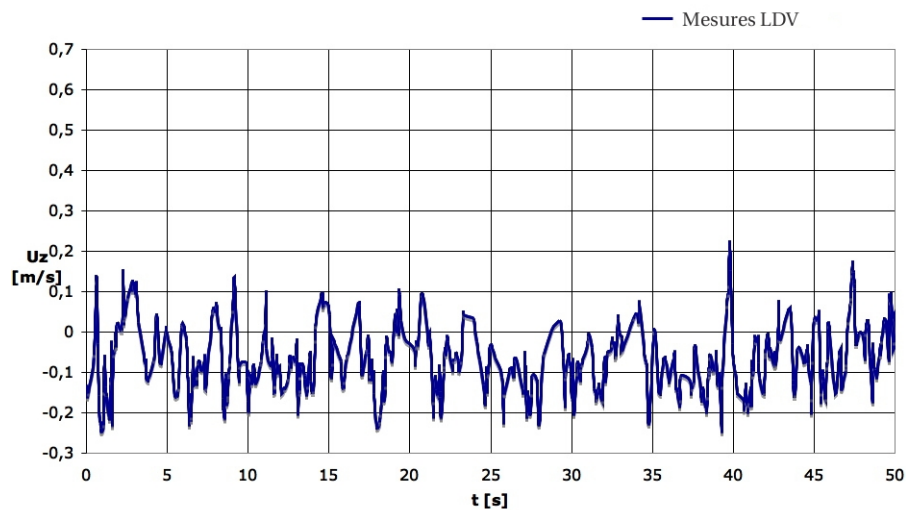


Figure 4.20: Mesures LDV de u_z au point 12 pendant 50s - Filet ouvert



Les tables 4.3 et 4.4 donnent la moyenne, l'écart-type et l'énergie cinétique turbulente aux différentes positions données Fig. 4.17.

Les vecteurs vitesses moyens sont tracés sur la figure 4.21, suivant les données de la table 4.3.

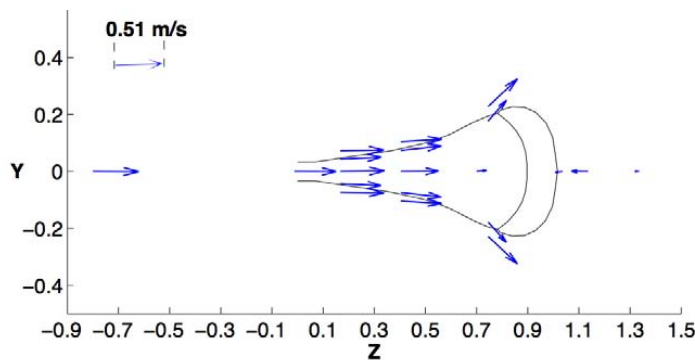
d/ Analyse des résultats

On note immédiatement que les composantes suivant x de la vitesse sont de l'ordre de 10^{-3} pour presque tous les points, ce qui correspond à l'ordre de grandeur de l'erreur due à la manipulation, et qui est en accord avec l'hypothèse d'axisymétrie de la maquette et de l'écoulement moyen que nous avons posée. Seuls les points 9 et 10 ont des valeurs de

Tableau 4.3: Vitesse moyenne aux différents points - Filet ouvert.

Point	Coordonnées			Vecteur vitesse moyen			Vitesse moyenne [m.s ⁻¹]
	x	y	z	Moy(u_x)	Moy(u_y)	Moy(u_z)	
1	0	0	-0.8	-0.0025	-0.0025	0.5122	0.5122
2	0	0	-0.012	-0.0016	-0.0016	0.4653	0.4653
3	0	0.073	0.167	-0.0024	0.0063	0.4891	0.4891
4	0	0.043	0.167	-0.0077	0.0196	0.4571	0.4576
5	0	0	0.167	0.0047	0.0047	0.4940	0.4941
6	0	0.104	0.404	-0.0009	0.0251	0.4560	0.4567
7	0	0.074	0.404	-0.0030	0.0459	0.4528	0.4551
8	0	0	0.404	0.0027	0.0027	0.4219	0.4220
9	0	0.228	0.745	-0.0159	0.2764	0.3266	0.4281
10	0.011	0.178	0.745	-0.0137	0.2078	0.2060	0.2929
11	0.011	0	0.7	0.0086	0.0086	0.1114	0.1121
12	0	0	1.036	-0.0085	-0.0085	-0.0814	0.0823
13	0	0	1.136	0.0015	0.0015	-0.1895	0.1895
14	0	0	1.336	0.0003	0.0003	-0.0496	0.0496
15	0	0	1.536	-0.0074	-0.0074	0.1749	0.1752

Figure 4.21: Vecteurs vitesse moyen - Filet ouvert



u_x légèrement supérieures mais faibles. Pour les points 10 et 11, il nous a été nécessaire de décaler légèrement le volume de mesure suivant la direction x de façon à ce que le laser passe à l'intérieur d'une maille. Cela explique les valeurs non nulles de la composante suivant x pour ces points.

La vitesse de référence est prise égale à la vitesse au point 1, soit 0.512 m.s^{-1} . On constate que la vitesse proche de la prise (point 11 - table 4.3) est environ cinq fois plus faible (seulement 0.11 m.s^{-1}) que la vitesse d'entrée du filet (point 5 - table 4.3) qui est de 0.49 m.s^{-1} . Du fait de la forme conique du filet, l'écoulement interne ralentit avec z croissant.

Si l'on regarde à présent les points situés à l'intérieur d'une maille i.e. les points 4, 7 et 10. On remarque que plus on se rapproche de la prise, plus la composante suivant y est forte, traduisant un échappement croissant du fluide à travers les mailles, en lien avec

Tableau 4.4: Energie cinétique turbulente - Filet ouvert.

Point	Ecart-type			ECT [m ² .s ⁻²]	Taux de turbulence %
	$\sigma(u_x)$	$\sigma(u_y)$	$\sigma(u_z)$		
1	0.01489	0.01489	0.02543	0.00054	4.56
2	0.01352	0.01352	0.02374	0.00046	4.21
3	0.01614	0.01250	0.02404	0.00050	4.35
4	0.03365	0.03286	0.05193	0.00245	9.67
5	0.01097	0.01097	0.02628	0.00047	4.21
6	0.01500	0.01286	0.02389	0.00048	4.28
7	0.02172	0.02727	0.03060	0.00108	6.41
8	0.02670	0.02670	0.0389	0.00147	7.49
9	0.02120	0.02641	0.03553	0.00120	6.78
10	0.03219	0.03685	0.03670	0.00187	8.44
11	0.05895	0.05895	0.08725	0.00728	16.66
12	0.110480	0.11048	0.08899	0.01617	24.82
13	0.12860	0.12860	0.08957	0.02055	27.99
14	0.17363	0.17363	0.11991	0.03734	37.73
15	0.16960	0.16960	0.11194	0.03503	36.54

l'ouverture des mailles générée par la prise.

Les points 3, 6 et 9, situés chacun dans le plan (O, y, z) , à 0.030 m suivant y au dessus du filet, suggère le contournement du filet par le fluide, comme l'indique l'augmentation des composantes suivant y pour ces points.

La table 4.4 montre que la turbulence naturelle du bassin est égal à 0.00054 m².s⁻². En prenant sa racine carrée et en divisant par la vitesse d'entrée, soit par 0.512 m.s⁻¹, on obtient un taux de turbulence voisin de 4.56 %. Les fortes valeurs sont atteintes à l'arrière de la prise, comme attendu. On remarque également un taux de turbulence non négligeable juste devant la prise, au point 11 (16,66 %, voir la table 4.3), dû au fait que l'écoulement est contraint de contourner la prise et de s'échapper sur les côtés, mettant en mouvement une partie de l'écoulement interne.

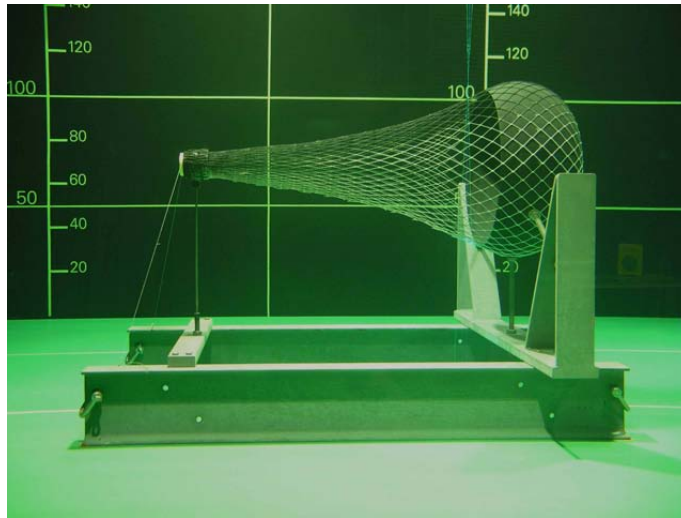
Considérons à présent les résultats obtenus pour la deuxième configuration, avec l'entrée du filet fermée.

3.3 Résultats et analyse de la deuxième configuration : filet fermé

La configuration de filet bouché avec une mousse isolante (voir figure 4.22) donne un écoulement interne très différent de celui obtenu dans la configuration précédente, avec l'entrée du filet ouvert. Comme nous allons le voir, celui-ci est beaucoup plus faible, avec pour conséquence un taux d'acquisition de données plus faible (voir section 4.4).

Cette configuration permet de mieux comprendre l'importance de l'écoulement entrant sur l'écoulement interne du filet. De plus s'il s'avère que la poche de chalut dont l'entrée est bouchée constitue un écoulement équivalent à celui obtenue avec une poche de chalut avec rallonge, alors cela pourra apporter des informations supplémentaires sur l'écoulement réel dans la poche. Une prochaine campagne expérimentale pourrait être de mesurer effectivement la valeur de la vitesse à l'entrée d'une poche possédant une rallonge.

Figure 4.22: Maquette de filet dont l'entrée est bouchée

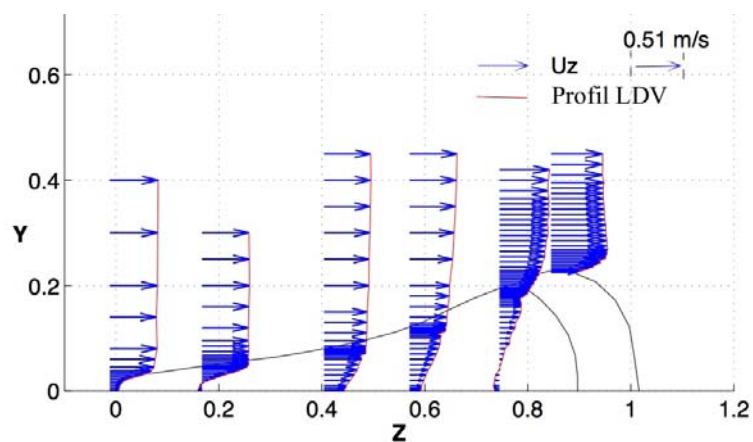


Présentons les résultats obtenus dans cette configuration.

a/ Profils LDV

Nous avons à nouveau mesuré les profils donnés à la figure 4.10 dans cette configuration. Les profils LDV obtenus sont montrés sur la figure 4.23.

Figure 4.23: Allure de la composant u_z de la vitesse suivant les profils - Filet fermé

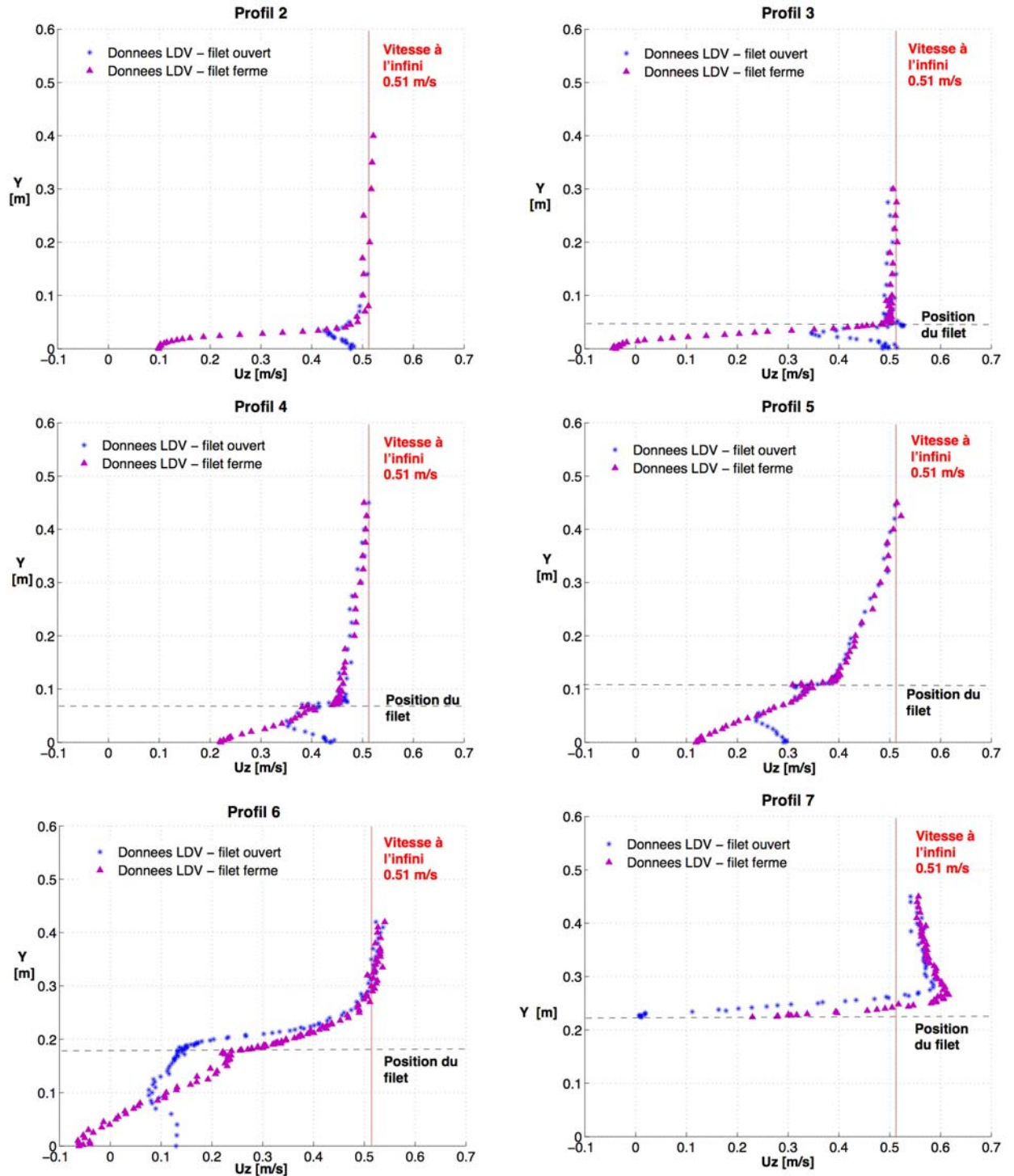


La figure 4.24 montre la comparaison des profils LDV entre les deux configurations, ouverte et fermée, du filet.

Ces données ont été complétées par des mesures ponctuelles à l'aide de la technique LDV.

4.3. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Figure 4.24: Profils LDV - Filet ouvert et filet fermé

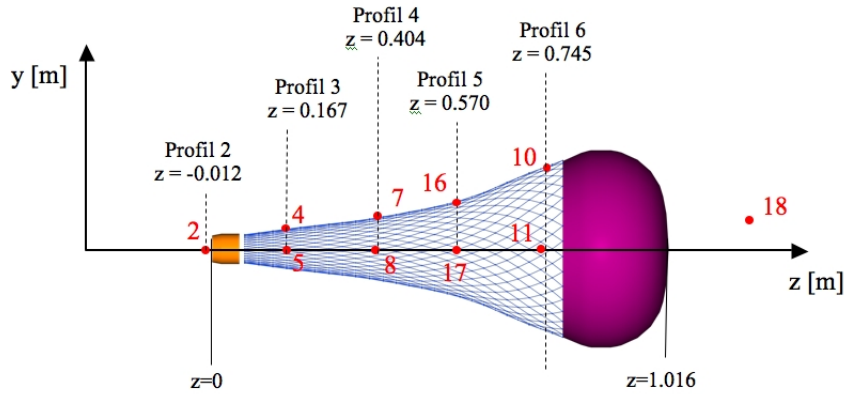


b/ Points de mesure LDV

Nous avons réalisé des mesures temporelles en quelques points identiques à ceux du cas précédents, auxquels s'ajoutent 3 points, numérotés 16, 17 et 18. Les différents points sont représentés sur la figure 4.25.

Les tables 4.5 et 4.6 donnent la vitesse moyenne, l'écart-type et l'énergie cinétique

Figure 4.25: Points de mesures



turbulente pour ces différents points.

Tableau 4.5: Vitesse moyenne aux différents points - Filet fermé

Point	Coordonnées			Vecteur vitesse moyen			Vitesse moyenne [m.s ⁻¹]
	x	y	z	Moy(u_x)	Moy(u_y)	Moy(u_z)	
2	0	0	-0.012	-0.0214	-0.02138	0.0983	0.1028
4	0	0.043	0.167	0.0024	-0.02377	0.4549	0.4556
5	0	0	0.167	0.0256	0.02556	-0.0912	0.0981
7	0	0.074	0.404	-0.00234	0.01610	0.4539	0.4542
8	0	0	0.404	0.00345	0.0035	0.2181	0.2181
16	0	0.220	0.570	-0.00534	0.0949	0.3375	0.3507
17	0	0	0.570	1.7E-05	1.7e-5	0.1158	0.1158
10	0.01075	0.1775	0.745	-0.0177	0.2022	0.2269	0.3044
11	0.01075	0	0.700	-0.0172	-0.0172	-0.0622	0.0668
18	0	0.170	1.196	0.0083	0.0083	0.2124	0.2127

Les vecteurs vitesses dont les composantes sont données dans la table 4.5 sont représentés sur la figure 4.26.

c/ Analyse des résultats

Le profil 2 confirme le contournement par le fluide de l'entrée bouchée. Dans l'ensemble, les valeurs de la vitesse suivant z sont plus faibles à l'intérieur du filet que pour le cas de la maquette avec l'entrée ouverte.

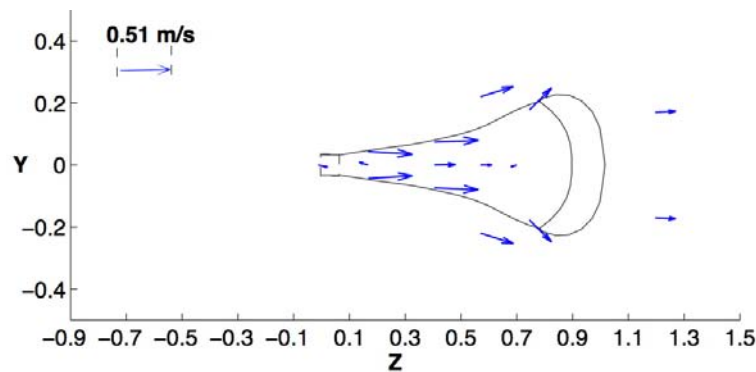
On remarque que les profils 2, 3, 4 et 5 se superposent dans les deux configurations jusqu'à un certain point interne au filet. Entre ce point et l'axe de symétrie du filet, la valeur de la composante u_z de la vitesse est naturellement plus faible dans le cas du filet fermé que dans le cas du filet ouvert. Cela signifie que l'écoulement extérieur a une influence sur l'écoulement interne jusqu'à ce point. Au dessous de ce point, l'écoulement est principalement alimenté par le fluide qui provient de l'entrée.

4.3. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Tableau 4.6: Ecart-type et énergie cinétique turbulente - Filet fermé.

Point	Ecart-type			ECT [m ² .s ⁻²]	Taux de turbulence %
	$\sigma(u_x)$	$\sigma(u_y)$	$\sigma(u_z)$		
2	0.01384	0.01384	0.00643	0.00021	2.84
4	0.04708	0.02711	0.05796	0.00316	10.97
5	0.05970	0.05970	0.05150	0.00489	13.65
7	0.02036	0.01821	0.02860	0.00078	5.46
8	0.04707	0.04707	0.05149	0.00354	11.62
16	0.02907	0.02970	0.05129	0.00218	9.11
17	0.05758	0.05758	0.07328	0.00600	15.12
10	0.04430	0.04925	0.05411	0.00366	11.81
11	0.10118	0.10118	0.09739	0.01498	23.90
18	0.15392	0.15392	0.09386	0.02810	32.73

Figure 4.26: Vecteurs vitesses aux différents points - Filet fermé



Au niveau du profil 3, on remarque que la vitesse au centre de la maquette (point 5 - table 4.5) est négative, indiquant une faible recirculation en direction de l'entrée du filet. La présence de fluctuations est révélée par un taux de turbulence de 13.65 % (contre 4.21 % dans le cas du filet ouvert). Cette recirculation est locale, le point 8 montre en effet que la vitesse suivant z est de nouveau positive, égale à 0.21 m.s^{-1} . A noter que les composantes de vitesse suivant x et y aux points 5 et 11 ne sont pas négligeables alors qu'elles devraient l'être du fait de l'hypothèse d'axisymétrie de l'écoulement. Cela peut s'expliquer par un fort taux de turbulence pour ces points et de faibles valeurs de la vitesse moyenne. La valeur négative de la composante suivant y de la vitesse au point 4, situé sur le profil 3, met en évidence une entrée de fluide à cet endroit, conduisant au mélange relevé au point 5.

Les composantes suivant y de la vitesse sont de plus en plus fortes à mesure que l'on se rapproche de la prise (0.2 m.s^{-1} au point 10 contre 0.016 m.s^{-1} au point 7). A cause de la prise, le fluide est contraint de sortir par les mailles, qui sont suffisamment ouvertes et orientées pour permettre au fluide de passer.

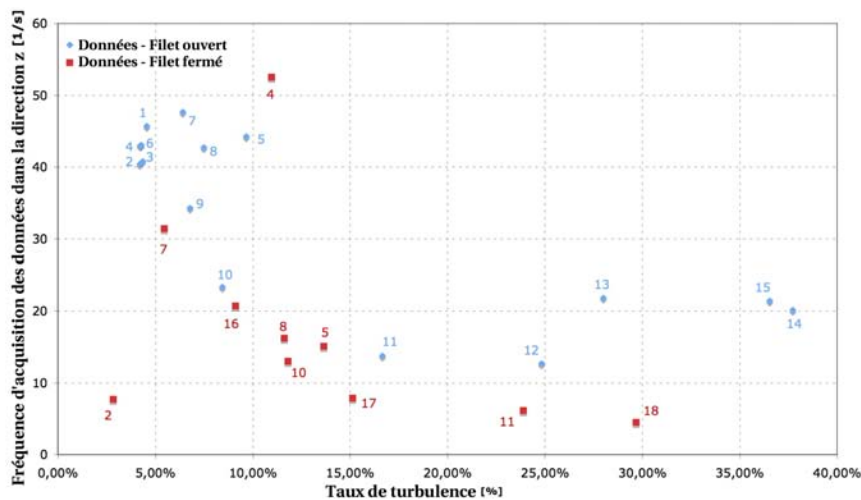
Le profil 6 met en évidence une valeur négative de la composante u_z de la vitesse au centre (point 11), égale à -0.06 m.s^{-1} . A ce point, le taux de turbulence est élevé : 23.90 %

(contre 16.66 % dans le cas du filet ouvert). Une zone de recirculation semble se former à ce niveau, plus importante que dans le cas du filet ouvert. Cela est causé par une influence plus forte de l'écoulement externe sur l'écoulement interne, dû au fait que ce dernier n'est plus alimenté par l'entrée. La fermeture du filet induit donc un contournement plus important du filet par le fluide, comme indiqué sur le profil 7, avec une valeur maximale de u_z plus forte dans le cas du filet fermé que dans le cas du filet ouvert.

4 Remarques sur l'acquisition des données

Avant de conclure cette partie, notons que les résultats LDV donnés ici dépendent fortement du nombre de particules qui traversent le volume de mesure. Le nombre de données acquises dépend de l'encementement de l'écoulement, du temps d'acquisition mais également du comportement local du fluide. Ainsi, comme le montre les figures 4.27 et 4.28, la fréquence d'acquisition des données est faible lorsque l'écoulement est turbulent et pour de faibles valeurs de la vitesse. Ainsi on constate que dans la configuration filet fermé, le taux d'acquisition des données est globalement plus faible que dans la configuration filet ouvert, notamment à l'intérieur du filet.

Figure 4.27: Taux d'acquisition des données le long de la direction z en fonction du taux de turbulence

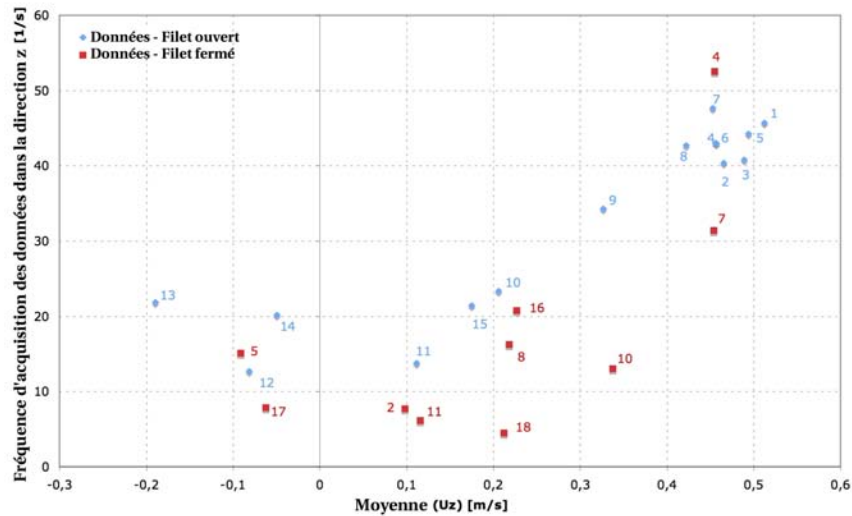


5 Conclusion

Nous avons mis en évidence que l'entrée du filet fournit une bonne partie de l'écoulement interne, puisque lorsque celle-ci est bouchée les vitesses intérieures sont nettement plus faibles. Le comportement du fluide n'est pas le même dans les deux configurations : filet ouvert et filet fermé. En effet la fermeture de l'entrée conduit à la formation de deux zones de recirculations. La première est au centre du filet, proche de l'entrée. On observe une aspiration du fluide vers l'intérieur, qui augmente le taux de turbulence en cet endroit. Cette aspiration est sans doute due à une différence de pression intérieur/extérieur. Ce phénomène est localisée proche de l'entrée et n'était pas observé dans le cas du filet ouvert pour lequel le fluide a tendance à sortir à travers les mailles.

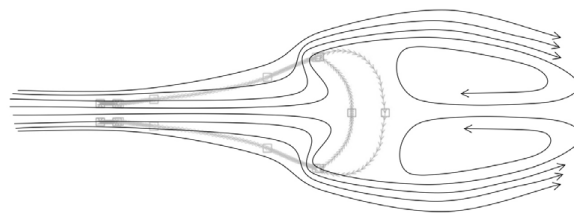
4.5. CONCLUSION

Figure 4.28: Taux d'acquisition des données le long de la direction z en fonction de la composante u_z de la vitesse moyenne



La deuxième recirculation créée par la fermeture du filet se situe au voisinage de la prise. Au centre du filet, proche de la prise, la turbulence est plus importante dans le cas du filet fermé et les valeurs des vitesses sont plus faibles que dans le cas du filet ouvert. Des valeurs négatives de la vitesse sont relevées en cette zone. Le fluide contourne cette zone, augmentant la sortie du fluide à travers les mailles, d'autant plus que les mailles sont ouvertes, i.e. qu'on est proche de la prise.

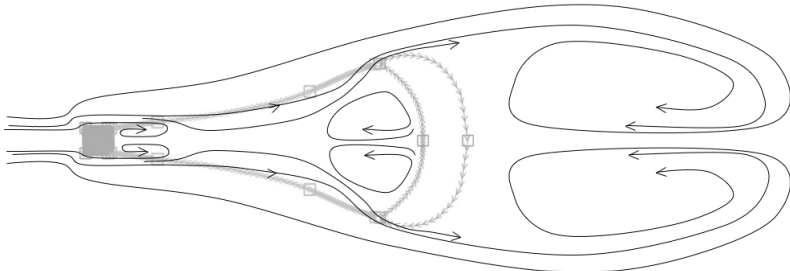
Figure 4.29: Lignes de courant - filet ouvert



Schématiquement, nous pouvons présumer l'écoulement dans les deux configurations en dessinant les lignes de courant (Figures 4.29 et 4.30)

Ces campagnes expérimentales présentent le double avantage de mieux comprendre l'écoulement autour d'une poche de chalut dans un cadre simplifié et de fournir des bases de validation pour le modèle fluide (cf. Chapitre 6). Nous présentons dans le chapitre suivant la modélisation de l'écoulement que nous avons adoptée.

Figure 4.30: Lignes de courant - filet fermé



Chapitre 5

Modélisation de l'écoulement

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, le problème de la simulation de l'écoulement vient de son caractère turbulent et de la complexité de la géométrie du domaine fluide.

Le caractère turbulent de l'écoulement pose le problème de sa simulation numérique directe. Pour résoudre un tel problème contenant beaucoup d'échelles, il est possible de se concentrer sur les quantités moyennées. Cela requiert l'ajout de modèles de fermeture, dits modèles de turbulence, car le système d'équations moyennées n'est pas fermé. Cette approche que l'on appelle RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) est celle que nous avons adoptée.

La géométrie du domaine fluide pose également problème. Suivant une technique classique de résolution d'un problème fluide, par la méthode des éléments finis par exemple, il nous faut un maillage de notre domaine de calcul. Or le filet est par nature 3D et générer un maillage 3D autour des fils et des noeuds est un travail complexe et l'utilisation de mailleurs du marché, tels que le mailleur de *FreeFem++* ou *Mephisto* ne résoudrait pas le problème. En effet le coût en programmation et en temps et calculs d'ordinateur d'un tel maillage ne nous permettrait pas d'envisager un filet en mouvement.

Ce chapitre a pour objet de présenter notre modèle fluide qui permet de répondre à ces deux problèmes. Il s'organise comme suit. Dans une première section, nous rappellerons les équations de Navier-Stokes incompressibles et les difficultés liées à toute simulation numérique directe dans la mesure où l'écoulement que nous étudions est turbulent. C'est pourquoi nous étudions des quantités moyennées (vitesse moyenne, pression moyenne) dont nous écrirons les équations. La non fermeture du système d'équations obtenu nous amènera à proposer l'ajout d'un modèle de turbulence à une équation, couplé aux équations de Navier-Stokes moyennées par l'intermédiaire d'un coefficient de viscosité turbulente.

A cette étape de la modélisation, il s'agira de préciser comment les obstacles sont pris en compte, ce qui rappelle le fait que c'était une difficulté majeure pour le passage au 3D. Suivant l'idée de membrane équivalente, nous modélisons le filet par une membrane poreuse ce qui permet de s'affranchir des fils et des noeuds du filet. Cela introduit un paramètre supplémentaire, qui est la perméabilité de cette membrane. Nous verrons des exemples de cette fonction dans le chapitre 6 suivant. Nous proposons également d'appliquer une méthode de frontière immergée, décrite dans le chapitre 3 section 3.3.3.b qui permet de prendre en compte les obstacles (filet et poissons) directement dans les équations fluides. Nous précisons comment peuvent être calculés les efforts exercés par le fluide sur ces obstacles par cette technique.

Enfin, nous ferons une analyse mathématique de notre problème en dimension 2.

Nous démontrerons l'existence d'une solution faible au problème mathématique que pose notre modèle. Nous avons également déduit des conditions aux limites de sortie de la boîte de calcul ne perturbant pas l'écoulement sortant.

Commençons par rappeler les équations de bases que nous considérons.

1 Les équations de Navier-Stokes

Une description réaliste de l'écoulement autour de la poche de chalut inclut les effets de viscosité dûs au filet et à la prise. Les équations gouvernant le mouvement d'un fluide newtonien datent des travaux de Navier (1823) et Stokes (1843). Les équations de Navier-Stokes pour un fluide s'écrivent :

$$(5.1.1) \quad \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}, p),$$

où \mathbf{u} est la vitesse du fluide, ρ sa densité. Le tenseur des contraintes, noté $\boldsymbol{\tau}$, pour un fluide newtonien incompressible est donné par :

$$(5.1.2) \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}, p) = -pId + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}),$$

où p est la pression du fluide, μ sa viscosité dynamique.

Le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ est le tenseur des vitesses de déformation (symétrique) :

$$(5.1.3) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T).$$

On note ν la viscosité cinématique du fluide donnée par :

$$(5.1.4) \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

De plus on suppose le fluide incompressible, ce qui s'exprime par l'équation de continuité :

$$(5.1.5) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

La simulation de ce problème demande de connaître au préalable le régime d'écoulement qui tient place autour du filet, indiqué par un nombre sans dimension, le nombre de Reynolds. Il mesure le rapport entre les forces visqueuses et les forces d'inertie. Il est défini comme suit :

$$(5.1.6) \quad Re = \frac{U_{ref} L}{\nu},$$

où U_{ref} est une vitesse de référence, par exemple la valeur de la vitesse d'entrée et L une longueur de référence. Si la vitesse du fluide est faible, le nombre de Reynolds est petit et les forces de viscosité sont prépondérantes, ce qui stabilise l'écoulement. Dans ce cas,

l'écoulement est dit laminaire. A l'inverse, plus la vitesse de l'écoulement est grande, plus le nombre de Reynolds est grand augmentant ainsi l'influence du terme inertiel, et au delà d'une certaine limite, appelée Reynolds critique, l'écoulement est dit turbulent.

Reprenons l'exemple d'une poche de chalut de 6m de long, de diamètre de prise D_p égal à 2.7 m et de vitesse de chalutage $u_0 = 1.25$ m/s, alors le nombre de Reynolds pour ce cas, en prenant $U_{ref} = u_0$ et $L=D_p$:

$$(5.1.7) \quad Re = \frac{u_0 D_p}{\nu} = 3.10^6.$$

La forte valeur du nombre de Reynolds dans le cas de la poche de chalut ($Re = 3.10^6$) conduit à penser qu'il s'agit d'un écoulement turbulent. Cette idée est confortée par les mesures réalisées à l'aide d'un vélocimètre Laser Doppler (LDV) et d'un vélocimètre à Images de Particules (PIV) au bassin d'essais de l'IFREMER de Boulogne-sur-Mer autour d'une maquette de poche de chalut rigidifiée et partiellement remplie de poissons (pour plus de détails, voir le chapitre 4. Les images PIV obtenues dans les zones proches de la prise (voir figure 4.20) mettent en évidence la présence de structures tourbillonnaires.

Comme nous l'avons vu au chapitre 3 partie 3.3.1, une simulation directe d'un tel écoulement n'est pas possible.

Une alternative consiste à s'intéresser seulement aux quantités moyennes (vitesse, pression). Pour cela il faut établir les équations satisfaites par ces quantités.

2 Les équations de Navier-Stokes moyennées

2.1 Décomposition de Reynolds

Une technique pour réduire la mémoire et le temps de calcul nécessaires est de supposer que l'écoulement a seulement deux échelles, une échelle pour le comportement moyen (grande échelle) et une échelle pour la partie fluctuante (représentant la petite échelle). C'est la décomposition de Reynolds. Cette séparation d'échelle requiert l'utilisation d'un filtre. Le filtre le plus couramment utilisé est la moyenne statistique.

Rappelons la notion de moyenne pour une fonction aléatoire discrète.

Définition 5.2.1 *Soit u une fonction aléatoire discrète prenant ses valeurs dans $\{u_1, \dots, u_n\}$ au cours de n réalisations indépendantes du même phénomène, c'est-à-dire n réalisations de l'écoulement dans les mêmes conditions. On appelle moyenne d'ensemble ou espérance mathématique de u , et l'on note \bar{u} , la valeur*

$$(5.2.1) \quad \bar{u} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum u_i}{n}.$$

Cette moyenne permet de travailler sur des écoulements qui ne sont pas stationnaires en moyenne, c'est-à-dire \bar{u} est une fonction du temps.

Définition 5.2.2 *La fluctuation turbulence u' est définie par la valeur prise à une réalisation donnée u_i moins la valeur moyenne :*

$$(5.2.2) \quad u' = u_i - \bar{u}.$$

Propriétés 1 La moyenne d'ensemble vérifie les relations suivantes, pour u et v deux variables fonctions aléatoires discrètes :

$$\begin{aligned}
 \overline{u + v} &= \bar{u} + \bar{v}, \\
 \overline{\alpha u} &= \alpha \bar{u}, \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}, \\
 \overline{\bar{u}} &= \bar{u}, \\
 \overline{\bar{v}} &= \bar{v}, \\
 \overline{\frac{\partial u}{\partial t}} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \\
 \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \\
 \overline{\int u dx_i dt} &= \int \bar{u} dx_i dt.
 \end{aligned}
 \tag{5.2.3}$$

Par le procédé de moyenne d'ensemble, la vitesse et la pression sont décomposées (**décomposition de Reynolds**) :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \\
 p &= \bar{p} + p'
 \end{aligned}
 \tag{5.2.4}$$

avec $\overline{\mathbf{u}'} = 0$ et $\overline{p'} = 0$.

2.2 Les équations du mouvement moyen

Les équations moyennées s'obtiennent en introduisant la décomposition de Reynolds dans les équations instantanées puis en prenant la moyenne.

L'équation de continuité devient :

$$\nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') = 0
 \tag{5.2.5}$$

Par les propriétés 1, en prenant de nouveau la moyenne, on obtient :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0.
 \tag{5.2.6}$$

En soustrayant (5.2.6) à (5.2.5) :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0.
 \tag{5.2.7}$$

La partie moyenne et la partie fluctuante vérifient les deux l'équation de continuité.

Les équations du mouvement deviennent :

$$(5.2.8) \quad \rho \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \rho(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = -\nabla \bar{p} + \mu \Delta \bar{\mathbf{u}} - \rho \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}).$$

Un terme supplémentaire $-\rho \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'})$ apparaît dans les équation moyennées (5.2.8), introduisant des inconnues supplémentaires (les termes $\overline{u'_i u'_j}$, où $i, j = 1, 2, 3$). Ce terme peut s'interpréter comme un tenseur de contraintes turbulentes, appelé tenseur de Reynolds et noté \mathbf{R} :

$$(5.2.9) \quad \mathbf{R} = -\rho \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$$

On note $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur généralisé :

$$(5.2.10) \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) + \mathbf{R} = -\bar{p} Id + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{R}.$$

Le tenseur \mathbf{R} est symétrique, en effet $\overline{u'_i u'_j} = \overline{u'_j u'_i}$. Il représente l'effet du champ fluctuant sur le champ moyen. Ses composantes $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ sont appelées tensions de Reynolds. Elles proviennent de la non-linéarité des équations de Navier-Stokes.

La trace du tenseur de Reynolds \mathbf{R} est égale au double de l'énergie cinétique turbulente définie par :

Définition 5.2.3 On définit l'énergie cinétique turbulente, notée k , par :

$$(5.2.11) \quad k = \frac{\overline{u'_1 u'_1} + \overline{u'_2 u'_2} + \overline{u'_3 u'_3}}{2}$$

Le tenseur de Reynolds introduit 6 inconnues supplémentaires dont il n'est pas possible d'obtenir des équations pour ces quantités sans introduire de nouvelles inconnues (l'équation exacte d'un modèle d'ordre n , $\overline{u'_{i_1} u'_{i_2} \dots u'_{i_n}}$, implique nécessairement un moment d'ordre supérieur). C'est le problème de fermeture des équations. Pour fermer le système, il est nécessaire de formuler des hypothèses de fermeture.

2.3 Bilans d'énergie cinétique

a/ Equation d'énergie cinétique du mouvement moyen

Soit \bar{k} l'énergie cinétique moyenne :

$$(5.2.12) \quad \bar{k} = \frac{\overline{u_1 u_1} + \overline{u_2 u_2} + \overline{u_3 u_3}}{2}.$$

On multiplie par \bar{u} l'équation (5.2.8), il vient :

$$(5.2.13) \quad \begin{aligned} \rho \frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \rho(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{k} &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \bar{\mathbf{u}}) - \boldsymbol{\sigma} : \nabla \bar{\mathbf{u}}, \\ &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \bar{\mathbf{u}}) - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}), \text{ par symétrie de } \boldsymbol{\sigma}, \\ &= \overline{\rho \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} : \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}) - \nabla \cdot (\overline{\rho \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}) \\ &\quad + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) \bar{\mathbf{u}}) - 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}) \end{aligned}$$

Cette équation exprime que le taux de variation de l'énergie cinétique turbulente contenue dans un volume entraîné par le mouvement moyen est égale à la puissance développée par les efforts intérieurs, représentés par le terme $-\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}})$, et extérieurs, représentés par le terme $\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}\bar{\mathbf{u}})$.

b/ L'équation d'énergie cinétique de la turbulence

Ecrivons l'équation pour la valeur moyenne des fluctuations d'énergie cinétique, k .

Elle se déduit en faisant la différence entre l'équation pour l'énergie cinétique totale moyenne, $\bar{k} + k$ et l'équation pour l'énergie cinétique du mouvement moyen (équation (5.2.13)).

L'énergie cinétique totale moyenne s'exprime par :

$$(5.2.14) \quad \bar{k} + k = \frac{\overline{u_1 u_1} + \overline{u_2 u_2} + \overline{u_3 u_3}}{2}.$$

On multiplie l'équation (5.1.1) par la vitesse, on obtient :

$$(5.2.15) \quad \begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}}{2} \right) + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \left(\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}}{2} \right) &= \mathbf{u} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}, p), \\ &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}, p)\mathbf{u}) - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}, p) : \nabla \mathbf{u}, \\ &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}, p)\mathbf{u}) - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}, p) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \text{ par symétrie de } \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \\ &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}, p)\mathbf{u}) - 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \text{ à l'aide de l'équation de continuité.} \end{aligned}$$

On utilise la décomposition $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$ dans l'équation (5.2.15) et on en prend la moyenne. On obtient, à l'aide de l'équation de continuité :

$$(5.2.16) \quad \begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} (\bar{k} + k) + \rho(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla)(\bar{k} + k) + \rho \nabla \cdot \left(\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \bar{\mathbf{u}}} \right) + \rho \frac{1}{2} \nabla \cdot \left(\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \mathbf{u}'} \right) \\ = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p})\bar{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot \left(\overline{\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}', p')\mathbf{u}'} \right) - 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}) - 2\mu \overline{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}') : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}')}. \end{aligned}$$

On fait la différence entre les équations (5.2.16) et l'équation (5.2.13) :

$$(5.2.17) \quad \begin{aligned} \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla)k \\ = -\rho \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} : \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}) - \frac{1}{2} \rho \nabla \cdot \left(\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \mathbf{u}'} \right) + \nabla \cdot \left(\overline{\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}', p')\mathbf{u}'} \right) - 2\mu \overline{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}') : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}')}, \end{aligned}$$

Cette équation exprime que le taux de variation de l'énergie cinétique de la turbulence contenue dans un volume entraîné par le mouvement moyen est dû :

- à la puissance de déformations des tensions de Reynolds : terme de production d'énergie cinétique turbulente $-\rho \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' : \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{R} : \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}})$;
- à la puissance de déformation des fluctuations de tensions visqueuses : terme de dissipation visqueuse $-2\mu \overline{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}') : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}')}$;
- à un transport par diffusion sous l'action de la pression, de la viscosité et de la turbulence : terme de diffusion $-\frac{1}{2}\rho \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \mathbf{u}'}) + \nabla \cdot (\overline{\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}', p') \mathbf{u}'})$.

Dans l'équation (5.3.7) pour k , on note par \mathcal{E} le terme :

$$(5.2.18) \quad \mathcal{E} = 2\nu \overline{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}') : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}')}$$

Il représente le taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente par unité de masse (unité $[\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}]$).

Comme nous l'avons déjà évoqué, les équations pour les contraintes de Reynolds introduisent de nouvelles inconnues. On le voit ici avec l'équation pour l'énergie cinétique turbulente k . Il apparaît dans l'équation (5.3.7) des corrélations triples, de la forme $\overline{u'_i u'_j u'_k}$, des corrélations pressions vitesse de la forme $u_l \overline{\frac{\partial p'}{\partial x_l}}$, des corrélations gradients de vitesse $\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_j}{\partial x_l}}$.

Il est nécessaire de formuler des hypothèses pour fermer le système, qui permettent de déduire des modèles de turbulence. Plusieurs modèles existent, on distingue :

- les modèles du premier ordre, appelé modèles à viscosité turbulente à zéro (longueur de mélange), une (équation pour k) ou deux équations (modèle k - \mathcal{E} , k - ω , ...);
- les modèles du second ordre : à 7 équations ($\mathbf{R} - \mathcal{E}$, ...)

Nous n'évoquerons pas ici tous les modèles de fermeture, mais seulement celui que nous allons utiliser, qui est le modèle du premier ordre à une équation pour k .

3 Un modèle de turbulence à une équation de transport

Revenons au problème de fermeture du système :

$$(5.3.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{\rho} \left(-\nabla \bar{p} + \mu \Delta \bar{\mathbf{u}} - \rho \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} \right), \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0. \end{cases}$$

Pour fermer ce système, l'idée consiste à relier $\mathbf{R} = -\rho \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$ au champ de vitesse moyenne.

3.1 Hypothèse de Boussinesq

L'hypothèse de Boussinesq (1877) conduit à supposer que le tenseur de Reynolds \mathbf{R} est linéairement dépendant du tenseur moyen des déformations :

$$(5.3.2) \quad \frac{\mathbf{R}}{\rho} = -\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} = -\frac{2}{3} k Id + \nu_t(k, \ell) (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T)$$

où ν_t est le coefficient de viscosité turbulente.

Le problème de Navier-Stokes moyenné s'écrit :

$$(5.3.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = -\nabla P + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot (\nu_t(k, \ell)(\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T)) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_T(\bar{\mathbf{u}}, P, k), \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \end{cases}$$

où $P = \frac{\bar{p}}{\rho} + \frac{2}{3}k$ et $\boldsymbol{\sigma}_T$ est le tenseur de contraintes totales défini par :

$$(5.3.4) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_T(\bar{\mathbf{u}}, P, k) &= -PId + 2(\nu + \nu_t)\boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}), \\ &= -PId + 2\nu_T\boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}). \end{aligned}$$

Le problème consiste à présent à trouver la valeur de la viscosité turbulente ν_t .

En supposant que ν_t dépend de l'énergie cinétique turbulente k , on obtient par analyse dimensionnelle, une expression de ν_t .

Or la dimension de k est $[\frac{m^2}{s^2}]$ alors que ν_t est en $[\frac{m^2}{s}]$. L'unique expression reliant ν_t à k est alors :

$$(5.3.5) \quad \nu_t(k, \ell) = C_1 \ell k^{\frac{1}{2}}$$

où ℓ a la dimension d'une longueur ($[m]$) et C_1 est une constante sans dimension.

Dans la suite nous noterons :

$$(5.3.6) \quad \nu_T(k, \ell) = \nu + \nu_t.$$

La longueur ℓ peut s'interpréter comme la longueur de mélange. Le choix de sa valeur constitue la difficulté de cette modélisation. Par analogie avec le libre parcours moyen des molécules dans la théorie cinétique des gazs, on peut l'interpréter comme le temps mis par un tourbillon avant d'en rencontrer un autre. Cependant cette analogie est limitée car l'agitation moléculaire est indépendante du mouvement alors que l'agitation turbulente est causée par le mouvement du fluide.

Cette fermeture requiert donc l'utilisation de l'équation pour l'énergie cinétique k , (5.3.7). Or nous avons vu que cette équation introduisait de nouvelles inconnues. Plusieurs hypothèses doivent donc être formulées pour fermer le système.

3.2 Dérivation de l'équation pour l'énergie cinétique turbulente

Après quelques manipulations, l'équation pour k peut se réécrire comme suit :

$$(5.3.7) \quad \frac{\partial k}{\partial t} + ((\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \cdot \nabla) \left(\frac{\mathbf{u}'^2}{2} \right) = \frac{1}{\rho} \mathbf{R} : \nabla \bar{\mathbf{u}} + \nu \overline{\mathbf{u}' \Delta \mathbf{u}'} - \nabla \cdot (\overline{P' \mathbf{u}'}),$$

avec $P' = \frac{p'}{\rho}$.

Nous reprenons ici les hypothèses formulées dans [MP94]. Le terme

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{((\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \cdot \nabla) \left(\frac{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}{2} \right)}$$

peut être vu comme la partie convective d'une équation pour la quantité $\frac{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}{2}$ avec la vitesse de convection $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$. Or la convection d'un scalaire par un champ de vitesse aléatoire comme dans l'équation :

$$(5.3.8) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + ((\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \cdot \nabla) c = 0,$$

conduit à une équation de convection-diffusion pour la moyenne \bar{c} de c lorsque \mathbf{u} est dit mélangeant ¹ :

$$(5.3.9) \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{c} - \nabla \cdot (\kappa \nabla \bar{c}) = 0,$$

avec κ une fonction des seconds moments de \mathbf{u}' .

Ainsi on peut écrire en prenant la moyenne :

$$(5.3.10) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\frac{\mathbf{u}'^2}{2}} \right) + \overline{((\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \cdot \nabla) \left(\frac{\mathbf{u}'^2}{2} \right)} \cong \frac{\partial k}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) k - \nabla \cdot (\mu_t(\mathbf{R}) \nabla k)$$

A noter que cette approximation n'est pas vraiment correcte puisque \mathbf{u}'^2 n'est pas indépendant de \mathbf{u}' .

Prenons $\mu_t(\mathbf{R})$ proportionnel à $\nu_t(k, \ell)$:

$$(5.3.11) \quad \mu_t = C_2 l k^{\frac{1}{2}}$$

où C_2 est une constante sans dimension. On obtient :

$$(5.3.12) \quad \frac{\partial k}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) k = \frac{1}{\rho} \mathbf{R} : \nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot (\mu_t(k, \ell) \nabla k) + \nu \overline{\mathbf{u}' \Delta \mathbf{u}'} - \nabla \cdot (\overline{P' \mathbf{u}'}).$$

Modélisons les deux derniers termes. Pour cela, on utilise l'hypothèse d'ergodicité, qui permet de remplacer le filtre par une moyenne en espace sur une boule de rayon r et de centre x , $B(x, r)$. Ainsi le filtre $\bar{\cdot}$ est remplacé par une intégrale sur B :

¹Un champ de vecteur aléatoire \mathbf{w} est dit mélangeant si, quelque soient deux ensembles de points $\{x^i\}_1^m$ et $\{y^j\}_1^n$ avec $\|x^i - y^j\| > d$, $\forall i, j$ et quelque soient les fonctions $F(w(x^1), \dots, w(x^m))$ et $G(w(y^1), \dots, w(y^n))$, il existe $\alpha(d)$ décroissant suffisamment vite vers 0 avec d tel que : $|\overline{FG} - \bar{F}\bar{G}| \leq \alpha(d)|F|_\infty|G|_\infty$, indépendamment de m et n .

$$\begin{aligned}
 \overline{\mathbf{u}' \Delta \mathbf{u}'} &\cong \frac{1}{|B|} \int_{B(x,r)} \mathbf{u}' \Delta \mathbf{u}', \\
 (5.3.13) \quad &= -\frac{1}{|B|} \int_{B(x,r)} |\nabla \mathbf{u}'|^2 + \frac{1}{|B|} \int_{\partial B(x,r)} \mathbf{u}' \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial n}.
 \end{aligned}$$

Par symétrie (turbulence quasi-homogène au niveau sous-mailles), on suppose que l'intégrale sur la frontière est petite. De plus, en écoulement homogène ou à grand nombre de Reynolds en écoulement inhomogène, le terme de dissipation $\mathcal{E}' = \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_i}{\partial x_l}$ est nul. D'où :

$$\begin{aligned}
 \overline{\nu \mathbf{u}' \Delta \mathbf{u}'} &\cong -\overline{|\nabla \mathbf{u}'|^2}, \\
 (5.3.14) \quad &= -2\nu \overline{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}') : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}')}, \\
 &= -\mathcal{E}
 \end{aligned}$$

Le terme $\nabla \cdot (\overline{P' \mathbf{u}'})$ est traité avec le même argument :

$$(5.3.15) \quad \nabla \cdot (\overline{P' \mathbf{u}'}) \cong \int_{\partial B(x,r)} P' \mathbf{u}' \cdot \mathbf{n} \cong 0.$$

Après ces manipulations nous obtenons :

$$(5.3.16) \quad \frac{\partial k}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla)k = \frac{\mathbf{R}}{\rho} : \nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot (\mu_t(k, \ell) \nabla k) - \mathcal{E}.$$

Par définition de $\frac{\mathbf{R}}{\rho}$ (équation (5.3.2)), il en résulte :

$$(5.3.17) \quad \frac{\partial k}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla)k = \frac{\nu_t}{2} |\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T|^2 + \nabla \cdot (\mu_t(k, \ell) \nabla k) - \mathcal{E}.$$

Notons que le terme \mathcal{E} peut s'écrire en fonction de k par analyse dimensionnelle :

$$(5.3.18) \quad \mathcal{E} = \frac{C_3}{\ell} k \sqrt{k},$$

où C_3 est une constante sans dimension.

3.3 Système fermé d'équations

Dans la suite du mémoire, nous noterons $\bar{\mathbf{u}}$ par \mathbf{U} afin de ne pas alourdir les notations.

Le système fermé d'équations à résoudre est le suivant :

$$(5.3.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + \nabla \cdot (\nu_T(k, \ell)(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)), \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \\ \frac{\partial k}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) k = \frac{\nu_t}{2} |\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T|^2 + \nabla \cdot (\mu_t(k, \ell) \nabla k) - \mathcal{E}, \\ \nu_t = C_1 \ell \sqrt{k}, \\ \nu_T = \nu + \nu_t, \\ \mu_t = C_2 \ell \sqrt{k}, \\ \mathcal{E} = \frac{C_3}{\ell} k \sqrt{k}. \end{array} \right.$$

où C_i , $i = 1, 2, 3$, des constantes sans dimension.

A cette étape, nous disposons d'un modèle complet pour le fluide turbulent. Reste à définir comment prendre en considération la géométrie complexe et 3D du filet et des poissons. C'est l'objet de la section suivante.

4 Prise en compte de la géométrie

La géométrie du domaine fluide, qui est le domaine autour du filet et des poissons, est complexe et 3D (voir figure 5.1). Toute construction d'un maillage de ce domaine se révélerait être une tâche ardue. Il ne serait pas raisonnable de tenter de le mailler de manière conforme (i.e. en tenant compte des fils, des noeuds et des poissons). De plus dans l'objectif de coupler le code fluide avec des codes de calculs gouvernant le filet et les poissons, il serait alors nécessaire de remailler à chaque itération.

Figure 5.1: Image de filet partiellement rempli de poissons



Supposons pour simplifier que les poissons sont tous au fond du filet, constituant la prise, comme sur la figure 5.1. Expliquons la démarche que nous avons utilisée pour palier au problème du maillage conforme à la géométrie.

4.1 Modélisation du filet par une membrane poreuse

Tout d'abord, l'idée consiste à voir le filet comme un milieu poreux. Cette hypothèse présente l'avantage qu'elle facilite grandement l'implémentation numérique. La perméabilité de ce milieu est alors à définir et c'est la particularité de ce modèle. On peut déjà envisager de faire dépendre cette perméabilité de la forme des mailles du filet, de leur ouverture, ...

4.2 Méthode des domaines fictifs

La méthode des domaines fictifs, proposée par [KAPC00] et [ABF99], est décrite dans la partie 3.3.3.b. Rappelons que cette technique permet de prendre en compte la présence d'obstacles dans le domaine fluide directement dans les équations de Navier-Stokes. La méthode consiste à résoudre ces équations "fluides" dans tout le domaine, y compris dans la prise et le filet, vu respectivement comme des milieux solide et poreux. Ces milieux sont pris en compte par ajout du terme de pénalisation de la vitesse, de la forme $\frac{\nu}{K} \mathbf{U}$ dans les équations de Navier-Stokes. Le filet est considéré comme une membrane poreuse de perméabilité variable. La prise est, quant à elle, supposée imperméable. Cette technique permettra de suivre les déformations du filet à moindre coût car seule la perméabilité des éléments finis changera au cours des itérations. Aucun remaillage ne sera requis dès lors qu'un maillage initial suffisamment fin sera construit dans la zone où se déformera le filet.

Comme nous le verrons au chapitre 6, nous avons conservé dans un premier temps un maillage reposant sur la géométrie des obstacles (maillage dit conforme). Nous avons également fait les premiers essais de maillage non conformes. Dans l'Annexe A, nous verrons comment s'affranchir d'un maillage conforme à la géométrie, étape indispensable pour envisager des simulations dans le cas 3D.

4.3 Calcul des efforts hydrodynamiques exercés sur les poissons

En faisant l'hypothèse raisonnable que les efforts hydrodynamiques exercés sur le filet sont négligeables par rapport aux efforts de tensions générés par la prise dans les fils, on peut s'intéresser seulement aux efforts qu'exerce le fluide sur les poissons, considérés comme des obstacles imperméables. Notons le domaine que forme un poisson Ω_f .

Les forces surfaciques, notées H , qu'exerce le fluide sur le filet sont données par la composante normale au filet, du tenseur des contraintes fluide et turbulentes :

$$(5.4.1) \quad H = (\boldsymbol{\sigma}_T(\mathbf{U}, P, k)) \cdot \mathbf{n} = [-PId + 2\nu_T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U})] \cdot \mathbf{n}$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure au filet.

Comme il est suggéré dans [Cal94] et [KAPC00], les efforts hydrodynamiques sur les obstacles solides sont obtenus aisément puisque la vitesse à l'intérieur de ces obstacles est connue. En effet, nous devons calculer :

$$(5.4.2) \quad F = \int_{\partial\Omega_f} H ds.$$

Rappelons que le problème de Navier-Stokes/Brinkman satisfait dans le domaine entier est le suivant :

$$(5.4.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \frac{1}{\mathbf{K}} \mathbf{U} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_T(\mathbf{U}, P, k), \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \end{cases}$$

Or dans les deux domaines (solides) considérés, le coefficient de perméabilité tend vers 0, pénalisant ainsi la vitesse dans ces domaines et conduisant à négliger les termes $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}$ devant $\frac{1}{\mathbf{K}} \mathbf{U}$, réduisant ainsi le problème :

$$(5.4.4) \quad \begin{cases} \frac{1}{\mathbf{K}} \mathbf{U} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_T(\mathbf{U}, P, k) = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \end{cases}$$

Ainsi, en utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky qui permet de transformer l'intégrale de surface en une intégrale de volume,

$$(5.4.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_{\partial \Omega_f} (-P \text{Id} + 2\nu_T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U})) \cdot \mathbf{n} \, ds \\ &= \int_{\Omega_f} (-\nabla P + \nabla \cdot (2\nu_T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}))) \, dw, \text{ par Green-Ostrogradsky} \\ &= \int_{\Omega_f} \frac{1}{\mathbf{K}} \mathbf{U}. \end{aligned}$$

Ces intégrales de volume sont calculées à l'aide des éléments finis déjà construits et représentent respectivement les forces hydrodynamiques globales exercées sur l'obstacle. Les composantes de ces forces parallèle et orthogonale à la direction du flot entrant sont respectivement les forces de traînée et de portance qu'exerce le fluide sur l'obstacle en question. Cette méthode peut ainsi être utilisé pour calculer les coefficients de traînée et de portance. Des exemples sont donnés dans Khadra *et al.* [KAPC00], notamment l'étude des écoulements autour d'un cylindre chauffé et non chauffé.

Le calcul de ces efforts permet d'envisager un couplage fluide/structure dans la mesure où il sera possible de communiquer au code qui régit le filet les efforts hydrodynamiques à appliquer.

Plaçons nous à présent en dimension 2 et écrivons le problème mathématique à résoudre puis son analyse. Ce travail reprend les résultats de les articles [LP07b] et [LP07a]. Pour éviter des complications techniques, nous avons choisi d'étudier le problème mathématiques dans \mathbb{R}^2 . Le cas axisymétrique s'analyse de manière analogue en utilisant les résultats de [DBM99] sur les équations de Navier-Stokes en axisymétrique.

5 Description du problème mathématique en dimension 2

5.1 La géométrie

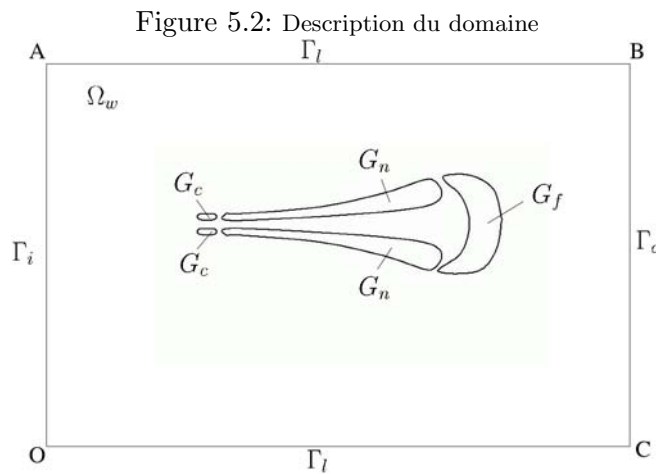
Considérons l'écoulement se produisant dans une boîte de calcul rectangulaire de sommets A, B, O et C. Sa frontière Γ est définie par sa frontière d'entrée du fluide Γ_i , ses frontières latérales Γ_l et sa frontière de sortie Γ_o :

$$(5.5.1) \quad \begin{aligned} \Gamma_i &= [O, A], & O &= (0, 0), & A &= (0, \alpha), \\ \Gamma_l &= [C, O] \cup [A, B], & B &= (\beta, \alpha), & C &= (\beta, 0), \\ \Gamma_o &= [B, C], \\ \Gamma &= \Gamma_i \cup \Gamma_l \cup \Gamma_o. \end{aligned}$$

On note :

- Ω_w le domaine occupé par l'eau,
- G_n le domaine occupé par le filet,
- G_f le domaine modélisant la prise,
- G_c le cadre sur lequel repose le filet,

$$\Omega = \Omega_w \cup G, \quad G = G_n \cup G_f \cup G_c.$$



5.2 Les inconnues

Les inconnues sont :

- le champ de vecteur vitesse moyen, $\mathbf{U} = (u_1(t, \mathbf{x}), u_2(t, \mathbf{x}))$, $\mathbf{x} = (x, y)$ (on rappelle que $\bar{\mathbf{u}}$ est noté désormais \mathbf{U})
- le champ de pression moyen modifié, $P = P(t, \mathbf{x}) = \frac{\bar{p}}{\rho} + \frac{2}{3}k$, où \bar{p} est le champ de pression moyen,
- l'énergie cinétique turbulente, $k = k(t, \mathbf{x})$.

5.3 Le système d'équations

Suivant la technique des domaines fictifs, expliquée au chapitre 1, le filet et la prise sont pris en compte directement dans les équations fluides par l'intermédiaire d'un terme de pénalisation de la vitesse, de la forme $\frac{1}{\mathbf{K}(\mathbf{x})}\mathbf{U}$ où $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ est un paramètre de perméabilité. Cela conduit à résoudre le système d'équations suivants, dit de Navier-Stokes/Brinkman turbulent avec viscosité turbulente :

$$(5.5.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \frac{1}{\mathbf{K}(\mathbf{x})} \mathbf{U} = -\nabla P + \nabla \cdot (\nu_T(k, \ell)(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)), \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \\ \frac{\partial k}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) k = \frac{\nu_t}{2} |\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T|^2 + \nabla \cdot (\mu_t(k, \ell) \nabla k) - \mathcal{E}, \\ \nu_t = C_1 \ell \sqrt{k}, \\ \nu_T = \nu + \nu_t, \\ \mu_t = C_2 \ell \sqrt{k}, \\ \mathcal{E} = \frac{C_3}{\ell} k \sqrt{k}. \end{array} \right.$$

La dimension de $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ est [s] car il s'agit formellement du rapport entre une surface caractéristique de la perméabilité [m^2] et la viscosité cinématique [$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$]. Ce paramètre varie d'un domaine à l'autre. Dans le domaine délimité par le fluide Ω_w , il prend une valeur très grande, disons $\frac{1}{\eta}$, avec $\eta > 0$ un petit paramètre. Le terme de pénalisation devient négligeable devant les autres termes de l'équation, conduisant à résoudre dans ce domaine le système d'équations de Navier-Stokes avec viscosité turbulente donné par les équations (5.3.19). Dans la prise G_f , considérée comme un obstacle imperméable, il prend une valeur très faible, soit η , forçant la vitesse à zéro dans ce domaine. Cela permet de satisfaire la condition de Dirichlet homogène sur la vitesse, traditionnellement imposée aux frontières des solides. Dans le filet G_n , vu comme un domaine poreux, la perméabilité est une fonction scalaire $K(\mathbf{x})$ continue qui satisfait :

$$(5.5.3) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < K_0 \leq K(\mathbf{x}) \leq K_1 < \infty.$$

Le système d'équations s'écrit alors :

$$(5.5.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \left(\frac{1}{\eta} (\mathbb{1}_{G_f \cup G_c}) + \frac{1}{K(\mathbf{x})} \mathbb{1}_{G_n} + \eta \mathbb{1}_{\Omega_w} \right) \mathbf{U} \\ = -\nabla P + \nabla \cdot (\nu_T(k, \ell)(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)), \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \\ \frac{\partial k}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) k = \frac{\nu_t}{2} |\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T|^2 + \nabla \cdot (\mu_t(k, \ell) \nabla k) - \mathcal{E}, \\ \nu_t = C_1 \ell \sqrt{k}, \nu_T = \nu + \nu_t, \\ \mu_t = C_2 \ell \sqrt{k}, \\ \mathcal{E} = \frac{C_3}{\ell} k \sqrt{k}. \end{array} \right.$$

Dans la suite, on pose :

$$(5.5.5) \quad \mathcal{P}(\mathbf{U})(t, \mathbf{x}) = \left(\frac{1}{\eta} (\mathbb{1}_{G_f \cup G_c}(\mathbf{x})) + \frac{1}{K(\mathbf{x})} \mathbb{1}_{G_n}(\mathbf{x}) + \eta \mathbb{1}_{\Omega_w} \right) \mathbf{U}(t, \mathbf{x}),$$

avec $\eta > 0$ fixé.

5.4 Conditions aux limites

Le champ de vitesse d'entrée $\mathbf{U}_I = (u_I, 0)$ sur la frontière Γ_i est une donnée connue du problème. Les conditions aux limites que nous considérons sont les suivantes :

$$(5.5.6) \quad \text{on } \Gamma_i : \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}_I = (u_I, 0), \quad k = 0,$$

$$(5.5.7) \quad \text{on } \Gamma_l : \quad \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad k = 0,$$

$$(5.5.8) \quad \text{on } \Gamma_o : \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_T(\mathbf{U}, P, k) \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{2}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})^-(\mathbf{U} - \mathbf{U}_I) + (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})\mathbf{U}_I \\ k = 0. \end{cases}$$

Dans la formule ci-dessus, \mathbf{U}_I correspond au champ égal à $(u_I(x - \beta), 0)$ sur Γ_o . La condition aux limites (5.5.8) évite les réflexions à la frontière artificielle Γ_o , et qui permet également de prouver l'existence d'une solution dissipative au problème (5.5.4) et d'avoir une estimation *a priori*.

Remarque 5.5.1 *La condition naturelle pour la vitesse en sortie de boîte de calcul est souvent $\boldsymbol{\sigma}_T(\mathbf{U}, P, k) \cdot \mathbf{n} = 0$. Dans [BF96], les auteurs étudient le cas des équations de Navier-Stokes sans modèle de turbulence et dans une conduite en l'absence d'obstacle. Ils remarquent que la condition numérique $\boldsymbol{\sigma}_T(\mathbf{U}, P, k) \cdot \mathbf{n} = 0$ conduit à des réflexions sur la frontière de sortie. De plus, l'existence d'une solution dissipative n'est pas connue dans ce cas, car un terme issu de la convection, $\int_{\Gamma_o} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) |\mathbf{U}|^2$, apparaît dans l'égalité d'énergie. Sans information additionnelle sur le signe de $(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})$ sur Γ_o , il n'est pas possible d'établir une estimation à priori. C'est pour cette raison que les auteurs de [BF96] changent les conditions aux limites. Ici, nous changeons également ces conditions avec une adaptation pour notre modèle turbulent. Quand l'écoulement est laminaire en sortie et que $(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) > 0$ sur Γ_o , la condition aux limites sur cette frontière se réduit à la condition classique à un terme près, $(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})\mathbf{U}_I$. Il s'agit d'un terme de forçage additionnel. Sans ce terme, on peut aisément vérifier que l'on ne peut obtenir d'estimation à priori que lorsqu'une condition de petitesse est satisfaite pour \mathbf{U}_I . Cette hypothèse réduit alors le problème à l'étude d'un cas laminaire. Ainsi, ce terme semble cohérent quand l'écoulement est turbulent. En revanche, dans les simulations numériques, nous avons pris $\boldsymbol{\sigma}_T(\mathbf{U}, P, k) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$. En effet, les expérimentations suggèrent que l'écoulement est laminaire loin du filet. Pour cette raison, nos choix sont en accord avec la réalité et conduisent à une analyse mathématique rigoureuse.*

Remarque 5.5.2 *Pour simplifier l'étude mathématique, nous avons pris $k = 0$ sur Γ_o . Une condition plus naturelle serait de prendre $\mu_t \frac{\partial k}{\partial \mathbf{n}} = 0$ sur Γ_o . Il s'agit de la condition que nous avons prise dans les simulations numériques. D'un point de vue mathématique, il faut imposer $\mu_t \frac{\partial k}{\partial \mathbf{n}} = -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^- k$ sur Γ_o . La discussion faite à la remarque 5.5.1 s'applique à nouveau. En revanche, une telle condition aux limites conduit à de sérieuses complications mathématiques lesquelles semblaient au delà du sujet de ce mémoire.*

5.5 Conditions initiales

Les conditions initiales sont données par :

$$(5.5.9) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{U}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}) \in (L^2(\Omega))^2,$$

$$(5.5.10) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad k(0, \mathbf{x}) = k_0(\mathbf{x}) \in L^1(\Omega).$$

De plus, on suppose que \mathbf{U}_0 satisfait les conditions de compatibilités suivantes :

$$(5.5.11) \quad \nabla \cdot \mathbf{U}_0 = 0,$$

$$(5.5.12) \quad \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} = u_t \quad \text{on } \Gamma_i,$$

$$(5.5.13) \quad \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_l.$$

5.6 Sur les viscosités turbulentes

La fonction de viscosité turbulente ν_T est une fonction C^1 de k et \mathbf{x} , non négative et bornée, donnée par $\nu + \ell(\mathbf{x})\sqrt{\tau + |k|}$ quand $|k| \in [0, k_c]$ pour une valeur critique k_c donnée et pour $\tau > 0$ fixé. On a ainsi :

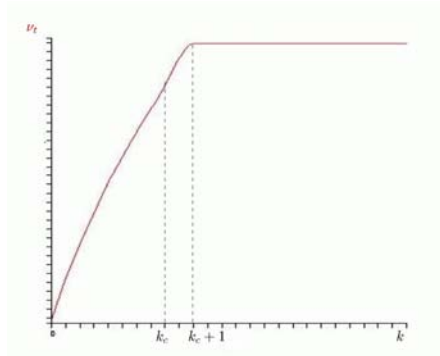
$$(5.5.14) \quad \nu_T(k, \mathbf{x}) = \nu + \ell(\mathbf{x})\sqrt{\tau + |k|}, \quad \text{si } |k| \leq k_c,$$

$$(5.5.15) \quad \nu_T(k, \mathbf{x}) = v_2, \quad \text{si } |k| \geq k_c + 1,$$

$$(5.5.16) \quad \begin{cases} \nu_T(k, \mathbf{x}) = \left(\frac{\ell(x)}{2\sqrt{\tau + k_c}} + 2v_1 - 2v_2 \right) k^3 + \left(\frac{\ell(x)(-3k_c - 2)}{2\sqrt{\tau + k_c}} + \right. \\ \left. (v_1 - v_2)(-6k_c - 3) \right) k^2 + \left(\frac{\ell(x)(1 + 3k_c^2 + 4k_c)}{2\sqrt{\tau + k_c}} + (v_1 - v_2)(6k_c^2 + 6k_c) \right) k + \\ \left. v_1 + \frac{\ell(x)(-k_c^3 - 2k_c^2 - k_c)}{2\sqrt{\tau + k_c}} + (v_1 - v_2)(-2k_c^3 - 3k_c^2) \right) \quad \text{si } k_c < k < k_c + 1. \end{cases}$$

où $\tau > 0$, $k_c > 0$, $v_2 > v_1 = \nu + \ell(\mathbf{x})\sqrt{\tau + k_c}$.

Figure 5.3: Allure de ν_t



La fonction $\ell(\mathbf{x})$ est une échelle locale de l'écoulement. Il s'agit d'une fonction de \mathbf{x} , C^1 , non négative et bornée sur Ω avec

$$(5.5.17) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < \ell_0 \leq \ell(x) \leq L_0 < \infty.$$

Numériquement, pour un maillage du domaine par des éléments finis triangulaires, sa valeur sur chaque triangle est égale à la longueur du plus grand côté de ce dernier (voir Chapitre 6).

La diffusivité effective μ_t est de la même forme que ν_t et

$$(5.5.18) \quad C_2 \ell(\mathbf{x}) \sqrt{\tilde{\tau} + |k|} \quad \text{sur } [0, k_c],$$

pour des coefficients $C_2 > 0$ et $\tilde{\tau} > 0$ fixés.

6 Analyse du problème mathématique en dimension 2

6.1 Les équations

Résumons les hypothèses :

$$(5.6.1) \quad \nu_T \in C^1, \quad \forall (k, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \Omega, \quad 0 < \nu \leq \nu_T(k, \mathbf{x}) \leq N < \infty,$$

$$(5.6.2) \quad \mu_t \in C^1, \quad \forall (k, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \Omega, \quad 0 < \mu_t(k, \mathbf{x}) \leq M < \infty,$$

$$(5.6.3) \quad \ell \in L^\infty, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < \ell_0 \leq \ell(x) \leq L_0 < \infty,$$

$$(5.6.4) \quad \mathcal{E}(k, \mathbf{x}) = \frac{C_3}{\ell(\mathbf{x})} k \sqrt{|k|},$$

$$(5.6.5) \quad K \in C^1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < K_0 \leq K(\mathbf{x}) \leq K_1 < \infty.$$

$$(5.6.6) \quad \mathbf{U}_0 \in L^2(\Omega), \quad \nabla \cdot \mathbf{U}_0 = 0, \quad \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_i} = u_i, \quad \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_l} = 0,$$

$$(5.6.7) \quad k_0 \in L^1(\Omega), \quad k_0 \geq 0 \text{ p.p.},$$

$$(5.6.8) \quad \mathbf{u}_i \in H_{00}^{3/2}(\Gamma_i).$$

Le problème est le suivant :

Trouver (\mathbf{U}, P, k) tels que :

$$(5.6.9) \quad \partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \mathcal{P}(\mathbf{U}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_T(\mathbf{U}, P, k),$$

$$(5.6.10) \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0,$$

$$(5.6.11) \quad \partial_t k + (\mathbf{U} \cdot \nabla) k - \nabla \cdot (\mu_t(k, \mathbf{x}) \nabla k) = 2\nu_t(k, \mathbf{x}) |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U})|^2 - \mathcal{E}(k, \mathbf{x}).$$

$$(5.6.12) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{U}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}),$$

$$(5.6.13) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad k(0, \mathbf{x}) = k_0(\mathbf{x}),$$

$$(5.6.14) \quad \mathbf{U}|_{\Gamma_i} = \mathbf{U}_i = (u_i, 0), \quad k|_{\Gamma_i} = 0,$$

$$(5.6.15) \quad \mathbf{U}|_{\Gamma_l} = \mathbf{0}, \quad k|_{\Gamma_l} = 0,$$

$$(5.6.16) \quad \boldsymbol{\sigma}_T(\mathbf{U}, P, k) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_o} = -\frac{1}{2}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})^- (\mathbf{U} - \mathbf{U}_i) + (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{U}_i,$$

$$(5.6.17) \quad k|_{\Gamma_o} = 0.$$

Apportons quelques précisions quant à l'hypothèse 5.6.8. Un champ \mathbf{v} défini sur Γ_l est dans l'espace H_{00}^s ($s > 0$ donné) si et seulement si

$$\int_0^\alpha \frac{|\mathbf{v}(y)|^2}{y^{2s}} dy < +\infty \quad \text{et} \quad \int_0^\alpha \frac{|\mathbf{v}(y)|^2}{(\alpha - y)^{2s}} dy < +\infty,$$

voir par exemple [LM68], chapitre 1, §11 ou [DBM03] chapitre 6.

Cette hypothèse technique signifie que le champ \mathbf{v} va suffisamment vite vers zéro aux bords. Dans notre cas, on prend $s = 3/2$ pour étendre u_l par zéro sur Γ_l avec suffisamment de régularité du fait de la condition d'adhérence sur Γ_l (voir la Remarque 5.6.3 ci-après). Ainsi, comme nous le montrons dans la suite, il sera possible de relever la condition aux bords en incluant les informations dans les équations avec suffisamment de régularité, ce qui nous permet alors de travailler avec des conditions aux limites homogènes, plus appropriées pour l'analyse mathématique.

Dans les simulations numériques, nous avons choisi de prendre un écoulement entrant u_l uniforme sur Γ_i pour simplifier (voir chapitre 6). Nous avons alors imposé des conditions aux limites de glissement pour la vitesse sur les bords Γ_l ce qui permet d'éviter une couche limite artificielle sur cette frontière.

Le théorème principal est le suivant :

Théorème 5.6.1 *Supposons les hypothèses [(5.6.1)...(5.6.8)]. Alors le problème [(5.6.9)...(5.6.17)] admet une solution (\mathbf{U}, P, k) pour tout intervalle de temps $[0, T]$ au sens des distributions, avec*

$$(5.6.18) \quad \mathbf{U} \in L^2([0, T], (H^1(\Omega))^2) \cap L^\infty([0, T], (L^2(\Omega))^2),$$

$$(5.6.19) \quad P \in L^2([0, T] \times \Omega),$$

$$(5.6.20) \quad k \in L^\infty([0, T], L^1(\Omega)) \cap \left(\bigcap_{p < \frac{4}{3}} L^p([0, T], W^{1,p}(\Omega)) \right).$$

Remarque 5.6.1 *Il faut mentionner que la théorie des équations de Navier-Stokes avec des conditions transparentes sans modèle de turbulence, est entièrement traitée dans le chapitre V du livre de F. Boyer et P. Fabrie [BF06]. Lorsque ν_t est une constante, on trouve dans [BF06], Théorème V.2.1 page 249, un résultat d'existence et d'unicité dans le cas de la dimension 2. Notre démonstration suit les arguments de [BF06] pour l'équation du fluide combinés à ceux de [Lew97a] et [Lew97b] pour l'équation de l'énergie cinétique turbulente. Ce qui est nouveau ici est la preuve de la compacité dans $L^1([0, T] \times \Gamma_0)$ du terme de bord $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^+ |\mathbf{u}|^2$ qui apparaît dans le bilan d'énergie. Notons cependant que les arguments de [BF06] pour l'unicité ne s'appliquent pas directement en raison de la présence de la viscosité turbulente ν_t . On conjecture néanmoins que l'unicité a lieu quand ν_t a une dérivée bornée dont la norme infinie est assez petite.*

6.2 Relèvement des conditions aux limites

a/ Problème de Stokes auxiliaire

Dans cette partie, nous décrivons comment relever les conditions aux limites sur la frontière Γ_i pour réduire le problème à un problème avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes.

Rappelons que Ω_w est le domaine fluide et que G est le domaine délimité par le filet (partie 5.5.1).

L'écoulement d'entrée \mathbf{U}_I est imposée sur le bord Γ_i . On définit \mathbf{U}_I sur la frontière de sortie Γ_o et on conserve la notation \mathbf{U}_I pour le champ défini par :

$$\forall \mathbf{x} = (x, y) \in \Gamma_o, \quad \mathbf{U}_I(x, y) = (u_l(x - \beta), 0).$$

Considérons le problème de Stokes suivant :

$$(5.6.21) \quad \begin{aligned} -\Delta \mathbf{v}_0 + \nabla q_0 &= \mathbf{0} && \text{dans } \Omega_w, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_0 &= 0 && \text{dans } \Omega_w, \\ \mathbf{v}_0 &= \mathbf{g} && \text{sur } \Gamma \cup \partial G, \end{aligned}$$

avec le champ \mathbf{g} défini par :

$$(5.6.22) \quad \begin{aligned} \text{sur } \Gamma_i \cup \Gamma_o, & \quad \mathbf{g} = \mathbf{U}_I, \\ \text{sur } \Gamma_l \cup \partial G, & \quad \mathbf{g} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

Notons que la condition de compatibilité suivante est satisfaite :

$$(5.6.23) \quad \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Dans la suite, nous notons :

$$L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0\}.$$

Théorème 5.6.2 *Supposons que $u_I \in H_{00}^{3/2}(\Gamma_i)$ (hypothèse (5.6.8)). Alors le problème [(5.6.21) – (5.6.22)] possède une solution unique $(\mathbf{v}_0, q_0) \in (H^2(\Omega_w) \times H^1(\Omega_w)) \cap L_0^2(\Omega_w)$.*

Preuve. Le Corollaire 5.9 de [DBM03] établit que $\mathbf{g} \in [H^{3/2}(\Gamma)]^2$ car $u_I \in H_{00}^{3/2}(\Gamma_i)$. D'autre part, \mathbf{g} satisfait la condition de compatibilité (5.6.23). De plus, Ω_w est un polygone convexe en dimension 2. Ainsi, en appliquant le Théorème 5.4 et la Remarque 5.6 de [VG86] I §5 (voir également [Gri78]), on déduit l'existence d'une unique solution $(\mathbf{v}_0, q_0) \in H^2(\Omega_w) \times (H^1(\Omega_w) \cap L_0^2(\Omega_w))$ au Problème [(5.6.21) – (5.6.22)].

Remarque 5.6.2 *Comme $\mathbf{g} \in [H^{3/2}(\Gamma)]^2$, la trace sur Γ_o de $\varepsilon(\mathbf{v}_0)$ est dans $[H^{1/2}(\Gamma_o)]^4$ et la trace de q_0 sur Γ_o est dans $H^{1/2}(\Gamma_o)$. Ainsi, comme ν_t est une fonction bornée, pour tout $k \in L^1(\Omega)$,*

$$(5.6.24) \quad \sigma_{\mathbf{T}}(\mathbf{v}_0, q_0, k) \in [H^{1/2}(\Gamma_o)]^4.$$

Dans la suite, nous conserverons la notation \mathbf{v}_0 pour désigner le champ défini sur tout Ω , égal à \mathbf{v}_0 dans Ω_w (partie vitesse de la solution du Problème [(5.6.21) – (5.6.22)]) et égal à 0 dans G . Comme

- $H^2(\Omega_w) \subset L^\infty(\Omega_w)$ et Ω_w satisfait la condition de cône [Ada91],
- ∂G est de classe C^1 , nous pouvons utiliser la Proposition IX.18 de [Bre93] pour obtenir

$$(5.6.25) \quad \mathbf{v}_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

et

$$(5.6.26) \quad \|\mathbf{v}_0\|_{H^1(\Omega)} + \|\mathbf{v}_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u_I\|_{H_{00}^{3/2}(\Gamma_i)},$$

où C ne dépend que de α et β . L'extension de q_0 par zéro en dehors de Ω_w , toujours notée q_0 , donne

$$(5.6.27) \quad \sigma_{\mathbf{T}}(\mathbf{v}_0, q_0, k) \in [L^2(\Omega)]^4.$$

Notons également que

$$(5.6.28) \quad \mathcal{P}(\mathbf{v}_0) = \mathbf{0}.$$

Remarque 5.6.3 *Le choix de l'espace $H_{00}^{3/2}(\Gamma_i)$ est motivé par les estimations (5.6.26). En effet, nous avons besoin que le relèvement \mathbf{v}_0 soit non seulement de type H^1 mais également borné.*

b/ Changement de variables

On pose :

$$(5.6.29) \quad \mathbf{U} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0, \quad P = \tilde{p} + q_0.$$

On obtient directement que $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}, k)$ satisfait le système d'équations suivant :

$$(5.6.30) \quad \begin{cases} \partial_t \tilde{\mathbf{u}} + (\tilde{\mathbf{u}} \nabla) \tilde{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_T(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}, k) + \mathcal{P}(\tilde{\mathbf{u}}) + \\ (\tilde{\mathbf{u}} \nabla) \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0 \nabla) \tilde{\mathbf{u}} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_T(\mathbf{v}_0, q_0, k) = \mathbf{0}, \end{cases}$$

$$(5.6.31) \quad \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0,$$

$$(5.6.32) \quad \begin{cases} \partial_t k + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla k - \nabla \cdot (\mu_t(k, \mathbf{x}) \nabla k) = 2\nu_t(k, \mathbf{x}) |\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})|^2 - \mathcal{E}(k, \mathbf{x}) + \\ 4\nu_t(k, \mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0) + 2\nu_t(k, \mathbf{x}) |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0)|^2 - \mathbf{v}_0 \nabla k. \end{cases}$$

$$(5.6.33) \quad \tilde{\mathbf{u}}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_0, \quad k|_{t=0} = k_0,$$

$$(5.6.34) \quad \tilde{\mathbf{u}}|_{\Gamma_i \cup \Gamma_l} = \mathbf{0}, \quad k|_{\Gamma_i \cup \Gamma_l} = 0,$$

$$(5.6.35) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_T(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}, k) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_o} = \\ -\frac{1}{2} [(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n}]^- \tilde{\mathbf{u}} + [(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{v}_0 - \boldsymbol{\sigma}_T(\mathbf{v}_0, q_0, k)|_{\Gamma_o} \cdot \mathbf{n}, \end{cases}$$

$$(5.6.36) \quad k|_{\Gamma_o} = 0.$$

6.3 Formulation variationnelle

a/ Espaces fonctionnels

L'espace naturel pour étudier le Problème [(5.6.30) – (5.6.35)] est l'espace :

$$(5.6.37) \quad V = \{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2; \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad \mathbf{v}|_{\Gamma_i \cup \Gamma_l} = \mathbf{0}. \}$$

Afin d'utiliser le Théorème de de Rham et avoir une condition Inf-Sup sur la pression, il faut vérifier que les champs de vecteurs réguliers à divergence nulle et égaux à zéro sur $\Gamma_i \cup \Gamma_l$ forment un espace dense dans V . C'est l'objet de ce qui suit.

Soient $\tilde{B} = (2\beta, \alpha)$, $\tilde{C} = (2\beta, 0)$ et soit $\tilde{\Omega}$ le carré dans \mathbb{R}^2 borné par les points O , A , \tilde{B} et \tilde{C} . Soit s la symétrie d'axe $x = \beta$: $s(x, y) = (2\beta - x, y)$.

Notons Ω^s le carré borné par les points C , \tilde{C} , \tilde{B} and B , également défini par $\Omega^s = s(\Omega)$.

Soit \tilde{V} l'ensemble

$$\tilde{V} = \left\{ \mathbf{v} \in (H^1(\tilde{\Omega}))^2; \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad \mathbf{v}|_{\partial\tilde{\Omega}} = \mathbf{0} \right\}$$

et

$$\tilde{\mathcal{V}} = \left\{ \mathbf{v} \in (\mathcal{D}(\tilde{\Omega}))^2; \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \right\}.$$

Etant donné $\mathbf{v} \in \tilde{V}$, soit \mathbf{v}_r sa restriction sur le carré Ω . On a alors $\mathbf{v}_r \in V$.

Etant donné $\mathbf{v} \in V$, soit \mathbf{v}^e son extension à $\tilde{\Omega}$ défini comme suit :

$$(5.6.38) \quad \begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{v}^e(\mathbf{x}) &= \mathbf{v}(\mathbf{x}), \\ \forall \mathbf{x} \in \Omega^s, \quad \mathbf{v}^e(\mathbf{x}) &= \mathbf{v}(s(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Notons que $\mathbf{v}^e \in \tilde{V}$ et que :

$$(5.6.39) \quad \int_{\Omega^s} |\nabla \mathbf{v}^e|^2 = 2 \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2, \quad \forall p \in [1, \infty[, \quad \int_{\Omega^s} |\mathbf{v}^e|^p = 2 \int_{\Omega} |\mathbf{v}|^p.$$

Enfin, soit \mathcal{V} l'espace des restrictions sur Ω des champs dans $\tilde{\mathcal{V}}$:

$$(5.6.40) \quad \mathcal{V} = \left\{ \mathbf{v} \in [C^\infty(\Omega)]; \exists \tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathcal{V}} \text{ t.q. } \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}_r \right\}$$

On peut prouver le lemme suivant :

Lemme 5.6.1 *L'espace \mathcal{V} est dense dans V .*

Preuve. Soit $\mathbf{v} \in V$. Comme $\tilde{\Omega}$ est simplement connexe et possède une frontière Lipschitzienne, grâce au Corollaire 2.5 de [VG86], $\tilde{\mathcal{V}}$ est dense dans \tilde{V} . Alors il existe une suite $(\mathbf{w}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de champs de $\tilde{\mathcal{V}}$ qui converge vers \mathbf{v}^e dans l'espace \tilde{V} . De plus,

$$\int_{\Omega} |\nabla((\mathbf{w}_n)_r - \mathbf{v})|^2 \leq \int_{\Omega^s} |\nabla(\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^e)|^2.$$

Cela montre que la suite $((\mathbf{w}_n)_r)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers \mathbf{v} dans V et comme chaque $(\mathbf{w}_n)_r$ est dans \mathcal{V} par définition, cela prouve le lemme.

b/ Le problème variationnel

Pour simplifier les notations, notons $\nu_T(k)$ au lieu $\nu_T(k, \mathbf{x})$. Notons que $\forall (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathcal{V}^2, \forall (k, q) \in \mathcal{D}(\Omega)^2$ on a

$$- \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_T(\mathbf{v}_1, q, k)) \cdot \mathbf{v}_2 = - \int_{\Gamma_o} (\boldsymbol{\sigma}_T(\mathbf{v}_1, q, k) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_2 + \int_{\Omega} 2 \nu_T(k) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2).$$

La formulation variationnelle du problème est donnée ci-dessous. La pression n'apparaît plus et le théorème de De-Rham permettra de la retrouver *a posteriori*. Dans la suite on note

$$(5.6.41) \quad W = L^2([0, T], V) \cap L^\infty([0, T], (L^2(\Omega))^2).$$

Formulation variationnelle :

TROUVER

$$(5.6.42) \quad \tilde{\mathbf{u}} \in W, \quad \tilde{\mathbf{u}}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad p.p. \text{ dans } \Omega$$

$$(5.6.43) \quad k \in L^\infty([0, T], L^1(\Omega)) \cap \left(\bigcap_{p < 4/3} L^p([0, T], W_0^{1,p}(\Omega)) \right)$$

ET TEL QUE $\forall \mathbf{v} \in V$ ON AIT DANS $\mathcal{D}'([0, T])$

$$(5.6.44) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}} \otimes (\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) : \nabla \mathbf{v} + \int_{\Omega} 2 \nu_T(k) \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) + \\ \int_{\Gamma_o} \left([(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n}] + \frac{1}{2} [(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n}]^- \right) \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} + \\ \int_{\Omega} \mathcal{P}(\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} \mathbf{v}_0 \otimes (\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) : \nabla \mathbf{v} + \int_{\Omega} 2 \nu_T(k) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = 0, \end{cases}$$

POUR CHAQUE $r \in \mathcal{D}([0, T] \times \Omega)$, AVEC $r(T, \cdot) = 0$,

$$(5.6.45) \quad \begin{cases} - \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t r k + \int_0^T \int_{\Omega} ((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \nabla) k . r + \int_0^T \int_{\Omega} \mu_t(k) \nabla k : \nabla r = \\ \int_{\Omega} k_0(\mathbf{x}) r(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_0^T \int_{\Omega} [2 \nu_t(k) |\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}})|^2 - \mathcal{E}(k) + \nu_t(k) (4 \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) : \varepsilon(\mathbf{v}_0) + 2 |\varepsilon(\mathbf{v}_0)|^2)] r \end{cases}$$

c/ Cohérence de la formulation variationnelle

La formulation variationnelle de l'équation pour k est classique, voir par exemple [Lew97b], [Lew97a], [Lew06] et [LL07]. La formulation variationnelle pour la vitesse est également classique et généralise la formulation donnée dans [BF06] page 248. La difficulté ici par rapport aux problèmes classiques liés aux équations de Navier-Stokes est due aux termes de bord. Les Lemmes suivant montrent l'intégrabilité de ces termes, ce qui permet de donner un sens à la formulation (5.6.44).

Lemme 5.6.2 *Soit $(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \in W \times W$. Alors*

$$(5.6.46) \quad \int_0^T \int_{\Gamma_o} [\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}]^- \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \leq C \|\tilde{\mathbf{u}}\|_W^2 \|\mathbf{v}\|_W,$$

où C est une constante qui ne dépend que de α et β . De plus, il existe également une constante \tilde{C} telle que

$$(5.6.47) \quad \forall \mathbf{v} \in L^{8/3}([0, T], V), \quad \int_0^T \int_{\Gamma_o} [\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}]^- \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \leq C \|\tilde{\mathbf{u}}\|_W^2 \|\mathbf{v}\|_{L^{8/3}([0, T], V)}$$

Preuve. Soit $\mathbf{v} \in W$. On part de l'inégalité classique d'interpolation (voir [LM68])

$$\|\mathbf{v}\|_{H^{3/4}} \leq \|\mathbf{v}\|_{L^2}^{1/4} \|\mathbf{v}\|_{H^1}^{3/4}.$$

On en déduit en utilisant l'inégalité de Young,

$$(5.6.48) \quad \|\mathbf{v}\|_{L^{8/3}(H^{3/4})} \leq \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(L^2)}^{1/4} \|\mathbf{v}\|_{L^2(V)}^{3/4} \leq \frac{1}{4} \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(L^2)} + \frac{3}{4} \|\mathbf{v}\|_{L^2(V)} \leq \|\mathbf{v}\|_W.$$

Par le Théorème de trace,

$$(5.6.49) \quad \|\mathbf{v}\|_{L^{8/3}(H^{1/4}(\Gamma_o))} \leq C \|\mathbf{v}\|_W.$$

De plus, grâce au Théorème de Sobolev,

$$(5.6.50) \quad \|\mathbf{v}\|_{L^{8/3}(L^4(\Gamma_o))} \leq C \|\mathbf{v}\|_{L^{8/3}(H^{1/4}(\Gamma_o))} \leq C \|\mathbf{v}\|_W.$$

Soit $\tilde{\mathbf{u}} \in W$. Il est évident que sur Γ_0 ,

$$\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \in L^\infty(H^{-1/2}(\Gamma_0)) \cap L^2(H^{1/2}(\Gamma_0)).$$

Par une inégalité d'interpolation simple, on en déduit facilement que :

$$(5.6.51) \quad \|\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}\|_{L^4(L^2(\Gamma_o))} \leq C \|\tilde{\mathbf{u}}\|_W.$$

Ainsi, $(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n})\tilde{\mathbf{u}} \in L^{8/5}(L^{4/3}(\Gamma_0))$, de même que $(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n})^- \tilde{\mathbf{u}}$ et on obtient :

$$(5.6.52) \quad \|(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n})^- \tilde{\mathbf{u}}\|_{L^{8/5}(L^{4/3}(\Gamma_0))} \leq C \|\tilde{\mathbf{u}}\|_W^2.$$

Le reste de la preuve est une conséquence directe de (5.6.48), (5.6.50) et de l'inégalité de Hölder.

On mentionne le résultat plus général que l'on peut trouver dans [BF06], Théorème V.2.2 page 249.

Lemme 5.6.3 *Soit \mathcal{O} un ouvert borné Lipchitzien de \mathbb{R}^2 et $\partial\mathcal{O}$ sa frontière. Alors pour chaque r avec $2 \leq r < \infty$, il existe une constante C telle que pour chaque $v \in H^1(\mathcal{O})$ on a*

$$(5.6.53) \quad \|v\|_{L^r(\partial\mathcal{O})} \leq C \|v\|_{L^2(\mathcal{O})}^{\frac{1}{r}} \|v\|_{H^1(\mathcal{O})}^{1-\frac{1}{r}}.$$

6.4 Estimation A priori

Proposition 5.6.1 *Il existe une constante $C_a = C_a(\mathbf{u}_0, u_I, \nu, \alpha, \beta)$ et pour chaque $p < 4/3$, une constante $C_b = C_b(\mathbf{u}_0, u_I, \nu, \mu, p, \alpha, \beta)$ telles que, pour toute solution régulière $(\tilde{\mathbf{u}}, k)$ du problème variationnel [(5.6.45), (5.6.44)], on ait*

$$(5.6.54) \quad \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2([0,T],V)} + \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^\infty([0,T],L^2(\Omega))} \leq C_a,$$

$$(5.6.55) \quad \|k\|_{L^p([0,T],W^{1,p}(\Omega))} \leq C_b.$$

Preuve. Nous procédons en deux étapes. Tout d'abord, on fait une estimation de la vitesse et, dans une deuxième étape, une estimation de l'énergie cinétique turbulente (ECT).

Étape 1. Estimation de la vitesse. On multiplie l'équation (5.6.30) par $\tilde{\mathbf{u}}$ et on intègre sur Ω . Un calcul simple mais un peu technique qui utilise la condition aux limites $\tilde{\mathbf{u}}$ (5.6.35) conduit à :

$$(5.6.56) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} 2\nu_T(k) |\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})|^2 + \int_{\Omega} 2\nu_T(k) \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0) + \int_{\Omega} \mathcal{P}(\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \otimes \mathbf{v}_0 : \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} ((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^+ |\tilde{\mathbf{u}}|^2 = 0.$$

Comme

$$0 \leq \int_{\Omega} \mathcal{P}(\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} ((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^+ |\tilde{\mathbf{u}}|^2,$$

en utilisant (5.6.1) et (5.6.25), l'égalité d'énergie (5.6.56) devient

$$(5.6.57) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} 2\nu_T(k) |\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})|^2 \leq N \int_{\Omega} |\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})| |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0)| + \|\mathbf{v}_0\|_{\infty} \int_{\Omega} |\tilde{\mathbf{u}}| |\nabla \tilde{\mathbf{u}}| + \|\mathbf{v}_0\|_{\infty}^2 \int_{\Omega} |\nabla \tilde{\mathbf{u}}|.$$

On utilise ici le fait que ν_T soit borné.

En utilisant les inégalités de Young et Korn [Cia86], on obtient :

$$(5.6.58) \quad \int_{\Omega} |\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})| |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0)| \leq \frac{1}{2\zeta} \int_{\Omega} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0)|^2 + \frac{\zeta}{2} \int_{\Omega} |\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})|^2,$$

$$(5.6.59) \quad \int_{\Omega} |\tilde{\mathbf{u}}| |\nabla \tilde{\mathbf{u}}| \leq \left(\frac{1}{2\zeta} + C \right) \int_{\Omega} |\tilde{\mathbf{u}}|^2 + \frac{\zeta}{2} C \int_{\Omega} |\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})|^2.$$

avec ζ fixé par la suite et C la constante issue de l'inégalité de Korn. Finalement, en combinant l'inégalité de Young à celle de Cauchy-Schwarz,

$$(5.6.60) \quad \|\mathbf{v}_0\|_\infty^2 \int_\Omega |\nabla \tilde{\mathbf{u}}| \leq \frac{\alpha\beta}{2\zeta} \|\mathbf{v}_0\|_\infty^4 + \frac{\zeta}{2} \int_\Omega |\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}})|^2.$$

Ainsi, (5.6.57) combiné à (5.6.1) donne

$$(5.6.61) \quad \begin{aligned} \frac{d}{2dt} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (2\nu - (\zeta/2)(N + C + 1)) \int_\Omega |\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}})|^2 &\leq \left(\frac{1}{2\zeta} + C\right) \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \frac{N}{2\zeta} \int_\Omega |\varepsilon(\mathbf{v}_0)|^2 \\ &+ \frac{\alpha\beta}{2\zeta} \|\mathbf{v}_0\|_\infty^4 \end{aligned}$$

On choisit ζ tel que $(2\nu - (\zeta/2)(N + C + 1)) = \nu/2$. On déduit de (5.6.61) et du lemme de Gronwall, combiné à l'inégalité de Korn, l'existence de $\tilde{C} = \tilde{C}(\mathbf{u}_1, N, \nu_0, \alpha, \beta, T, \mathbf{u}_0)$, croissant avec un taux en e^T tel que

$$(5.6.62) \quad \|\tilde{\mathbf{u}}\|_W = \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^\infty([0,T],L^2(\Omega))} + \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2([0,T],V)} \leq \tilde{C}.$$

Etape 2. Estimation pour l'ECT. En utilisant les mêmes arguments que ceux dans [Lew97b] ou [Lew97a], on peut s'assurer que $k \geq 0$ p.p. à partir du moment où on suppose $k_0 \geq 0$. Les termes frontières ne posent pas de problème puisque :

$$\int_0^T \int_{\Gamma_o} ((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^- k (-k^-) = \int_0^T \int_{\Gamma_o} ((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^- (k^-)^2 \geq 0.$$

Les autres termes sont les mêmes que ceux étudiés dans [Lew97a] chapitre 4. Dans la suite, on travaille avec $k \geq 0$.

Grâce à (5.6.62), on peut utiliser l'estimation classique de Boccardo-Gallouët (voir [LB89]). Par une preuve déjà effectuée dans [Lew97b], [Lew97a], [Lew06] et [LL07] et comme on travaille en 2D et que $k = 0$ sur $\partial\Omega$, on en déduit que

$$(5.6.63) \quad \exists \bar{C} = \bar{C}(\mathbf{u}_1, N, \nu_0, \alpha, \beta, T, \mathbf{u}_0); \quad \|k\|_{L^\infty([0,T],L^1(\Omega))} \leq \bar{C},$$

et

$$(5.6.64) \quad \forall p < 4/3, \quad \exists \hat{C} = \hat{C}(p, \mathbf{u}_1, N, \nu_0, \alpha, \beta, T, \mathbf{u}_0); \quad \|k\|_{L^p([0,T],W_0^{1,p}(\Omega))} \leq \hat{C}.$$

6.5 Fin de la preuve du Théorème

On considère une suite $(\tilde{\mathbf{u}}_j, k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de solutions "régulières". La construction de solutions approchées est standard en tronquant par exemple le terme de production dans l'équation pour k et le terme de bord dans l'équation pour $\tilde{\mathbf{u}}$. On passe sur ce point. On s'intéresse à la question du passage à la limite dans les équations.

On note toujours de la même manière les suites extraites, sans le mentionner systématiquement.

Comme la suite $(\tilde{\mathbf{u}}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est bornée dans W , on peut en extraire une sous-suite faiblement convergente dans $L^2([0, T], V)$ vers $\tilde{\mathbf{u}} \in L^2([0, T], V)$ et qui converge aussi faible \star vers $\tilde{\mathbf{u}}$ dans $L^\infty([0, T], (L^2)^2)$. En particulier $\tilde{\mathbf{u}} \in W$.

De même, on peut extraire une sous-suite de la suite $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $k \in \cap_{p < 4/3} L^p(W_0^{1,p})$ (cela marche pour tous les exposants inférieurs à 4/3 et pour la même sous-suite, voir dans [Lew97a]).

On cherche maintenant de la compacité forte en commençant par les champs de vitesse. Nous notons que l'on a les injections

$$V \subset V_{3/4} \subset V',$$

avec

$$V_{3/4} = \{\mathbf{v} \in (H^{3/4}(\Omega))^2, \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \mathbf{v}_{\Gamma_i \cup \Gamma_l} = 0\}.$$

La première injection est dense et compacte et la deuxième est dense (voir ce qui est fait dans [LM68]). Les bornes obtenues plus haut montrent que la suite $(\partial_t \tilde{\mathbf{u}}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^{8/5}([0, T], V')$ (ceci est dû à (5.6.48), les autres termes étant comme d'habitude en 2D dans $L^2([0, T], V')$). Donc en utilisant le Lemme d'Aubin-Lions et la borne de $(\tilde{\mathbf{u}}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ dans W , on note que la suite $(\tilde{\mathbf{u}}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est compacte dans $L^{8/5}([0, T], V_{3/4})$. On en déduit aussi que les traces de $(\tilde{\mathbf{u}}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sont compactes dans $L^{8/5}([0, T], (L^4(\Gamma_0))^2)$. En particulier, par le théorème de Lebesgues inverse (voir dans [Bre93]), on peut en extraire une sous-suite qui converge presque partout vers la trace de $\tilde{\mathbf{u}}$ sur Γ_0 .

On s'intéresse à présent à l'équation pour k . Ici, la suite $(\partial_t k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est bornée seulement dans $L^1([0, T] \times \Omega)$ en raison du terme de production $\nu_t(k_j)|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_j)|^2$ (les autres termes de l'équation ne posent pas de problème, cela se passe comme dans [Lew97a], [Lew97b], [Lew06], [LL07]). Cela étant, pour s assez grand, $L^1 \subset W^{-1,s}$ et donc on a les injection, en fixant un p avec $1 < p < 4/3$

$$W_0^{1,p} \subset L^1 \subset W^{-1,s},$$

les injections étant denses et la première compacte. En appliquant la généralisation de J. Simon du Lemme d'Aubin-Lions (voir [Sim87]), on note que la suite $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est fortement compacte dans $L^1([0, T] \times \Omega)$. En particulier, on peut en extraire une sous-suite qui converge presque partout vers k dans $[0, T] \times \Omega$.

A partir de là, on passe à la limite dans l'équation pour le fluide dans tous les termes en suivant la démonstration du Théorème V.2.1 dans [BF06], excepté dans le terme de diffusion qui lui se traite comme dans [Lew97a], [Lew97b], [Lew06], [LL07]. Il en résulte que $(\tilde{\mathbf{u}}, k)$ satisfait (5.6.44).

Il reste à passer à la limite dans l'équation pour k . On sait que la seule difficulté est due au terme de production $(\nu_T(k_j)|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_j)|^2)$ que l'on sait borné seulement dans $L^1([0, T] \times \Omega)$. En raisonnant comme dans [Lew97a], [Lew97b], on obtient l'inégalité

$$(5.6.65) \quad \|(\nu_T(k)|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}})|^2)\|_{L^1(\Omega)} \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|(\nu_T(k_j)|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_j)|^2)\|_{L^1(\Omega)},$$

On montre dans ce qui suit que cette inégalité est une égalité, d'où la convergence des énergies, et enfin la convergence forte dans L^1 du terme de production et le passage à la limite dans l'équation pour k .

On part de l'égalité satisfaite pour chaque $\tilde{\mathbf{u}}_j$:

$$(5.6.66) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} |\tilde{\mathbf{u}}_j(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} 2\nu_T(k_j) |\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_j)|^2 d\mathbf{x} dt' dt + \\ \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} 2\nu_T(k_j) \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_j) : \varepsilon(\mathbf{v}_0) d\mathbf{x} dt' dt \\ \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} \mathcal{P}(\tilde{\mathbf{u}}_j) \cdot \tilde{\mathbf{u}}_j d\mathbf{x} dt' dt - \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{u}}_j + \mathbf{v}_0) \otimes \mathbf{v}_0 : \nabla \tilde{\mathbf{u}}_j d\mathbf{x} dt' dt + \\ \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^t \int_{\Gamma_0} ((\tilde{\mathbf{u}}_j + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^+ |\tilde{\mathbf{u}}_j|^2 d\sigma dt' dt = \frac{T}{2} \int_{\Omega} |\tilde{\mathbf{u}}(0, \mathbf{x})|^2 \end{array} \right.$$

Il est assez facile de voir que la suite $(\tilde{\mathbf{u}}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est compacte dans $(L^2([0, T] \times \Omega))^2$ et comme \mathbf{v}_0 est stationnaire dans H^2 , tous les termes passent à la limite, comme dans [Lew97a], sauf les deux termes positifs

$$\int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} 2\nu_T(k_j) |\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_j)|^2 d\mathbf{x} dt' dt, \quad \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^t \int_{\Gamma_0} ((\tilde{\mathbf{u}}_j + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^+ |\tilde{\mathbf{u}}_j|^2 d\sigma dt' dt.$$

En ce qui concerne le premier de ces termes, il conduit à une inégalité en utilisant (5.6.65). En ce qui concerne l'autre terme, on se rappelle que la suite des traces $(\tilde{\mathbf{u}}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge presque partout vers la trace de $\tilde{\mathbf{u}}$ dans $[0, T] \times \Gamma_0$. Le lemme de Fatou assure que

$$(5.6.67) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^t \int_{\Gamma_0} ((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^+ |\tilde{\mathbf{u}}|^2 d\sigma dt' dt \leq \\ & \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^t \int_{\Gamma_0} ((\tilde{\mathbf{u}}_j + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^+ |\tilde{\mathbf{u}}_j|^2 d\sigma dt' dt. \end{aligned}$$

On justifie dans ce qui suit que l'on peut prendre $\tilde{\mathbf{u}}$ comme fonction test dans (5.6.44), en suivant un argument suggéré par P. Fabrie, [Fab07].

On note

$$(5.6.68) \quad H = \{ \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_i \cup \Gamma_l} = 0 \}$$

Notons V_s l'interpolé d'ordre s entre H et V , on déduit que la solution de l'équation de Navier-Stokes appartient à $L^3([0, T], V_{\frac{2}{3}})$ et à $L^4([0, T], V_{\frac{1}{2}})$.

Les termes qui peuvent poser problème sont les termes de bords, de l'ordre de $\int_{\Gamma_0} |\tilde{\mathbf{u}}|^2 \mathbf{v}$. A l'aide des théorèmes de trace, on a en dimension 2 les inégalités suivantes :

$$(5.6.69) \quad \begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^3(\Gamma_0)} &\leq C \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{H^{\frac{1}{6}}(\Gamma_0)} \leq \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{H^{\frac{2}{3}}(\Omega)} \\ \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^3(\Gamma_0)} &\leq C \|\tilde{\mathbf{u}}\|_H^{\frac{5}{6}} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_V^{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

ce qui montre que l'on peut prendre, dans (5.6.44), \mathbf{v} dans $L^3([0, T], V_{\frac{2}{3}})$, ce qui est le cas de $\tilde{\mathbf{u}}$.

Par conséquent, on peut choisir $\tilde{\mathbf{u}}$ comme fonction test dans (5.6.44), puis en intégrant en temps deux fois on obtient

$$(5.6.70) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |\tilde{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} 2\nu_T(k) |\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}})|^2 d\mathbf{x} dt' dt + \\ \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} 2\nu_T(k) \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}_0) d\mathbf{x} dt' dt \\ \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} \mathcal{P}(\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} d\mathbf{x} dt' dt - \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \otimes \mathbf{v}_0 : \nabla \tilde{\mathbf{u}} d\mathbf{x} dt' dt + \\ \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^t \int_{\Gamma_0} ((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^+ |\tilde{\mathbf{u}}|^2 d\sigma dt' dt = \frac{T}{2} \int_{\Omega} |\tilde{\mathbf{u}}(0, \mathbf{x})|^2 \end{array} \right.$$

Par conséquent, on observe en utilisant (5.6.66) que la suite

$$\int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} 2\nu_T(k_j) |\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_j)|^2 d\mathbf{x} dt' dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^t \int_{\Gamma_0} ((\tilde{\mathbf{u}}_j + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^+ |\tilde{\mathbf{u}}_j|^2 d\sigma dt' dt$$

converge vers

$$\int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} 2\nu_T(k) |\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}})|^2 d\mathbf{x} dt' dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^t \int_{\Gamma_0} ((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^+ |\tilde{\mathbf{u}}|^2 d\sigma dt' dt, \text{ quand } j \rightarrow +\infty$$

ce qui combiné à (5.6.65) et à (5.6.67) assure que l'on peut encore extraire une sous-suite (toujours notée pareil)

$$\int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} 2\nu_T(k_j) |\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_j)|^2 d\mathbf{x} dt' dt$$

converge vers

$$\int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} 2\nu_T(k) |\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}})|^2 d\mathbf{x} dt' dt$$

tandis que

$$\int_0^T \int_0^t \int_{\Gamma_0} ((\tilde{\mathbf{u}}_j + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^+ |\tilde{\mathbf{u}}_j|^2 d\sigma dt' dt$$

converge vers

$$\int_0^T \int_0^t \int_{\Gamma_0} ((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^+ |\tilde{\mathbf{u}}|^2 d\sigma dt' dt.$$

d'où la convergence des énergies sur $[0, T'] \times \Omega$ pour chaque $T' < T$. On conclut en notant que cela ne dépend pas du choix particulier de T .

Remarque 5.6.4 *Il faut souligner que l'on n'a pas prouvé la compacité des traces de $\tilde{\mathbf{u}}_j$ dans $L^3([0, T] \times \Gamma_0)$, mais seulement la compacité dans $L^1([0, T] \times \Gamma_0)$ de $((\tilde{\mathbf{u}}_j + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^+ |\tilde{\mathbf{u}}_j|^2$.*

6.6 Condition aux limites de type Neumann pour l'ECT

Considérons le cas où k satisfait sur Γ_0

$$(5.6.71) \quad \mu_t \frac{\partial k}{\partial \mathbf{n}} = -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^- k$$

au lieu de $k = 0$. Etant donné que ce cas implique de sérieuses complications mathématiques, nous ne donnerons pas une preuve complète du résultat d'existence. Nous nous limiterons à localiser les difficultés, à donner la principale estimation *a priori* et à indiquer la direction à prendre. Les détails pourront faire l'objet d'un travail au delà du cadre de ce mémoire.

a/ Formulation variationnelle

Lorsque k satisfait (5.6.71) sur Γ_o au lieu de $k = 0$, la formulation variationnelle de l'équation pour k devient :

Pour tout $r \in C^\infty([0, T] \times \Omega)$, avec $r|_{\Gamma_i \cup \Gamma_l} = 0$ et $r(T, \cdot) = 0$,

$$(5.6.72) \quad \begin{aligned} & - \int_0^T \int_\Omega \partial_t r k + \int_0^T \int_\Omega ((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \nabla) k \cdot r + \int_0^T \int_\Omega \mu_t(k) \nabla k : \nabla r + \\ & \int_0^T \int_{\Gamma_o} ((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^- k r + \int_\Omega k_0(\mathbf{x}) r(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \\ & \int_0^T \int_\Omega [2\nu_t(k) |\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}})|^2 - \mathcal{E}(k) + \nu_t(k) (4\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) : \varepsilon(\mathbf{v}_0) + 2|\varepsilon(\mathbf{v}_0)|^2)] r \end{aligned}$$

La source des difficultés vient du terme :

$$(5.6.73) \quad I_k = \int_0^T \int_{\Gamma_o} ((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^- k r.$$

b/ Estimation a priori

On part de l'estimation *a priori*. On montre dans la suite qu'il existe une situation dans laquelle le résultat de Boccardo-Gallouët [LB89] s'applique.

Soit g une fonction non décroissante, non négative, C^1 par morceaux et bornée, définie sur \mathbb{R}^+ , $G(k) = \int_0^k g(k') dk'$. Notons que G n'est pas négative et grâce à la monotonie de g , on a :

$$(5.6.74) \quad \forall k \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leq kg(k) - G(k)$$

Ainsi, en prenant $g(k)$ comme fonction test dans (5.6.45), avec $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0$, on a :

$$(5.6.75) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dt} G(k) + \int_\Omega \mu_t(k) |g'(k)| |\nabla k|^2 + \int_{\Gamma_o} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^+ G(k) + \int_{\Gamma_o} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^- (kg(k) - G(k)) = \\ & \int_\Omega g(k) [2\nu_t(k) |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 - \mathcal{E}(k)] \end{aligned}$$

Comme g n'est pas négative, en combinant (5.6.25), (5.6.62) et (5.6.74) on obtient :

$$(5.6.76) \quad \frac{d}{dt} G(k) + \int_\Omega \mu_t(k) |g'(k)| |\nabla k|^2 \leq \tilde{C} \|g\|_\infty, \quad \tilde{C} = \tilde{C}(\mathbf{u}_1, N, \nu_0, \alpha, \beta, T).$$

Par conséquent, les résultats de [LB89] s'appliquent. Donc, les estimations (5.6.63) et (5.6.64) sont encore valables dans ce cas.

c/ Cohérence de la formulation variationnelle

Comme indiqué précédemment, la difficulté est due au terme I_k (5.6.73). Rappelons que, d'après la preuve du Lemme 5.6.2, $((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^- \in L^4([0, T], L^2(\Gamma_o))$. D'autre part, en combinant le théorème de trace avec le Théorème de Sobolev, on vérifie aisément que $k \in \cap_{p < 4/3} L^p([0, T], L^{\frac{p}{p-2}}(\Gamma_o))$.

Ici le cas critique est l'espace $L^{4/3}([0, T], L^2(\Gamma_0))$. Donc, il n'est pas garanti que l'intégrale I_k soit définie.

L'idée pour contourner cette difficulté est de renormaliser l'équation pour k , comme cela a été fait dans [Lew97a] chapitre 5 et aussi dans [Mur90]. D'une manière générale, on ne prend pas une fonction test r dans l'équation, mais $r\psi(k)$ pour des fonctions ψ à support compact.

Alors I_k devient

$$I_{k,\psi} = \int_0^T \int_{\Gamma_0} ((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^- k\psi(k) r,$$

qui est bien défini puisque $k\psi(k)$ est borné. Bien sûr, en faisant cela, de nouveaux termes apparaissent dans la formulation variationnelle et le passage à la limite dans les équations est un problème ouvert.

A cette étape, nous disposons d'un modèle fluide applicable en 3D, dont l'analyse mathématique a été effectuée en 2D et dont la généralisation au cas axisymétrique semble accessible.

Afin de tester la pertinence de ce modèle, nous allons l'appliquer au cas particulier axisymétrique de la maquette de Boulogne-sur-Mer pour lequel nous disposons de données expérimentales (cf. Chapitre 4). Le chapitre suivant présente les résultats obtenus et leurs analyses.

Chapitre 6

Tests du modèle fluide

A cette étape de notre travail, nous souhaitons tester la capacité de notre modèle fluide, présenté au chapitre 5, à reproduire l'écoulement autour d'une poche de chalut.

Disposant de données expérimentales autour d'une poche de chalut rigide (cf. Chapitre 4), nous allons le tester sur ce cas en comparant les résultats numériques avec les résultats expérimentaux.

Dans une première section, nous écrivons le problème fluide à résoudre dans le cadre simplifié de la maquette. Nous avons implémenté ce problème en utilisant le logiciel *Free-Fem++* (<http://www.freefem.org/>), qui permet de construire le maillage du domaine de calcul, d'implémenter le problème sous sa forme variationnelle et de le résoudre. Cela nous a conduit à l'écriture du code de calcul *SeaNet* qui permet la simulation de l'écoulement autour d'une poche de chalut. Nous présentons les résultats des simulations pour les deux configurations étudiées expérimentalement : filet ouvert et filet fermé (cf. Chapitre 4).

La configuration du filet ouvert est celle que nous avons le plus étudiée dans la mesure où les premières données ont été enregistrées dans cette configuration. Notre modèle contenant plusieurs paramètres, nous avons réalisé plusieurs simulations afin de trouver un jeu de paramètres satisfaisant. Puis, il s'est avéré intéressant de lancer plusieurs simulations avec des variations autour de ces paramètres de sorte de mettre en évidence leur influence sur les résultats des simulations numériques. En particulier, après avoir présenté les résultats avec une définition simple de la fonction de perméabilité du filet, nous proposons des fonctions de perméabilité plus élaborées, qui dépendent des caractéristiques physiques du filet.

Puis nous considérons le cas où l'entrée du filet est bouchée. La collecte de ces données en septembre 2006 fait que nous disposions de moins de temps pour leur étude que pour celles collectées dans la configuration précédente. Néanmoins, cela nous a permis de dégager des conclusions intéressantes sur notre modèle et sur la suite à apporter à ce travail.

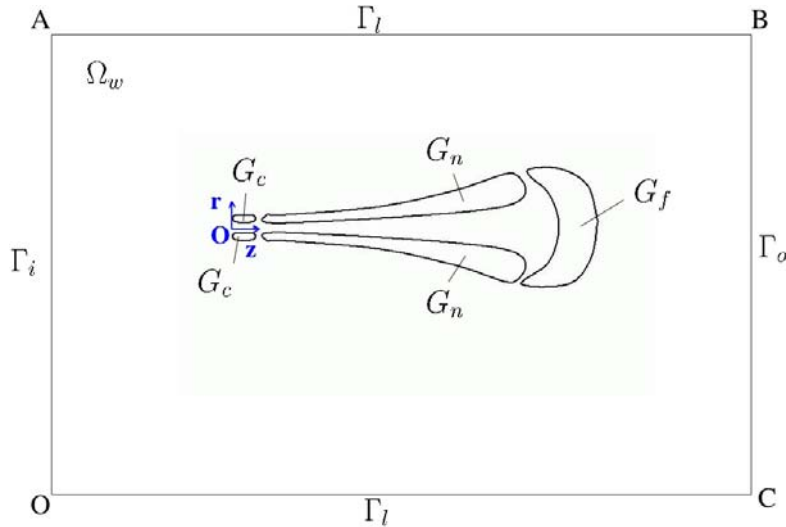
1 Ecriture du modèle fluide sous forme axisymétrique

1.1 Hypothèse d'axisymétrie

Supposons que le filet est englobé dans une boîte fictive cylindrique. Le fait de considérer le filet comme une membrane poreuse permet de réduire notre problème à un problème à deux inconnues en faisant une hypothèse d'axisymétrie. Cela suppose que l'écoulement est axisymétrique, hypothèse forte du fait des structures turbulentes

présentent à l'arrière de la prise, mais acceptable dans le cas de l'étude de l'écoulement moyen autour de la maquette rigide.

Figure 6.1: Géométrie du problème



Nous travaillons en coordonnées cylindriques en prenant pour l'axe z l'axe de révolution de la membrane (voir figure 6.1) :

$$(6.1.1) \quad \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z. \end{cases}$$

La figure 6.1 donne la géométrie du problème, ainsi que les notations utilisées. On rappelle que Ω_w désigne le domaine occupé par le fluide, G_c le domaine support de la maquette (voir figure 4.7), G_n le domaine filet et G_f le domaine formé par la prise.

On note $\Omega = \{(r, z, \theta), r \in [r_{min}, r_{max}], z \in [z_{min}, z_{max}], \theta \in [0, \pi]\}$.

Notons $\mathbf{U} = (u_r, u_\theta, u_z)$ l'inconnue en vitesse en coordonnées cylindriques.

On suppose que l'écoulement est plan, donc $u_\theta = 0$ et comme notre problème est supposé axisymétrique, les dérivées selon la variable θ sont nulles.

On se place à θ fixé et on travaille sur le domaine 2D :

$$\Omega_{r,z} = \{(r, z), r \in [r_{min}, r_{max}], z \in [z_{min}, z_{max}]\} = \Omega_w \cup G_c \cup G_n \cup G_f.$$

Dans la suite, les opérateurs (gradient, divergence) sont considérés en coordonnées cylindriques. Soit \mathbf{U} champ vectoriel et k champ scalaire :

$$(6.1.2) \quad \nabla \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$(6.1.3) \quad \nabla k = \begin{pmatrix} \frac{\partial k}{\partial r} \\ 0 \\ \frac{\partial k}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$(6.1.4) \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Le problème couplé [(5.6.9) – (5.6.13) et (5.6.71)] est implémenté sous la forme variationnelle suivante.

1.2 Formulation variationnelle

Les expérimentations effectuées au bassin d'essais de Boulogne-sur-Mer ont mis en évidence l'absence de tourbillons en sortie. De ce fait les conditions aux limites de sortie de la boîte de calcul (5.6.16) et (5.6.71) se réduisent à :

$$(6.1.5) \quad \boldsymbol{\sigma}_T(\mathbf{U}, P, k) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_o} = 0,$$

$$(6.1.6)$$

$$(6.1.7) \quad \frac{\partial k}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_o} = 0.$$

De plus, remplaçons la condition aux limites d'adhérence pour la vitesse (équation (5.6.15)) sur Γ_l par une condition de glissement et la condition de Dirichlet homogène pour k par une condition non homogène :

$$(6.1.8) \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0, \quad u_r = 0, \quad k = k_0 \quad \text{sur } \Gamma_l.$$

L'espace de solution pour la vitesse moyenne est l'espace

$$(6.1.9) \quad \mathcal{V}(\Omega_{r,z}) = \{\mathbf{v} \in (H^1(\Omega_{r,z}))^2, v_z = 0 \text{ sur } \Gamma_i, v_r = 0 \text{ sur } \Gamma_i \cup \Gamma_l\}.$$

L'espace à considérer pour la pression modifiée est le suivant :

$$(6.1.10) \quad \mathcal{Q}(\Omega_{r,z}) = \{q \in L^2(\Omega_{r,z})\},$$

et celui pour l'énergie cinétique turbulente :

$$(6.1.11) \quad \mathcal{W}(\Omega_{r,z}) = \{w \in L^2(\Omega_{r,z}), w = 0 \text{ sur } \Gamma_i \cup \Gamma_l\}.$$

La formulation variationnelle mixte du problème [(5.6.9) – (5.6.14) avec les conditions aux limites (6.1.5) – (6.1.7) – (6.1.8)] s'obtient en multipliant l'équation de Navier-Stokes/Brinkman par une fonction test $v \in \mathcal{V}(\Omega_{r,z})$ et l'équation d'incompressibilité par une fonction test $q \in \mathcal{Q}(\Omega_{r,z})$.

Après des intégrations par partie et en utilisant les conditions aux limites du problème, nous obtenons la formulation mixte suivante :

$$(6.1.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{U} = (u_r, u_\theta), P, k) \in \mathcal{V}(\Omega_{r,z}) \times \mathcal{Q}(\Omega_{r,z}) \times \mathcal{W}(\Omega_{r,z}) \\ \text{tels que } \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega_{r,z}), \forall q \in \mathcal{Q}(\Omega_{r,z}), \forall w \in \mathcal{W}(\Omega_{r,z}) : \\ \int_{\Omega_{r,z}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \mathbf{v} |r| \pi dr dz + \int_{\Omega_{r,z}} (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \mathbf{v} |r| \pi dr dz - \int_{\Omega_{r,z}} P \nabla \cdot \mathbf{v} |r| \pi dr dz \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{r,z}} (\nu_0 + \nu_t) (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) : (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) |r| \pi dr dz \\ + \int_{\Omega_{r,z}} \mathcal{P}(\mathbf{U})(t, (r, z)) \mathbf{v} |r| \pi dr dz \\ - \int_{\Omega_{r,z}} \nabla \cdot \mathbf{U} q |r| \pi dr dz = 0, \\ \int_{\Omega_{r,z}} \frac{\partial k}{\partial t} w |r| \pi dr dz + \int_{\Omega_{r,z}} (\mathbf{U} \cdot \nabla) k w |r| \pi dr dz + \int_{\Omega_{r,z}} \tilde{\nu}_t (\nabla k : \nabla w) |r| \pi dr dz \\ - \int_{\Omega_{r,z}} \frac{\nu_t}{2} |\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T|^2 w |r| \pi dr dz + \int_{\Omega_{r,z}} \frac{C_3}{\ell(\mathbf{x})} k^{\frac{3}{2}} w |r| \pi dr dz = 0. \end{array} \right.$$

avec

$$(6.1.13) \quad \begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbf{U})(t, (r, z)) &= \left(\frac{1}{K_s(r, z)} (\mathbb{1}_{G_f \cup G_c}(r, z)) + \frac{1}{K_{G_n}(r, z)} \mathbb{1}_{G_n}(r, z) \right) \\ &+ \frac{1}{K_f(r, z)} \mathbb{1}_{\Omega_w}(r, z) \mathbf{U}(t, (r, z)). \end{aligned}$$

1.3 Discrétisations par la méthode des éléments finis

Le mailleur de *Freefem++* permet de réaliser une triangulation \mathcal{T}_h du domaine $\{(r, z), r \in [r_{min}, r_{max}], z \in [z_{min}, z_{max}]\}$:

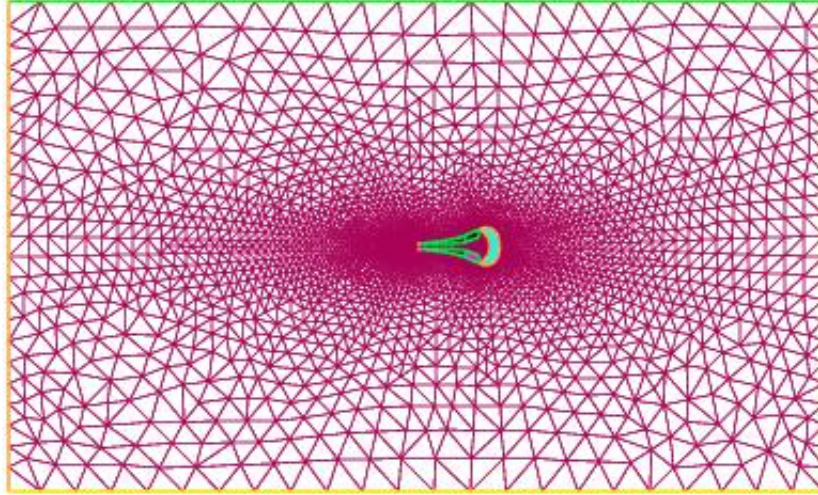
$$\mathcal{T}_h = \cup_{i=1, N} K_i.$$

Ici les éléments K_i sont des triangles. Un exemple de maillage est donné sur la figure 6.2. Rappelons que tous les domaines sont maillés, y compris l'intérieur du support G_c , le filet G_n et la prise G_f . Le raffinement du maillage se trouve dans la zone où se trouve le filet.

La discrétisation en espace des équations est basée sur la méthode des éléments finis.

Les inconnues (vitesse moyenne - pression modifiée) sont approchées à l'aide d'éléments finis P2/P1. Les espaces discrets $\mathcal{V}_h(\Omega_{r,z}) \subset \mathcal{V}(\Omega_{r,z})$ et $\mathcal{Q}_h(\Omega_{r,z}) \subset \mathcal{Q}(\Omega_{r,z})$ associés sont les suivants :

Figure 6.2: Maillage non structuré du domaine d'étude (10978 sommets - 21862 triangles)



$$(6.1.14) \quad \mathcal{V}_h(\Omega_{r,z}) = \{ \mathbf{v}_h = (v_r, v_z) \in (\mathcal{C}^0(\Omega_{r,z}))^2, \forall K_i \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_{K_i} \in P^2(K_i), \mathbf{v}_h|_{\Gamma_i \cap \partial K_i} = 0 \text{ et } v_r|_{\Gamma_l \cap \partial K_i} = 0 \},$$

$$(6.1.15) \quad \mathcal{Q}_h(\Omega_{r,z}) = \{ q_h \in \mathcal{C}^0(\Omega_{r,z}), \forall K_i \in \mathcal{T}_h, q_h \in P^1(K_i) \}.$$

On approche l'énergie cinétique turbulente k par des éléments finis P^2 . Soit l'espace discret $\mathcal{W}_h(\Omega_{r,z}) \subset \mathcal{W}(\Omega_{r,z})$:

$$(6.1.16) \quad \mathcal{W}_h(\Omega_{r,z}) = \{ w_h \in \mathcal{C}^0(\Omega_{r,z}), \forall K_i \in \mathcal{T}_h, w_h \in P^2(K_i), w_h|_{\Gamma_l \cap \partial K_i} = 0, w_h|_{\Gamma_i \cap \partial K_i} = 0 \}.$$

La formulation variationnelle discrète associée au problème (5.6.9)–(5.6.14), (6.1.5)–(6.1.7) – (6.1.8) s'écrit :

(6.1.17)

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Trouver } (\mathbf{U}_h, P_h, k_h) \in \mathcal{V}_h(\Omega_{r,z}) \times \mathcal{Q}_h(\Omega_{r,z}) \times \mathcal{W}_h(\Omega_{r,z}), \\
 \text{tels que } \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h(\Omega_{r,z}), \forall q_h \in \mathcal{Q}_h(\Omega_{r,z}), \forall w_h \in \mathcal{W}_h(\Omega_{r,z}) : \\
 \int_{\Omega_{r,z}} \frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial t} \mathbf{v}_h |r| \pi dr dz + \int_{\Omega_{r,z}} (\mathbf{U}_h \cdot \nabla) \mathbf{U}_h \mathbf{v}_h |r| \pi dr dz - \int_{\Omega_{r,z}} P_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h |r| \pi dr dz \\
 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{r,z}} (\nu_0 + \nu_t) (\nabla \mathbf{U}_h + \nabla \mathbf{U}_h^T) : (\nabla \mathbf{v}_h + (\nabla \mathbf{v}_h)^t) |r| \pi dr dz \\
 + \int_{\Omega_{r,z}} \mathcal{P}(\mathbf{U}_h)(t, \mathbf{x}) \mathbf{v} |r| \pi dr dz \\
 - \int_{\Omega_{r,z}} \nabla \cdot \mathbf{U}_h q |r| \pi dr dz = 0, \\
 \int_{\Omega_{r,z}} \frac{\partial k_h}{\partial t} w_h |r| \pi dr dz + \int_{\Omega_{r,z}} (\mathbf{U}_h \cdot \nabla) k_h w_h |r| \pi dr dz \\
 + \int_{\Omega_{r,z}} \tilde{\nu}_t (\nabla k_h : \nabla w_h) |r| \pi dr dz - \int_{\Omega_{r,z}} \frac{\nu_t}{2} |\nabla \mathbf{U}_h + (\nabla \mathbf{U}_h)^t|^2 w_h |r| \pi dr dz \\
 + \int_{\Omega_{r,z}} \frac{C_3}{\ell(\mathbf{x})} k_h^{\frac{3}{2}} w_h |r| \pi dr dz = 0.
 \end{array} \right.$$

1.4 Discrétisation en temps

On note δt le pas de temps. Soient \mathbf{U}_h^m , P_h^m et k_h^m les approximations en temps de la vitesse moyenne, de la pression modifiée et de l'énergie cinétique turbulente respectivement, au temps $t^m = m\delta t$.

Les termes de convection dans les équations sont approchés à l'aide de la méthode des caractéristiques de Galerkin (voir par exemple [MP94], [HPLHO06], [Fou02]). Ce calcul est réalisé à l'aide de l'opérateur *convect* de *FreeFem++*.

Remarque 6.1.1 *Considérons un terme convectif de la forme $(\mathbf{U} \cdot \nabla)b$. Expliquons comment est approchée la dérivée particulaire $\frac{Db}{Dt}$ par cette méthode. Par définition :*

$$(6.1.18) \quad \frac{Db}{Dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)b.$$

Par un développement de Taylor de la dérivée, nous obtenons :

$$(6.1.19) \quad \frac{Db}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{b(\mathbf{x}, t + \delta t) - b(\mathbf{x} - \mathbf{U}(\mathbf{x}, t)\delta t, t)}{\delta t}.$$

Ainsi on approche $\frac{Db}{Dt}$ par :

$$(6.1.20) \quad \frac{Db}{Dt} \cong \frac{b^{m+1} - b^m(\mathbf{x} - \mathbf{U}^m(\mathbf{x})\delta t)}{\delta t}.$$

Il nous faut alors approcher le terme $\mathbf{x} - \mathbf{U}^m(\mathbf{x})\delta t$.

Soit $X(t)$ la solution du problème suivant :

$$(6.1.21) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt}(t) = \mathbf{U}(X(t)) \\ X(t) = \mathbf{x}. \end{cases}$$

$X(\mathbf{x}, t; s)$ est la position au temps s d'une particule située à la position \mathbf{x} au temps t .

Soit $X^m(\mathbf{x})$ la position au temps $t^m = m\delta t$ d'une particule situé en \mathbf{x} au temps t^{m+1} : $X^m(\mathbf{x}) = X(\mathbf{x}, t^{m+1}; t^m)$. On a par la méthode des caractéristiques $X^m(\mathbf{x}) \cong \mathbf{x} - \mathbf{U}(\mathbf{x}, t^m)\delta t$ et donc :

$$(6.1.22) \quad \mathbf{U}^m(\mathbf{x} - \mathbf{U}(\mathbf{x}, t^m)\delta t) \cong \mathbf{U}^m(X(m\delta t)).$$

On notera $\mathbf{U}^m(X(m\delta t)) = \mathbf{U}^m \circ X^m$.

Ainsi on approche :

$$(6.1.23) \quad \frac{Db}{Dt} \cong \frac{b^{m+1} - b^m \circ X^m}{\delta t}.$$

Aux erreurs de quadratures près, ce schéma est inconditionnellement stable.

Suivant [MP94], on choisit un schéma implicite pour le problème de Navier-Stokes/Brinkann avec viscosité turbulente et un schéma semi-implicite pour l'énergie cinétique turbulente :

(6.1.24)

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Pour tout } m = 0, \dots, \frac{T}{\delta t}, \\
 \text{trouver } (\mathbf{U}_h^{m+1}, P_h^{m+1}, k_h^{m+1}) \in \mathcal{V}_h(\Omega_{r,z}) \times \mathcal{Q}_h(\Omega_{r,z}) \times \mathcal{W}_h(\Omega_{r,z}) \text{ tels que :} \\
 \frac{1}{\delta t} \int_{\mathcal{T}_h} (\mathbf{U}_h^{m+1} - \mathbf{U}_h^m \circ X_h^m) \mathbf{v}_h |r| \pi dr dz - \int_{\mathcal{T}_h} P_h^{m+1} \nabla \cdot \mathbf{v}_h |r| \pi dr dz \\
 + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{T}_h} (\nu_0 + C_1 \ell(\mathbf{x}) \sqrt{k_h^m}) (\nabla \mathbf{U}_h^{m+1} + (\nabla \mathbf{U}_h^{m+1})^T) : (\nabla \mathbf{v}_h + \nabla \mathbf{v}_h^T) |r| \pi dr dz \\
 + \int_{\mathcal{T}_h} \mathcal{P}(\mathbf{U}_h^{m+1}) \mathbf{v}_h |r| \pi dr dz - \int_{\mathcal{T}_h} \nabla \cdot \mathbf{U}_h^{m+1} q_h |r| \pi dr dz \\
 - \int_{\mathcal{T}_h} p_h^{m+1} q_h 0.0000001 |r| \pi dr dz = 0, \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h(\Omega_{r,z}), \forall q_h \in \mathcal{Q}_h(\Omega_{r,z}); \\
 \frac{1}{\delta t} \int_{\mathcal{T}_h} (k_h^{m+1} - k_h^m \circ X_h^m) w_h |r| \pi dr dz \\
 \int_{\mathcal{T}_h} (C_2 \ell(\mathbf{x}) \sqrt{k_h^m}) (\nabla k_h^{m+1} : \nabla w_h) |r| \pi dr dz \\
 + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{T}_h} (-C_1 \ell(\mathbf{x}) \sqrt{k_h^m}) |\nabla \mathbf{U}_h^m + (\nabla \mathbf{U}_h^m)^T|^2 \frac{k_h^{m+1}}{k_h^m} w_h |r| \pi dr dz \\
 + \int_{\mathcal{T}_h} \frac{C_3}{\ell(\mathbf{x})} \sqrt{k_h^m k_h^{m+1}} w_h |r| \pi dr dz = 0,
 \end{array} \right.$$

où $X_h^m(\mathbf{x})$ est une approximation numérique de $X^m(\mathbf{x})$. Les paramètres C_i ($i=1, 2, 3$) sont des constantes adimensionalisées.

A noter un terme supplémentaire de pénalisation de la pression dans le schéma (6.1.24) :

$$\int_{\mathcal{T}_h} P_h^{m+1} q_h 0.0000001 |r| \pi dr dz.$$

Ce terme permet d'obtenir un problème plus régulier [HPLHO06].

Le terme $\frac{k_h^{m+1}}{k_h^m}$ est un terme qui stabilise le schéma pour k en rendant le terme de production semi-implicite.

1.5 Initialisation des schémas

Le problème de Navier-Stokes moyenné est initialisé en résolvant numériquement un problème de Stokes auxiliaire dans tout le domaine. L'énergie cinétique turbulente est quant à elle initialisée à une constante dans tout le domaine.

Le processus de résolution est itératif. A chaque pas de temps on résout le problème pour l'énergie cinétique turbulente, puis le problème de Navier-Stokes/Brinkman turbulent. On boucle jusqu'à atteindre le nombre d'itérations final prédéfini.

1.6 Liste des paramètres mis en jeu

Voici tous les paramètres susceptibles de modifier la convergence des schémas et les résultats des simulations :

- les constantes sans dimension : C_1, C_2, C_3 ;
- la valeur des paramètres de perméabilité dans les différentes régions ;
- le pas de temps δt ;
- le maillage : nombre de noeuds, nombre d'éléments ;
- la longueur ℓ ;

Le paramètre délicat à fixer est le paramètre ℓ . Dans les simulations, sa valeur sur chaque triangle du maillage est prise égale à la longueur du plus grand côté de ce triangle.

Tout d'abord, nous allons donner les résultats de nos simulations dans le cas de la configuration du filet ouvert (voir le Chapitre 4 pour les données expérimentales sur ce cas).

2 Test du modèle : Filet ouvert

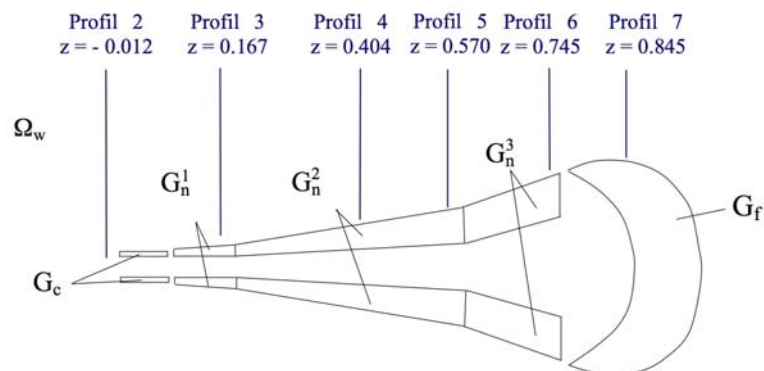
Présentons les résultats numériques dans le cas simple où la perméabilité est définie comme une fonction constante par morceaux. Les simulations ont été réalisées sur un bi-processeurs Pentium Xeon EM64T de 3.2 Ghz avec 2 Go de mémoire RAM.

2.1 Un modèle simplifié de perméabilité

a/ Découpage du domaine filet

Dans un premier temps, pour prendre en compte la différence d'ouverture de mailles entre l'avant et l'arrière du filet, le domaine G_n a été subdivisé en 3 sous-domaines (Fig. 6.3).

Figure 6.3: Zoom sur le filet - Notations



D'après la position des profils de vitesse (voir figure 4.10) :

- le profil 3 se trouve dans le domaine G_n^1

- les profils 4 et 5 dans le domaine G_n^2
- le profil 6 dans le domaine G_n^3 .

Sur G_n^i , le paramètre de perméabilité $K(r, z)$ est pris constant, et noté $K_{G_n^i}$. Par la suite, nous présenterons une équation pour $K(r, z)$ fonction de l'ouverture des mailles. L'idéal serait de pouvoir utiliser la théorie de l'homogénéisation pour disposer d'une équation pour $K(r, z)$ (voir section 3.3.3). Sa mise en application sur notre problème (différent des problèmes déjà traités dans la littérature [All89], [MC82]) s'avère être un problème ouvert nécessitant un travail théorique important, non entrepris.

b/ Paramètres choisis

Présentons une simulation pour laquelle les différents paramètres ont été calés par rapport aux données expérimentales. De plus, on observe dans ce cas que les schémas sont numériquement convergents. Prenons :

- $K_{fluide} = 10000$,
- $K_{prise} = 0.000001$,
- $K_{collier} = 0.000001$,
- $K_{G_1^n} = 1$,
- $K_{G_2^n} = 5$,
- $K_{G_3^n} = 6$.
- Un maillage de 10978 noeuds ; 21862 éléments ;
- Un pas de temps de 0.66667 s ;
- le paramètre ℓ égal à $hTriangle$ i.e. défini localement sur chaque triangle K_i comme son plus grand côté ;
- et les constantes : $C_1 = 0.1$; $C_2 = 0.05$; $C_3 = 0.03$;

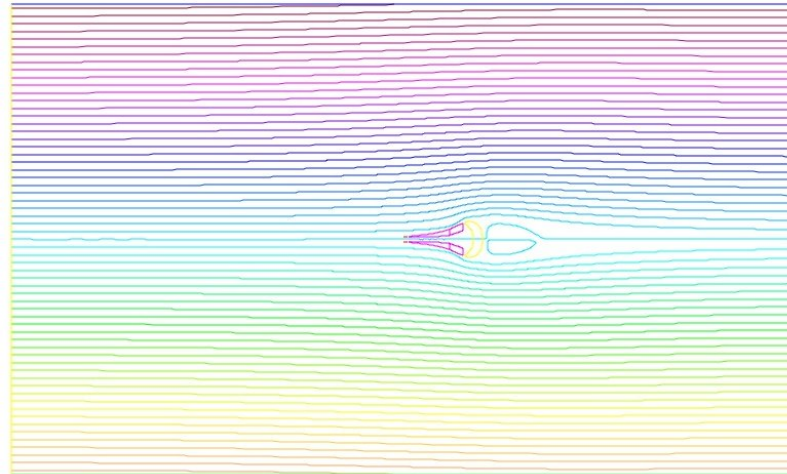
On note que le paramètre de perméabilité $K_{G_n^i}$ est d'autant plus grand que l'on se trouve proche de la prise i.e. que l'ouverture des mailles est grande, ce qui est cohérent.

Précisons comment la géométrie de la membrane est obtenue. Le profil extérieur de la membrane correspond au profil de la maquette. Quant à la position du profil intérieur, il a été obtenu en relevant la position des minima de la composante de vitesse u_z sur les profils expérimentaux (Tableau 6.1).

Tableau 6.1: Positions des minima de la composante u_z pour les profils considérés et épaisseur de la membrane.

Profils	Position du profil z [m]	Position du filet selon r [m]	Minimum de u_z Position selon r [m]	Epaisseur de la membrane [m]
Profil 3	0.167	0.045	0.027	0.018
Profil 4	0.404	0.0765	0.036	0.0405
Profil 5	0.57	0.1125	0.045	0.0675
Profil 6	0.745	0.1935	0.1035	0.09

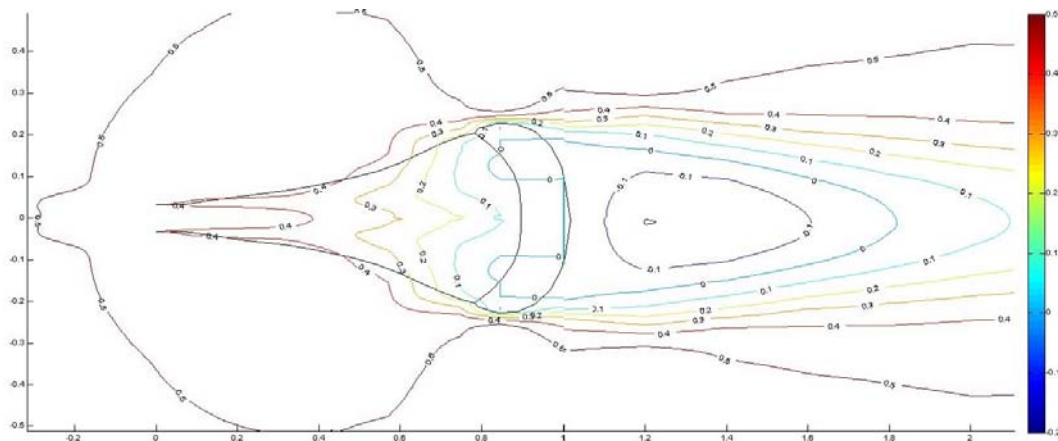
Figure 6.4: Lignes de courant



L'allure globale de l'écoulement obtenu avec *SeaNet 1.0* est donné par les lignes de courant de la figure 6.4 .

Les figures 6.5 donnent les courbes de niveaux de la composante u_z de la vitesse.

Figure 6.5: Courbes de niveaux de la composante u_z



La figure 6.6 nous donne les courbes de niveaux de la composante u_r de la vitesse et les figures 6.7 celles de l'énergie cinétique turbulente k . On note une légère asymétrie dans le graphe pour k qui est due au fait que l'on utilise un maillage non structuré.

Ces graphiques nous donnent plusieurs informations :

- l'échappement de la vitesse intérieure au filet s'effectue juste avant la prise comme le suggère la composante u_r de la vitesse (figure 6.6),
- la turbulence se situe majoritairement à l'arrière de la prise, la turbulence au niveau du filet étant très faible (figures 6.7),
- deux tourbillons se forment à l'arrière de la prise (figures 6.5 et 6.7).

Figure 6.6: Courbes de niveaux de u_r

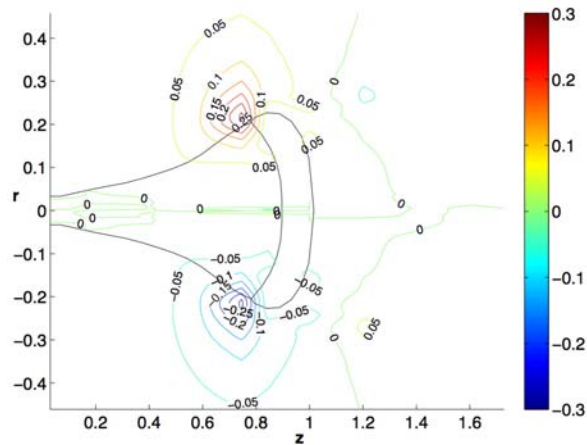
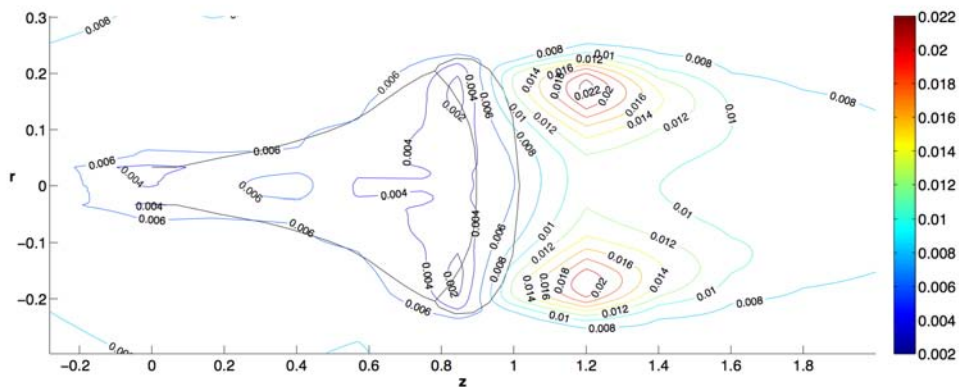


Figure 6.7: Courbes de niveaux de k



Comparons à présent les profils de vitesse obtenus numériquement avec les profils expérimentaux. Sur la série de figures 6.10 sont représentés les profils expérimentaux et numériques de la composante suivant z de la vitesse (voir figure 4.11 pour rappel des positions des profils au niveau du filet). Rappelons également que la technique LDV consiste à se placer en un point de l'écoulement (zone de mesure), et de récolter les valeurs de vitesse pour chaque particule d'ensemencement passant devant la zone de mesure. Chaque point du profil est alors la moyenne temporelle des vitesses obtenues en ce point par la technique LDV.

On constate que les valeurs numériques de la vitesse obtenues sont très proches des profils expérimentaux, mesurés par la technique LDV. Notre modèle de membrane poreuse, traduite par l'introduction dans les équations d'un terme de Brinkman, semble bien adapté pour simuler l'action du filet sur le fluide. Le modèle de turbulence à un degré de fermeture donne de bons résultats pour simuler l'écoulement moyen.

A noter qu'à cette étape de notre étude, nous ne disposons pas encore des données expérimentales sur l'énergie cinétique turbulente. On peut à présent constater que les va-

6.2. TEST DU MODÈLE : FILET OUVERT

leurs obtenues numériquement sont un peu plus faibles que celles obtenues expérimentalement à l'arrière du filet. A l'inverse, les valeurs obtenues au niveau du filet sont un peu plus fortes. Pour augmenter les valeurs à l'arrière, on peut choisir une valeur plus faible du paramètre C_3 qui contrôle la dissipation de l'énergie cinétique turbulente, par exemple 0.01. On obtient alors les mêmes profils de vitesse que pour la simulation avec $C_3 = 0.03$. En revanche, l'énergie cinétique turbulente à l'arrière est ainsi plus forte comme indiqué sur la figure 6.8. La figure 6.9 donne les courbes de niveaux de la composante u_z de la vitesse

Figure 6.8: Filet ouvert - Courbes de niveaux de k - $C_3=0.01$

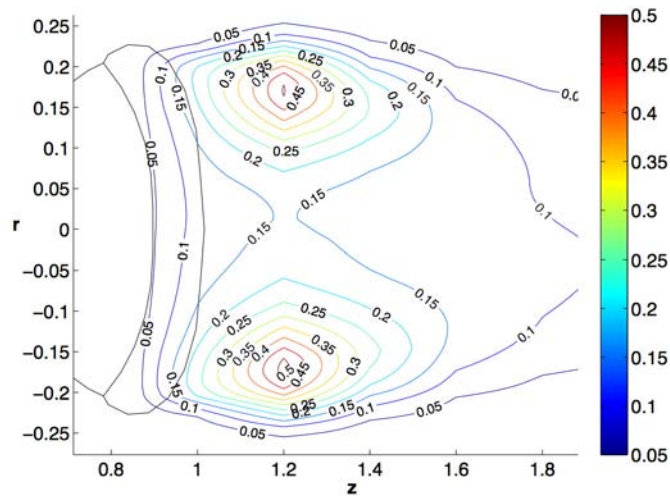


Figure 6.9: Filet ouvert - Courbes de niveaux de u_z - $C_3=0.01$

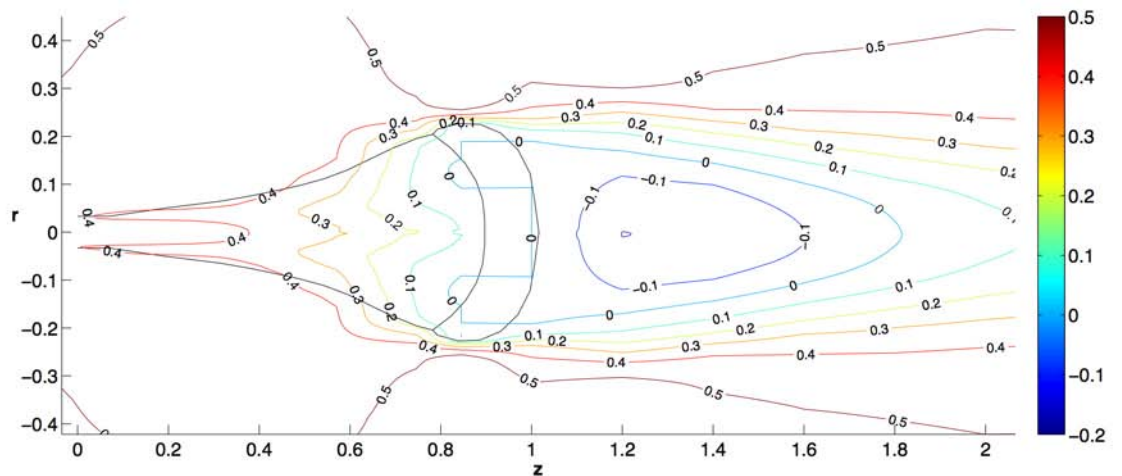
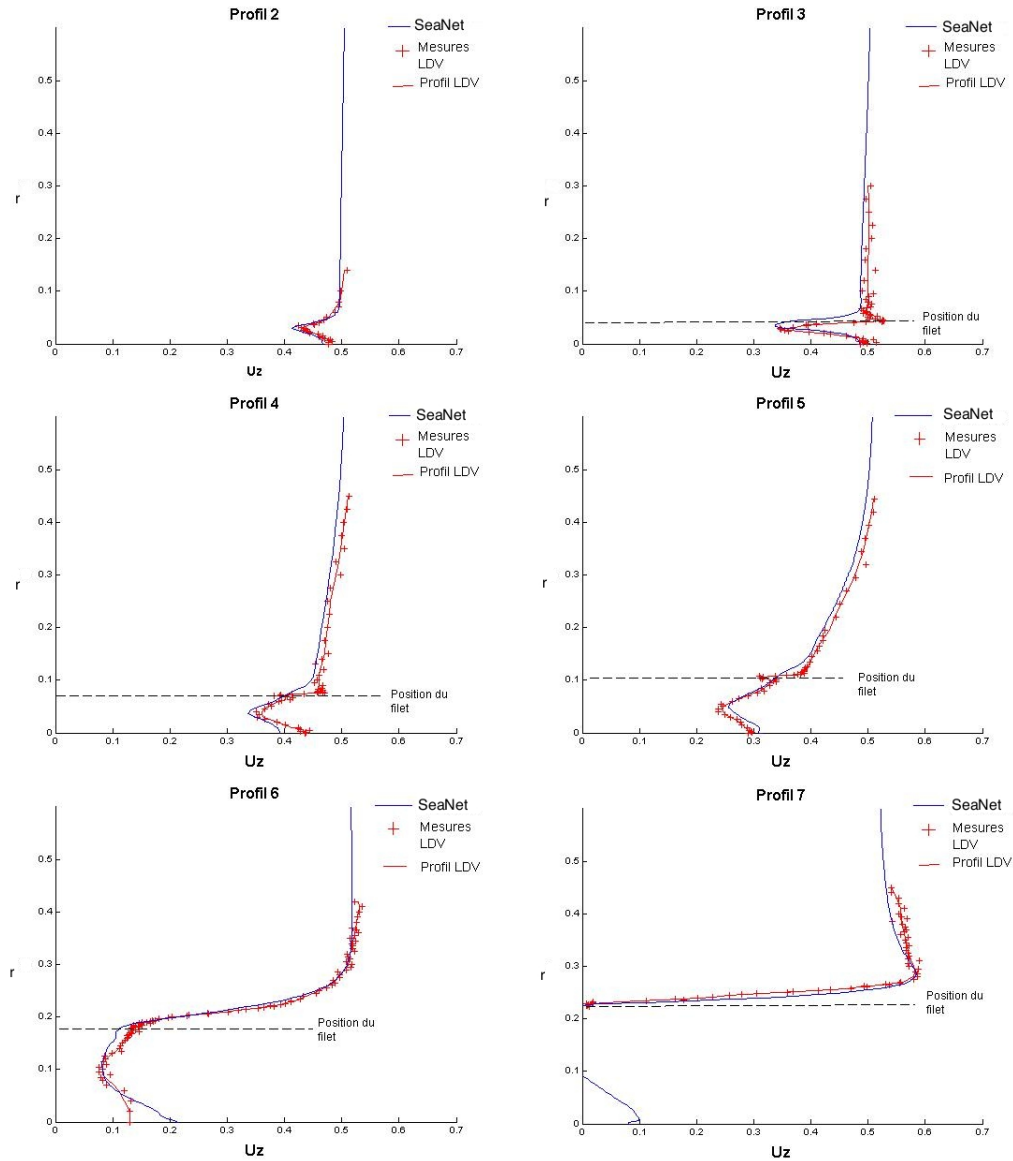


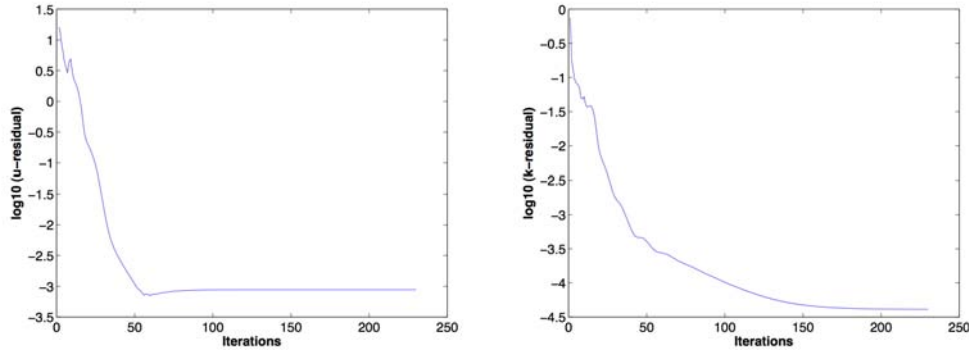
Figure 6.10: Filet ouvert - Comparaison des profils LDV avec *SeaNet 1.0* - K_n fonction constante par morceaux - it 50



Un autre fait intéressant a été mis en évidence lors des simulations. Nous avons calculé la norme 2 de la différence de la vitesse entre l'itération en cours \mathbf{U}_h^{n+1} et l'itération précédente \mathbf{U}_h^n . Nous avons fait de même pour l'énergie cinétique turbulente k (figure 6.11). On constate que les deux schémas conduisent à un état stationnaire i.e. qu'au bout d'environ 50 itérations, l'écoulement moyen s'est stabilisé (le résidu pour u atteint 0.001 à l'itération 50), de même que l'énergie cinétique turbulente k (le résidu pour k atteint 0.0004 à l'itération 50). Ce fait est rassurant quant à la convergence de nos schémas numériques, bien que la théorie à ce sujet n'est pas été traitée et reste un problème ouvert. D'une manière générale, il n'existe pas de théorème de convergence pour des schémas portant sur l'équation de l'énergie cinétique turbulente.

Rappelons enfin que, sans le modèle de turbulence, il est impossible de simuler un tel écoulement du fait du fort nombre de Reynolds, ce qui a par ailleurs été confirmé par la simulation.

Figure 6.11: Log10(Residu) calculé pour la vitesse et l'énergie cinétique turbulente en fonction des itérations



2.2 Choix des paramètres numériques

Rappelons le système fermé d'équations (5.3.19) que nous étudions (afin de mieux repérer les termes, nous le rappelons sous sa forme continue) :

$$(6.2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + \nabla \cdot (\nu_T(k, \ell)(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)), \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \\ \frac{\partial k}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) k = \frac{\nu_t}{2} |\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T|^2 + \nabla \cdot (\mu_t(k, \ell) \nabla k) - \mathcal{E}, \\ \nu_t = C_1 \ell \sqrt{k}, \\ \nu_T = \nu + \nu_t, \\ \mu_t = C_2 \ell \sqrt{k}, \\ \mathcal{E} = \frac{C_3}{\ell} k \sqrt{k}. \end{array} \right.$$

Trois constantes sans dimension C_1 , C_2 et C_3 interviennent dans notre modèle : les constantes C_1 et C_2 viennent de l'analyse dimensionnelle qui donne les coefficients ν_t et μ_t en fonction de k et la constante C_3 pondère le terme de dissipation dans l'équation pour k .

Se pose alors la question du choix des valeurs à donner à ces constantes.

Traditionnellement, les valeurs de telles constantes sont obtenues à partir de mesures expérimentales pour quelques écoulements simples, puis conservées pour calculer des écoulements plus complexes.

Remarque 6.2.1 Par exemple, les quatre constantes, C_μ , $C_{\mathcal{E}_1}$, $C_{\mathcal{E}_2}$ et $C_{\mathcal{E}_3}$, du modèle $(k - \mathcal{E})$ donné par le système d'équations ci-dessous :

$$(6.2.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial k}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)k = \frac{C_\mu}{2} \frac{k^2}{\mathcal{E}} |\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T|^2 + \nabla \cdot (C_\mu \frac{k^2}{\mathcal{E}} \nabla k) - \mathcal{E}, \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathcal{E} = \frac{C_{\mathcal{E}_1}}{2} k |\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T|^2 + \nabla \cdot (C_{\mathcal{E}_3} \frac{k^2}{\mathcal{E}} \nabla \mathcal{E}) - C_{\mathcal{E}_2} \frac{\mathcal{E}^2}{k}. \end{cases}$$

sont déduites de trois expériences, [MP94], [Cou89] :

- La turbulence de grille : l'expérience consiste à étudier l'évolution (la décroissance) de la turbulence créée par une grille placée en amont dans une veine à vitesse moyenne constante (voir [CBS66]). Idéalement cette expérience permet d'obtenir une turbulence homogène et isotrope ce qui permet théoriquement de négliger les termes de diffusion et de production dans les équations pour k et \mathcal{E} . La valeur de la constante $C_{\mathcal{E}_2}$ est ainsi déterminée par confrontation avec l'expérience. On obtient ainsi $C_{\mathcal{E}_2} = 1.92$.
- La turbulence d'un écoulement cisailé. L'écoulement est supposé homogène et stationnaire. Les équations pour k et \mathcal{E} se simplifient, permettant d'obtenir les valeurs des constantes $C_\mu = 0.09$ et $C_{\mathcal{E}_1} = 1.44$.
- La turbulence au dessus d'une plaque plane. Proche des parois solides, il peut se produire une couche limite turbulente, pour laquelle les observations expérimentales suggère un profil logarithmique pour l'écoulement moyen. Dans cette région logarithmique, les équations pour k et \mathcal{E} se simplifient, permettant de déduire la valeur de la constante $C_{\mathcal{E}_3} = 0.07$.

Dans notre cas (modèle à une équation pour k), nous avons choisi de fixer les valeurs des constantes C_1 , C_2 et C_3 en utilisant les résultats expérimentaux dont nous disposons (cf. Chapitre 4).

De plus, ces constantes sont pondérées par la longueur ℓ . Dans les simulations, rappelons que ℓ est définie localement sur chaque triangle comme égal à la longueur du plus grand côté de ce dernier.

La question naturelle que l'on se pose alors est la dépendance de ces constantes au maillage. Nous avons alors entrepris, pour un maillage donné, le calage de ces constantes par comparaison aux résultats expérimentaux.

Comme nous allons le voir par la suite, les simulations que nous avons réalisées dans la configuration du filet ouvert montrent qu'un raffinement de maillage n'influe pas significativement sur les profils de vitesse qui nous intéressent mais uniquement sur les valeurs de l'énergie cinétique turbulente à l'arrière de la prise. En revanche, cela n'est plus le cas dans la configuration du filet fermé pour laquelle nous verrons qu'un raffinement de maillage influe sur les profils de vitesse. Cela nous conduira à poser la question de l'ajout d'une équation pour ℓ , conduisant à un modèle de type $k - \ell$.

Expliquons à présent comment nous avons obtenu les valeurs des trois constantes C_1 , C_2 et C_3 . Si l'on regarde de plus près les schémas numériques, on constate que :

- C_1 pondère le terme de diffusion par turbulence dans le schéma pour les équations de Navier-stokes/Brinkman moyennées et le terme de production d'énergie cinétique turbulente dans le schéma pour k , voir les équations (6.1.24). Ainsi il donne le poids du schéma pour k dans le schéma pour les équations de Navier-stokes/Brinkman moyennées et il contrôle la production d'énergie cinétique turbulente dans le schéma pour k . Pris

trop grand, ce dernier schéma conduit à de fortes valeurs pour k , augmentant la diffusion dans le schéma (6.1.24), diminuant ainsi les valeurs de la composante u_z sur les profils de vitesse.

Prendre $C_1 = 1$ entraîne une non résolution (arrêt dès la première itération) car il conduit à une divergence du schéma pour k : k prend des valeurs négatives ($k_{min} = -2.47$ et $k_{max} = 0.35$ pour de valeurs de $C_2 = 0.05$ et $C_3 = 0.03$) ce qui est en contradiction avec les résultats mathématiques qui prévoient $k \geq 0$.

A l'inverse en prenant C_1 trop petit, le problème de Navier-Stokes/Brinkman moyenné se trouverait sans terme de diffusion (problème d'Euler) et l'on sait que dans ces cas là, cela pose des problèmes de résolution numérique. C'est d'ailleurs un des avantages de l'utilisation d'un modèle de turbulence car il ajoute de la diffusion aux schémas numériques. Montrons les résultats obtenus en prenant $C_1 = 0.01$ ($C_2 = 0.05$, $C_3 = 0.03$). Comme ce qu'on pouvait le prédire, l'état stationnaire n'est pas atteint pour le problème de Navier-Stokes/Brinkman : le résidu vaut 1.49767 à l'itération 50 (figure 6.12). Les instabilités numériques sont également bien présentes (Figures 6.13). En revanche, prendre $C_1 = 0.1$ conduit à des résultats satisfaisants.

Figure 6.12: Log10 du résidu calculé pour la vitesse en fonction des itérations

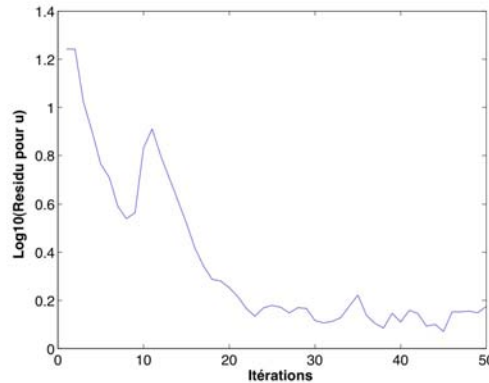
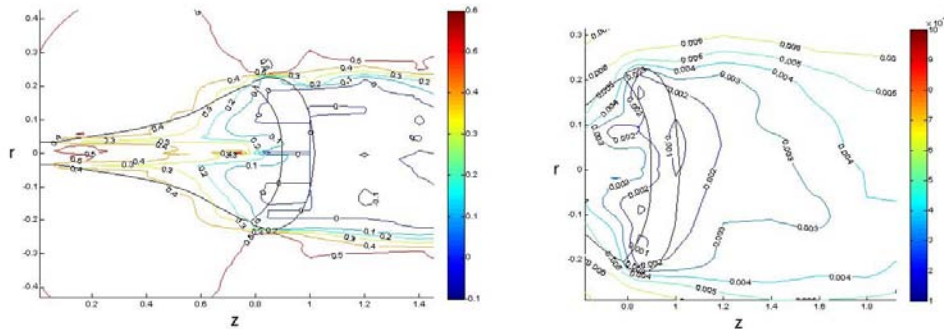
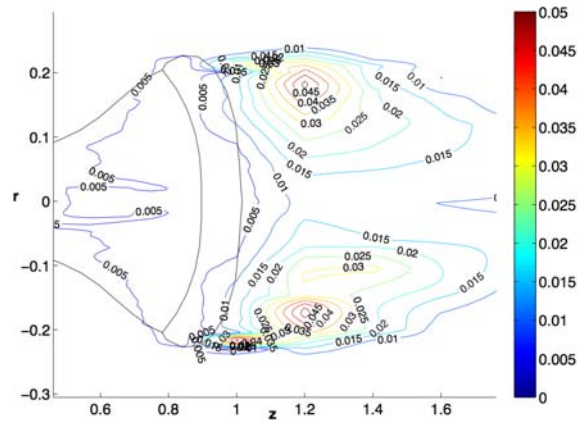


Figure 6.13: It 50 - Courbes de niveaux de u_z (figure de gauche) et de k (figure de droite) - $C_1 = 0.01$



- C_2 pondère le terme de diffusion dans le schéma pour k (voir le système (6.1.24)). Pris trop petit, il amène à de fortes valeurs de k . La figure 6.14 montre le résultat obtenu pour une faible valeur de C_2 , soit $C_2 = 0.001$. Les résidus pour \mathbf{U} et k sont de l'ordre de 10^{-2} à l'itération 50. Le nombre d'itérations pour atteindre la convergence est plus grand que celui de la simulation de référence.

Figure 6.14: Courbes de niveaux de k à l'arrière de la prise - $C_2 = 0.001$

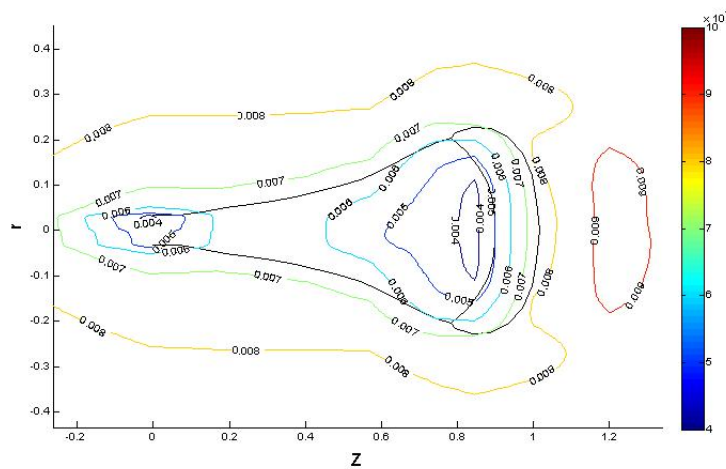


Pris trop petit, il peut rendre le schéma pour k instable. Par exemple, pour $C_2 = 0.0001$, on obtient des valeurs de k négatives dès la première itération ($k_{min} = -0.03$ et $k_{max} = 0.8$).

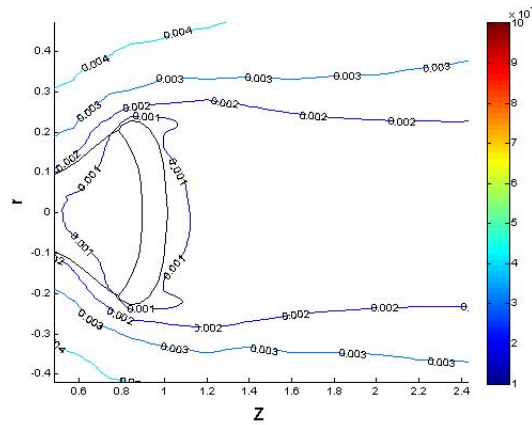
Pris trop grand (par exemple $C_2 = 1$, toujours avec $C_1 = 0.1$ et $C_3 = 0.03$), il conduit k à être nulle dans tout le domaine du fait de trop de diffusion (figure 6.15). On obtient malgré cela, la convergence des schémas numériques avec, à l'itération 50, un résidu pour \mathbf{U} de l'ordre de 10^{-3} et un résidu pour k de l'ordre de 10^{-5} .

Le paramètre C_2 aura une influence principalement au niveau de l'arrière de la prise, là où la turbulence est forte.

Figure 6.15: Courbes de niveaux de k à l'arrière de la prise - $C_2 = 1$



- C_3 mesure l'importance du terme de dissipation de l'énergie cinétique turbulente. Il s'agit d'une dissipation visqueuse à savoir la transformation de l'énergie cinétique turbulente en chaleur. Donner une grande valeur à C_3 signifie que l'écoulement comporte de nombreuses petites échelles, ralentissant l'écoulement là où la turbulence est la plus forte à savoir à l'arrière de la prise. Avec une valeur de C_3 trop grande (par exemple $C_3 = 0.1$), on peut se retrouver dans une situations où les valeurs de turbulence les plus faibles se trouvent à l'arrière de la prise (figure 6.16).

Figure 6.16: Courbes de niveaux de k à l'arrière de la prise - $C_3 = 0.1$ 

Par conséquent, comme pour C_2 , la valeur choisie pour C_3 n'aura pas grande influence, là où l'énergie cinétique turbulente est faible, à savoir à l'intérieur du filet et n'aura donc que peu d'influence sur les profils de vitesse tracés, ce qui est confirmé par nos simulations numériques.

On peut en conclure que le paramètre le plus important est C_1 dans la mesure où il donne le poids du schéma pour k dans le problème de Navier-stokes/Brinkman moyenné et inversement. Quant aux valeurs des paramètres C_2 et C_3 , leur rôle consiste surtout à lisser la turbulence à l'arrière de la prise. Il faut leur choisir des valeurs raisonnables pour obtenir des résultats en accord avec ceux obtenus expérimentalement et des valeurs de k réalistes ($k \geq 0$).

Remarque 6.2.2 Les travaux récents de Bernardi et al [BRHL07] sur la méthode des éléments finis appliquées aux équations de Navier-Stokes couplées à une équation pour k montrent que, moyennant des hypothèses fortes sur la régularité de la solution et des hypothèses sur la triangulation, on a une condition inf-sup discrète et une convergence de la solution discrète vers la solution continue. En revanche, on ne sait pas si on a un principe du maximum discret, bien que l'on conjecture qu'il doit avoir lieu.

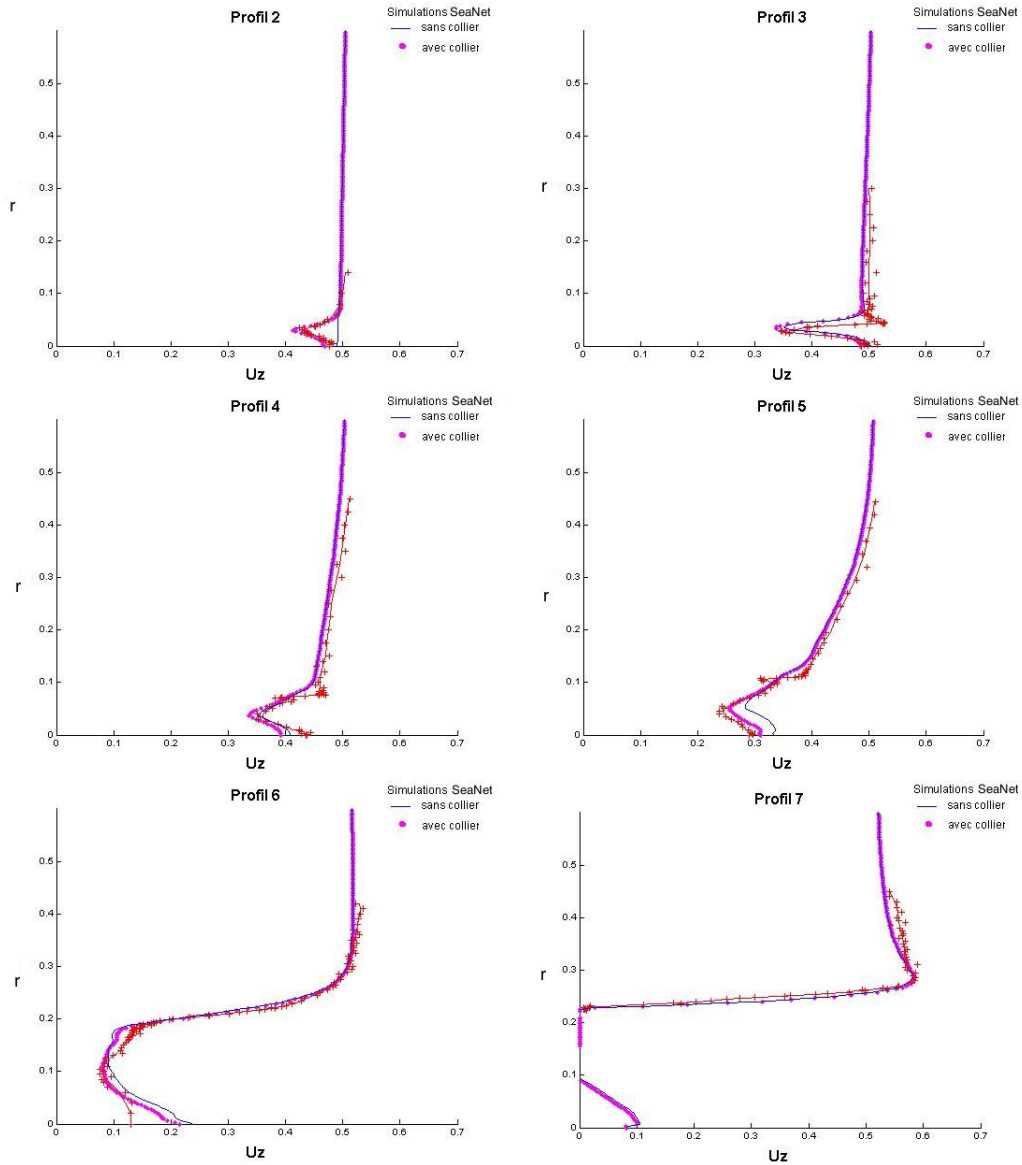
2.3 Influence de la perméabilité

Nous avons réalisé un nombre conséquent de simulations, et il ne serait pas raisonnable de les présenter toutes ici. Donnons seulement trois d'entre elles, qui permettent de dégager des résultats intéressants.

La première consiste à rendre le domaine G_n^3 perméable ($K_3 = 10000$), de sorte de voir l'influence de l'ouverture des mailles sur le fluide. Nous avons tracé les profils de vitesse avec G_n^3 perméable et sur le même graphique, nous avons tracé les profils de vitesse avec $K_3 = 6$. On obtient les mêmes profils de vitesse, que l'on prenne $K_3 = 6$ ou $K_3 = 10000$. Nous avons fait le choix de ne pas redonner les profils, ceux-ci se superposant exactement. Cela signifie que l'ouverture des mailles dans le domaine G_n^3 est suffisamment grande pour ne pas perturber l'écoulement. A noter que cette ouverture de mailles est étroitement lié à la taille de la prise.

La deuxième simulation consiste à évaluer l'influence du collier, support de la maquette mais absent dans le cas réel, sur les profils de vitesse. La comparaison des profils de vitesse selon la direction z est donnée sur les figures 6.17.

Figure 6.17: Profils *SeaNet 1.0* avec et sans collier - Filet ouvert



En l'absence de collier, la vitesse n'est pas ralentie sur le profil 2. Les valeurs de la composante u_z de la vitesse sont légèrement plus élevées sur les autres profils dans le filet. Ce résultat est en accord avec ce que l'on pouvait en attendre.

Enfin la troisième simulation consiste à prendre le filet perméable afin de mettre en évidence son influence sur les profils de vitesse (voir figures 6.18).

Les courbes de niveaux des composantes u_z et u_r de la vitesse ainsi que celles pour l'énergie cinétique turbulente sont données aux figures 6.19, 6.20 et 6.21 respectivement.

On constate que prendre un filet perméable conduit à des profils de vitesse nettement différents de ceux obtenus précédemment. Cela montre la nécessité de prendre en compte le filet et de rechercher les valeurs de perméabilités qui le caractérisent.

Ce type de simulation montre l'intérêt de ce travail sur les paramètres. Il permet de distinguer les paramètres de simulations essentiels de ceux de moindres importances (K_3 , par exemple, peut être fixé à la valeur de la perméabilité du fluide sans influencer

Figure 6.18: Profils *SeaNet 1.0* pour un filet perméable - Filet ouvert

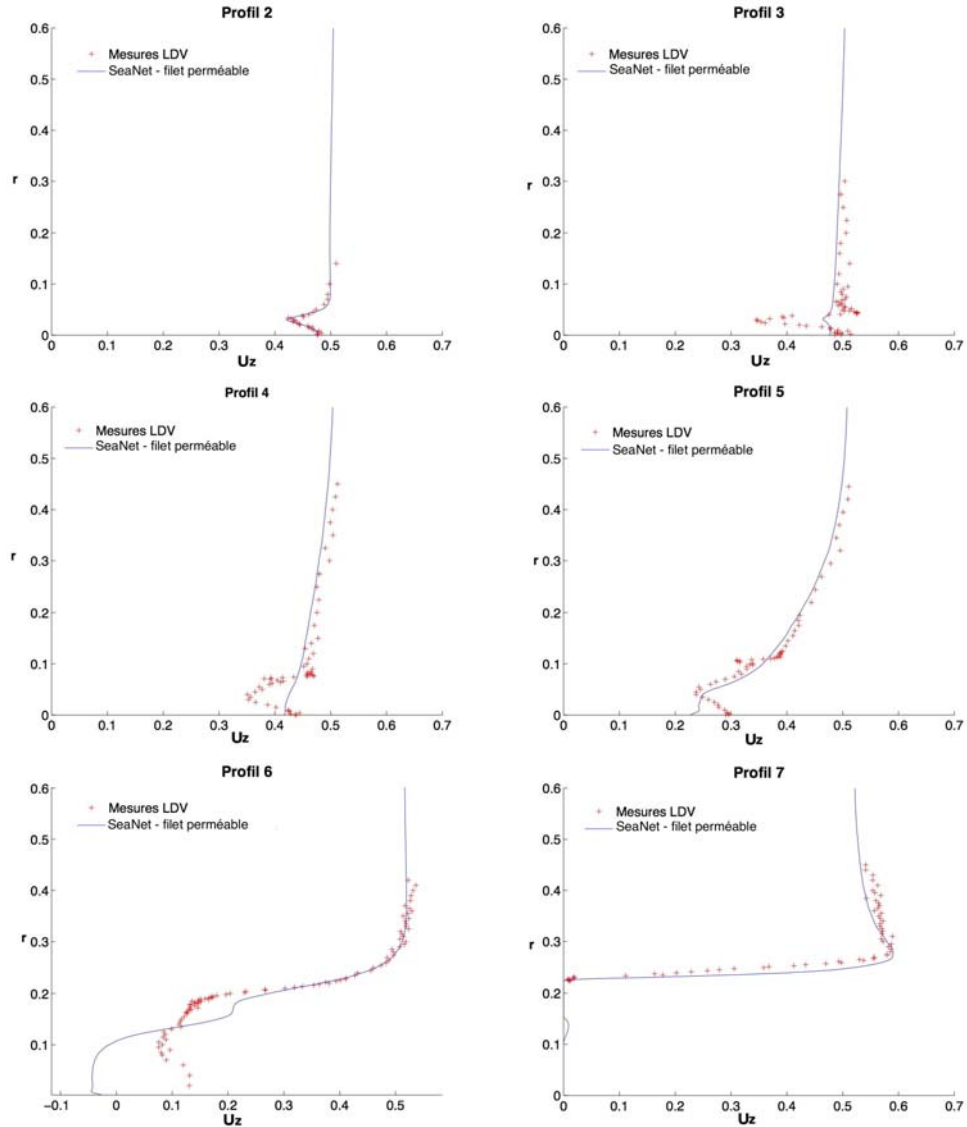
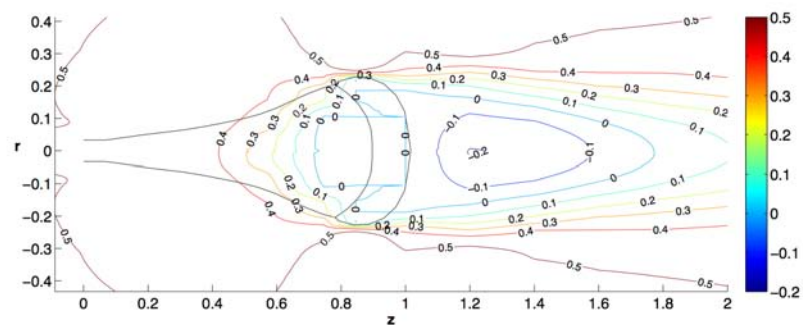


Figure 6.19: Courbes de niveaux de u_z - Filet perméable



les résultats). Il permet aussi de tester si les résultats obtenus sont cohérents : augmenter la perméabilité d'un domaine augmente les valeurs de la vitesse dans ce domaine et la diminuer ralentit l'écoulement.

Figure 6.20: Courbes de niveaux de u_r - Filet perméable

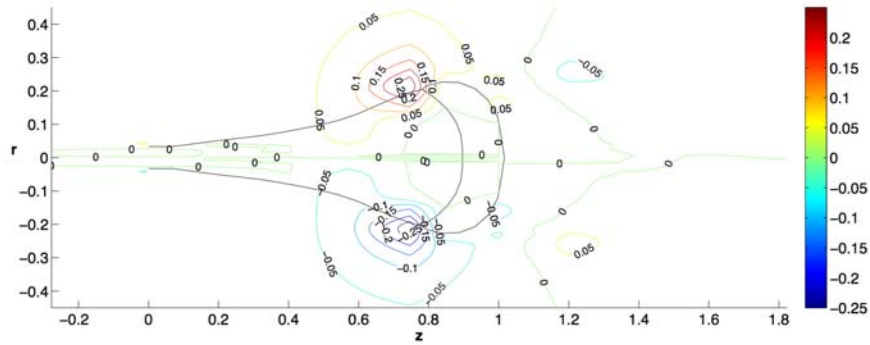
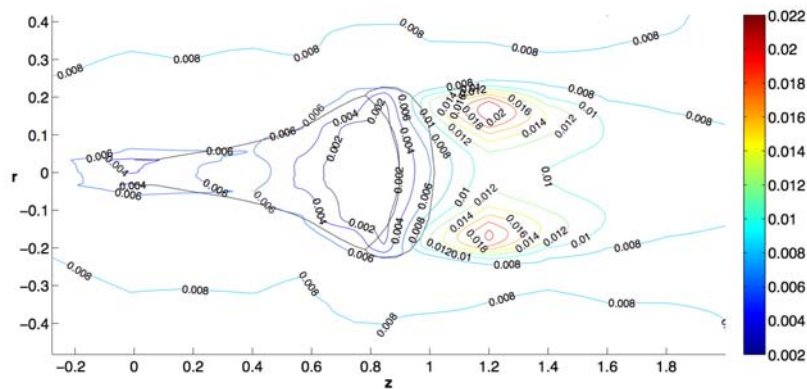


Figure 6.21: Courbes de niveaux de k - Filet perméable



2.4 Influence du pas de temps

Dans toutes nos simulations citées précédemment, nous avons pris un pas de temps égal à 0.667 s. Pour le jeu de paramètre choisi au paragraphe 6.2.1.b, l'état stationnaire est atteint au bout de 50 itérations soit 33 s de simulation. Rappelons que, à l'itération 50, le résidu pour l'inconnue en vitesse vaut 0.001 et le résidu pour k vaut 0.0004.

Nous avons refait cette simulation en prenant un pas de temps dix fois plus petit, soit 0.0667 s.

Les courbes de niveaux de la composante suivant z de la vitesse, de la composante suivant r de la vitesse et de l'énergie cinétique turbulente sont données sur les figures 6.22, 6.23, 6.24 respectivement.

La comparaison des profils expérimentaux et numériques est donnée sur la série de figures 6.25.

Figure 6.22: Courbes de niveaux de u_z - $dt=0.0667$ s

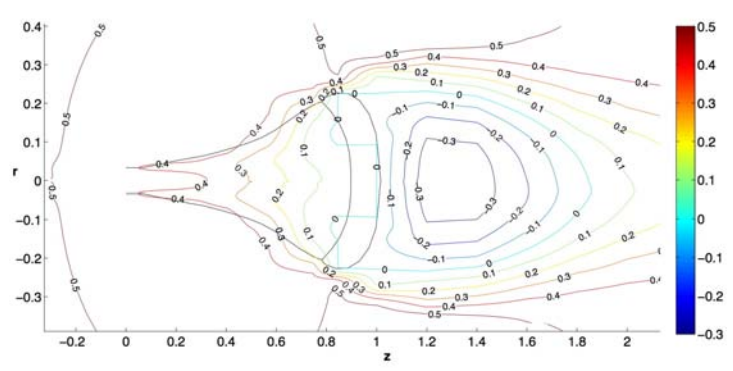


Figure 6.23: Courbes de niveaux de u_r - $dt=0.0667$ s - it 600

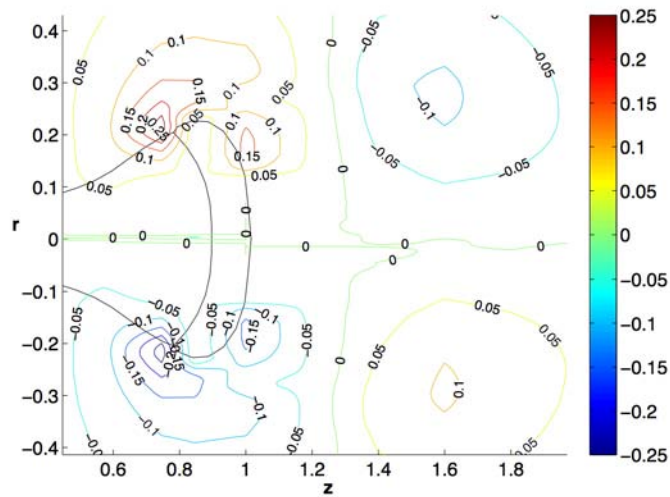


Figure 6.24: Courbes de niveaux de k - $dt=0.0667$ s - it 600

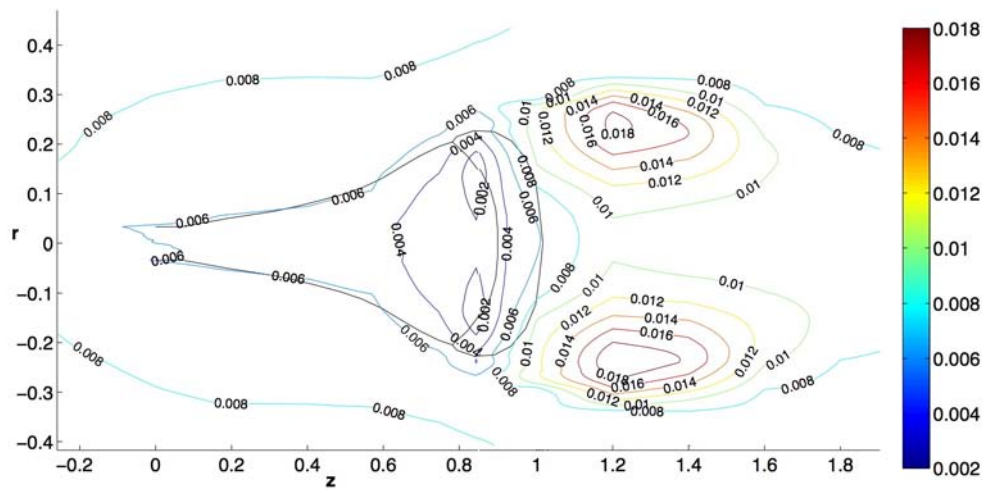
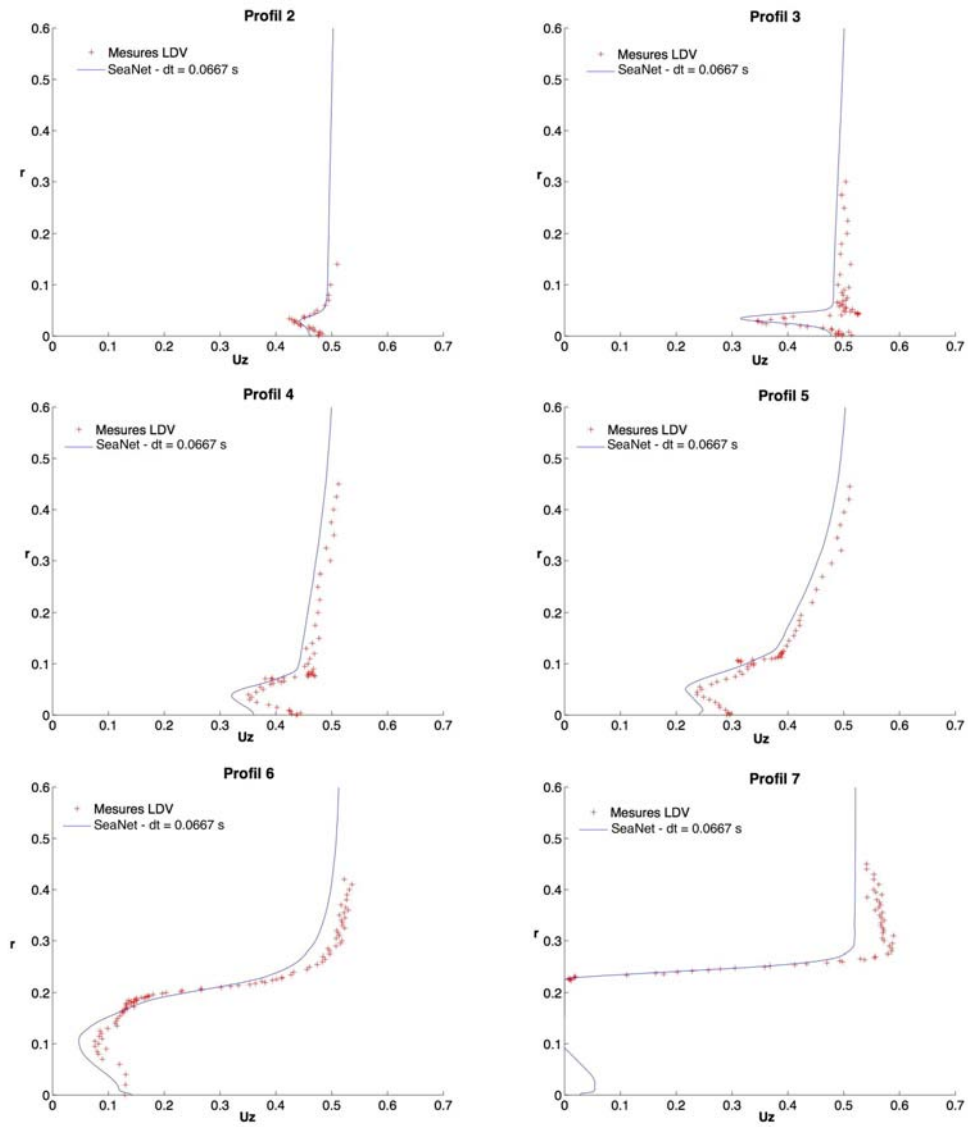


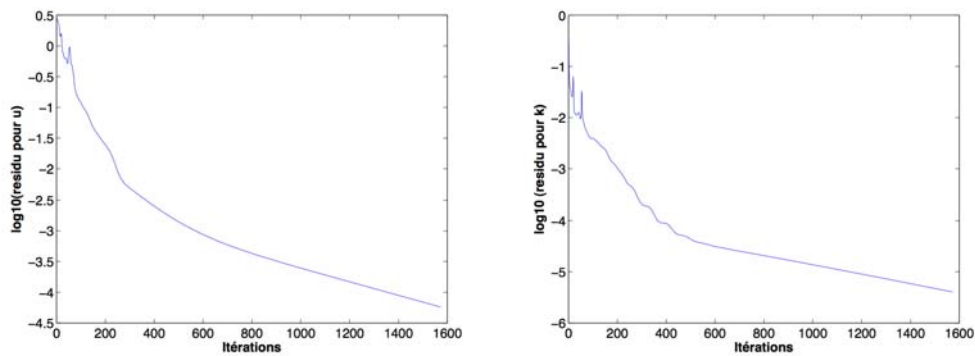
Figure 6.25: Profils *SeaNet 1.0*; $dt=0.0667$ s - Filet ouvert



On constate que les profils obtenus pour la composante u_z sont plus faibles que les profils expérimentaux. À l'inverse les valeurs de la composante suivant r ont augmenté comparativement aux valeurs obtenus avec un pas de temps de 0.667 s (voir comparativement avec la figure 6.6). Ceci vient de l'utilisation du schéma *convect* (basé sur la méthode des caractéristiques de Galerkin, voir paragraphe 6.1.4) qui est non conservatif (voir [HPLHO06], [Fou02]).

La convergence est atteinte au bout d'environ 600 itérations, avec un résidu pour u de l'ordre de 0.0009 et un résidu pour k de l'ordre de $3 \cdot 10^{-5}$ (voir figures 6.26).

Figure 6.26: Log10(Résidu) calculé pour la vitesse et l'énergie cinétique turbulente en fonction des itérations



2.5 Influence de la longueur de mélange

Le paramètre ℓ intervenant dans les schémas numériques (6.1.24) est issu de l'analyse dimensionnelle, il vient de l'expression du coefficient de viscosité turbulente ν_t (équation (5.5.14)) en fonction de l'énergie cinétique turbulente k . Déterminer la valeur à lui donner constitue la difficulté du modèle de turbulence à une équation.

Analysons l'influence de ℓ dans les schémas numériques. Dans le schéma pour le problème de Navier-Stokes/Brinkman, ℓ intervient au niveau du terme de diffusion par turbulence.

Dans le schéma pour k (6.1.24), le terme de production est proportionnel à ℓ alors que le terme de dissipation par les petites échelles lui est inversement proportionnel.

Dans nos simulations, nous avons défini localement ℓ sur chaque triangle de la triangulation comme étant égal au plus grand côté de chaque triangle, noté $hTriangle$. Ainsi on choisit de raffiner le maillage là où se trouve de fortes fluctuations de vitesse i.e. à l'arrière de la prise. Ainsi en ces zones, la valeur de ℓ est petite, modérant ainsi la production d'énergie cinétique turbulente au profit de la dissipation par les petites échelles.

Ce choix pose également le problème que lorsque l'on change de maillage, on n'est pas susceptible d'obtenir les mêmes résultats. En fait, nous allons voir qu'un raffinement de maillage influe surtout sur les valeurs de l'énergie cinétique turbulente à l'arrière de la prise et ne modifie que légèrement les profils de vitesse.

Prenons un maillage plus raffiné que le maillage donné à la figure 6.2. Considérons un maillage de 15836 sommets et 31578 triangles, les raffinements étant localisés au niveau du filet et de la prise.

Les courbes de niveaux de la composante suivant z de la vitesse, de la composante suivant r de la vitesse et de l'énergie cinétique turbulente sont données sur les figures 6.27, 6.28, 6.29 respectivement.

Figure 6.27: Courbes de niveaux de u_z - Maillage plus fin - it 75

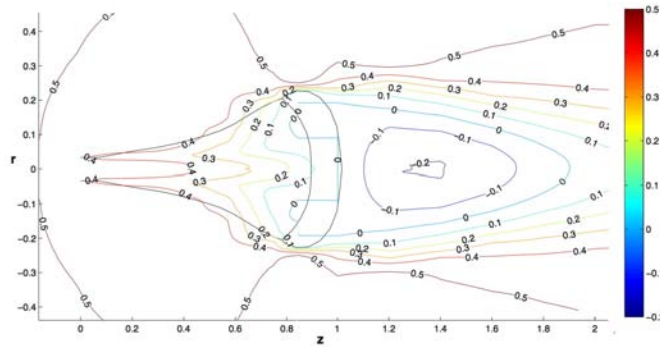


Figure 6.28: Courbes de niveaux de u_r - Maillage plus fin - it 75

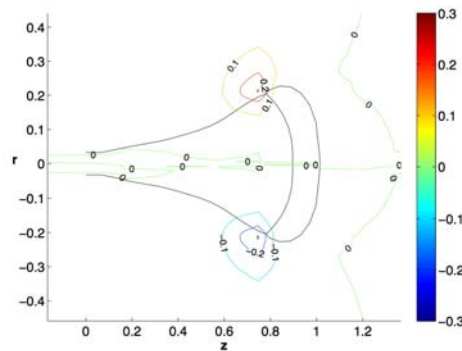
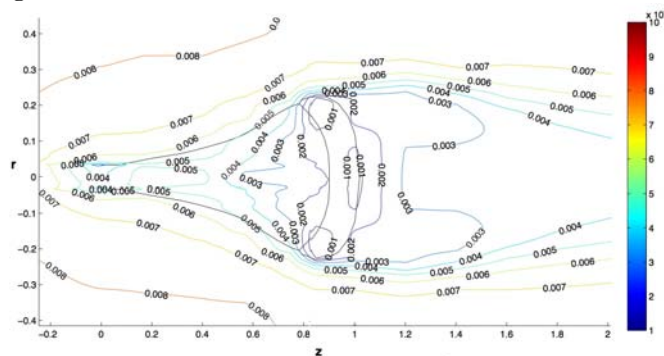


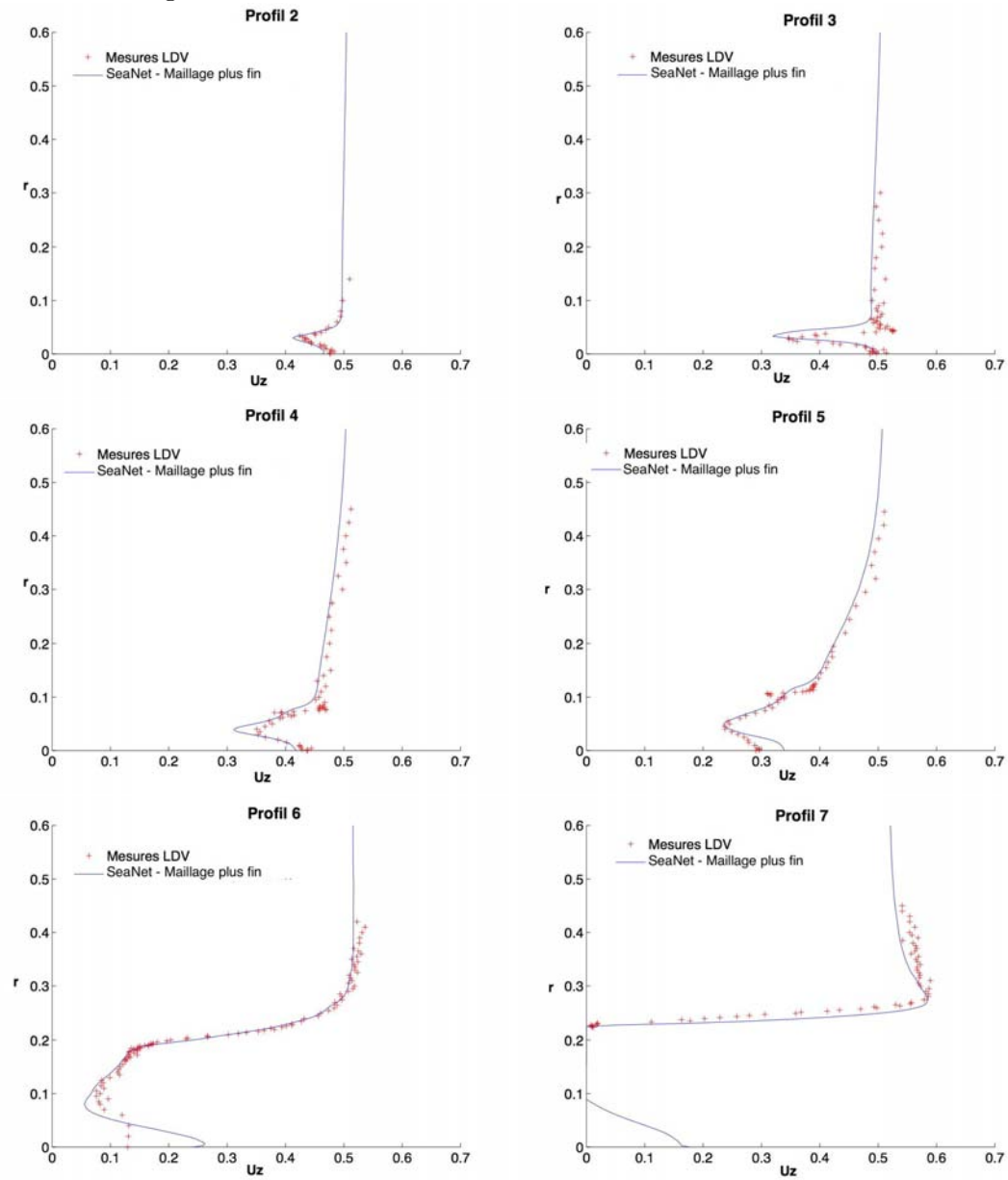
Figure 6.29: Courbes de niveaux de k - Maillage plus fin - it 75



La comparaison des profils expérimentaux et numériques est donnée sur la série de figures 6.30.

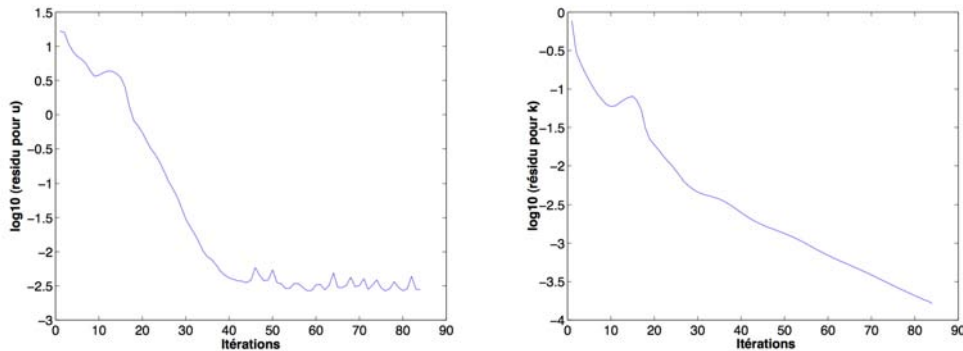
6.2. TEST DU MODÈLE : FILET OUVERT

Figure 6.30: Profils *SeaNet 1.0* - Maillage plus fin - it 75 - Filet ouvert



Au bout d'environ 84 itérations, le résidu pour u est de l'ordre de 0.0028 et celui k de 0.00016 (voir figures 6.31).

Figure 6.31: Log10(Résidu) calculé pour la vitesse et l'énergie cinétique turbulente en fonction des itérations - Maillage plus fin



On constate que les profils de vitesse au niveau du filet sont légèrement affectés par le raffinement du maillage. En revanche, à l'arrière de la prise, les valeurs de vitesse sont plus fortes que dans le cas du maillage plus grossier (voir figure 6.27 comparativement à la figure 6.5) ce qui est en accord avec les faibles valeurs de l'énergie cinétique turbulente constatées à l'arrière (Fig. 6.29).

Ainsi, le paramètre ℓ est un paramètre clé puisqu'il qui donne la prédominance des différents termes de l'équation. Le choisir comme $hTriangle$ pose le problème que dès que l'on change de maillage, on change les rapports entre les termes des équations, d'où des résultats différents. Pour le cas du filet ouvert, on constate que les différences sont observées dans les zones de fortes turbulences, à l'arrière de la prise. L'écoulement au niveau du filet, qui nous intéresse plus particulièrement, n'est quant à lui que très légèrement modifié. A terme, il s'agira de trouver une équation pour ℓ satisfaisante qui permettra de s'affranchir de cette dépendance.

2.6 Utilisation d'un maillage non conforme

Il est à remarquer que nous avons utilisé dans cette application à la maquette un maillage conforme au profil de la membrane et de la prise. Dans la perspective d'un passage au 3D, il est requis de s'affranchir d'un tel maillage conforme à la géométrie pour ne prendre en compte les obstacles (filet, prise) dans le code fluide que par l'intermédiaire de leur perméabilité respective. Ainsi le maillage sera fixé au départ de sorte qu'il ne sera que rarement nécessaire de remailler.

La méthode des domaines fictifs permet de repérer les obstacles par leur perméabilité donnée par éléments finis. De ce fait, la frontière des obstacles sera d'autant plus proche de la frontière physique que le maillage sera fin. Cette approximation de la frontière fait qu'il nous a paru naturel de tester cette méthode sur la maquette de Boulogne-sur-Mer, en projetant sur un maillage non conforme la perméabilité définie sur un maillage conforme, et ce en utilisant les fonctionnalités existantes de *FreeFem++*.

Ainsi, nous allons tester la méthode de pénalisation dans cette configuration axi-symétrique simplifiée afin de justifier sa mise en oeuvre dans le cas plus complexe 3D. Pour cela, il nous faut construire un maillage non conforme à la géométrie du filet et de

la prise. Nous choisissons de définir une zone rectangulaire autour du filet dans laquelle le maillage sera plus fin, comme présenté sur les figures 6.32 et 6.33 .

Figure 6.32: Maillage non conforme à la géométrie- Nombres de sommets : 15893 ; Nombre de triangles : 31704

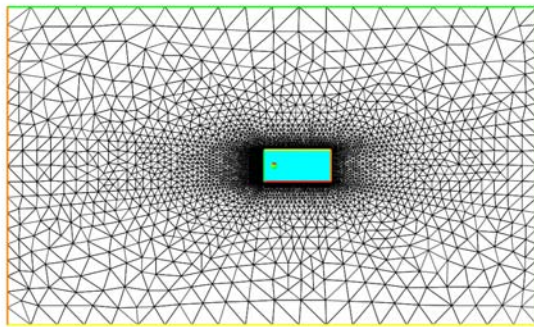
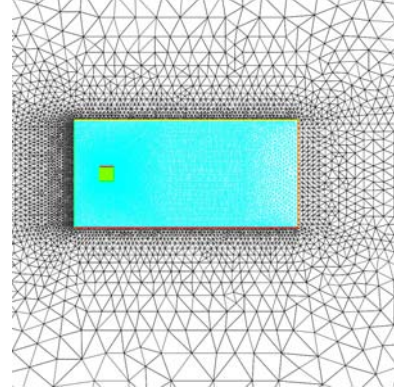


Figure 6.33: Zoom la zone raffinée situé au niveau du filet - la zone verte est maillée



Il nous faut comparer les résultats obtenus avec ce dernier maillage non conforme avec les résultats expérimentaux. Il nous reste encore à définir une technique pour pouvoir donner à chaque élément fini du maillage non conforme une valeur de perméabilité K .

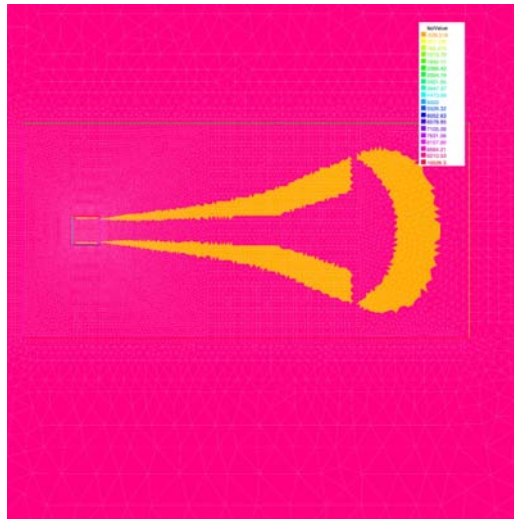
Dans le cas d'un maillage non conforme, il faut parvenir à donner à chaque élément fini une perméabilité en fonction de sa position dans le maillage. La frontière des domaines sera donc approchée grossièrement par les éléments finis. Une première idée a été d'utiliser une fonction de *Freefem++* qui permet de projeter sur un maillage donné les valeurs d'une fonction connue sur un autre maillage. Nous avons utilisé cette fonction pour définir les valeurs de la perméabilité par éléments finis.

La méthode consiste à construire deux maillages, celui non conforme, sur lequel la résolution numérique des équations est effectuée et un maillage auxiliaire, conforme à la géométrie (du type de la figure 6.2 - celui que nous utilisons dans cette simulation possède 10536 sommets et 20978 triangles), qui aura pour seule utilité de définir la perméabilité par éléments finis. Les valeurs de la perméabilité sont alors projetées sur le maillage non conforme. A noter que les fonctions de perméabilité sont prises comme fonction P0 du maillage duquel elles dépendent. La figure 6.34 donne les frontières des domaines obtenus en définissant K à l'aide de la projection. On remarque également la nécessité de disposer d'une zone raffinée pour traiter des géométries fines telles que le collier par exemple.

La comparaison des profils de la composante de la vitesse u_z est donnée sur les figures 6.35.

Les profils de vitesse se superposent bien, de même que l'énergie cinétique turbulente 6.38. Cela montre que la méthode des domaines fictifs donne de bons résultats comparative- ment à une méthode classique. Elle conduit également à l'obtention d'un état stationnaire (Figure 6.39).

Figure 6.34: Frontières des domaines obtenues par projection des valeurs de la perméabilité sur le maillage non conforme



Cette méthode peut s'appliquer facilement dans un cadre 3D ce qui n'est pas le cas pour une méthode classique qui nécessiterait la construction d'un maillage 3D, très coûteux.

En revanche, elle nécessite un maillage plus raffiné de façon à bien repérer les frontières des obstacles et d'autant plus si on considère une géométrie fine.

Rappelons qu'à cette étape du travail, nous n'avons pas exploité l'intérêt de la méthode des domaines fictifs dans la mesure où nous avons conservé la construction d'un maillage conforme à la géométrie pour définir la perméabilité alors que c'est précisément ce dont on souhaite s'affranchir si nous voulons passer au 3D.

En annexe A, nous présentons une méthode qui permet d'affecter automatiquement la perméabilité par éléments finis dans les deux cas où la frontière des obstacles est paramétrée et dans celui où elle est donnée par des points discrets. Nous avons programmé cette méthode sous Matlab et appliqué sur des cas 2D et 3D. De plus le fichier de sortie est facilement utilisable sous un logiciel permettant la simulation d'écoulements 3D.

6.2. TEST DU MODÈLE : FILET OUVERT

Figure 6.35: Profils *SeaNet 1.1* - Résolution sur maillage non conforme - it 50 - Filet ouvert

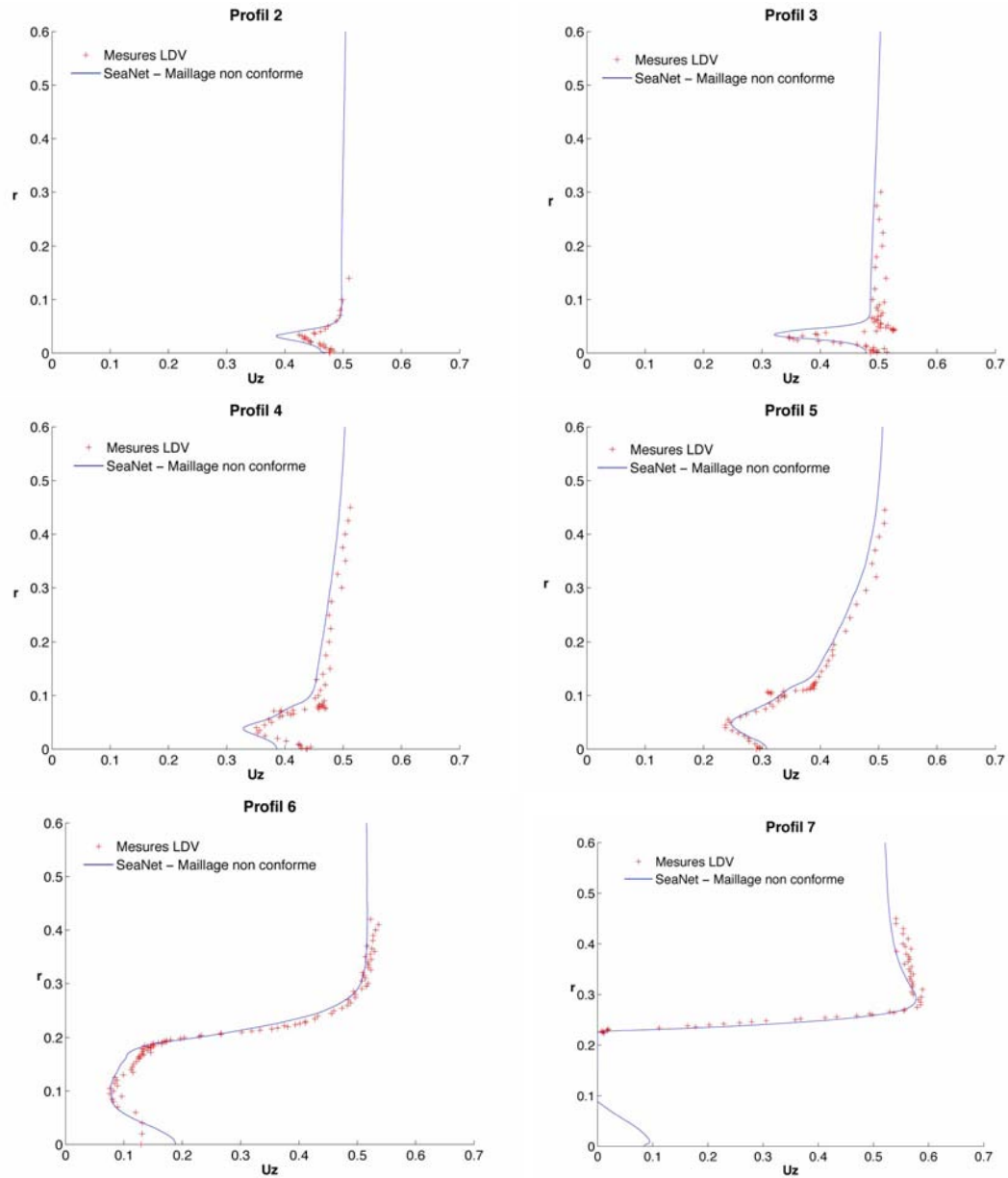


Figure 6.36: Courbes de niveaux de u_z - Résolution sur maillage non conforme - Filet ouvert

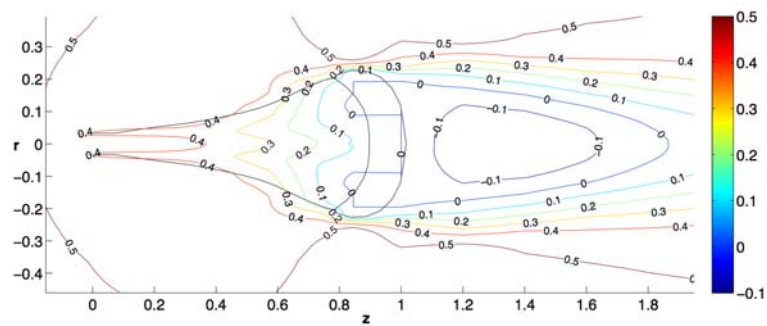


Figure 6.37: Courbes de niveaux de u_r - Résolution sur maillage non conforme - Filet ouvert

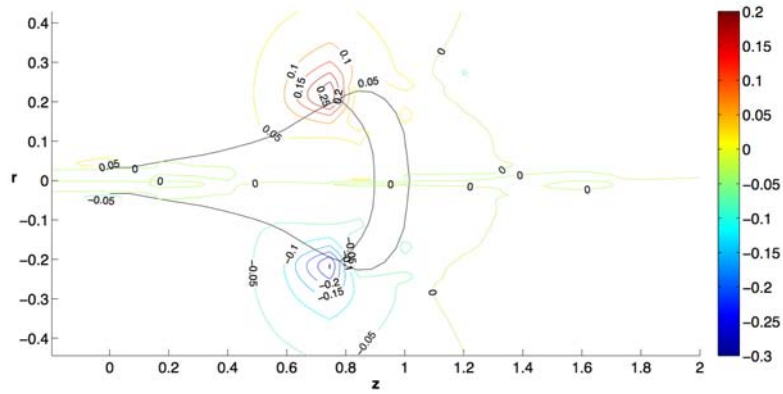
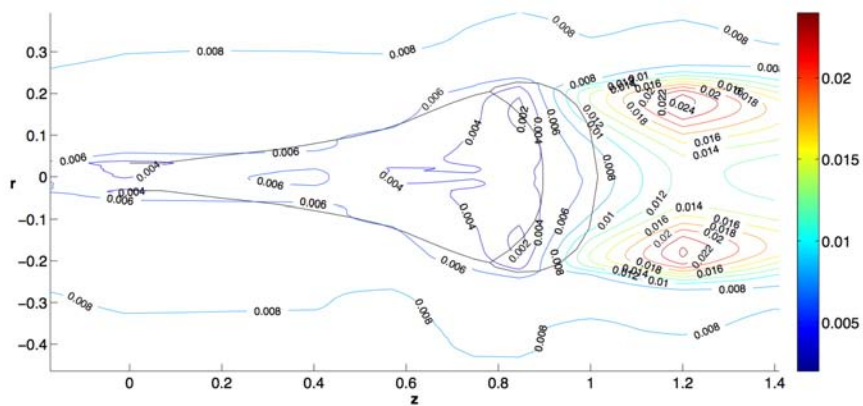


Figure 6.38: Courbes de niveaux de k - Résolution sur maillage non conforme - Filet ouvert

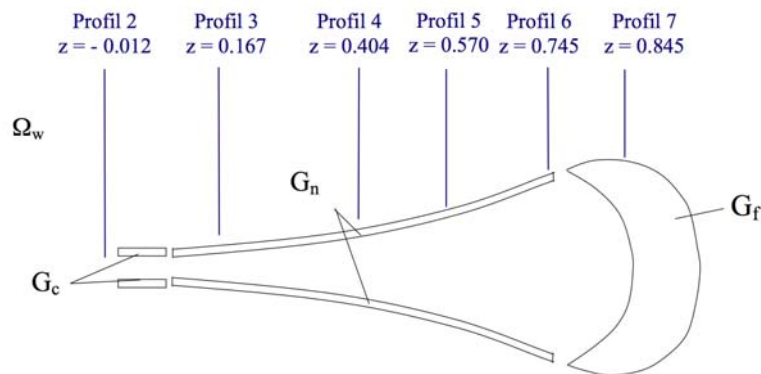


2.7 Des modèles plus élaborés de perméabilité

a/ La perméabilité du filet fonction de l'ouverture des mailles

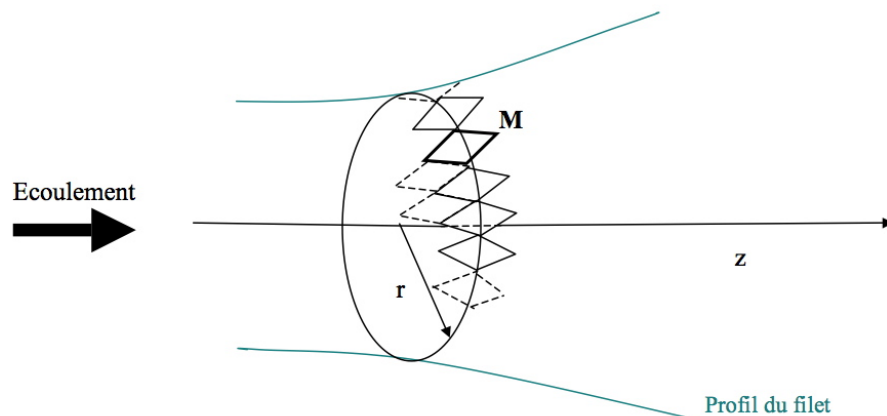
Choisir le paramètre de perméabilité $K_n(r, z)$, $(r, z) \in G_n$ comme une fonction constante par morceaux pose le problème du calage de ces constantes, du découpage de la membrane et de l'épaisseur de celle-ci. Pour ces raisons, il est préférable de disposer d'une fonction $K_n(r, z)$ dépendante des propriétés physiques du filet, qui permet de retrouver les profils expérimentaux sans nécessiter d'épaissir artificiellement la membrane (voir Fig. 6.40)

Figure 6.40: Une géométrie plus réaliste



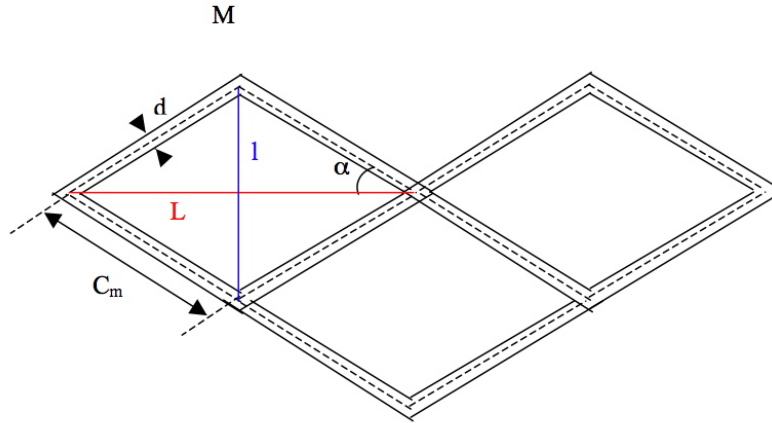
Ici, nous introduisons une fonction $K_n(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in G_n$ qui dépend de l'ouverture des mailles. La figure 6.41 montre que, pour le cas de la maquette axisymétrique, les mailles losanges sont disposés autour d'un cercle de rayon connu (donné par l'ordonnée du point définissant le profil du filet).

Figure 6.41: Dispositions des mailles losanges pour le cas de la maquette



Soit une maille losange \mathbf{M} du filet, situé sur un cercle de rayon r_0 connu. Soient l et L la longueur de ses diagonales, α le demi angle de maille, C_m la longueur du côté de maille, et d le diamètre des fils (voir Fig. 6.42).

Figure 6.42: Notations - Maille M



Sachant que le nombre de mailles au périmètre est de 36, on calcule la longueur l comme suit :

$$(6.2.3) \quad l = 2r_0 \sin\left(\frac{\pi}{36}\right)$$

La longueur L est obtenue directement par définition, les coordonnées des sommets concernés étant connues.

L'aire totale du losange, notée \mathcal{A} , est alors :

$$(6.2.4) \quad \mathcal{A} = \frac{lL}{2},$$

et l'aire intérieure \mathcal{A}_i :

$$(6.2.5) \quad \mathcal{A}_i = \mathcal{A} - 2dC_m,$$

avec le côté de maille C_m donné par :

$$(6.2.6) \quad C_m = \frac{L}{2\cos(\alpha)},$$

et α :

$$(6.2.7) \quad \alpha = \arctan\left(\frac{l}{L}\right).$$

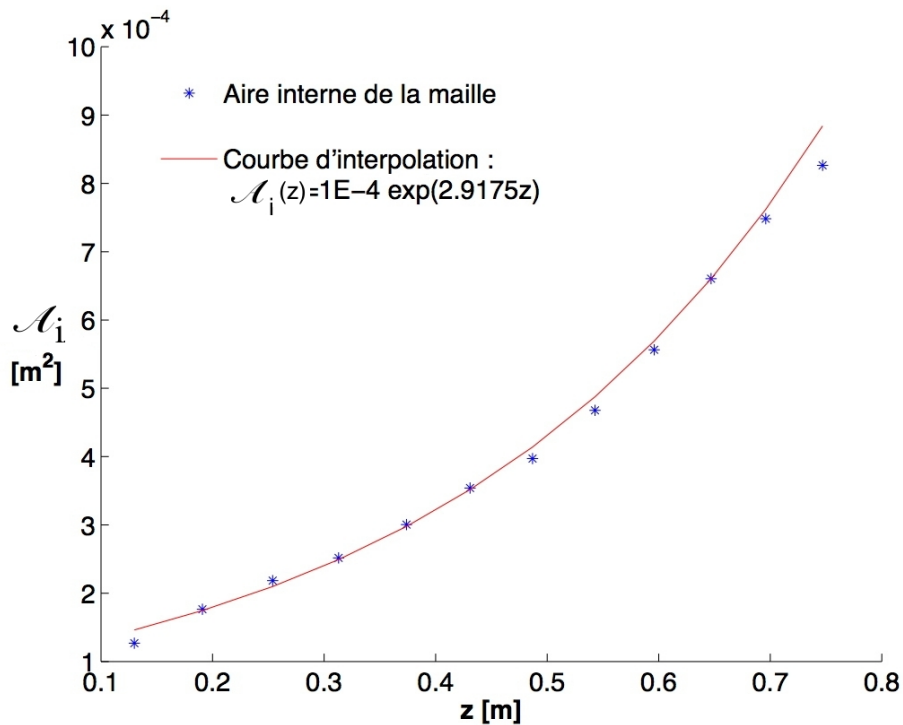
De l'aire interne d'une maille sur chaque rangée (Eq. (6.2.5)), on déduit une fonction de perméabilité $K_n(r, z)$, $(r, z) \in G_n$ en divisant par la viscosité cinématique ν et en multipliant par une constante sans dimension.

6.2. TEST DU MODÈLE : FILET OUVERT

Tableau 6.2: Ouverture des mailles et permeabilité du filet - Filet ouvert.

Position z du centre de la maille [m]	l [m]	L [m]	\mathcal{A} [m ²]	α [rad]	C_m [m]	\mathcal{A}_i [m ²]	K_n [s]
0.747	0.0341	0.0541	0.0009	0.5618	0.0320	0.0008	3.06
0.696	0.0307	0.0549	0.0008	0.5093	0.0315	0.0007	2.77
0.647	0.0268	0.0562	0.0008	0.4458	0.0311	0.0007	2.45
0.596	0.0227	0.0570	0.0006	0.3796	0.0307	0.0006	2.06
0.543	0.0194	0.0575	0.0006	0.3260	0.0303	0.0005	1.73
0.487	0.0169	0.0576	0.0005	0.2855	0.0300	0.0004	1.47
0.431	0.0149	0.0599	0.0004	0.2438	0.0309	0.0004	1.31
0.374	0.0130	0.0606	0.0004	0.2111	0.0310	0.0003	1.11
0.313	0.0112	0.0614	0.0003	0.1810	0.0312	0.0003	0.93
0.254	0.0100	0.0625	0.0003	0.1590	0.0317	0.0002	0.81
0.191	0.0087	0.0621	0.0003	0.1395	0.0313	0.0002	0.65
0.130	0.0072	0.0602	0.0002	0.1197	0.0303	0.0001	0.47

Figure 6.43: Aire interne des mailles en fonction de z et interpolation



Le tableau 6.2 résume les valeurs calculées pour la maquette de Boulogne-sur-Mer.

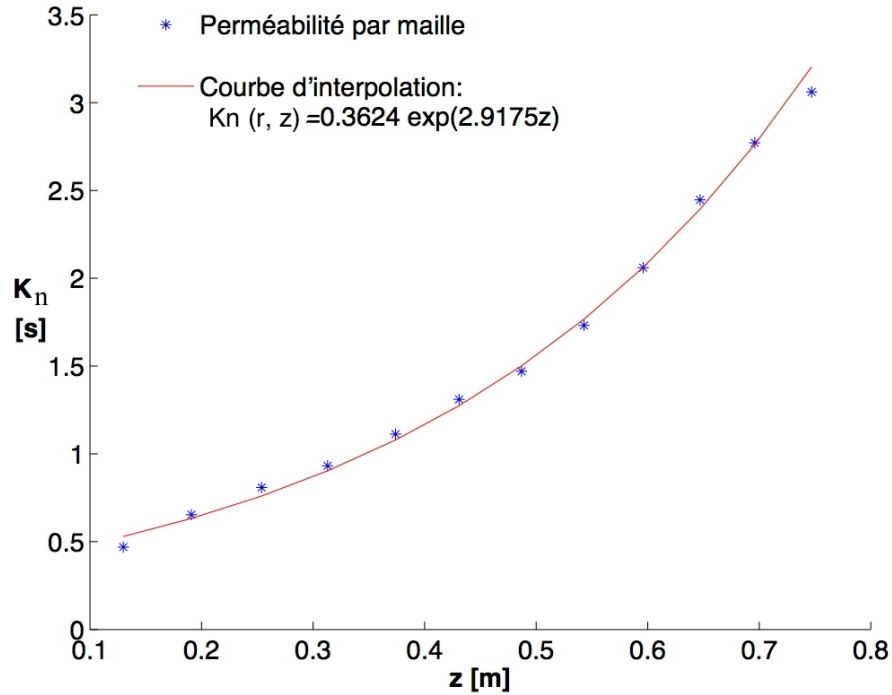
Le tracé de l'aire interne calculée en fonction de la position z du centre de la maille est donné sur la figure 6.43. Elle peut être approchée à l'aide d'une courbe exponentielle d'équation : $10^{-4} \exp(2.9175z)$.

Le tracé de la perméabilité est donné sur la figure 6.44. Sur ce graphique, nous

donnons également une fonction d'interpolation de ces données, d'équation :

$$(6.2.8) \quad K_n(r, z) = 0.3624e^{2.9175z}, \quad (r, z) \in G_n.$$

Figure 6.44: Paramètre de perméabilité du filet K_n en fonction de z et interpolation



Jeu de paramètres. Les paramètres utilisés sont les mêmes que ceux introduits dans la partie 6.2.1, excepté la fonction de perméabilité dans le domaine filet et le paramètre C_3 que l'on a pris égal à 0.02 pour retrouver des valeurs pour l'énergie cinétique turbulente à l'arrière proche de celles obtenues lors de l'expérimentation :

- $K_{fluide} = 10000$, $K_{prise} = 0.000001$, $K_{collier} = 0.000001$;
- $K_n(r, z) = 0.3624e^{2.9175z}$, $(r, z) \in G_n$;
- Un maillage de 10508 noeuds ; 20922 éléments ;
- Un pas de temps de 0.66667 s ;
- Le paramètre ℓ égal à $hTriangle$ i.e. défini localement sur chaque triangle K_i comme son plus grand côté ;
- et les constantes : $C_1 = 0.1$; $C_2 = 0.05$; $C_3 = 0.02$;

Résultats des simulations. La comparaison des profils expérimentaux et numériques est donnée sur la figure 6.45. On obtient quasiment d'aussi bons résultats que dans pour le cas précédent où la perméabilité était définie comme une fonction constante par morceaux. Seul le profil P5 est légèrement surestimé par la simulation.

6.2. TEST DU MODÈLE : FILET OUVERT

Figure 6.45: Comparaison Profils LDV - Profils *SeaNet 1.2* avec $K_n(r, z) = 0.3624e^{2.9175z}$, pour $(r, z) \in G_n$

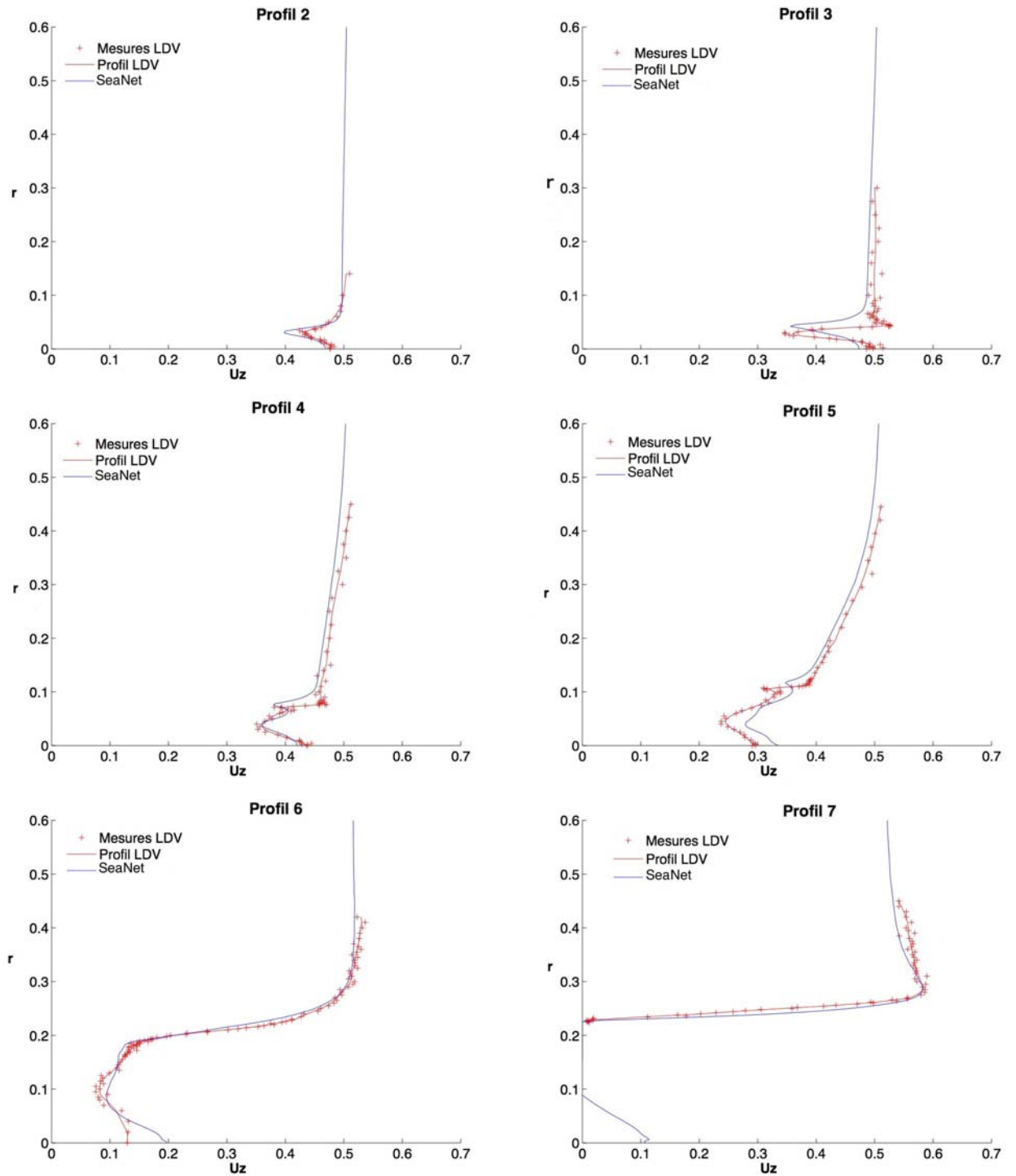


Figure 6.46: Courbes de niveau - composantes u_z (figure de gauche) et u_r (figure de droite) de la vitesse

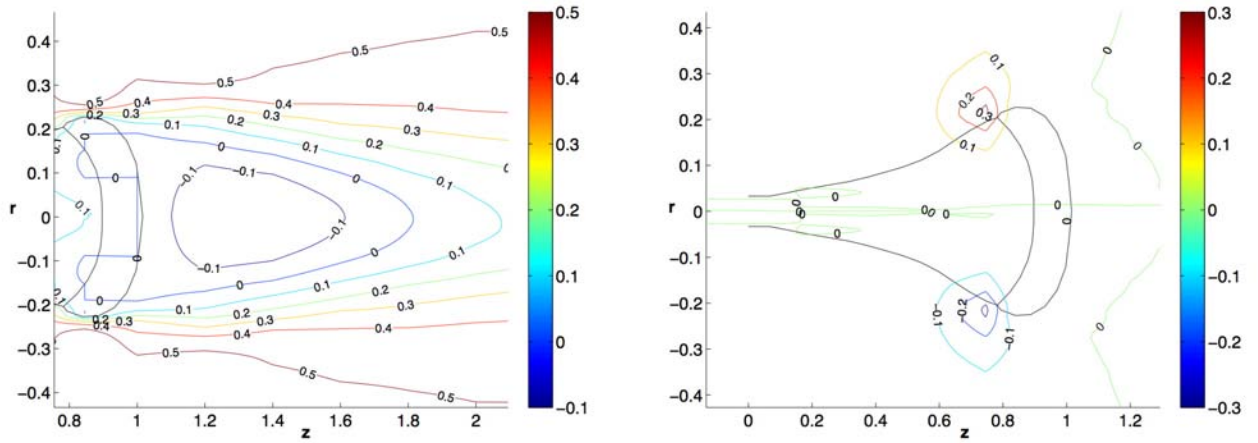


Figure 6.47: Courbes de niveau - Energie cinétique turbulente

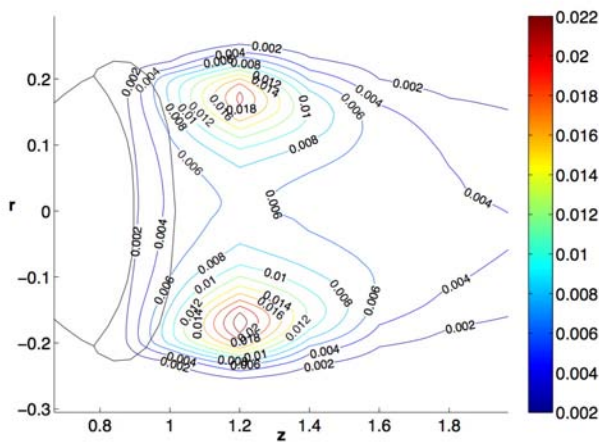
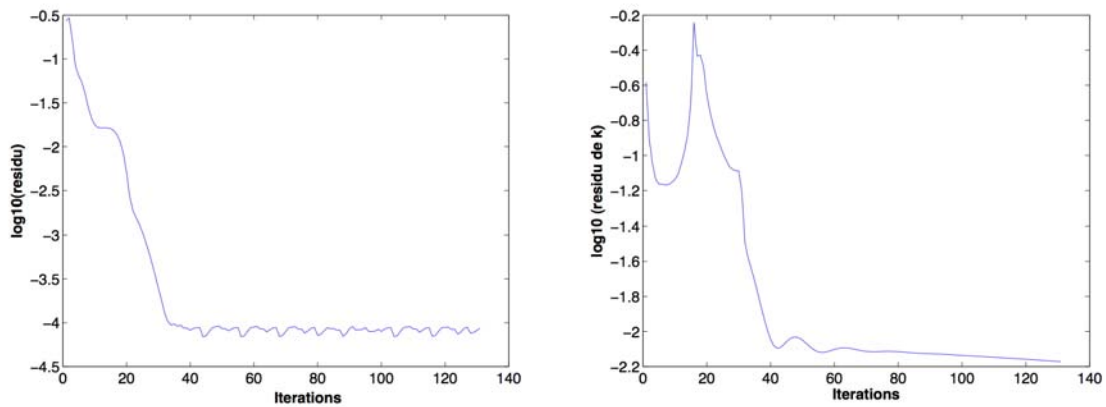


Figure 6.48: $\log_{10}(\text{residu})$ pour la vitesse et l'énergie cinétique turbulente

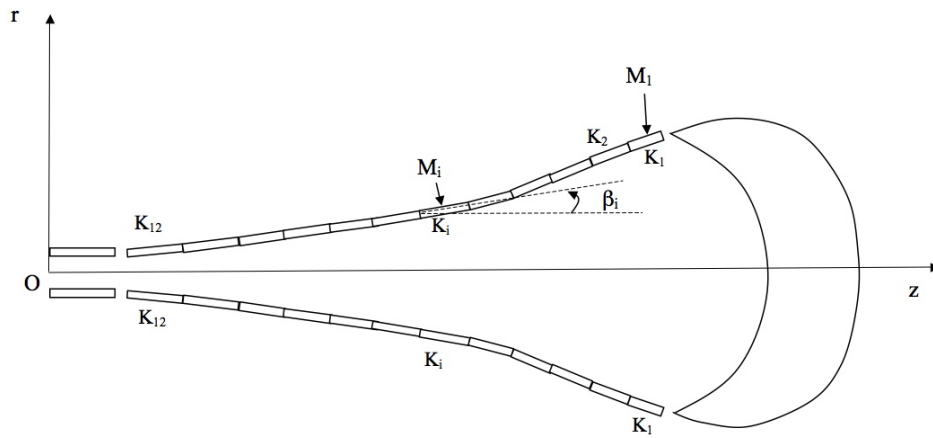


b/ Une matrice de perméabilité

La question se pose de définir le paramètre de perméabilité comme une matrice de façon à pouvoir contrôler la perméabilité dans les différentes directions. Ce choix est motivé par le fait que l'orientation d'une maille est déterminant quant à la perméabilité de cette maille.

Considérons la géométrie du filet donnée sur la figure 6.49 permettant de prendre en compte séparément chaque rangée de mailles.

Figure 6.49: Géométrie du filet prenant en compte chaque rangée de mailles



On définit la perméabilité dans le filet comme une matrice symétrique, diagonale, dont les valeurs varient d'une rangée de mailles à l'autre en fonction de l'ouverture des mailles et de leurs orientations.

Le filet est composé de 12 rangées de mailles pleines entre le collier et la prise. Soit K_i la perméabilité de la maille i , M_i , $i = 1, \dots, 12$:

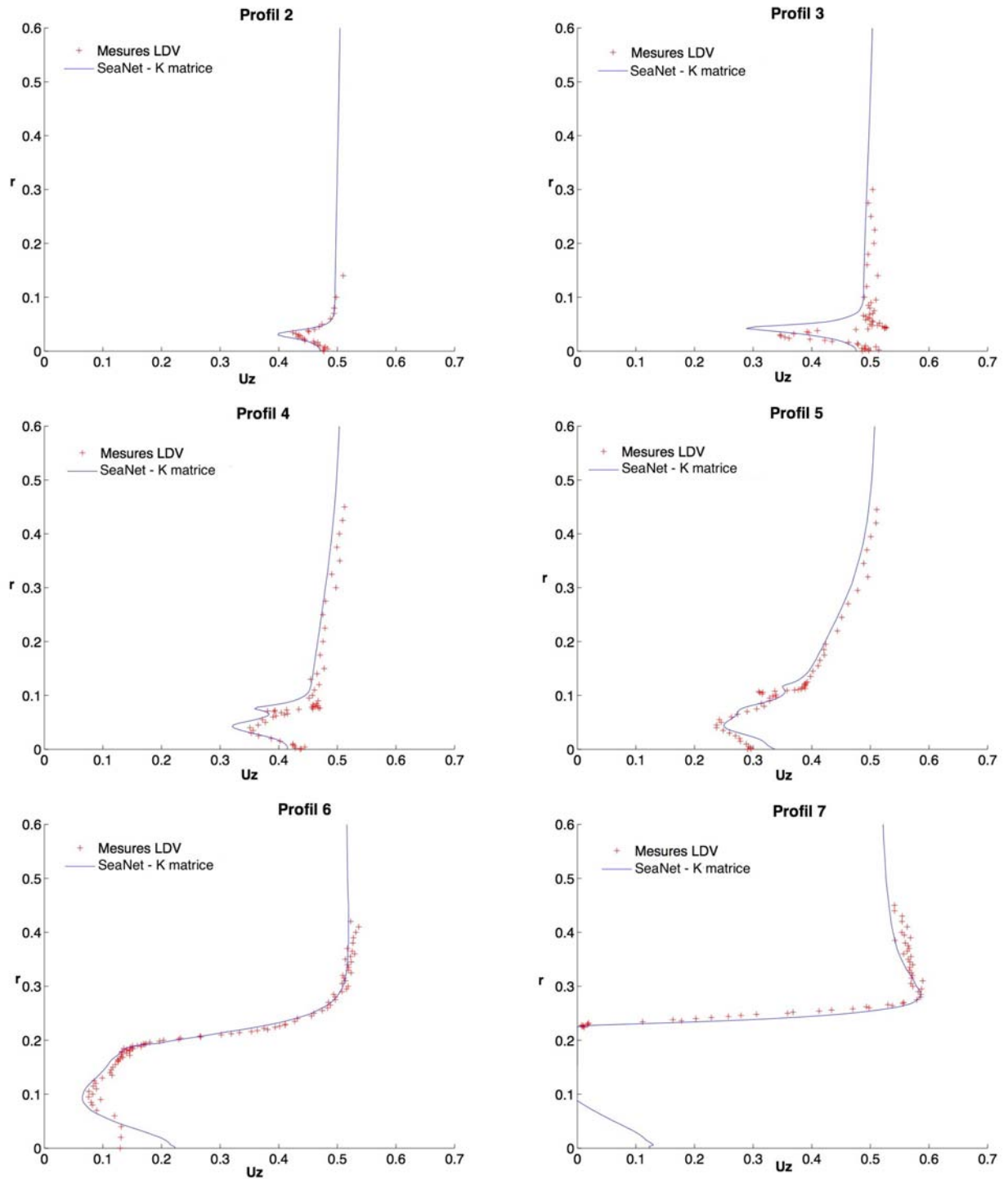
$$(6.2.9) \quad K_i = \begin{pmatrix} K_i^r & 0 \\ 0 & K_i^z \end{pmatrix},$$

où K_i^r est la perméabilité dans la direction r et K_i^z la perméabilité dans la direction z telles que :

$$(6.2.10) \quad \begin{aligned} K_i^r &= \frac{90 - \beta_i}{90} \mathcal{A}_i(M_i) \frac{C_t}{\nu}, \\ K_i^z &= \frac{\beta_i}{90} \mathcal{A}_i(M_i) \frac{C_t}{\nu}, \end{aligned}$$

où β_i est l'angle que forme la maille M_i avec la direction z dans le plan (O, r, z) et $C_t = 0.02$ est une constante sans dimension.

Figure 6.50: Comparaison Profils LDV - *SeaNet 1.4* avec K_i matrice pour chaque rangée de mailles M_i



Résultats de la simulation. Les résultats obtenus avec cette nouvelle fonction de perméabilité sont donnés sur les figures 6.50, qui donnent la comparaison des profils numériques pour u_z avec les profils expérimentaux. On constate que les résultats sont satisfaisants.

Les courbes de niveaux pour la vitesse et l'énergie cinétique turbulente sont données

6.2. TEST DU MODÈLE : FILET OUVERT

aux figures 6.51 et 6.52 respectivement. Seules les valeurs pour l'énergie cinétique turbulente sont plus faibles par comparaison aux résultats obtenus précédemment, sans doute du fait du changement de maillage. Les résidus pour la vitesse et l'énergie cinétique turbulente sont donnés sur les figures 6.53.

Figure 6.51: Courbes de niveau - composantes u_z (figure du haut) et u_r (figure du bas) de la vitesse

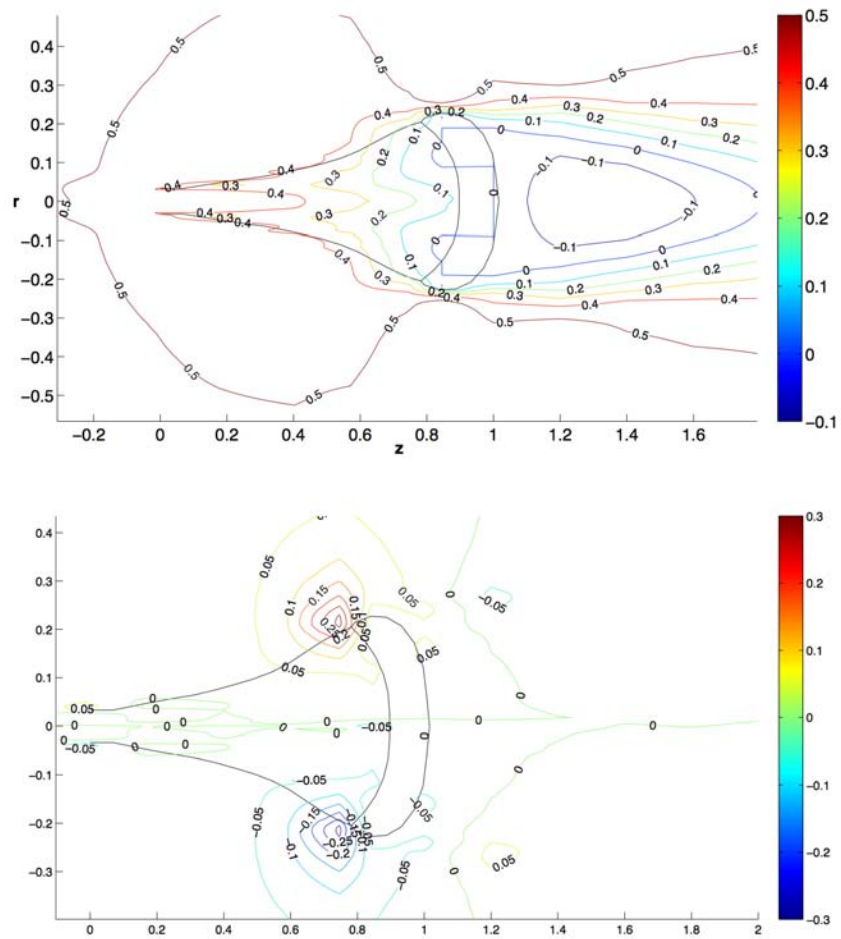


Figure 6.52: Courbes de niveau - Energie cinétique turbulente - it 225

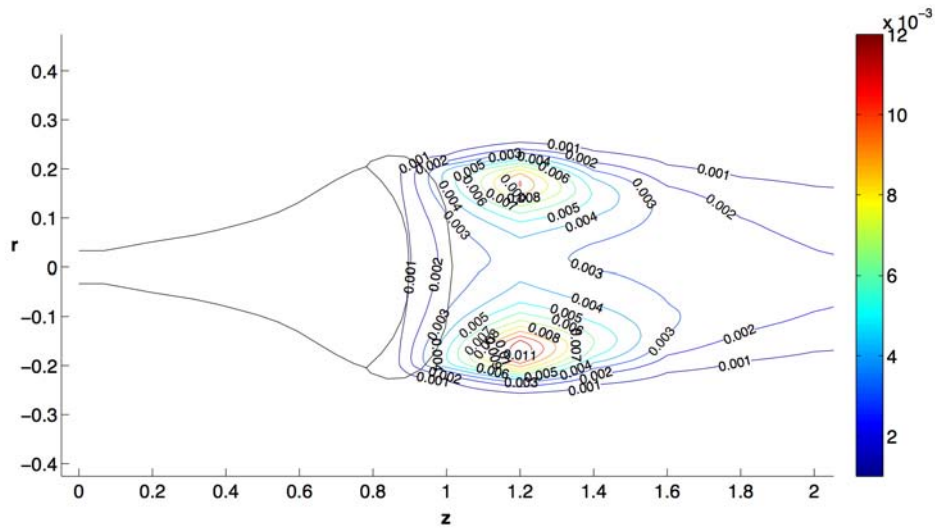
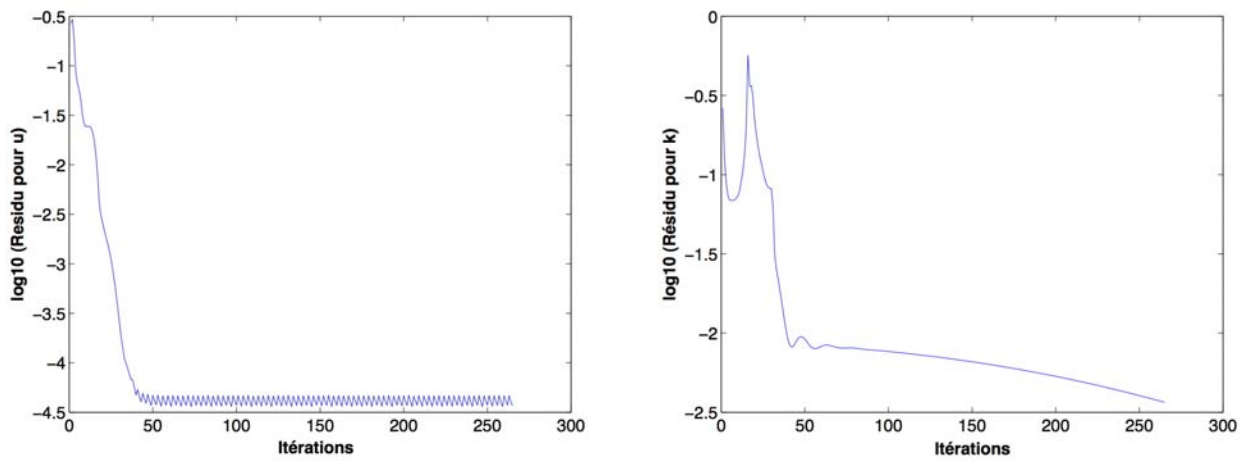


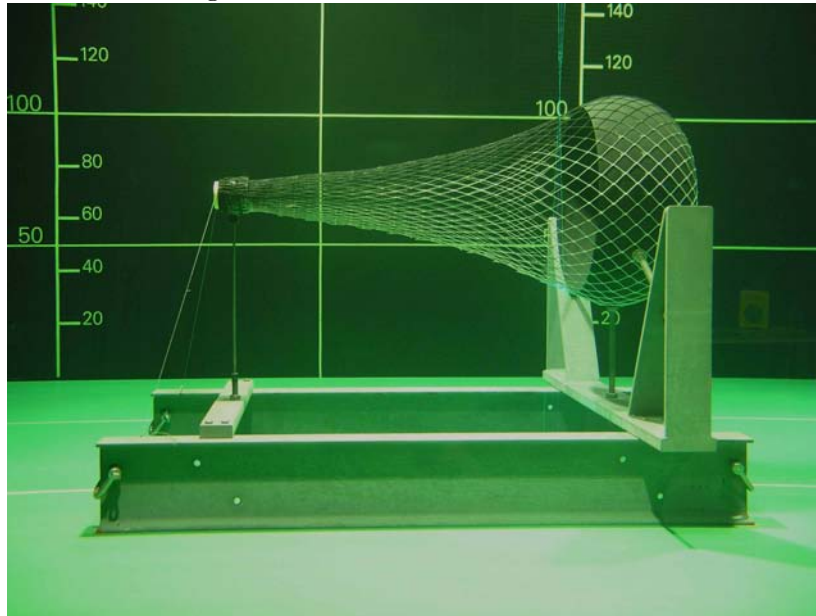
Figure 6.53: $\log_{10}(\text{residu})$ pour la vitesse et l'énergie cinétique turbulente



3 Test du modèle : Filet fermé

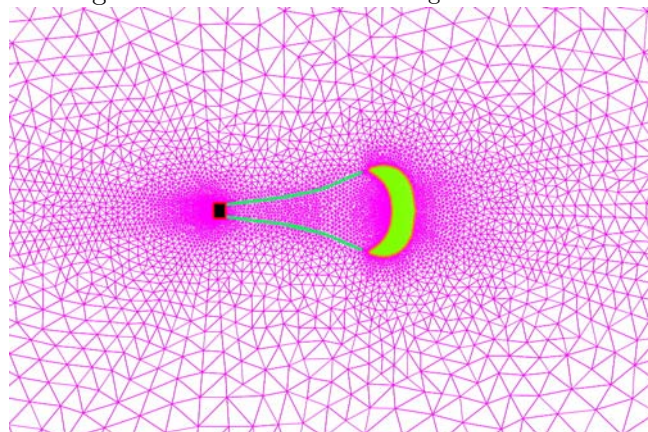
La configuration du filet dans laquelle l'entrée est bouchée (voir figure 6.54) conduit à un écoulement très différent de celui que l'on avait pour le cas du filet ouvert dans la mesure où le bouchon constitue un obstacle que le fluide doit contourner et il réduit de façon significative l'écoulement interne. Comme nous l'avons évoqué au chapitre 4, ce choix a été motivé par sa mise en oeuvre rapide et peu coûteuse.

Figure 6.54: Configuration du filet bouché



Si l'on reprend les mêmes paramètres que ceux donnés au paragraphe 6.2.7.a à l'exception de $C_3 = 0.01$, avec un maillage de 8319 noeuds et 16544 triangles dont l'entrée est bouchée (voir figure 6.55), les profils de vitesse ne coïncident pas exactement avec les profils expérimentaux (voir figures 6.56).

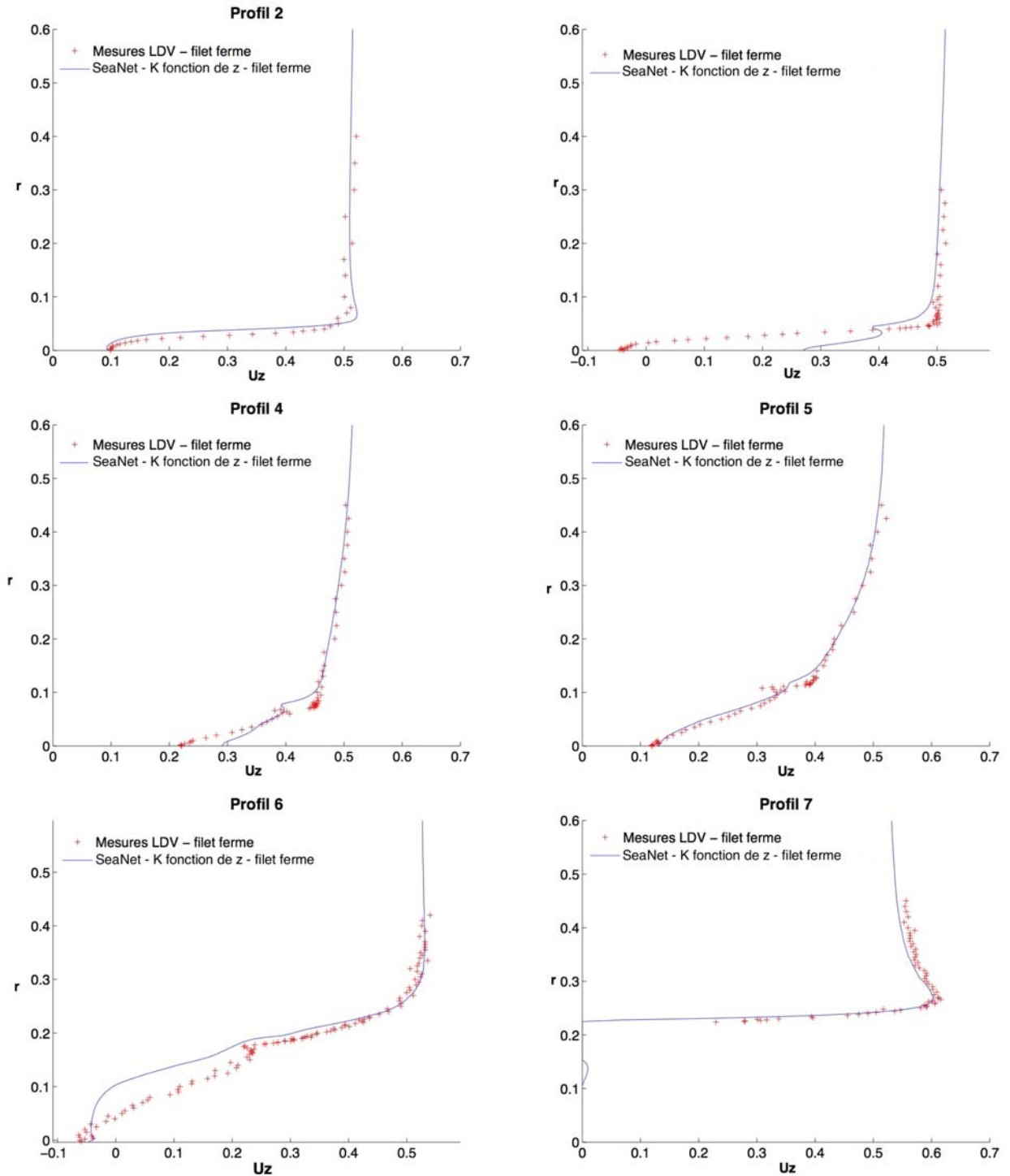
Figure 6.55: Zoom sur le maillage - filet bouché



Les profils 2, 5 et 7 sont corrects.

On constate que le profil 3 n'est pas bon, la recirculation qui se passe au niveau du collier est estimée beaucoup plus tôt par la simulation. En effet si on trace le profil de u_z

Figure 6.56: Comparaison Profils LDV - *SeaNet 1.4* avec l'entrée du filet bouché - it 150



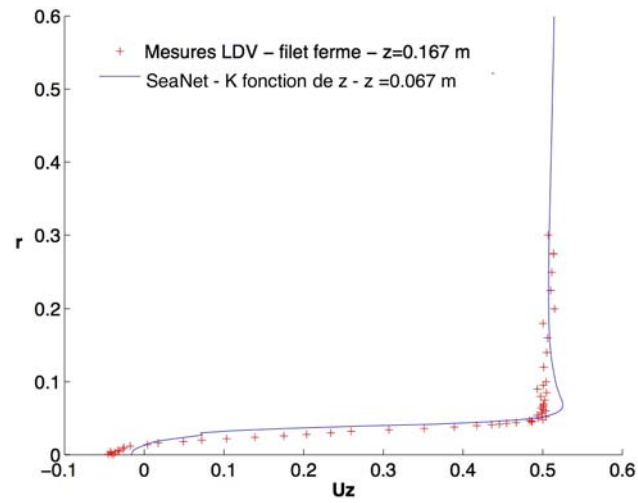
pour $z = 0.067m$ (soit 10 cm avant le profil 3 actuel qui se trouve à $z = 0.167$), on obtient un profil proche de celui donnée par l'expérimentation (voir la figure 6.57).

Le profil interne 4 donne des valeurs plus fortes au centre de la maquette que les valeurs expérimentales.

Le profil 6 prédit bien une recirculation mais plus d'étendue plus importante que

6.3. TEST DU MODÈLE : FILET FERMÉ

Figure 6.57: Comparaison Profil LDV pour $z=0.167$ m avec le profil *SeaNet 1.4* pour $z=0.067$ m



celle mesurée expérimentalement.

La figure 6.58 donne les courbes de niveaux de la composante u_z de la vitesse et les figures 6.59 et 6.60 celles de la composante u_r .

Figure 6.58: Courbes de niveau - filet fermé - composante u_z - it 150

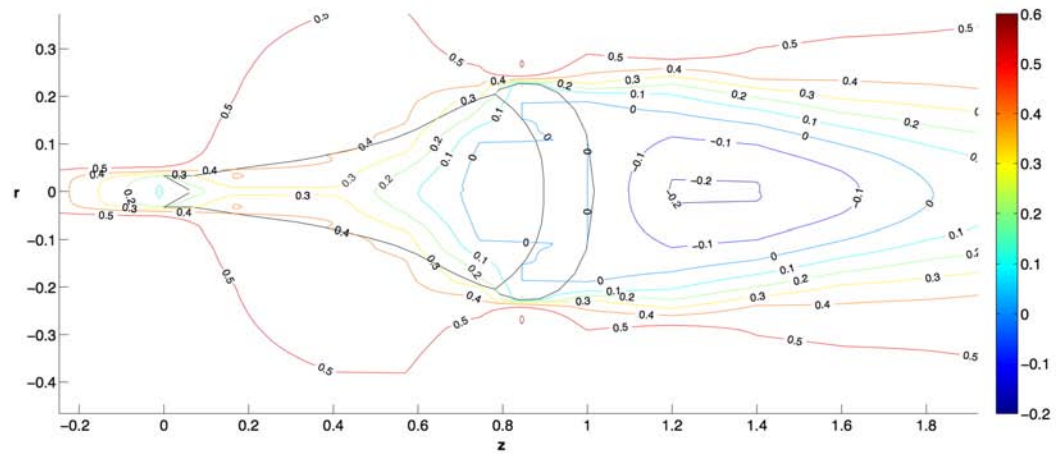


Figure 6.59: Courbes de niveau - filet fermé - composante u_r - it 150

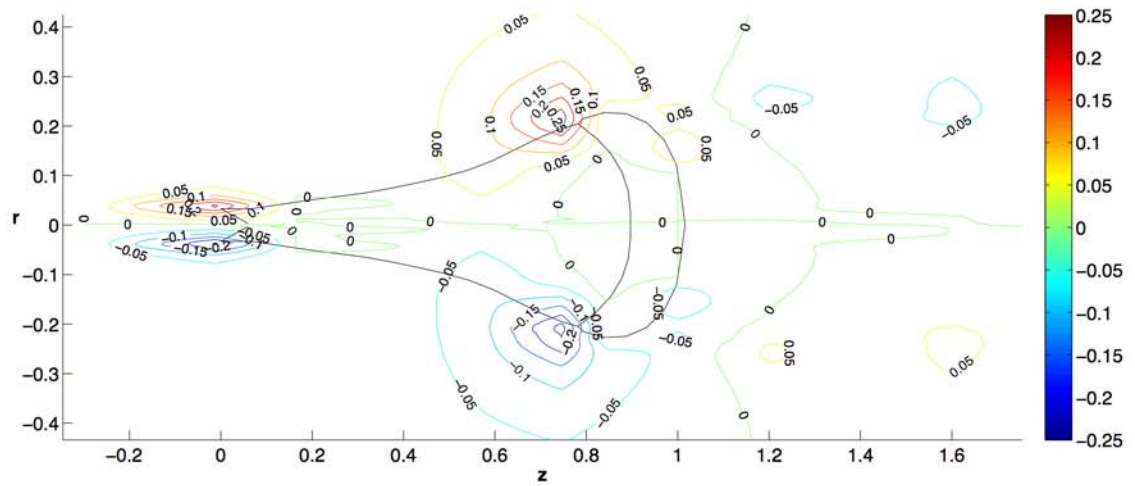
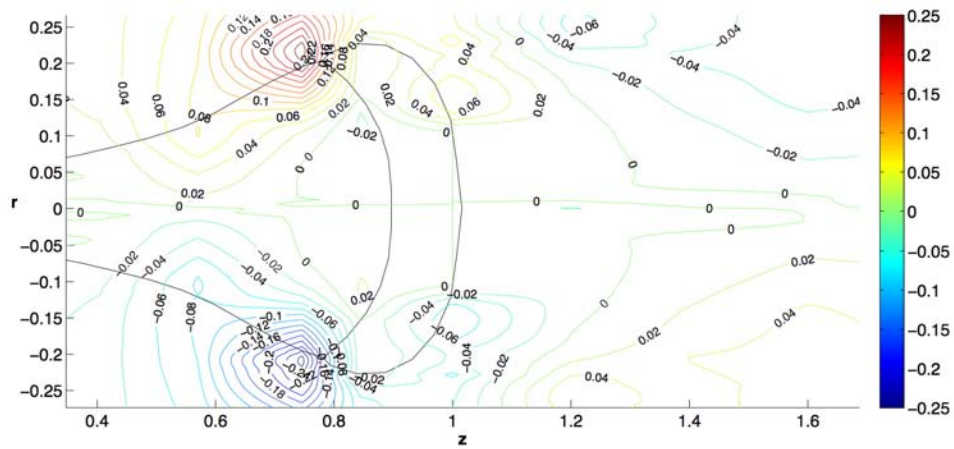


Figure 6.60: Zoom des courbes de niveau de u_r - filet fermé - it 50



6.3. TEST DU MODÈLE : FILET FERMÉ

L'énergie cinétique turbulente décroît avec les itérations comme le montre les figures 6.61, 6.62 et 6.63. Elle converge (Figure 6.64) mais beaucoup plus lentement que dans le cas du filet ouvert (voir Figure 6.11) et atteint, comme valeur maximale à la convergence, $0.002 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$.

Figure 6.61: Courbes de niveau - Energie cinétique turbulente - it 25

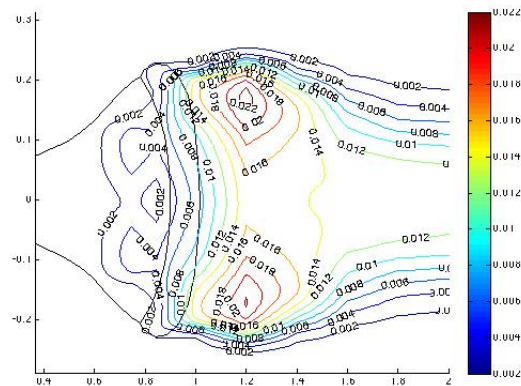


Figure 6.62: Courbes de niveau - Energie cinétique turbulente - it 50

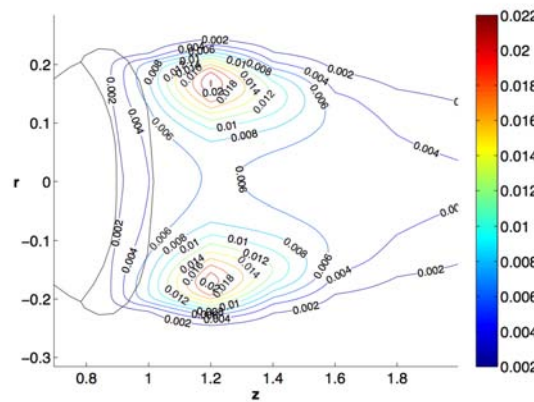


Figure 6.63: Courbes de niveau - Energie cinétique turbulente - it 75

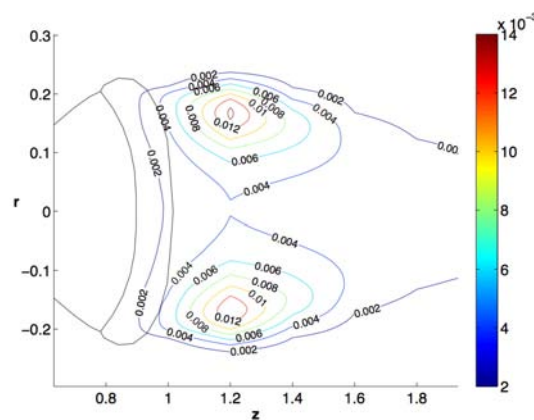
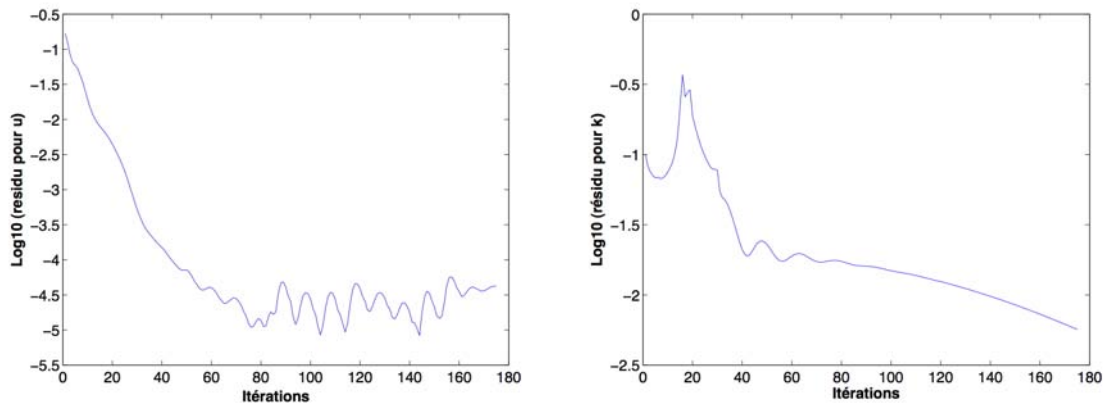
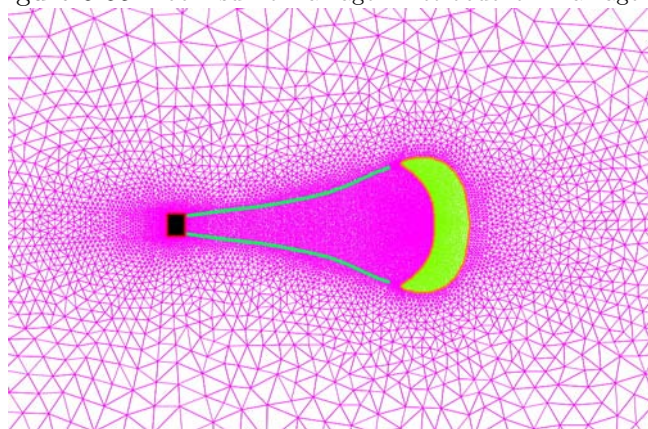


Figure 6.64: $\log_{10}(\text{residu})$ pour la vitesse et l'énergie cinétique turbulente



Donnons à présent les résultats pour un maillage plus fin au niveau du filet. Prenons un maillage de 13039 noeuds et 25984 triangles (voir figure 6.65).

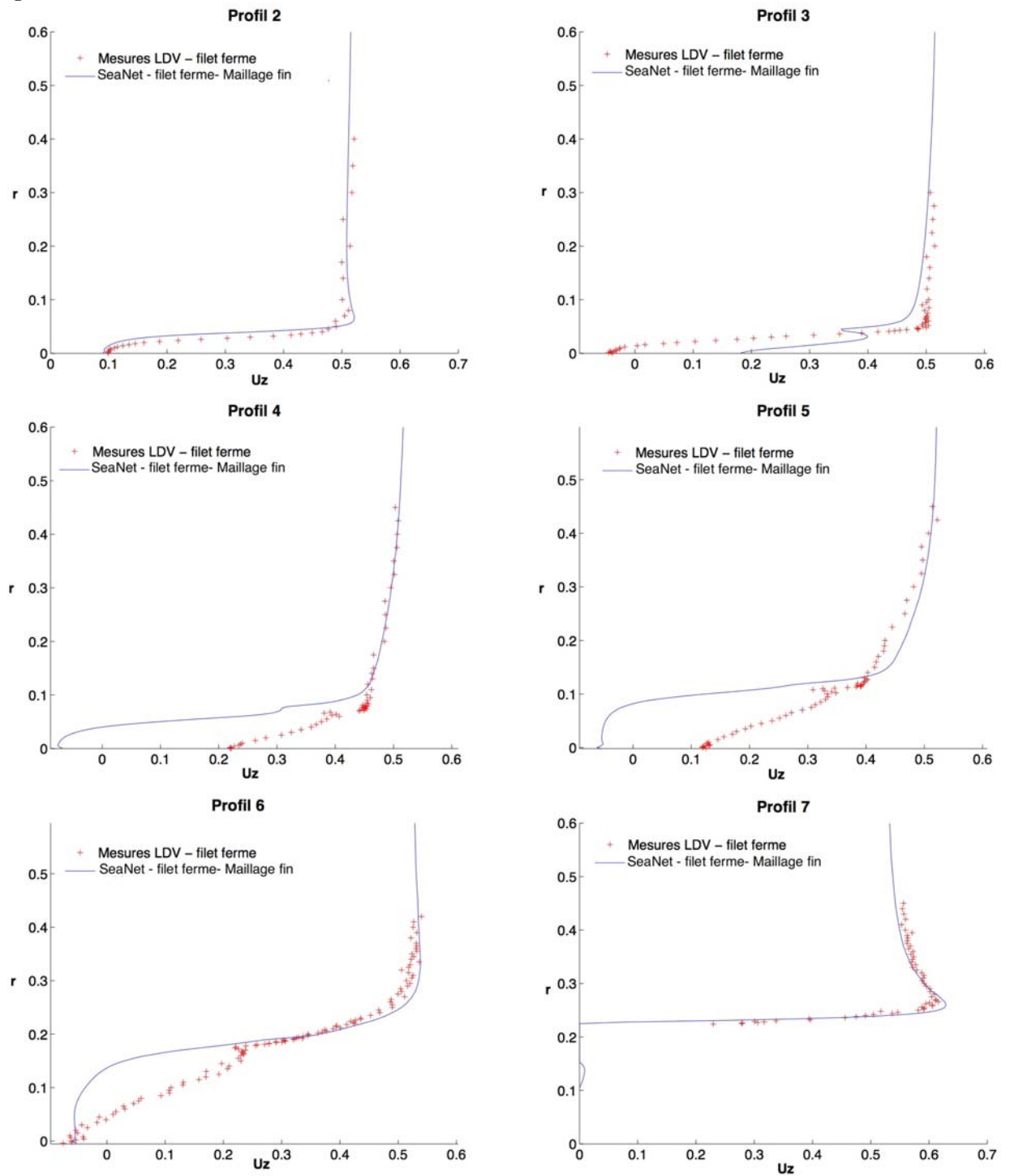
Figure 6.65: Zoom sur le maillage - filet bouché - Maillage fin



Comme suggéré par les figures 6.66 obtenues, le maillage a une forte influence sur les profils numériques, notamment sur les profils 4 et 5. Ces profils sont plus faibles que les profils expérimentaux.

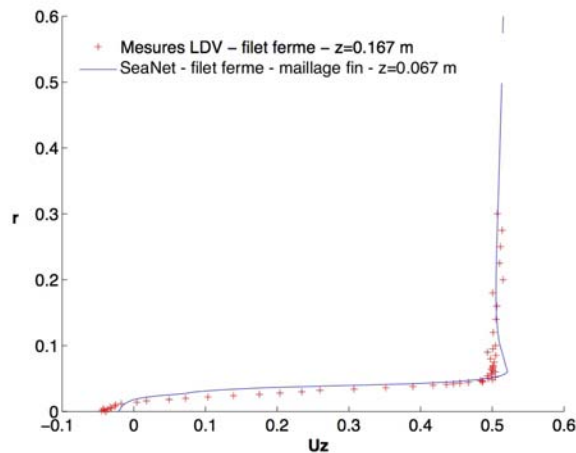
6.3. TEST DU MODÈLE : FILET FERMÉ

Figure 6.66: Comparaison Profils LDV - *SeaNet 1.4* avec l'entrée du filet bouché et Maillage fin - it50



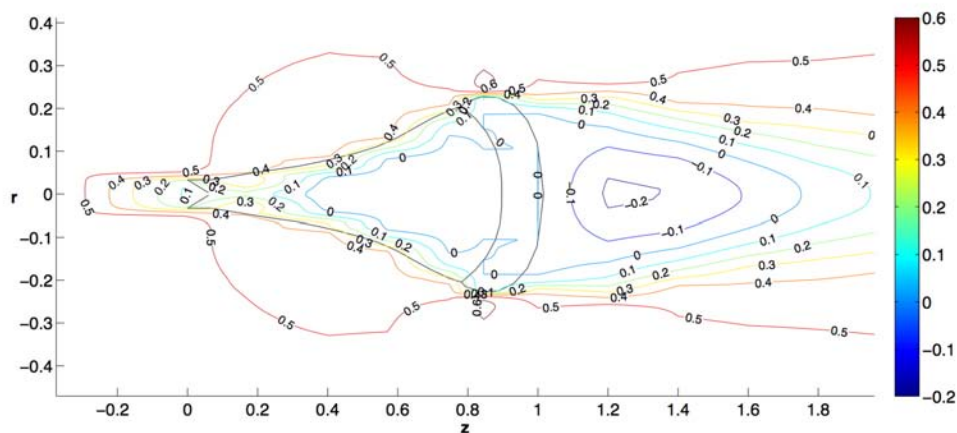
La recirculation au niveau du profil 3 est à nouveau prédite plus tôt par la simulation (Figure 6.67).

Figure 6.67: Comparaison Profil LDV pour $z=0.167$ m avec le profil *SeaNet 1.4* pour $z=0.067$ m et Maillage fin



Si l'on trace les courbes de niveaux pour les composantes u_z (Figure 6.68) et u_r de la vitesse (Figures 6.69 et 6.70), on constate qu'il se produit une recirculation interne au filet beaucoup plus forte et plus étendue que dans le cas du maillage grossier (Figure 6.68). Nous donnons également les courbes de niveaux de la composante suivant la direction r de la vitesse (voir figures 6.69 et 6.70)

Figure 6.68: Courbes de niveau - Maillage fin - filet fermé - composante u_z - it 50



6.3. TEST DU MODÈLE : FILET FERMÉ

Figure 6.69: Courbes de niveau - Maillage fin - filet fermé - composantes u_r - it 50

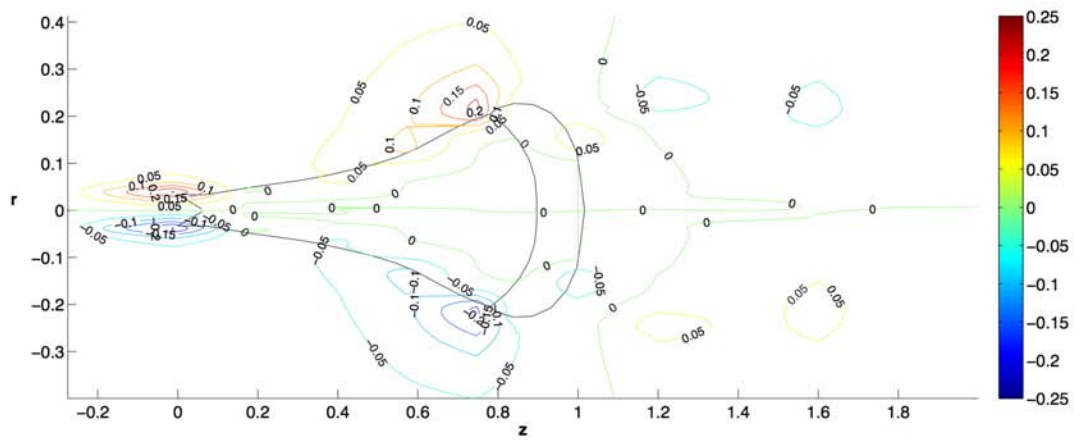
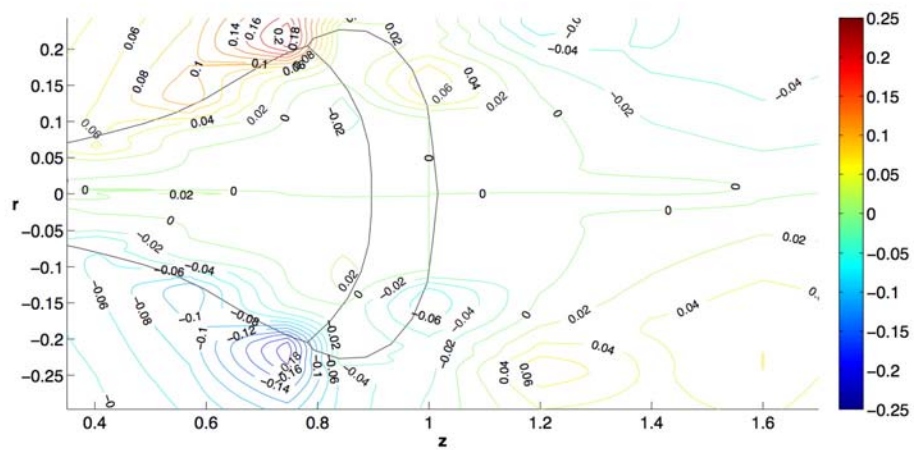


Figure 6.70: Zoom des courbes de niveau de u_r - Maillage fin - filet fermé - it 50



De même que dans le cas du maillage plus grossier, l'énergie cinétique turbulence décroît avec les itérations (Figures 6.71, 6.72 et 6.73) pour atteindre au maximum de $0.0015 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$ à la convergence, convergence dont le taux reste faible comme le montre la figure 6.74.

Figure 6.71: Courbes de niveau - Maillage fin - Energie cinétique turbulente - it 25

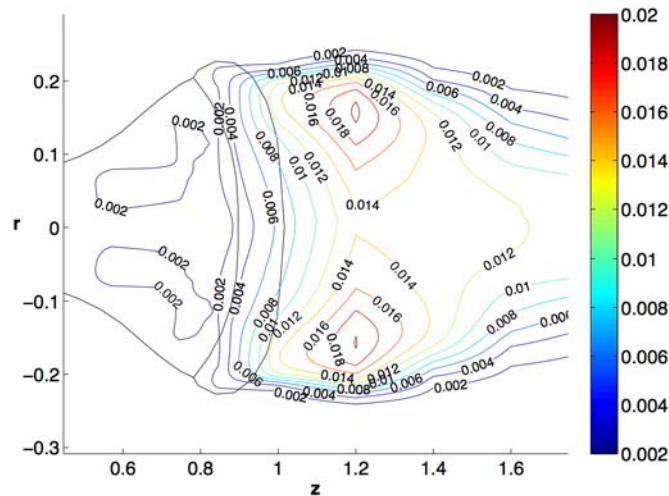
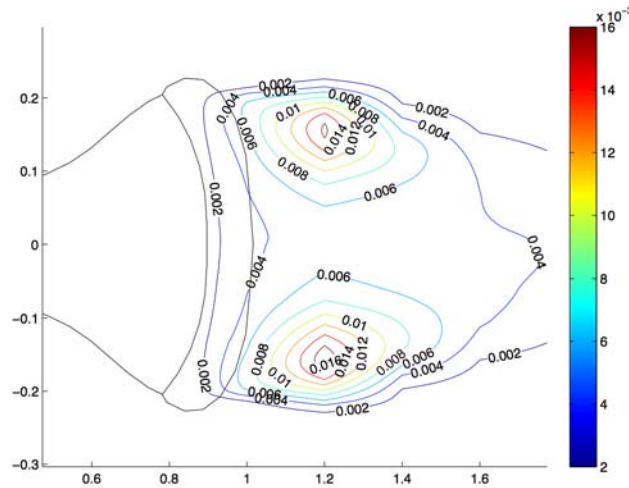


Figure 6.72: Courbes de niveau - Maillage fin - Energie cinétique turbulente - it 50



Les figures 6.75 et 6.76 donnent les courbes de niveaux de k au niveau du filet à l'itération 25.

On constate que dans les deux cas, l'énergie cinétique turbulence est plus faible que celle obtenue expérimentalement (voir Table 4.6).

6.3. TEST DU MODÈLE : FILET FERMÉ

Figure 6.73: Courbes de niveau - Maillage fin - Energie cinétique turbulente - it 75

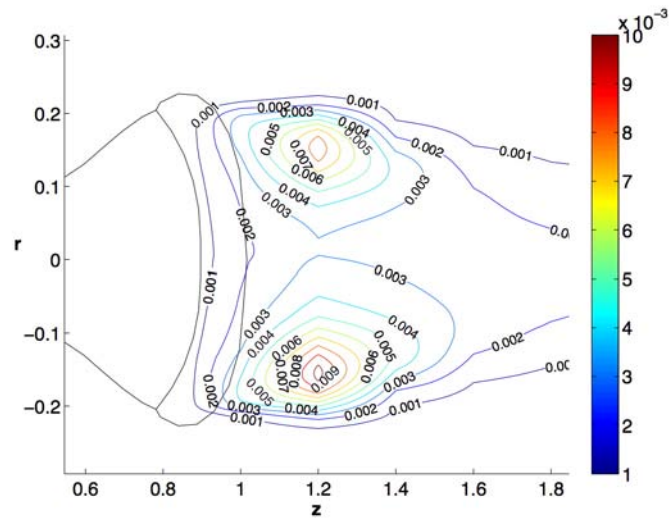


Figure 6.74: log₁₀(résidu) pour la vitesse et l'énergie cinétique turbulente

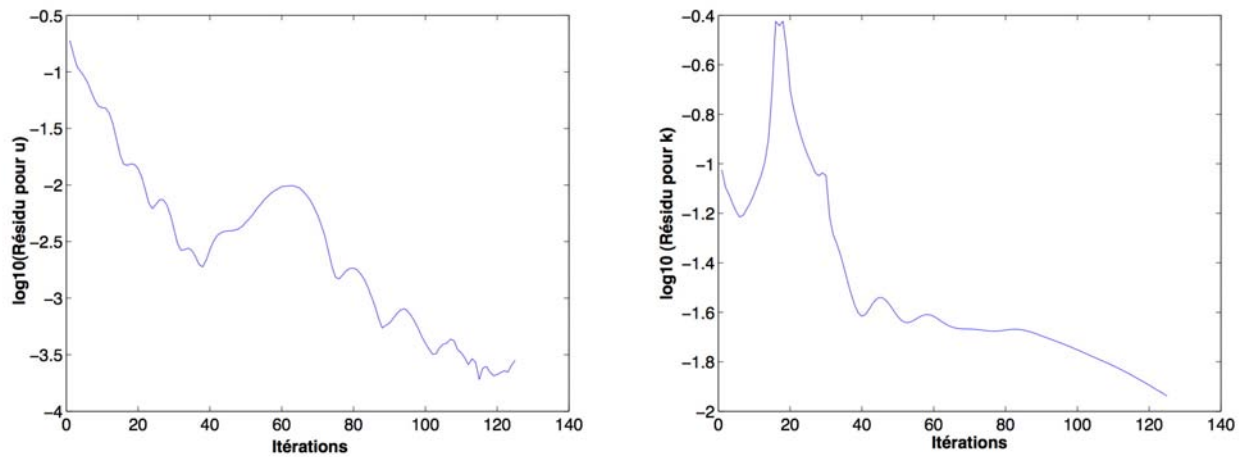


Figure 6.75: Courbes de niveaux de l'énergie cinétique turbulente à l'itération 25 - Maillage grossier

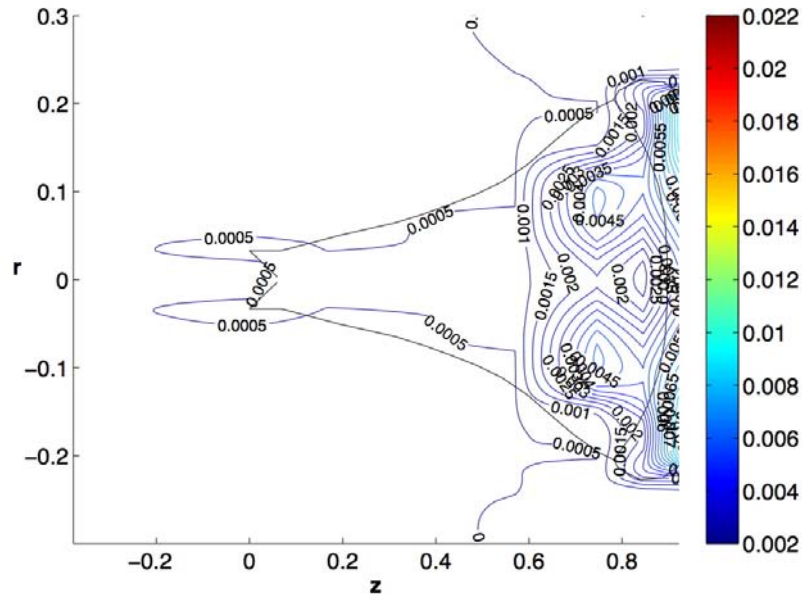
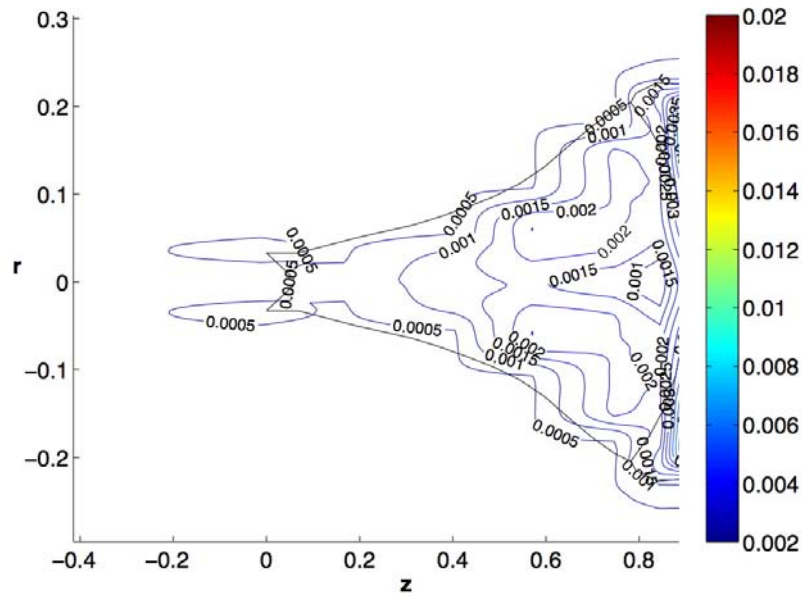


Figure 6.76: Courbes de niveaux de l'énergie cinétique turbulente à l'itération 25 - Maillage fin



4 Bilan

Le fait de fermer l'entrée du filet conduit à des recirculations à l'intérieur du filet que notre modèle ne parvient pas à prendre en compte correctement, et ce d'autant moins si le maillage est mal choisi. Dans cette configuration, le paramètre ℓ a une influence non négligeable sur les profils de vitesse. Ceci vient du fait de la fermeture du filet qui provoque plus de recirculations à l'intérieur du filet, ce qui se traduit par un taux de turbulence plus fort que dans le cas du filet ouvert (comparer les tableaux d'énergie cinétique turbulente 4.4 et 4.6 du chapitre 4). Pour parvenir à de meilleurs résultats, il faudrait un modèle pour k plus complet, et ce en ajoutant une équation gouvernant la longueur de mélange ℓ . De tels modèles existent et sont proposés dans la littérature (voir par exemple [Kan04] ou [San98]).

La question se pose alors de savoir si boucher l'entrée conduit à une situation réaliste ou non. Cette idée est venue du fait que la rallonge, partie du filet avant le cul du chalut est en réalité beaucoup plus longue que celle de la maquette de Boulogne-sur-Mer.

Si le fait d'augmenter la rallonge revient au même que boucher l'entrée du filet, alors une suite de notre travail pourrait être de compléter effectivement le modèle de turbulence proposé.

En revanche, si l'écoulement à l'entrée de la poche n'est pas négligeable, le modèle tel que proposé ici serait satisfaisant et on pourrait envisager le passage au 3D. Des mesures en mer suggèrent que la vitesse interne au chalut et à proximité de la poche est proche de la vitesse de chalutage, [The98], [Vin96]. Le nombre de ces mesures étant limité, il serait raisonnable d'entreprendre une nouvelle campagne expérimentale afin de déterminer la vitesse du fluide entrant dans la poche.

Bilan et perspectives

Bilan

Rappel de l'objectif initial

Le sujet de recherche abordé dans ce mémoire concerne la modélisation et la simulation numérique du processus de capture au niveau d'une poche de chalut. L'objectif à terme est de disposer d'un outil numérique efficace d'estimation de la sélectivité des chaluts.

Résumé

La première partie nous a permis de dresser un bilan des connaissances et logiciels existants permettant une simulation des mécanismes intervenant au niveau de la poche de chalut, zone où se produit principalement la sélectivité.

Le chapitre 1 de cette partie a présenté des modèles de filets au travers de deux approches. La première que nous avons nommée l'approche discrète, prend en compte tous les fils et tous les noeuds de la poche. Elle nous a permis de dresser un bilan complet des efforts qui s'exercent sur le filet. Elle a mis en évidence les deux possibilités pour estimer la position à l'équilibre du filet et a montré ses limites du fait de la grande quantité de ressources informatiques nécessaires. Cela a motivé la deuxième approche qui consiste à prendre en compte simultanément plusieurs mailles et de ce fait est plus efficace.

Le chapitre 2 présente trois logiciels de simulation du couplage filet/poissons. Ils ont des objectifs différents et cela nous a amené à poser la question d'un couplage de ces codes pour parvenir à une simulation réaliste de la prise, des poissons et du filet et d'estimation de la sélectivité. Reste le couplage de ces codes avec un écoulement 3D.

Le chapitre 3 décrit les modèles fluides existants et leurs limites qui compromettent leur utilisation dans un cadre 3D. Des modèles de turbulence de type RANS sont proposés mais le problème réside notamment dans le maillage du domaine fluide, complexe du fait de la nature poreuse et 3D du filet. Nous avons étudiés plusieurs axes pour permettre le passage au 3D :

- Une hypothèse de membrane poreuse pour modéliser le filet et un maillage conforme. Cette approche consiste à mailler la membrane puis à construire un maillage 3D ;
- Une approche issue des méthodes de frontières immergées, en prenant en compte les obstacles dans les équations.

La première a été écartée du fait des ressources informatiques requises et de la faisabilité d'un maillage adaptatif. Nous avons préféré la deuxième approche, qui fait appel à

des équations homogénéisées et motivée par le processus de maillage simplifié et sa capacité à gérer un filet en mouvement. En revanche, la déduction théorique de ces équations par un processus d'homogénéisation constitue un travail difficile, non entrepris.

Notre étude s'est naturellement dirigée vers l'élaboration d'un modèle fluide 3D, indispensable dans la mesure l'écoulement détermine la forme de la poche, l'ouverture des mailles, la fatigue des poissons et par conséquent la sélectivité.

Le chapitre 4 présente les campagnes expérimentales que nous avons menées en collaboration avec l'équipe Ifremer du bassin d'essais de Boulogne-sur-Mer. Les données expérimentales collectées ont mis en évidence le caractère turbulent de l'écoulement. Deux configurations ont été étudiées : la première avec l'entrée de la poche ouverte, la deuxième avec l'entrée bouchée. Elles présentent des écoulements très différents et de ce fait sont très intéressantes pour tester tout modèle fluide. Cela nous a également offert l'opportunité de nous familiariser aux techniques de mesures hydrodynamiques et d'en donner une description.

Dans le chapitre 5, nous proposons un modèle fluide basé sur les équations de Navier-Stokes moyennées et avec viscosité turbulente, couplées à une équation pour l'énergie cinétique turbulente. Nous utilisons également une technique de prise en compte originale des obstacles dans l'écoulement de façon à simplifier le processus de maillage dans la perspective future de l'utilisation de ce modèle pour traiter des problèmes 3D. Nous montrons un résultat d'existence de la solution au problème posé et des conditions aux limites de la boîte de calcul ne perturbant pas l'écoulement sortant.

Une fois le modèle établi, nous avons entrepris sa mise en oeuvre numérique par l'intermédiaire du logiciel FreeFem++, ce qui nous a permis de le tester dans le cas simplifié de la maquette de chalut rigide considérée expérimentalement (Chapitre 6). Nous avons réalisé une étude de l'influence des paramètres présents dans le modèle sur les résultats des simulations. Nous avons également testé la faisabilité de la méthode des domaines fictifs dans ce cadre axisymétrique. Nous avons mis en évidence la capacité de notre modèle à reproduire les résultats expérimentaux dans le cas où la turbulence au niveau du filet est faible. Les résultats obtenus sont convaincants. Dans le cas où la turbulence au niveau du filet est plus forte, le modèle donne de moins bons résultats, nous conduisant à proposer l'ajout d'une équation pour la longueur de mélange de façon à mieux prédire l'énergie cinétique turbulente.

Perspectives

Ce travail de thèse a ouvert plusieurs pistes de réflexion, notamment :

- **Sur la déduction des équations de Navier-Stokes/Brinkmann par homogénéisation des équations de Navier-Stokes dans le problème de l'écoulement autour d'un filet.** Ce travail est difficile mais il permettrait d'obtenir une équation pour le paramètre de perméabilité, fonction de caractéristiques physiques, comme la taille des mailles par exemple.
- **Sur l'écoulement entrant au niveau de la poche.** On a en effet constaté des changements significatifs de l'écoulement selon que l'entrée du filet est ouverte ou fermée. Nous suggérons par conséquent de réaliser des mesures plus précises sur l'écoulement dans la rallonge dans la mesure où elle alimente l'entrée du chalut. Ces données pourront ainsi être utilisées par exemple comme données d'entrée du code fluide. Cela permet d'envisager soit un couplage avec le modèle fluide tel que nous le présentons dans ce mémoire si l'écoulement entrant dans la poche est non négligeable, soit l'ajout d'une équation pour la longueur de mélange dans le cas contraire. Il est donc très important qu'une telle information soit disponible.
- **Sur la simulation d'une poche de chalut avec une rallonge.** Un prochain travail serait d'implémenter le modèle fluide dans la cas de la poche avec rallonge et de comparer les résultats obtenus avec les données expérimentales disponibles, voir par exemple [Vin96].
- **Sur l'étude de la convergence de notre code de calcul axisymétrique.** Notre code est régi par différents paramètres numériques (pas de temps, pas de space, ...). Nous avons trouvé un jeu de paramètres conduisant à la convergence de notre code et nous avons fait une série de simulations numériques en faisant varier les valeurs de ces paramètres, de façon à étudier leur influence respective. L'idéal serait de trouver théoriquement des critères de convergence de nos schémas numériques. Ce travail est très difficile. Une piste possible serait d'étudier l'article de J. Casado, T. Chacon, V. Girault, M. Gomez et F. Murat sur la convergence d'un schéma d'éléments finis usuels pour résoudre une équation elliptique avec donnée dans L^1 [CDRG⁺06]. Cet article met en évidence un critère géométrique sur le maillage en utilisant les solutions renormalisées. Mais le travail reste à refaire entièrement pour un modèle comme celui présenté dans ce mémoire.
- **Sur l'utilisation de la méthode des domaines fictifs en 3D pour simplifier le maillage.** Une prochaine étape dans ce travail serait d'utiliser la petite application que nous avons développé sous *Matlab* dont nous expliquons le principe en Annexe A pour obtenir la perméabilité par éléments finis et de réaliser des premiers essais de simulations de l'écoulement laminaire 3D, par exemple en utilisant les logiciels *FreeFem3d* ou *Comsol Multiphysics*.
- **sur le couplage entre le filet, le fluide et les poissons.** Le travail restant à effectuer consiste en la mise en oeuvre du couplage entre les codes filets, poissons et fluide. Nous avons donné ici quelques clés pour y parvenir, notamment en précisant comment prendre en compte les obstacles dans le code fluide. Une question que posera le passage au 3D sera le temps pris par la simulation mais également les ressources informatiques nécessaires.

Annexe A

Outil de prise en compte d'obstacles 3D

Dans les simulations que nous avons réalisées au chapitre 6, il est à noter que le maillage repose sur la frontière des obstacles. Dans la perspective de simulations d'écoulements 3D, il faut utiliser pleinement la méthode des domaines fictifs, à savoir mailler la boîte de calcul sans se préoccuper ni de la géométrie du filet, ni de celle de la prise. Ce maillage est donc très peu coûteux.

Une fois ce maillage construit, il faut trouver une technique pour parcourir tous les éléments finis de sorte de leur affecter une valeur du paramètre de perméabilité K en fonction de la perméabilité du milieu dans lequel ils se trouvent. Ce travail est la partie délicate de la méthode car les frontières des obstacles ne sont pas nécessairement paramétrées mais données par un ensemble des points discrets.

Supposons que l'on dispose d'une telle technique. Le couplage entre le code fluide et le code régissant le filet et les poissons devient beaucoup moins coûteux. En effet, supposons une approche itérative de couplage. Il s'agira alors de faire communiquer un code fluide avec un code filet/poissons existant. En supposant les efforts exercés par le fluide sur le filet négligeable, restera à calculer les efforts du fluide sur les poissons, qui pourront être calculés par le code fluide selon le principe décrit à la section 5.4.3. Ces efforts pourront ensuite être envoyés au code filet/poissons, qui par cette information pourra à son tour calculer la déformation du filet et la nouvelle position des poissons, et envoyer les nouvelles positions au code fluide, et ainsi de suite.

Avec la méthode de domaines fictifs, le gros avantage est que seul le paramètre de perméabilité devra être mis à jour au cours des itérations. Aucun remaillage ne sera requis dès lors qu'un maillage initial suffisamment fin est construit dans la zone où se trouve le filet et les poissons.

Dans cet annexe, nous proposons un outil pour définir la perméabilité sans recourir à un maillage conforme à la géométrie. Nous proposons de construire un maillage auxiliaire cartésien et de définir la perméabilité en chaque point du maillage. L'étape suivante consiste à projeter ces valeurs de perméabilité sur le maillage non structuré dans lequel la résolution va s'effectuer.

Nous allons présenter cet outil et sa mise en oeuvre pour deux cas :

- soit nous disposons d'une équation de la frontière de l'obstacle et dans ce cas la définition de la perméabilité est directe,

-
- soit nous disposons de points discrets de sa frontière et dans ce cas, la mise à jour de la perméabilité nécessite un algorithme spécifique.

Plaçons nous dans le premier cas.

1 Cas simple d'un obstacle à frontière paramétrée

Considérons, dans un premier temps, le cas simple d'un disque solide dans un écoulement. Disposant d'une équation paramétrée de la frontière, il est aisé de définir la perméabilité en chaque point par un test simple. Nous verrons dans la suite l'algorithme utilisé pour définir la perméabilité lorsque l'on ne dispose pas d'équations paramétrées de la frontière mais seulement de points discrets.

1.1 Cadre 2D

On considère l'écoulement dans un domaine 2D carré $[-1,1] \times [-0.6,0.6]$, perturbé par un disque, de rayon 0.3 m (Figure A.1) qui est une représentation simplifié de l'écoulement dans un canal perturbé par un cylindre vertical.

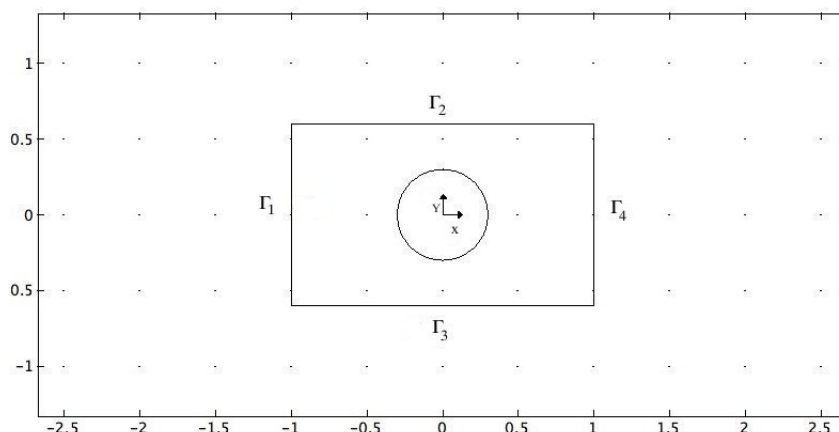


Figure A.1: Problème 2D considéré

L'écoulement rentre par la frontière Γ_1 et la vitesse d'entrée est prise égale à 1 m/s. Une condition d'adhérence à la paroi est imposée sur les bords Γ_2 et Γ_3 . Enfin une contrainte nulle est imposée en sortie pour ne pas perturber l'écoulement sortant. L'écoulement considéré est laminaire (nombre de Reynolds pris égal à 1)

Trois méthodes sont à notre disposition pour simuler l'écoulement, suivant la manière dont le disque est prise en compte :

- Par une **méthode classique** de type éléments finis avec condition d'adhérence sur le bord du disque,
- Par une **méthode de pénalisation** avec maillage conforme,
- Par une **méthode de domaines fictifs**.

Présentons les différents maillages propres à chaque méthode et les résultats obtenus, puis nous comparerons les résultats en vitesse et pression le long de profils donnés. Les calculs ont été réalisés avec le logiciel *Comsol Multiphysics* (<http://www.comsol.fr/>).

Méthode 1 : condition d'adhérence sur le bord du disque et maillage conforme

Nous construisons un maillage non structuré de notre domaine d'étude. Un exemple de maillage est donné sur la figure A.2.

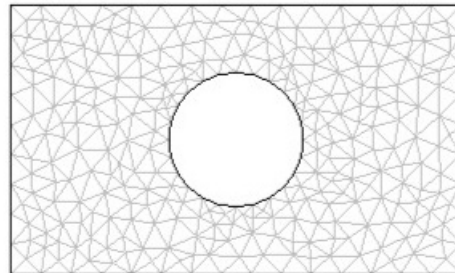


Figure A.2: Maillage conforme et condition d'adhérence aux bords du disque - 568 éléments triangulaires

Les équations de Navier-Stokes incompressibles sont résolues dans le domaine fluide.

Le champ de vitesse obtenu par la simulation est donné sur la figure A.3.

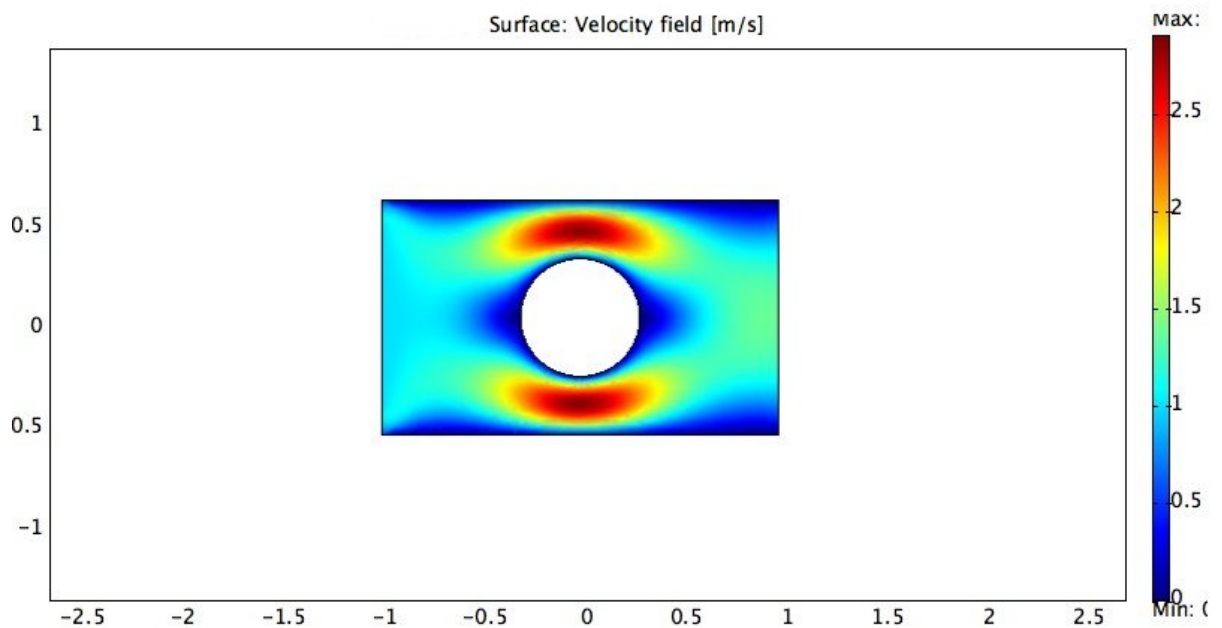


Figure A.3: Champ de vitesse - Méthode 1 : avec condition d'adhérence sur le bord du disque

La pression est donnée sur la figure A.4

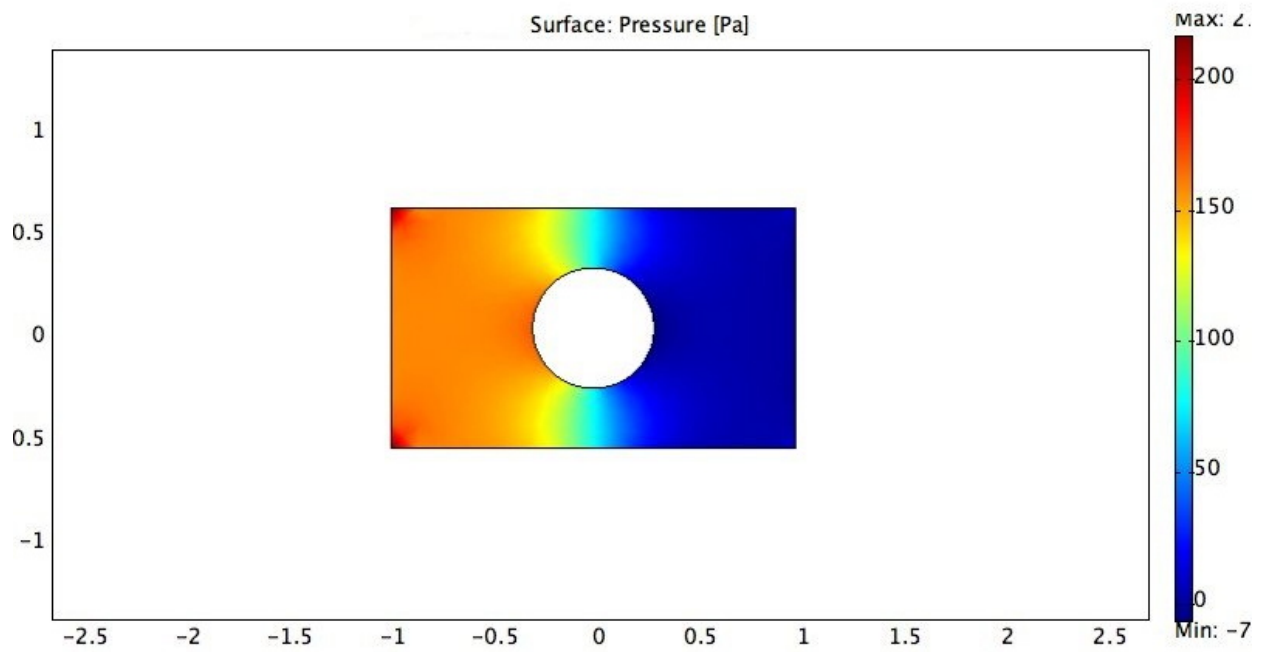


Figure A.4: Pression - Méthode 1 : avec condition d'adhérence sur le bord du disque

Méthode 2 : pénalisation de la vitesse et maillage conforme à la géométrie

Un maillage est construit dans tout le domaine, y compris à l'intérieur du disque considéré comme un milieu fluide de très faible perméabilité (Figure A.5).

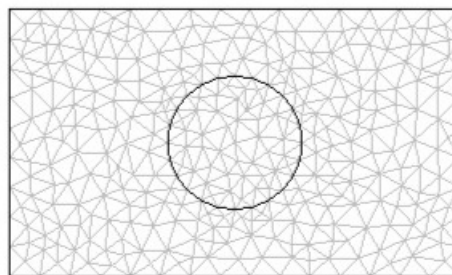


Figure A.5: Maillage conforme et pénalisation - 674 éléments

Les équations de Navier-Stokes/Brinkman incompressibles sont résolues dans tout le domaine. La perméabilité est donnée pour chaque région, celle-ci étant bien délimitée.

Le champ de vitesse obtenu par la simulation est donné sur la figure A.6.

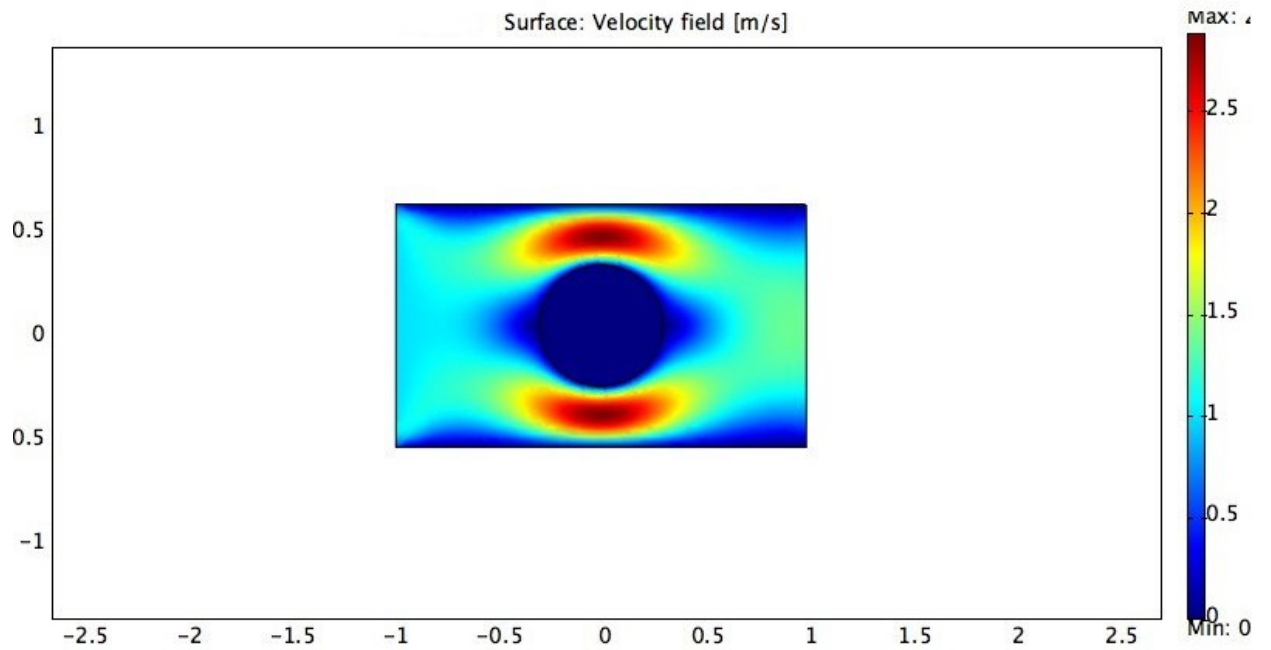


Figure A.6: Champ de vitesse - Méthode 2 : pénalisation

La pression est donnée sur la figure A.7

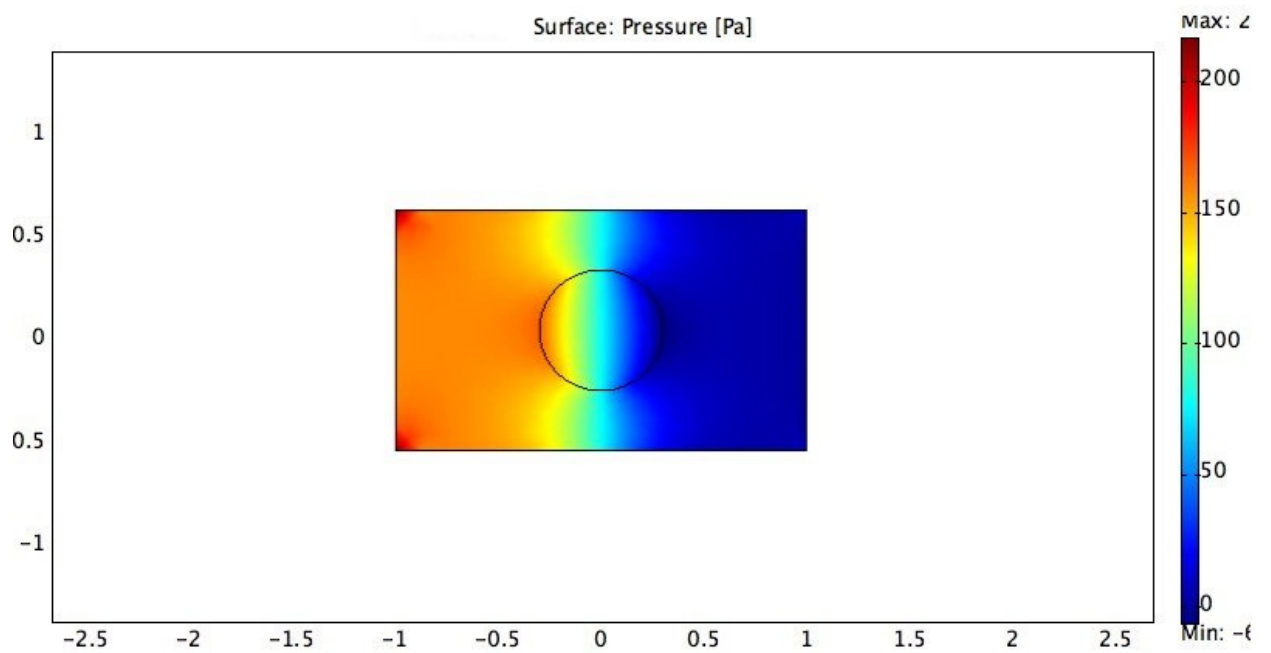


Figure A.7: Pression - Méthode 1 : pénalisation

Méthode 3 : domaines fictifs et maillage non conforme à la géométrie

La boîte est maillée sans tenir compte du disque (Figure A.8). La présence de l'obstacle est donnée par les valeurs locales de perméabilité.

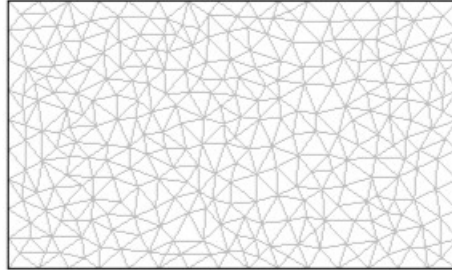


Figure A.8: Maillage non conforme - 592 éléments

La perméabilité est donnée sur chaque point d'un maillage cartésien (Figure A.9).

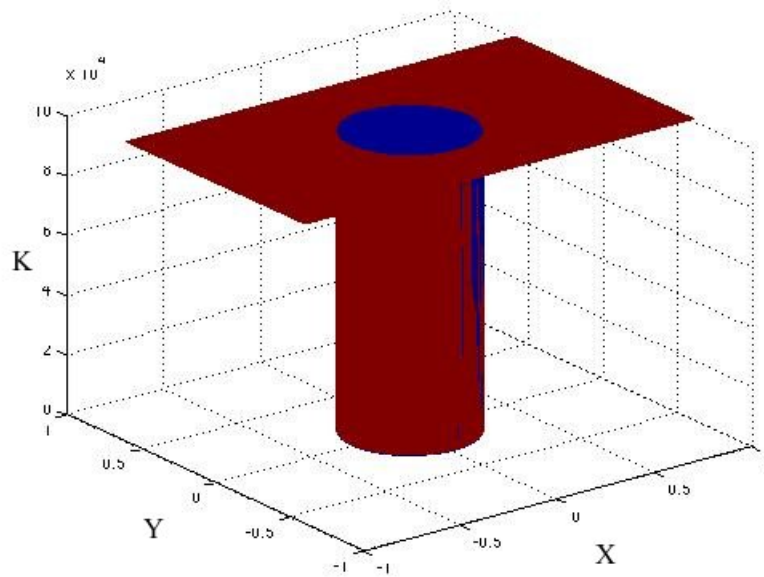


Figure A.9: Perméabilité K définie sur une grille cartésienne 1000x1000 points

Le champ de vitesse obtenu par la simulation est donné sur la figure A.10.

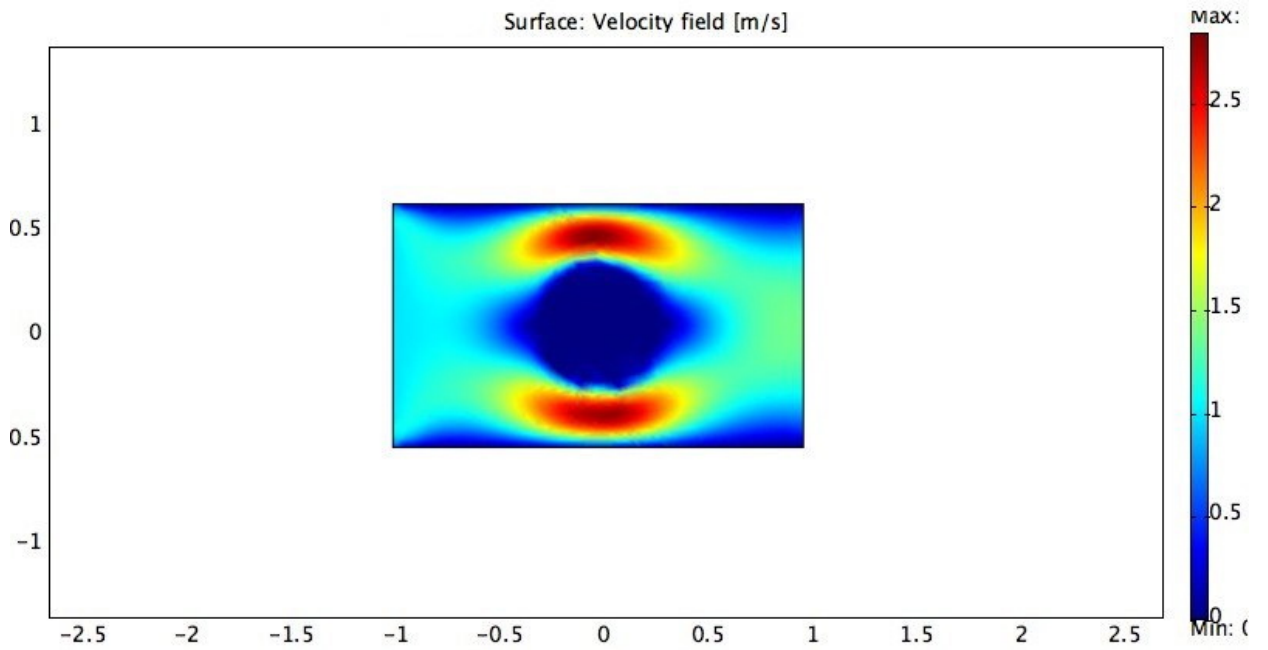


Figure A.10: Champ de vitesse - Méthode 3 : méthode des domaines fictifs

La pression est donnée sur la figure A.11

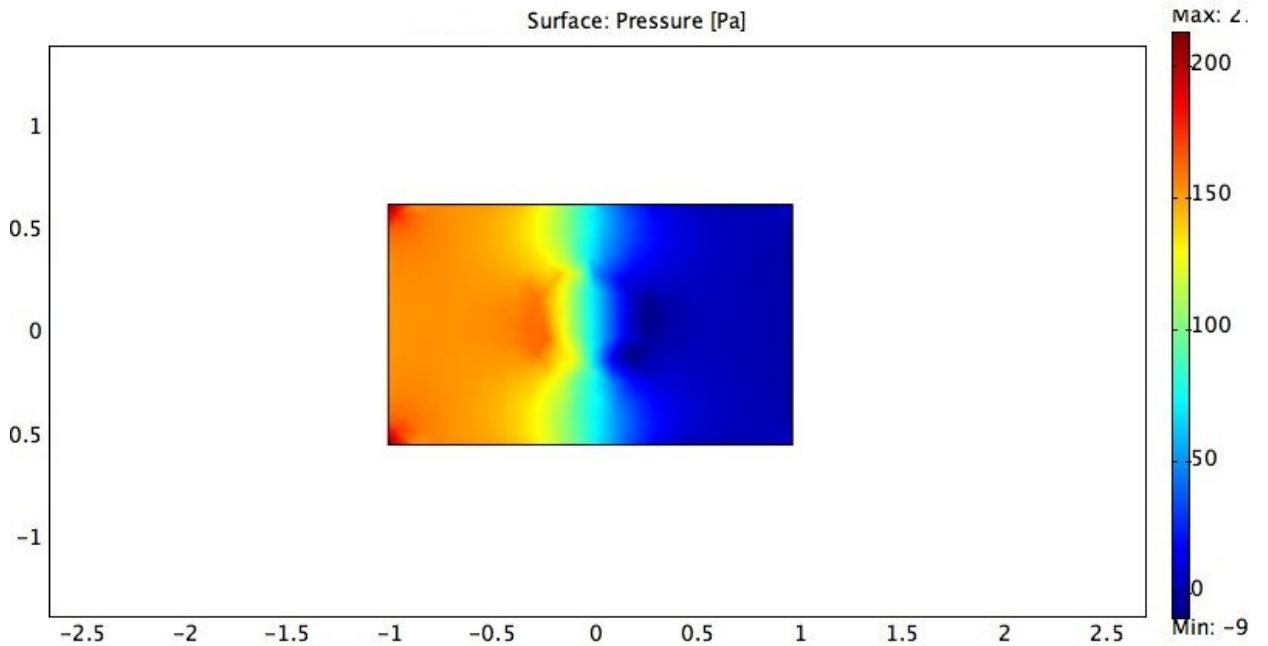


Figure A.11: Pression - Méthode 3 : méthode des domaines fictifs

Comparons les résultats des profils de vitesse et de pression obtenu par 3 méthodes.

Le profil considéré pour la composante de la vitesse suivant la direction x est donné par $x = 0.5$ (voir figure A.12).

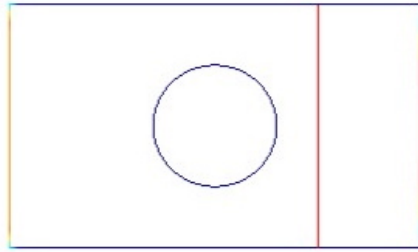


Figure A.12: Profil considéré pour la comparaison des vitesses : $x=0.5$

Le résultat de la comparaison des vitesses est donné sur la figure A.13. On a calculé l'erreur relative commise pour la pénalisation d'une part et la méthode des domaines fictifs d'autre part par rapport au profil obtenu par la méthode classique avec condition d'adhérence sur le bord. L'erreur a été calculé comme la norme 2 de la différence entre les valeurs de vitesse divisé par la norme 2 de la vitesse obtenue par la méthode classique. On obtient une erreur de 0.0023 entre la méthode de pénalisation et la méthode classique et une erreur de 0.0108 entre la méthode des domaines fictifs et la méthode classique.

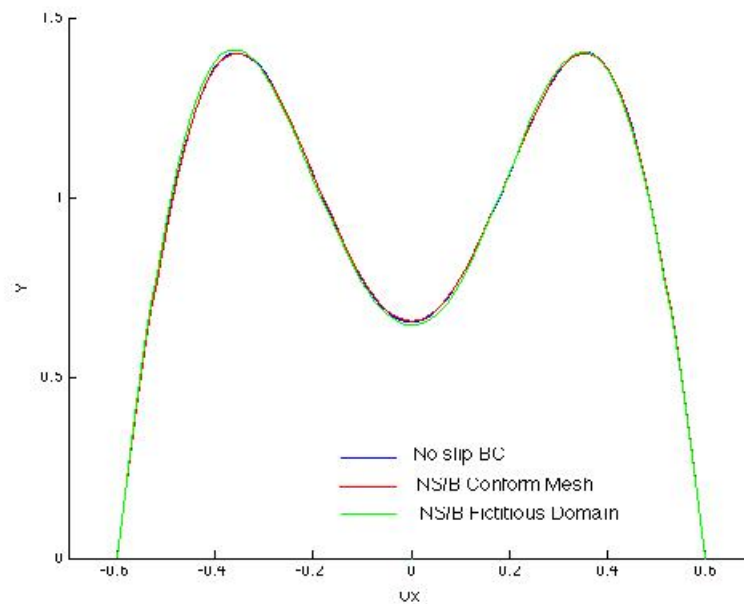


Figure A.13: Comparaison de la composante suivant x de la vitesse le long du profil $x=0.5$

La pression est comparée le long du profil $y = 0$ (Figure A.14) et le résultat de la comparaison est donné sur la figure A.15. De même, nous avons calculé l'erreur relative commise par rapport au profil obtenu par la méthode classique. On obtient une erreur de 0.0069 entre la méthode de pénalisation et la méthode classique et une erreur de 0.0363 entre la méthode des domaines fictifs et la méthode classique. On constate que la pression est moins bien calculée par la méthode des domaines fictifs.

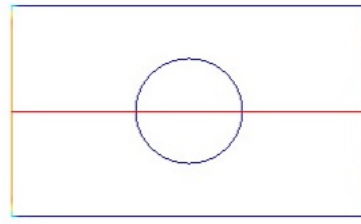
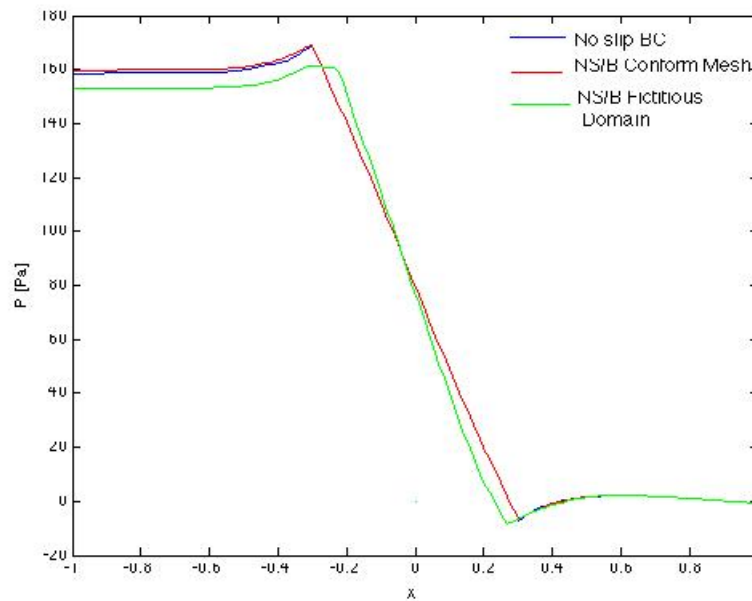


Figure A.14: Profil considéré pour la comparaison de la pression

Figure A.15: Comparaison de pression le long du profil $y=0$

En conclusion, on constate que les trois méthodes conduisent à de bons résultats pour la vitesse pour un maillage relativement grossier. Par contre la pression est légèrement moins bien calculée par la méthode des domaines fictifs.

On a pu constater l'importance de prendre un maillage cartésien fin pour définir la perméabilité avec la méthode des domaines fictifs dans la mesure où ces valeurs sont ensuite projetées et qu'il est donc important d'obtenir, par la projection, une frontière de l'obstacle relativement fidèle.

1.2 Cadre 3D

Considérons le problème 3D de l'écoulement autour d'une bille de rayon 0.3 m situé dans une boîte carrée de dimensions $[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$ (voir Figure A.16), ce qui est une représentation simplifiée de l'écoulement dans un tube de section carrée perturbé par une sphère fixe. Sur la face Γ_1 , la vitesse d'entrée est de 1 m/s dans la direction x. Sur les faces $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$, on impose une condition d'adhérence, et sur la face de sortie Γ_6 , une condition neutre.

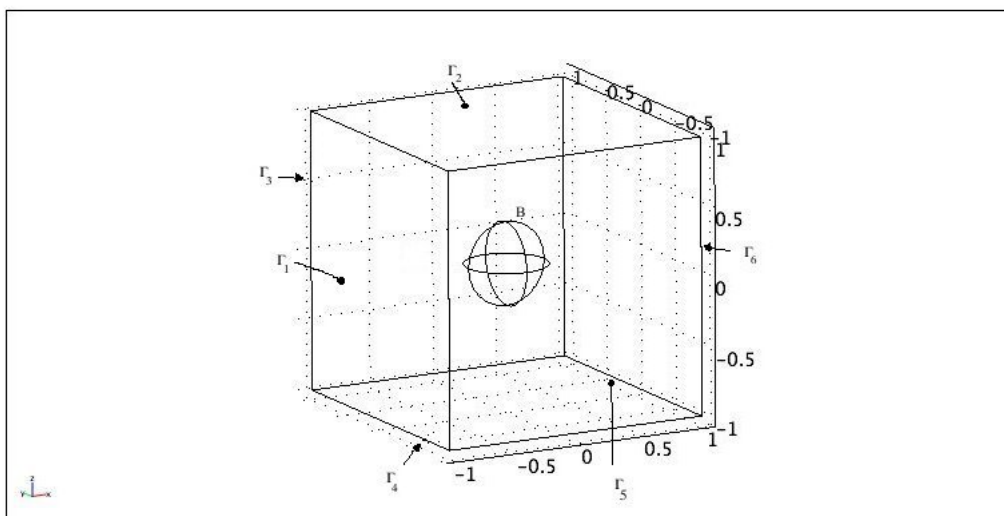


Figure A.16: Problème 3D considéré

Comme pour le cas 2D, nous allons comparer les résultats obtenus avec les trois méthodes :

- Par une méthode classique de type éléments finis avec condition d'adhérence sur le bord de la bille,
- Par une méthode de pénalisation avec maillage conforme,
- Par une méthode de domaines fictifs.

On construit un maillage dans chaque cas :

- un maillage de 2729 éléments pour la méthode classique,
- un maillage de 2851 éléments pour la méthode de pénalisation,
- un maillage de 17151 éléments pour la méthode des domaines fictifs et un maillage cartésien pour définir la perméabilité de $100 \times 100 \times 100$ points.

On remarque qu'une quantité beaucoup plus grande d'éléments est requise pour la méthode des domaines fictifs, comparativement aux deux autres méthodes. Ceci est dû au fait que si l'on prend un maillage trop grossier, on ne parviendra pas à capter nettement

la frontière de l'obstacle. Ce point est important pour évaluer correctement par la suite les efforts du fluide sur l'obstacle selon la méthode décrite à la section 5.4.3.

A noter également que nous avons utilisé un maillage cartésien $100 \times 100 \times 100$, pour définir la perméabilité, ce qui équivaut à un pas d'espace de 0.02 m alors qu'en 2D, nous avons un pas d'espace de 0.002 m. Une amélioration possible pour diminuer le nombre de point requis serait de raffiner localement les maillages : utiliser un maillage cartésien non régulier pour définir la perméabilité, en raffinant seulement là où se trouvent les obstacles et de même raffiner localement le maillage de résolution, en définissant par exemple une boîte plus petite incluant l'obstacle dans laquelle le maillage serait plus fin que dans le reste du domaine.

Comparons les résultats obtenus avec les trois méthodes.

La vitesse est comparée le long du profil ($x = 0.5, y = 0, z$) (Figure A.17) et le résultat de la comparaison est donné sur la figure A.18. Nous avons calculé l'erreur commise par rapport au profil obtenu par la méthode classique. On obtient une erreur de 0.0011 entre la méthode de pénalisation et la méthode classique et une erreur de 0.0196 entre la méthode des domaines fictifs et la méthode classique.

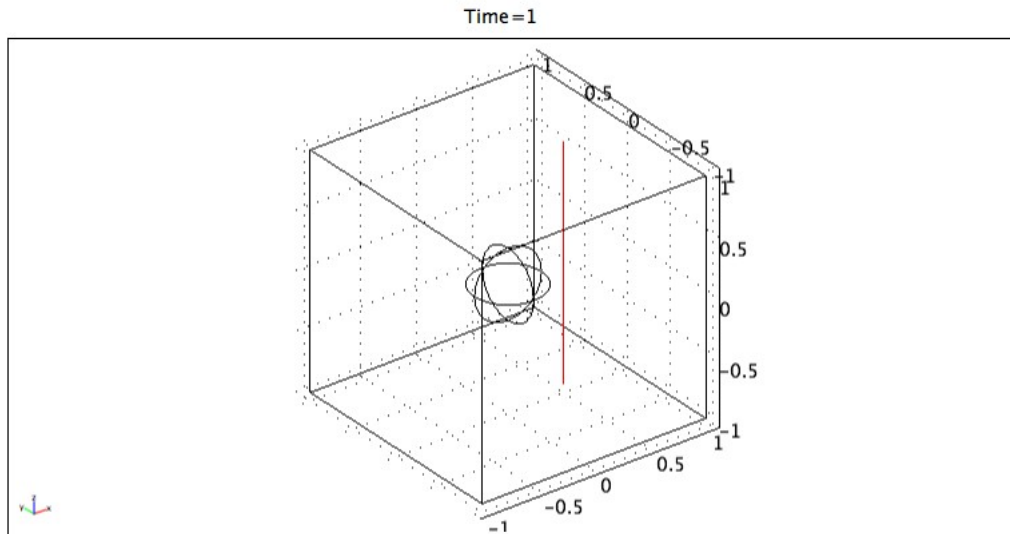


Figure A.17: Profil considéré pour la comparaison des vitesses : $x=0.5, y=0$

La pression est comparée le long du profil ($y = 0, z = 0$) (Figure A.19) et le résultat de la comparaison est donné sur la figure A.20. On obtient une erreur de 0.0092 entre la méthode de pénalisation et la méthode classique et une erreur de 0.055 entre la méthode des domaines fictifs et la méthode classique.

Les résultats obtenus pour la vitesse par les trois méthodes sont proches, sauf pour la pression qui est moins bien calculée par la méthode des domaines fictifs. A noter toutefois

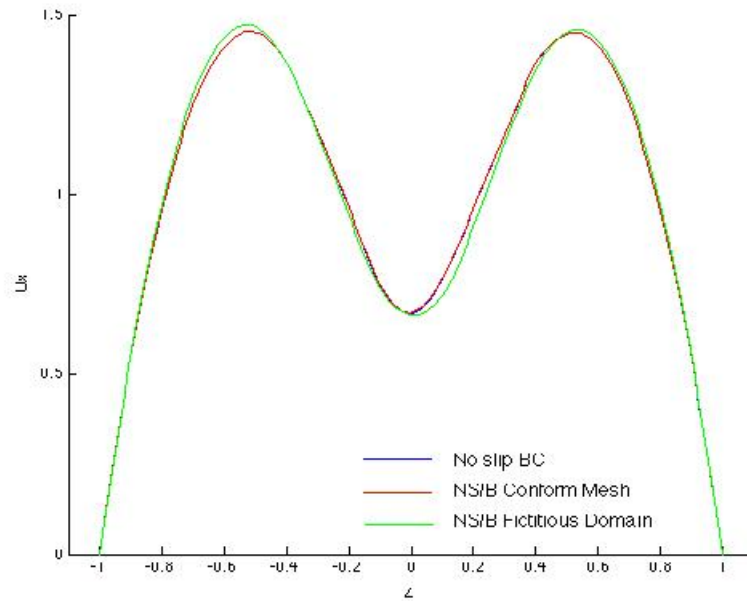


Figure A.18: Comparaison de la composante suivant x de la vitesse le long du profil $x=0.5, y=0$

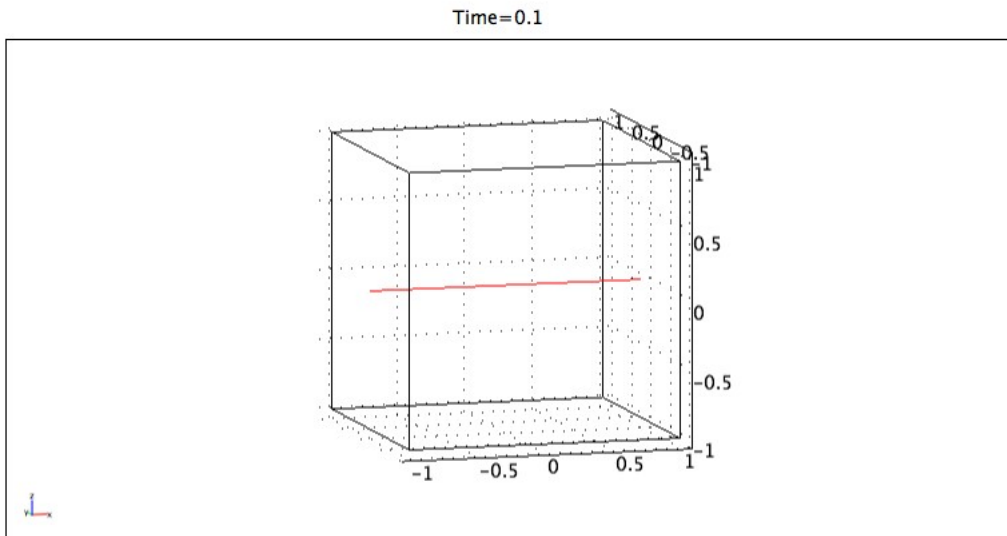
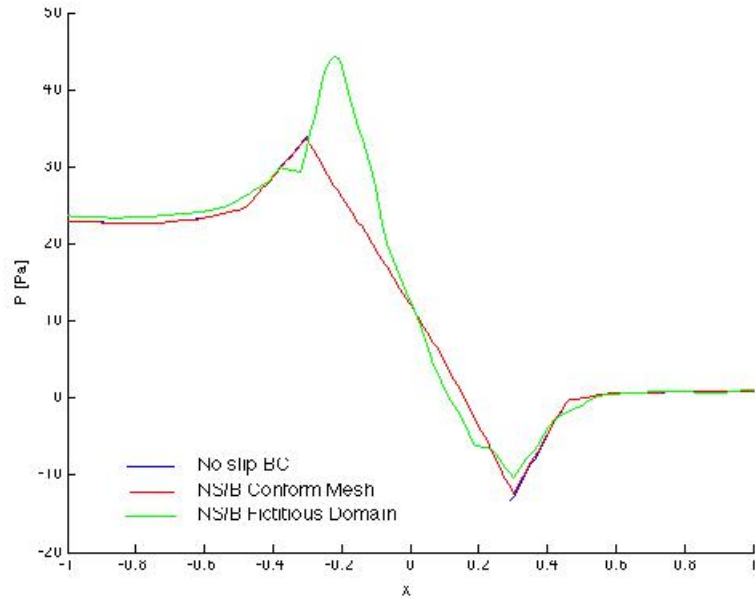


Figure A.19: Profil considéré pour la comparaison de la pression

qu'il faut comparer sur la figure A.20 que les profils extérieurs à la bille. De plus, du fait du plus grand nombre de mailles requis par cette méthode, elle est plus coûteuse en temps

Figure A.20: Comparaison de pression le long du profil $y=0, z=0$

et calculs, mais c'est le prix à payer pour disposer d'une méthode permettant de traiter facilement des problèmes à frontières en mouvement.

2 Cas d'obstacles dont la frontière est donnée par des points discrets

2.1 Méthode 2D pour définir la perméabilité

Lorsque la frontière est donnée par des points discrets, il nous faut trouver une technique pour repérer la frontière sur le maillage cartésien. Pour cela, nous proposons la méthode suivante.

Plaçons nous dans un cadre 2D. Supposons que l'on dispose d'un maillage cartésien régulier et d'un ensemble de points discrets formant la frontière extérieur d'un obstacle. Prenons l'exemple d'un disque solide de rayon 0.3 centré en 0 et dont la frontière est donnée par 50 points discrets (voir figure A.21).

Il est possible de relier ces points par un segment (figure A.22).

Prenons volontairement une grille cartésienne grossière et régulière de 11×11 points. Le pas d'espace vaut alors 0.2.

L'idée consiste à relever les points d'intersection des droites disons verticales passant par les points de même abscisse du maillage cartésien (dans l'exemple les droites d'équations $x=-1, x=-0.8, \dots$) (on aurait pu choisir indifféremment les droites horizontales) avec les segments formés par deux points consécutifs du contour fermé.

On stocke l'ordonnée y de ces points d'intersection et leur nombre pour chaque droite verticale. Ensuite on parcourt les points du maillage cartésien. Chaque point est situé sur une des droites verticales par définition. Si ce point est situé entre deux points

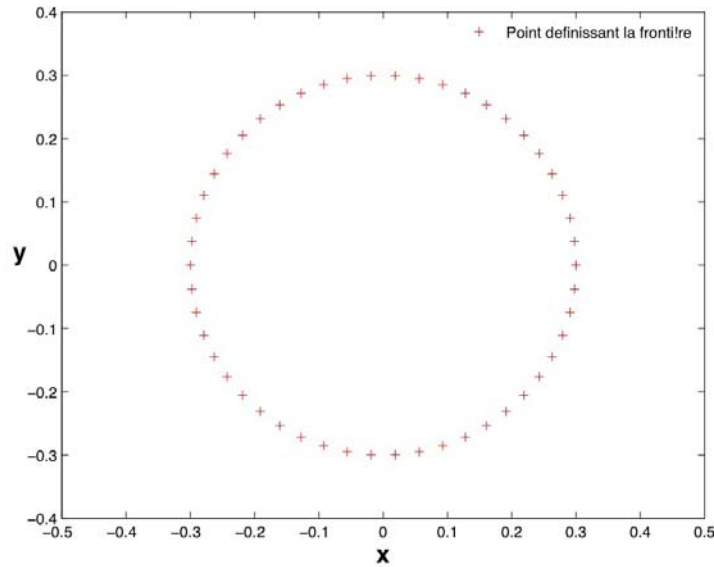


Figure A.21: Frontière discrète du disque - 50 points

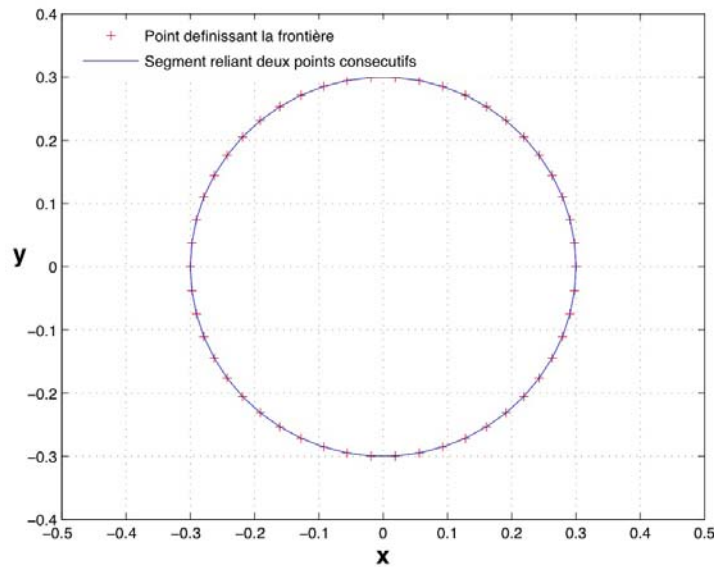


Figure A.22: Segment reliant les points définissant la frontière du disque

d'intersection consécutifs stockés pour cette droite alors il se trouve dans l'obstacle (figure A.23), on affecte alors la valeur de perméabilité associée. Le disque étant imperméable, on affecte aux points s'y trouvant une valeur de K très faible (par exemple 10^{-5}) et à l'inverse pour les points situés dans la partie fluide, on donne une forte valeur de perméabilité (par exemple 10^5). La figure A.24 montre le résultat obtenu. Bien entendu, plus le maillage cartésien sera pris fin, plus la frontière de l'obstacle donnée par la perméabilité sera proche de la frontière réelle (voir figure A.25 pour un maillage cartésien 100×100).

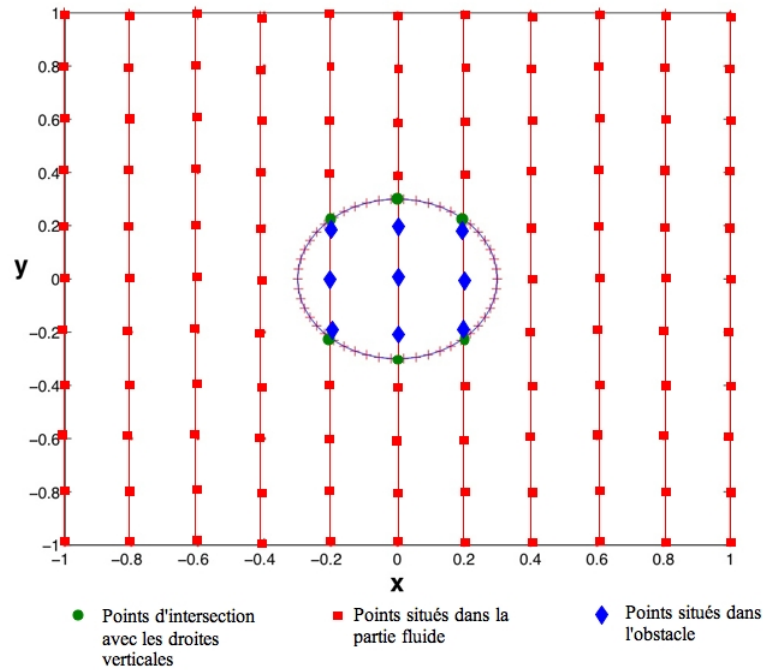


Figure A.23: Localisation des points par rapport à l'obstacle

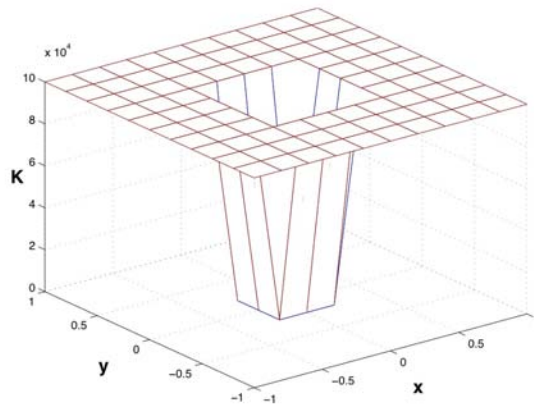


Figure A.24: Perméabilité dans le domaine - Maillage cartésien 11 x 11

2.2 Généralisation au cas 3D

Cette technique se généralise en 3D en considérant dans un premier temps, les points d'intersection des points avec les plans à x fixé par exemple. Avec les points d'intersection relevés, on obtient un contour fermé (à réordonner éventuellement pour le parcourir en suivant des points consécutifs). Ensuite on applique la méthode utilisée pour le 2D afin d'obtenir une valeur de perméabilité en chaque point du maillage cartésien.

Considérons par exemple une bille 3D de rayon 0.3 centrée en 0, dont la frontière est donnée par un ensemble de points discrets (figure A.26).

Des segments reliant les points consécutifs sont construits permettant d'obtenir un maillage surfacique de la bille par des losanges. On considère un maillage cartésien grossier

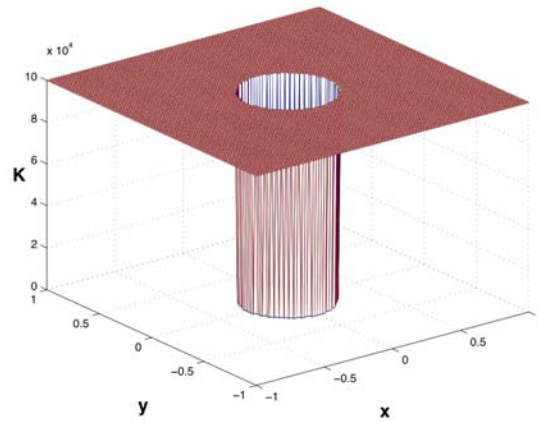


Figure A.25: Perméabilité dans le domaine - Maillage cartésien 100 x 100

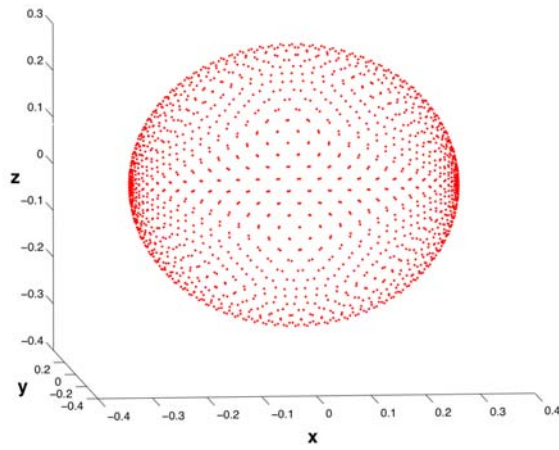


Figure A.26: Bille 3D - 3602 points discrets

3D, de pas 0.2 (voir figure A.27).

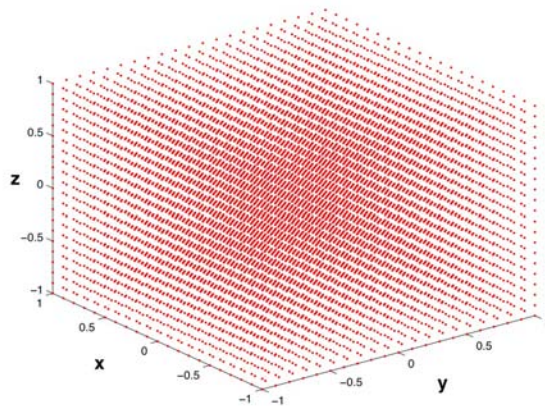


Figure A.27: Maillage cartésien 3D - 21x21x21 points

On considère ensuite les plans à x fixé et on relève les points d'intersections des plans avec la géométrie. Prenons le plan $x = 0.2$. Les points d'intersections de la frontière du disque avec ce plan donne l'ensemble de points de la figure A.28.

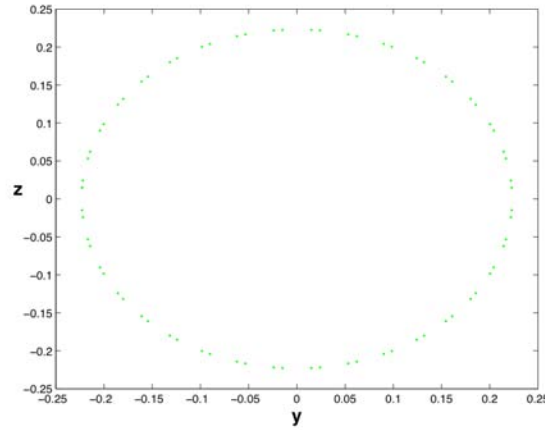


Figure A.28: Points d'intersection du disque avec le plan $x=0.2$

Nous pouvons alors affecter une valeur de perméabilité pour chaque point du maillage cartésien. On obtient de cette façon les valeurs de perméabilité données sur la figure A.29.

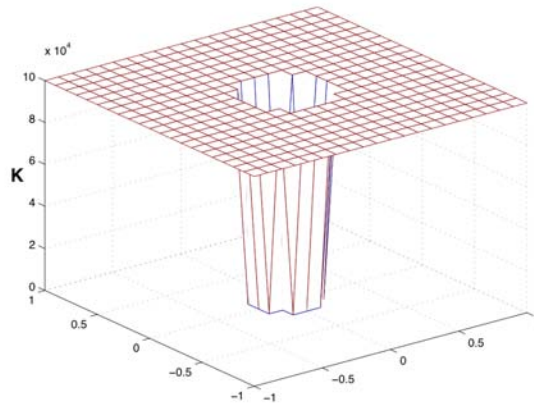


Figure A.29: Perméabilité - Coupe dans le plan - Maillage $21 \times 21 \times 21$

La figure A.30 donne un exemple de résultats obtenus avec un maillage plus fin ($50 \times 50 \times 50$ points).

2.3 Application au cas de la prise de la maquette de Boulogne-sur-Mer

Remarquons toutefois que si la géométrie présente un ou des points de rebroussement, il faut, dans le cas 3D, traiter les frontières par morceaux, sinon lorsque l'on intersecte la géométrie avec le plan, on peut se retrouver avec un nuage de points impossible à ordonner (on ne sait plus construire de contour fermé). C'est le cas de la prise pour laquelle nous définissons des points intérieurs et des points extérieurs.

On travaille donc avec deux ensembles de points. La figure A.31 rappelle la géométrie.

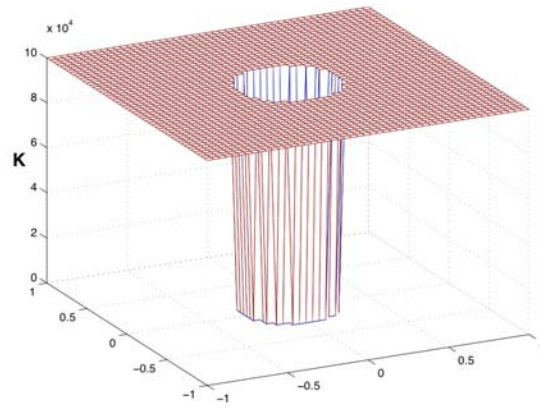


Figure A.30: Perméabilité - Coupe dans le plan - Maillage 50x50x50

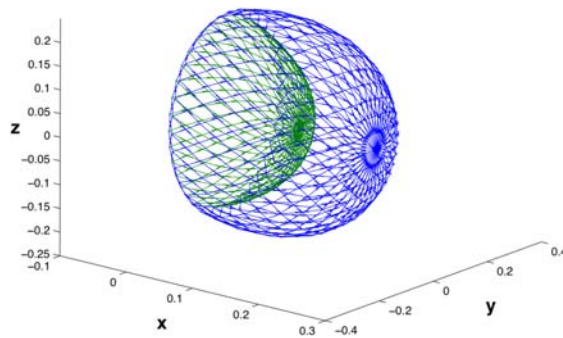


Figure A.31: Géométrie de la prise

Les figures A.32, A.33 et A.34 montrent le résultat obtenu après exécution du code pour un maillage cartésien 75x75x75.

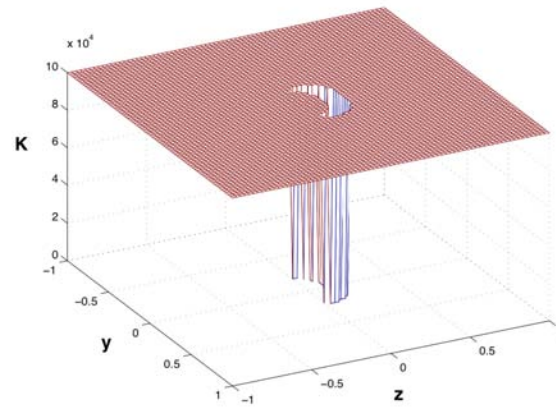


Figure A.32: Perméabilité - Coupe dans le plan (y, z)

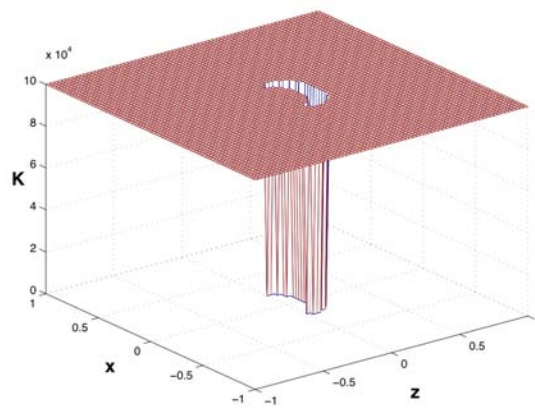


Figure A.33: Perméabilité - Coupe dans le plan (x, z)

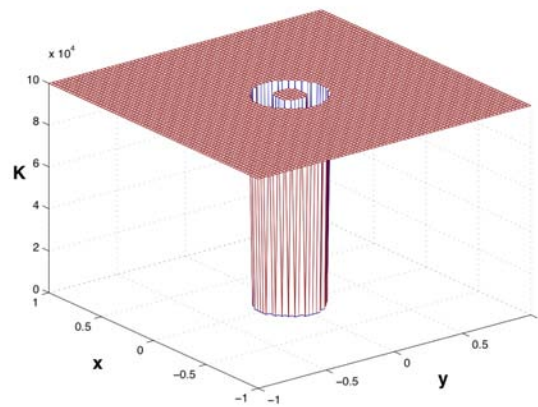


Figure A.34: Perméabilité - Coupe dans le plan (x, y)

Annexe B

Publications

R. Lewandowski, G. Pichot, Numerical simulation of water flow around a rigid fishing net. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196/45-48, pp. 4737-4754, 2007.

R. Lewandowski, G. Pichot, Sur l'écoulement turbulent au voisinage d'un filet de pêche. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I.* 344, pp. 141-145, 2007.

G. Pichot, Proceedings in flow modelling in the surroundings of the end part of a trawl, Mini-symposium Mer-Halieuutique, CANUM 2006. *ESAIM : PROCEEDINGS*, pp. 132-139, Octobre 2007.

G. Pichot, G. Germain, D. Priour, On the experimental study of the flow around a fishing net, Soumis, 2007.

Numerical simulation of water flow around a rigid fishing net

Roger Lewandowski^a, Géraldine Pichot^{b,*}

^a *IRMAR, Campus Beaulieu, Université de Rennes I, 35000 Rennes, France*

^b *IFREMER, Technopôle Brest Iroise, 29280 Plouzane, France*

Received 20 November 2006; received in revised form 6 June 2007; accepted 13 June 2007

Available online 29 June 2007

Abstract

This paper is devoted to the simulation of the flow around and inside a rigid axisymmetric net. We describe first how experimental data have been obtained. We show in detail the modelization. The model is based on a Reynolds Averaged Navier–Stokes turbulence model penalized by a term based on the Brinkman law. At the out-boundary of the computational box, we have used a “ghost” boundary condition. We show that the corresponding variational problem has a solution. Then the numerical scheme is given and the paper finishes with numerical simulations compared with the experimental data.

© 2007 Elsevier B.V. All rights reserved.

Keywords: Fluid mechanics; Turbulence models; Elliptic equations; Variational formulations; Sobolev spaces; Fishing nets

1. Introduction

Recent experimental works [3] show that there are less and less fish in the ocean because of intensive industrial fishing. Improvement of the selectivity of fishing nets is a major challenge to preserve fishing resources. There are still too many juvenile fish and fish with no market value are thrown overboard, leading to a real deterioration of the marine ecosystem. Trawls are under study since they are known to be of very poor selectivity. More precisely, we are working on the end part of the trawl, named the cod-end net, which is where most of the selectivity occurs. Now, it appears necessary to quantify the selectivity of existing trawls and also to be able to estimate the benefits of new designs on selectivity in order to motivate their use and to improve them. New designs in trawls are for example cod-end nets with square meshes, with larger mesh sides or with a rigid grid at the proper location etc.

Measurements at sea could give some information on selectivity but they are costly, difficult to perform and not

easily reproducible (moving net, weather conditions, etc.). One cheap way to proceed is to develop a software that simulates the complex catch process so as to perform numerical simulations with different cod-end designs in order to estimate the chance for non-desired fish to escape. To do so, one needs realistic modellings of the net, the surrounding flow and the fish.

The mechanical system made of the elastic net alone in a given laminar uniform flow with very simple interaction laws has been studied already, see for instance in [18,23,26]. A first approach of simulations of the flow around an axisymmetric rigid net has already been performed in [27]. To this point, to our knowledge, no model exists for dealing with the complex question due to the fish. Finally, there is also no work concerning the coupling of an elastic net with the flow. Furthermore, it seems that today the numerical simulation of the complete system net/flow/fish does not exist.

Our present work deals with the flow modelling. It is a necessary step that is motivated by the fact that the local speed has a direct impact on the fish escapement since it determines the catch shape (and then the mesh opening) and the fish tiredness.

In this paper, we deal with the study of the flow around and inside a rigid net in the axisymmetric case. Indeed, the

* Corresponding author. Tel.: +33 (0)2 23 23 65 46; fax: +33 (0)2 23 23 67 90.

E-mail address: Geraldine.Pichot@ifremer.fr (G. Pichot).

code written in [27] cannot be extended to the fully 3D case. Therefore, the coupling of the deformation of an extensible net with the fluid cannot be considered using this code. Then we have sought a mathematical model that we have tested in the axisymmetric case and that can be extended to the fully 3D case. We have written the corresponding numerical code and performed several simulations to fit the physical constants. Recent investigations have proved already that 3D extension is possible and is currently under progress (see [25]). This allows to believe that it will be possible in the future to couple our fluid code to an elastic code for the net to simulate the system fluid/net.

Our study starts from experiments performed at the IFREMER's tank of *Boulogne-sur-Mer* (France). A net model rigidified by a resin (see Fig. 1) was built and velocity components were measured during two experimental campaigns. The first one (see [9]) used a Laser Doppler Velocimeter (LDV) technique to get velocity components along different profiles. The second one conducted by the second author of the present paper made use of a Particle Image Velocimeter technique (PIV). This last campaign emphasizes the locations of turbulent structures in the surrounding of the net thanks to instant pictures of the flow. It also gives a good overview of the mean flow by averages of pictures. Concerning the velocity profiles, similar shape were obtained with the two techniques, except slightly lower value with the PIV. In term of accuracy, the LDV technique is much better, that is why the LDV profiles were chosen as the reference experimental data to validate our code, for example see Figs. 15–17 at the end of the paper. It is striking how well the experimental velocity data fit with the numerical velocity profiles given by the code.

The experiments show that the flow we have to simulate is turbulent. Therefore, one needs a turbulent model. Yet, we have done simulations by using only the Navier–Stokes equations and we did not obtain accurate results. Therefore, we cannot bypass the Turbulent model. We have adapted to the present case a classical RANS one order turbulent closure model (see for instance [14–16]). It is made of an equation for the turbulent kinetic energy (TKE) and eddy viscosities functions of the TKE into the

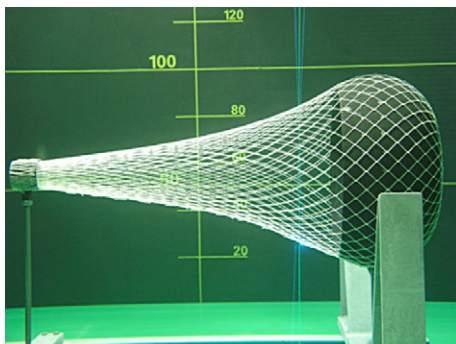


Fig. 1. Model of cod-end net built at IFREMER – Boulogne-sur-Mer.

Navier–Stokes averaged equations. The mixing length has been chosen equal to the local mesh size.

Another important feature of the considered system is that the net behaves like a porous membrane. Taking our inspiration in [1] combined to [2,13,20], we have modelled the net as a porous membrane by penalizing the averaged Navier–Stokes equation with an additional linear term like in the so-called Brinkman Law. One considers the net as a fictitious domain and one solves the fluid equations in the flow domain as well as in the net domain. However it is an open problem to validate mathematically this part of the modelization by using the homogenization theory. We only notice that after a right choice of the permeability function K (see Section 3.3) the model yields numerical simulations which fit very well with the experimental data.

The other last important feature of our mathematical model is the boundary conditions at the border of the computational box. On the lateral boundaries, one impose the classical no-slip condition. At the incoming boundary, the flow is a given flow. The problem is what to do at the outgoing boundary. The natural and classical boundary condition should be $\sigma \cdot \mathbf{n} = 0$ where σ is the strain rate tensor. But as observed in [6], one risks artificial eddy reflexions. Moreover, with such a boundary condition we are not able to obtain *à priori* estimates. To overcome this difficulty, we have adapted the ideas of [6] to the turbulent case. To do this, we have replaced the natural condition by a so-called “ghost condition”, the technical condition (8) below. This condition becomes the natural one when the flow is laminar at the incoming and outgoing boundary (see Remark 4.1). Therefore when observing that far from the net the flow remains laminar, we can still take $\sigma \cdot \mathbf{n} = 0$ at the outgoing boundary. This is what we did in the numerical simulations. But we stress that the complicated condition (8) is inescapable when dealing with the general mathematical problem.

Our model is given by the system (30)–(38) and the assumptions are summarized by (22)–(29). For the sake of simplicity, we have chosen to study the general mathematical problem in the 2D case thankfully the axisymmetric case can be easily derived, but technical modifications are necessary (see for instance in [8]). The existence result stated in Theorem 5.1 is our main theoretical contribution in this paper. Uniqueness is an open problem, as well as the general 3D case.

The numerical scheme uses the finite element method in space, an implicit scheme in time for the velocity equation and a semi-implicit scheme for the equation satisfied by the TKE. The parameters settings are defined in Section 6.4. As shown at the end of the paper, the numerical results fit remarkably with the experimental datas.

The paper is organized as follows. We start by giving some indications on the experimental framework, then the modelization is described followed by the mathematical analysis. The last part of the paper is devoted to the numerical simulations and the numerical results.

2. Experimental framework

Experiments have been carried out at the IFREMER center of *Boulogne-sur-Mer*. Velocity profiles have been measured inside and around a rigid resin made model built by the Boulogne-Sur-Mer IFREMER team (Fig. 1). This model is like an axisymmetric rigid 1/6 scaled cod-end net with diamond-shaped meshes. The end of the net is filled with a resin mass modelling a one ton catch of fish and trawled with a speed of 1.25 m/s. The net profile as well as the catch geometry have been derived from an image processing technique.

Note that working on a rigid axisymmetric structure excludes accounting for the hydrodynamical forces exerted on the net. Moreover, it restricts the study to an axisymmetric geometry. But, at least measurements are possible and mathematical flow models can be tested.

The model is 1 m long and has an outer maximal diameter of 0.45 m. It is maintained with a frame and set at the bottom of the IFREMER tank. This tank enables performance of flow measurements with velocities between 0.2

and 2 m/s. The estimation of the velocity to apply in the tank comes from a Froude similitude yielding an entrance velocity in the tank equal to 0.51 m/s.

Hydrodynamical measurements have been performed along several profiles (see Fig. 2).

One defines a cartesian reference in the tank, the origin being set at the entrance of the net.

A Laser Doppler Velocimeter (LDV) technique was used to collect the z and y components of the mean velocity (measures are time averaged). The z velocity component is the main one we study since it has the direction of the entrance flow, and thus the higher values (see Fig. 3).

3. Modelization

Our model relies on three features:

- (1) Seeing the net, in the fluid point of view, as a porous membrane. The goal is then to define in which manner the fluid is authorized to flow through the net.
- (2) Directly taking the net and the catch into account in the averaged Navier–Stokes equations, which leads to averaged Navier–Stokes/Brinkman equations. This way, the boundary conditions at the frontiers of the obstacles are implicitly imposed.
- (3) Adding a one equation turbulence model to close the system.

Our study deals with the mean flow. One can make the assumption that the mean flow around the net is axisymmetric.

3.1. Axisymmetric hypothesis

Assume the cod-end net is embedded in a cylinder full of water. Let us consider an axisymmetric deformation of the net (see Fig. 4). As the net is modelled by a porous membrane the problem reduces to a 2D one, provided an axisymmetric hypothesis of the flow. We admit this hypothesis is a strong one but reasonable in the case of

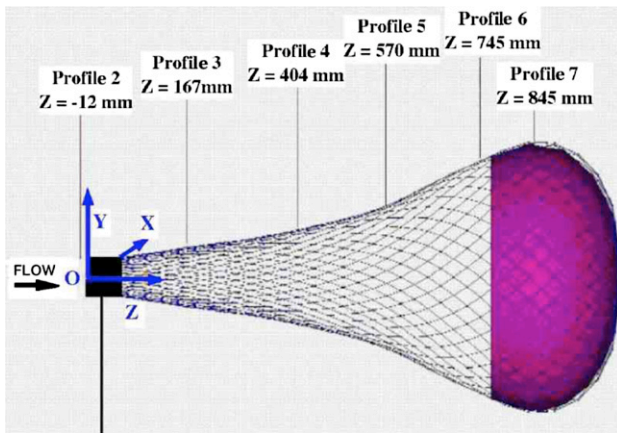


Fig. 2. Profiles considered of the LDV measures.

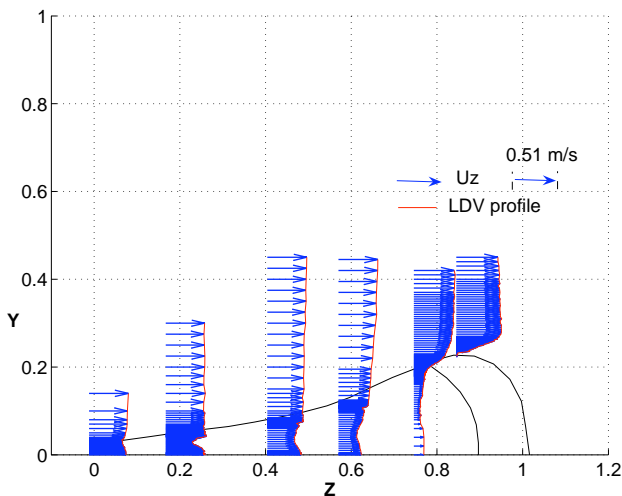


Fig. 3. LDV profiles for the z -component of the velocity.

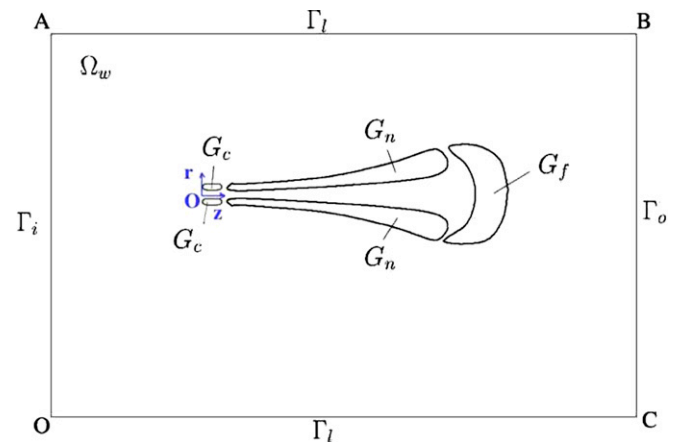


Fig. 4. Geometry and notations.

the study of the mean flow, since turbulent structures are smoothed by the averaging.

In the following, one notes

- Ω_w the domain occupied by the water,
- G_n the net domain,
- G_f the fish domain,
- G_c the domain formed by the frame at the entrance of the net model,

$$\Omega = \Omega_w \cup G, \quad G = G_n \cup G_f \cup G_c.$$

Using the assumption of an axisymmetric flow and the model of an axisymmetric equivalent membrane to describe the net, cylindrical coordinates (O, r, z, θ) are used in the simulations. At a fixed value of θ , the mathematical problem reduces to a 2D one. The artificial cylinder reduces to a rectangle in the reference (O, r, z) and the sides of this rectangle are called Γ_i , Γ_l and Γ_o (see Fig. 4).

3.2. A membrane model for the net

Finite elements and finite volumes methods are known to be the common numerical methods to compute fluid dynamics. A mesh is built to discretize the fluid domain. The difficulty of the netting is that it is composed of a great number of meshes. Generating a body-fitted fluid mesh, that is a mesh lying on the nodes and the twines of the net, would be far too complex and computer time consuming. Then, an exact description of the net would be too demanding in computer resources to be conceivable. Another model has to be found.

In the literature, one finds a model of an axisymmetric membrane to deal with an axisymmetric porous structure immersed in a fluid (see [27]).

In [27], the equations are set on the structure location to express a mass transfer in the normal direction to the structure and slip effects in the tangential direction. Then, the tangential velocity, denoted u_t , is set to be governed by Shaffman's law and the normal velocity, denoted u_n , by Darcy's law.

This leads to express the velocity components at the wall of the axisymmetric structure by

$$\begin{cases} u_t = B \frac{\partial u_t}{\partial n}, \\ u_n = -K \nabla p, \end{cases} \quad (1)$$

where n is the outer normal of the structure, p the fluid pressure, K a permeability tensor found experimentally, and B a coefficient dependent on the tangential velocity and then deduced from numerical experiences.

To solve the problem, one builds a cartesian mesh from the geometry of the membrane, using curvilinear coordinates. The velocity and pressure unknowns are computed using a finite differences method.

A drawback of this method is that it is based on a cartesian mesh which is not convenient to build and to refine locally in the case of a complex net profile. This work then

cannot easily be generalized to the case of a 3D deformation of the net. One has to find a flow model that allows a future coupling with a moving net.

Let us keep the idea of seeing the net as a porous medium, as this assumption has the advantage of making the numerical programming simpler insofar as twines and nodes are no longer taken into account. Then, consider the net and the catch as domains with a given permeability.

As shown in Fig. 4, the domain G_n delimiting the net has a thickness much larger than the diameter of net twines (which is typically 3 mm). This idea actually came from the analysis of the velocity profiles in the z direction obtained by the LDV measurements (see Fig. 3).

One notices on the LDV profiles (see Fig. 3) inner minima of the z velocity component. See Figs. 15–17 in the following section for a zoom of each profile. Those minima have been noted down (see Table 1). The inner profile of the membrane has been drawn thanks to those values. The outer profile is in agreement with the profile of the model.

This approach avoids a costly mesh generation. However, it comes with the difficulty of determining which permeability to apply in the different media. The next part is devoted to explain how those media are taken into account directly in the equations.

3.3. A penalization technique

The second feature of our model relies on a penalization method that allows us to take the presence of the obstacles into account directly in the fluid equations [2,13,20,24]. The method consists in solving “fluid” equations in the entire domain, even in the net and catch domains. The net domain is seen as a porous medium, and the catch domain as a solid medium, where a no-slip boundary condition should hold. Those media are explicitly included in the fluid equations by the addition of a penalty term of the velocity, namely $\frac{1}{K(\mathbf{x})} \mathbf{u}$. This leads to Navier–Stokes/Brinkman equations. Notice that such laws have been derived from an homogenization process in other situations, as in [1]. This theoretical question remains open in this particular context. The function $K(\mathbf{x})$ varies from one domain to another. It is a permeability parameter that is very small in the solid domains, e.g. the catch, to force the velocity to be zero, and very high in the fluid domain, so that the averaged Navier–Stokes equations hold and are set to a defined value or function in the porous domain (here in the net domain) depending on its permeability.

Table 1

Location of the minima of the z -component of the velocity for the considered profiles and thickness of the membrane

Profiles	Profile position z [m]	Net location along r [m]	Minimum of u_z location along r [m]	Thickness of the membrane [m]
Profile 3	0.167	0.045	0.027	0.018
Profile 4	0.404	0.0765	0.036	0.0405
Profile 5	0.57	0.1125	0.045	0.0675
Profile 6	0.745	0.1935	0.1035	0.09

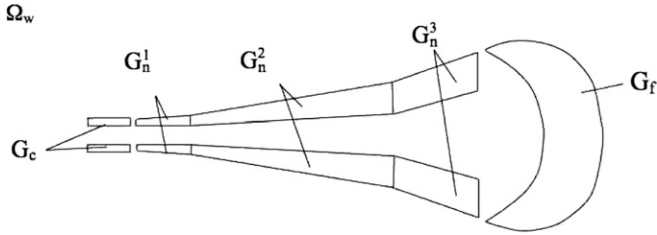


Fig. 5. Decomposition of the net domain – Notations.

At a first glance, the function $K(\mathbf{x})$ is set to be constant by parts. The net domain is decomposed in three parts, G_n^i , $i = 1, 2, 3$ (see Fig. 5) of constant permeability that is all the more important as we are closer to the catch (see Section 6). In a future work, we will try to make it depend on the mesh opening, the mesh angle between the mesh and the local flow.

3.4. Addition of a turbulence model

The third point comes with the average of the Navier–Stokes/Brinkman equation, since Direct Numerical Simulation would not be able to treat a problem with such a high Reynolds number (here $Re \cong 10^5$, using as reference length the maximal diameter of the catch, i.e. 0.45 m, and the entrance velocity as reference velocity that is equal to 0.51 m/s). A kind of Reynolds Averaged Navier–Stokes (RANS) turbulence model is then added to close the system of equations. It consists of one equation for the turbulent kinetic energy. The averaged NS/Brinkman equation and the turbulent kinetic energy equation are coupled by the means of a eddy viscosity, denoted ν_t .

4. Description of the mathematical problem

4.1. The domain

We return back to the description of the geometry. As already said, the flow under study is axisymmetric. In order to avoid technical complications, we have chosen to study the mathematical problem set in a domain in \mathbb{R}^2 . We refer to [8] to go in further developments in the axisymmetric case.

The boundary Γ of the computational box is defined by the input board Γ_i , the lateral boards Γ_l and the artificial output board Γ_o (se Fig. 6),

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= [O, A], & O &= (0, 0), & A &= (0, \alpha), \\ \Gamma_l &= [C, O] \cup [A, B], & B &= (\beta, \alpha), & C &= (\beta, 0), \\ \Gamma_o &= [B, C], \\ \Gamma &= \Gamma_i \cup \Gamma_l \cup \Gamma_o. \end{aligned} \quad (2)$$

4.2. The equations

The unknowns are:

- the mean velocity vector field $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = (u^1(t, \mathbf{x}), u^2(t, \mathbf{x}))$, $\mathbf{x} = (x, y)$,

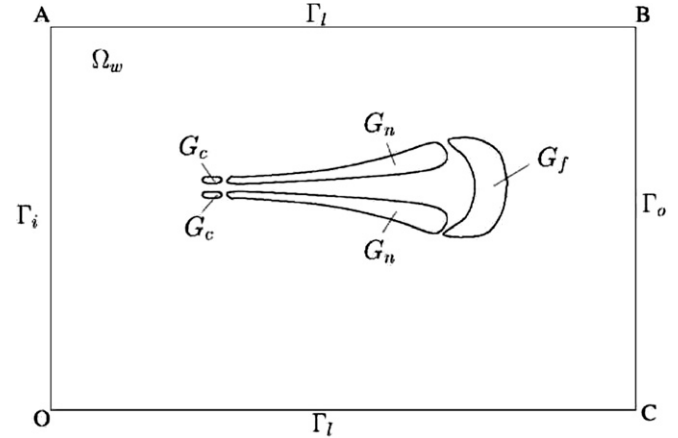


Fig. 6. Description of the domain.

- the mean pressure scalar field $p = p(t, \mathbf{x})$,
- the turbulent kinetic energy $k = k(t, \mathbf{x})$.

One defines the deformation tensor ε by

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}. \quad (3)$$

The turbulent strain rate stress tensor σ is defined by

$$\sigma(\mathbf{u}, p, k) = 2\nu_t(k, \mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{u}) - p\mathbf{Id}. \quad (4)$$

The Reynolds Averaged Navier–Stokes turbulent closure model of order one including the Brinkman laws, is given in $[0, T] \times \Omega (T > 0)$ by the following equations, where $\varepsilon > 0$ is fixed,

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} - \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}, p, k) \\ + \left(\frac{1}{\varepsilon} (\mathbb{1}_{\Gamma_i \cup G_c}) + \frac{1}{K(\mathbf{x})} \mathbb{1}_{G_n} + \varepsilon \mathbb{1}_{\Omega_w} \right) \mathbf{u} &= \mathbf{0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \partial_t k + \mathbf{u} \cdot \nabla k - \nabla \cdot (\mu_t(k, \mathbf{x}) \nabla k) \\ = 2\nu_t(k, \mathbf{x}) |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 - \mathcal{E}(k, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

In the equations above, ν_t and μ_t are the eddy viscosities and \mathcal{E} the backward term. Their analytical expressions are given in Section 4.4 below.

4.3. The boundary conditions and the initial data

4.3.1. Boundary conditions

The input field $\mathbf{u}_1 = (u_1, 0)$ at the boundary Γ_i is a data of our problem. The boundary conditions we consider are the following:

$$\text{on } \Gamma_i : \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 = (u_1, 0), \quad k = 0, \quad (6)$$

$$\text{on } \Gamma_l : \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad k = 0, \quad (7)$$

$$\text{on } \Gamma_o : \begin{cases} \sigma(\mathbf{u}, p, k) \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^- (\mathbf{u} - \mathbf{u}_1) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}_1, \\ k = 0. \end{cases} \quad (8)$$

In the formulae above, \mathbf{u}_l denotes the field equal to $(u_l(x - \beta, 0))$ on Γ_o . One uses the boundary condition (8) in order to avoid eddy reflections at the open boundary Γ_o and to be able to prove the existence of a dissipative solution to the system (5).

Remark 4.1. The natural boundary condition for the velocity at Γ_o should be $\sigma(\mathbf{u}, p, k) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$. In [6], the authors study the case of the Navier–Stokes equations without a turbulence model and in a channel without a rigid body. They remark that the boundary condition $\sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ yields numerical eddy reflexions at the out open boundary. Moreover, the existence of a dissipative solution is not known in such a case because of a term $\int_{\Gamma_o} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) |\mathbf{u}|^2$ which appears in the energy equality due to the convection. Without additional information on the sign of $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})$ at Γ_o , no *a priori* estimate is available. This is why the authors in [6] change the boundary conditions. We also change the boundary conditions by an adaptation to the case of our turbulence model. Notice that when the flow is laminar at Γ_o and $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) > 0$ on Γ_o , the boundary condition reduces to the classical one up to the term $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}_l$. This is an additional forcing term. Without this term, it is easy checked that one can only derive an *a priori* estimate when a smallness assumption on \mathbf{u}_l is satisfied, an assumption which would restrict the problem to a laminar one. Therefore, this term seems to look coherent when the flow is turbulent at the incoming boundary. However, in the numerical simulations we have taken $\sigma(\mathbf{u}, p, k) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$. Indeed, the experiments suggest that the flow is laminar far from the net. Therefore, our choices are in concordance with reality and yields a rigorous mathematical analysis.

Remark 4.2. For convenience and the sake of simplicity, we have chosen to develop the theoretical part by fixing $k = 0$ at Γ_o . A more natural boundary condition at Γ_o is $\mu_t \frac{\partial k}{\partial \mathbf{n}} = 0$. This is the condition that we use in the numerical simulations. From the mathematical viewpoint, we then have to impose $\mu_t \frac{\partial k}{\partial \mathbf{n}} = -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^- k$ at Γ_o . Therefore the discussion in Remark 4.1 above holds in this case. However, this boundary condition yields serious mathematical complications that would have been out of the scope of this paper. In Section 5.5 we give some explanations about this case.

4.3.2. Initial data

The initial data are specified by

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in (L^2(\Omega))^2, \tag{9}$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad k(0, \mathbf{x}) = k_0(\mathbf{x}) \in L^1(\Omega). \tag{10}$$

Moreover, we shall assume that \mathbf{u}_0 satisfies the compatibility conditions

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0, \tag{11}$$

$$\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} = u_l \quad \text{on } \Gamma_i, \tag{12}$$

$$\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_l. \tag{13}$$

4.4. The eddy viscosities and main terms

4.4.1. Eddy viscosities

The eddy viscosity function v_t is a C^1 non-negative bounded function of k and \mathbf{x} equal to $v_0 + \ell(\mathbf{x}) \sqrt{\tau + |k|}$ when $|k| \in [0, k_c]$ for a given k_c and $\tau > 0$ is fixed. The viscosity v_t is thus given by

$$v_t(k, \mathbf{x}) = v_0 + \ell(\mathbf{x}) \sqrt{\tau + |k|}, \quad \text{when } |k| \leq k_c, \tag{14}$$

$$v_t(k, \mathbf{x}) = v_2, \quad \text{when } |k| \geq k_c + 1, \tag{15}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_t(k, \mathbf{x}) = \left(\frac{\ell(\mathbf{x})}{2\sqrt{\tau+k_c}} + 2v_1 - 2v_2 \right) k^3 \\ \quad + \left(\frac{\ell(\mathbf{x})(-3k_c-2)}{2\sqrt{\tau+k_c}} + (v_1 - v_2)(-6k_c - 3) \right) k^2 \\ \quad + \left(\frac{\ell(\mathbf{x})(1+3k_c^2+4k_c)}{2\sqrt{\tau+k_c}} + (v_1 - v_2)(6k_c^2 + 6k_c) \right) k \\ \quad + v_1 + \frac{\ell(\mathbf{x})(-k_c^3-2k_c^2-k_c)}{2\sqrt{\tau+k_c}} + (v_1 - v_2)(-2k_c^3 - 3k_c^2) \\ \text{when } k_c < k < k_c + 1, \end{array} \right. \tag{16}$$

where $\tau > 0$, $k_c > 0$, $v_2 > v_1 = v_0 + \ell(\mathbf{x}) \sqrt{\tau + k_c}$. Its shape is drawn on Fig. 7.

The function $\ell(\mathbf{x})$ is a local scale of the flow. It is a non-negative bounded C^1 function of \mathbf{x} on Ω with

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < \ell_0 \leq \ell(\mathbf{x}) \leq L_0 < \infty. \tag{17}$$

The eddy diffusivity μ_t is of the same form as v_t and

$$v_0 + C\ell(\mathbf{x}) \sqrt{\tilde{\tau} + |k|} \quad \text{on the range } [0, k_c], \tag{18}$$

for $C > 0$ and $\tilde{\tau} > 0$ fixed coefficients.

4.4.2. Backward term

The backward term $\mathcal{E}(k, \mathbf{x})$ is given by the formula

$$\mathcal{E}(k, \mathbf{x}) = \frac{1}{\ell(\mathbf{x})} k \sqrt{k}. \tag{19}$$

4.4.3. Permeability

The permeability function $K(\mathbf{x})$ is a continuous function that satisfies

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < K_0 \leq K(\mathbf{x}) \leq K_1 < \infty. \tag{20}$$

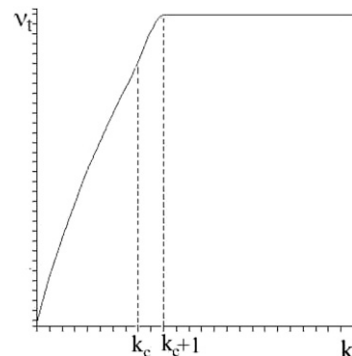


Fig. 7. Shape of v_t .

In the remainder, one shall set

$$\mathcal{P}(\mathbf{u})(t, \mathbf{x}) = \left(\frac{1}{\varepsilon} (\mathbb{1}_{G_f \cup G_c}(\mathbf{x})) + \frac{1}{K(\mathbf{x})} \mathbb{1}_{G_n}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbb{1}_{\Omega_w} \right) \mathbf{u}(t, \mathbf{x}), \tag{21}$$

where $\varepsilon > 0$ is fixed.

5. Mathematical analysis

5.1. Main result

We summarize the hypotheses:

$$v_t \in C^1, \quad \forall (k, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \Omega, \quad 0 < v_0 \leq v_t(k, \mathbf{x}) \leq N < \infty, \tag{22}$$

$$\mu_t \in C^1, \quad \forall (k, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \Omega, \quad 0 < \mu_0 \leq \mu_t(k, \mathbf{x}) \leq M < \infty, \tag{23}$$

$$\ell \in L^\infty, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < \ell_0 \leq \ell(\mathbf{x}) \leq L_0 < \infty, \tag{24}$$

$$\mathcal{E}(k, \mathbf{x}) = \frac{1}{\ell(\mathbf{x})} k \sqrt{|k|}, \tag{25}$$

$$K \in C^1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < K_0 \leq K(\mathbf{x}) \leq K_1 < \infty, \tag{26}$$

$$\mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega), \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0, \quad \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_i} = u_{I_1}, \quad \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_1} = 0, \tag{27}$$

$$k_0 \in L^1(\Omega), \quad k_0 \geq 0 \text{ a.e.}, \tag{28}$$

$$\mathbf{u}_I \in H_{00}^{3/2}(\Gamma_i). \tag{29}$$

The problem is the following:

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p, k) + \mathcal{P}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \tag{30}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{31}$$

$$\partial_t k + \mathbf{u} \cdot \nabla k - \nabla \cdot (\mu_t(k, \mathbf{x}) \nabla k) = 2v_t(k, \mathbf{x}) |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|^2 - \mathcal{E}(k, \mathbf{x}), \tag{32}$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \tag{33}$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad k(0, \mathbf{x}) = k_0(\mathbf{x}), \tag{34}$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_i} = \mathbf{u}_I = (u_{I_1}, 0), \quad k|_{\Gamma_i} = 0, \tag{35}$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0}, \quad k|_{\Gamma_1} = 0, \tag{36}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p, k) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_o} = -\frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^- (\mathbf{u} - \mathbf{u}_I) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}_I, \tag{37}$$

$$k|_{\Gamma_o} = 0. \tag{38}$$

Assumption (29) above has to be clarified. We shall say that a given field \mathbf{v} defined on Γ_1 is in the space H_{00}^s ($s > 0$ being given) if and only if

$$\int_0^\alpha \frac{|\mathbf{v}(y)|^2}{y^{2s}} dy < +\infty \quad \text{and} \quad \int_0^\alpha \frac{|\mathbf{v}(y)|^2}{(\alpha - y)^{2s}} dy < +\infty,$$

see for instance in [19, chapter 1, §11], or in [7, chapter 6]. This assumption is a technical assumption telling that the field \mathbf{v} goes to zero sufficiently fast at the edges. In our problem, we take $s = 3/2$ in order to extend u_{I_1} by zero on Γ_1 with enough regularity because of the no-slip condition on Γ_1 (see Remark 5.3 in the remainder). Therefore, as we shall see it in the following, it will be possible to lift the

boundary condition then including the information in the equations with enough regularity, so that we can work with homogeneous boundary conditions. This is more appropriate to the mathematical analysis.

In numerical simulations, we took a natural uniform u_I on Γ_i for the sake of simplicity. To avoid an artificial boundary layer, we impose a slip condition for the velocity on Γ_i . However, we are not able to prove any theoretical existence result for such a problem. This is not surprising since this is one of the usual gap between mathematical theory and numerical simulations while working with Navier–Stokes equations and by-products. This is also linked to the physical discussion to know if the no-slip condition at the boundaries is reasonable or not, even if it yields a good mathematical structure.

Finally, we could also do the mathematical analysis with a uniform flow at Γ_i by extending it from its value at the edges to zero on Γ_1 sufficiently closely to the edges while keeping a H_{00}^s regularity type. Therefore, we would have a mathematical structure “asymptotically” close from the numerical structure. This will not change at all our mathematical analysis but just make it more heavy than it is already.

Our main result is the following:

Theorem 5.1. *Assume that hypotheses (22)–(29) hold. Then Problem (30)–(38) admits a solution (\mathbf{u}, p, k) on any time interval $[0, T]$ in the sense of the distributions, where*

$$\mathbf{u} \in L^2([0, T], (H^1(\Omega))^2) \cap L^\infty([0, T], L^2(\Omega)), \tag{39}$$

$$p \in L^2([0, T] \times \Omega), \tag{40}$$

$$k \in L^\infty([0, T], L^1(\Omega)) \cap \left(\bigcap_{p < \frac{4}{3}} L^p([0, T], W^{1,p}(\Omega)) \right). \tag{41}$$

Remark 5.1. Uniqueness remains an open problem.

5.2. Lifting the boundary condition

5.2.1. Auxiliary Stokes Problem

In this section, we describe how to lift the boundary conditions to reduce the problem to a problem with homogeneous boundary conditions on $\Gamma_i \cup \Gamma_1$, as it is usually done in mathematical problems where Navier–Stokes Equations are involved.

Recall that Ω_w is the water domain and G the net domain (see Section 3.1).

The incoming flow \mathbf{u}_I is prescribed at the boundary Γ_i . We define \mathbf{u}_I on the output boundary Γ_o and still denote it by \mathbf{u}_I , the field defined by

$$\forall \mathbf{x} = (x, y) \in \Gamma_o, \quad \mathbf{u}_I(x, y) = (u_I(x - \beta, 0)).$$

Let us consider the Stokes problem

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{v}_0 + \nabla q_0 &= \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega_w, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_0 &= 0 \quad \text{in } \Omega_w, \\ \mathbf{v}_0 &= \mathbf{g} \quad \text{on } \Gamma \cup \partial G, \end{aligned} \tag{42}$$

where Ω_w is the water domain, G the domain delimited by the net and \mathbf{g} is the field defined by

$$\begin{aligned} \text{on } \Gamma_i \cup \Gamma_o, \quad \mathbf{g} &= \mathbf{u}_i, \\ \text{on } \Gamma_1 \cup \partial G, \quad \mathbf{g} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{43}$$

Notice that the following compatibility condition is satisfied:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{44}$$

In the following, we note

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \right\}.$$

Theorem 5.2. Assume that $u_1 \in H_{00}^{3/2}(\Gamma_i)$ (assumption (29)). Then Problem (42), (43) has a unique solution $(\mathbf{v}_0, q_0) \in H^2(\Omega_w) \times (H^1(\Omega_w) \cap L_0^2(\Omega_w))$.

Proof. On one hand, it is established by Corollary 5.9 in [8] that $\mathbf{g} \in [H^{3/2}(\Gamma)]^2$ because $u_1 \in H_{00}^{3/2}(\Gamma_i)$. On the other hand, \mathbf{g} satisfies the compatibility condition (44). Moreover, Ω_w is a convex polygon in dimension 2. Therefore, applying Theorem 5.4 and Remark 5.6 in [10, §I.5] (see also [11]), one knows the existence of a unique $(\mathbf{v}_0, q_0) \in H^2(\Omega_w) \times (H^1(\Omega_w) \cap L_0^2(\Omega_w))$ solution to Problem (42), (43). \square

Remark 5.2. Since $\mathbf{g} \in [H^{3/2}(\Gamma)]^2$, the trace on Γ_o of $\varepsilon(\mathbf{v}_0)$ is in $[H^{1/2}(\Gamma_o)]^4$ as well as the trace of q_0 on Γ_o is in $H^{1/2}(\Gamma_o)$. Then, because v_t is a bounded function, for every $k \in L^1(\Omega)$,

$$\sigma(\mathbf{v}_0, q_0, k) \in [H^{1/2}(\Gamma_o)]^4. \tag{45}$$

From now, one still denotes by \mathbf{v}_0 the field defined on whole Ω and equal to \mathbf{v}_0 in Ω_w , the velocity part in the solution to Problem [(42), (43)], and equal to 0 inside G . Since

- $H^2(\Omega_w) \subset L^\infty(\Omega_w)$,
- ∂G is of class C^1 , therefore one can use Proposition IX.18 in [5],

one has

$$\mathbf{v}_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \tag{46}$$

and

$$\|\mathbf{v}_0\|_{H^1(\Omega)} + \|\mathbf{v}_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u_1\|_{H_{00}^{3/2}(\Gamma_i)}, \tag{47}$$

where C only depends on α and β . By extending q_0 by zero outside Ω_w and still denoting the expansion by q_0 , one has

$$\sigma(\mathbf{v}_0, q_0, k) \in [L^2(\Omega)]^4. \tag{48}$$

Notice also that

$$\mathcal{P}(\mathbf{v}_0) = \mathbf{0}. \tag{49}$$

Remark 5.3. The choice of the space $H_{00}^{3/2}(\Gamma_i)$ is motivated by the estimate (47). Indeed, we need that the lifting field \mathbf{v}_0 not only lies in a H^1 space type but also is bounded. Of

course, as we said already, this a technical assumption and many variants can be imagined.

5.2.2. Change of variable

We set:

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0, \quad p = \tilde{p} + q_0. \tag{50}$$

It is straightforward to prove that $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}, k)$ is governed by the following system:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\mathbf{u}} + (\tilde{\mathbf{u}} \nabla) \tilde{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \sigma(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}, k) + \mathcal{P}(\tilde{\mathbf{u}}) + (\tilde{\mathbf{u}} \nabla) \mathbf{v}_0 \\ \quad + (\mathbf{v}_0 \nabla) \tilde{\mathbf{u}} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 - \nabla \cdot \sigma(\mathbf{v}_0, q_0, k) = \mathbf{0}, \end{cases} \tag{51}$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0, \tag{52}$$

$$\begin{cases} \partial_t k + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla k - \nabla \cdot (\mu_t(k, \mathbf{x}) \nabla k) \\ \quad = 2v_t(k, \mathbf{x}) |\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}})|^2 - \mathcal{E}(k, \mathbf{x}) + 4v_t(k, \mathbf{x}) \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}_0) \\ \quad \quad + 2v_t(k, \mathbf{x}) |\varepsilon(\mathbf{v}_0)|^2 - \mathbf{v}_0 \nabla k, \end{cases} \tag{53}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_0, \quad k|_{t=0} = k_0, \tag{54}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}|_{\Gamma_i \cup \Gamma_1} = \mathbf{0}, \quad k|_{\Gamma_i \cup \Gamma_1} = 0, \tag{55}$$

$$\begin{cases} \sigma(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}, k) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_o} = \\ \quad -\frac{1}{2}[(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n}] \tilde{\mathbf{u}} + [(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{v}_0 - \sigma(\mathbf{v}_0, q_0, k)|_{\Gamma_o} \cdot \mathbf{n}, \end{cases} \tag{56}$$

$$k|_{\Gamma_o} = 0. \tag{57}$$

5.3. Variational formulation

5.3.1. Functions space

The natural space for studying Problem (51)–(56) is the space

$$V = \{\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2; \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \mathbf{v}|_{\Gamma_i \cup \Gamma_1} = \mathbf{0}\}. \tag{58}$$

In order to use De Rham Theorem and have an Inf-Sup condition on the pressure, we must check that smooth vector fields with null divergence and equal to zero on $\Gamma_i \cup \Gamma_1$ constitutes a dense space in V . This is the goal of what follows.

Let $\tilde{B} = (2\beta, \alpha)$, $\tilde{C} = (2\beta, 0)$ and let $\tilde{\Omega}$ be the square in \mathbb{R}^2 bounded by the points O , A , \tilde{B} and \tilde{C} . Let s be the symmetry through the axis $x = \beta$, that is $s(x, y) = (2\beta - x, y)$.

We also denote by Ω^s the square bounded by the points C , \tilde{C} , \tilde{B} and B , also defined by $\Omega^s = s(\Omega)$.

Let \tilde{V} be the set

$$\tilde{V} = \{\mathbf{v} \in (H^1(\tilde{\Omega}))^2; \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \mathbf{v}|_{\partial \tilde{\Omega}} = \mathbf{0}\}$$

as well as

$$\tilde{\mathcal{V}} = \{\mathbf{v} \in (\mathcal{D}(\tilde{\Omega}))^2; \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\}.$$

Being given $\mathbf{v} \in \tilde{V}$, let \mathbf{v}_r be its restriction to the square Ω . One obviously has $\mathbf{v}_r \in V$.

Being given $\mathbf{v} \in \tilde{V}$, let \mathbf{v}^e be its extension to $\tilde{\Omega}$ defined as follows:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{v}^e(\mathbf{x}) &= \mathbf{v}(\mathbf{x}), \\ \forall \mathbf{x} \in \Omega^s, \quad \mathbf{v}^e(\mathbf{x}) &= \mathbf{v}(s(\mathbf{x})). \end{aligned} \tag{59}$$

Notice that $\mathbf{v}^e \in \tilde{V}$ and one has

$$\int_{\Omega^e} |\nabla \mathbf{v}^e|^2 = 2 \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2, \quad \forall p \in [1, \infty[, \int_{\Omega^e} |\mathbf{v}^e|^p = 2 \int_{\Omega} |\mathbf{v}|^p. \tag{60}$$

Finally let \mathcal{V} be the space made of the restrictions to Ω of fields in $\tilde{\mathcal{V}}$, which means

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in [C^\infty(\Omega)]; \exists \tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathcal{V}} \text{ s.t. } \mathbf{v} = \mathbf{v}_r\}. \tag{61}$$

We need the following lemma:

Lemma 5.1. *The space \mathcal{V} is dense in V .*

This technical result is proved in [Appendix A](#). It is essential for our purpose since we are studying a variational formulation (see below) where the pressure disappears. Therefore, we need to apply the De Rham Theorem to check that the problem that we solved is the same as the one we are starting with.

5.3.2. The variational problem

For the sake of the simplicity, up to now and throughout the paper we shall note $v_t(k)$ instead of $v_t(k, \mathbf{x})$. Notice firstly that $\forall (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathcal{V}^2, \forall (k, q) \in \mathcal{D}(\Omega)^2$ one has

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_1, q, k)) \cdot \mathbf{v}_2 &= - \int_{\Gamma_0} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_1, q, k) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_2 \\ &\quad + \int_{\Omega} 2v_t(k) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2). \end{aligned}$$

The variational formulation of the problem is the following, where the pressure does not appear anymore and will be recovered using The De Rham Theorem. In the following, one denotes

$$W = L^2([0, T], V) \cap L^\infty([0, T], (L^2(\Omega))^2). \tag{62}$$

Find

$$\tilde{\mathbf{u}} \in W, \quad \tilde{\mathbf{u}}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad \text{a.e in } \Omega, \tag{63}$$

$$k \in L^\infty([0, T], L^1(\Omega)) \cap \left(\bigcap_{p < 4/3} L^p([0, T], W^{1,p}(\Omega)) \right), \tag{64}$$

with

$$\partial_t \tilde{\mathbf{u}} \in L^{8/5}([0, T], V') \cap W' \tag{65}$$

and such that $\forall \mathbf{v} \in L^2([0, T], V)$,

$$\begin{aligned} \langle \partial_t \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \rangle &+ \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{u}} \nabla) \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} + \int_0^T \int_{\Omega} 2v_t(k) \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma_0} \frac{1}{2} [(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n}]^- \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} - \int_0^T \int_{\Gamma_0} [(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v} \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} \mathcal{P}(\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{v} + \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{v}_0 \nabla) (\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{v} \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} 2v_t(k) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma_0} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_0, q_0, k) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \tag{66}$$

for all $r \in \mathcal{D}'([0, T] \times \Omega)$, with $r(T, \cdot) = 0$,

$$\begin{aligned} &- \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t r k + \int_0^T \int_{\Omega} ((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \nabla) k \cdot r \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} \mu_t(k) \nabla k : \nabla r + \int_{\Omega} k_0(\mathbf{x}) r(0, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} [2v_t(k) |\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})|^2 - \mathcal{E}(k) + v_t(k) (4\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0) + 2|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0)|^2)] r. \end{aligned} \tag{67}$$

5.3.3. Consistency of the variational formulation and à priori estimates

The variational formulation for the k -equation is the classical one, as in [\[14–17\]](#). The variational formulation for the velocity is also classical up to the boundary terms. Each boundary term where \mathbf{v}_0 is involved is nice since \mathbf{v}_0 does not depend upon the time and is equal to \mathbf{u}_1 on Γ_0 which is in particular in $L^\infty(\Gamma_0)$. Nevertheless the term

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} [\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}]^- \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}$$

is fearsome. For the sake of simplicity and as far as no confusion occurs, we still denote by \mathbf{v} the trace of \mathbf{v} for any $\mathbf{v} \in W$. Moreover, one defines the W norm by

$$\|\mathbf{v}\|_W = \|\mathbf{v}\|_{L^2([0, T], V)} + \|\mathbf{v}\|_{L^\infty([0, T], (L^2(\Omega))^2)}.$$

The following results are basic estimates we need to prove our main result. Interested readers may find the proofs in [Appendix A](#).

The following lemma guarantees the consistency of the variational formulation above.

Lemma 5.2. *Let $(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \in W \times W$. Then*

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} [\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}]^- \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \leq C \|\tilde{\mathbf{u}}\|_W^2 \|\mathbf{v}\|_W, \tag{68}$$

where C is a constant that only depends on α and β . Moreover, there also exists a constant \tilde{C} such that

$$\forall \tilde{\mathbf{v}} \in L^{8/3}([0, T], V), \quad \int_0^T \int_{\Gamma_0} [\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}]^- \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \leq C \|\tilde{\mathbf{u}}\|_W^2 \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{L^{8/3}([0, T], V)}. \tag{69}$$

Proposition 5.1. *There exists a constant $C_1 = C_1(\mathbf{u}_0, u_1, v, \alpha, \beta)$ and for each $p < 4/3$ a constant $C_2 = C_2(\mathbf{u}_0, u_1, v, \mu, p, \alpha, \beta)$ such that for any smooth solution $(\tilde{\mathbf{u}}, k)$ to the variational problem [\[\(67\), \(66\)\]](#) one has*

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2([0, T], V)} + \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^\infty([0, T], L^2(\Omega))} \leq C_1, \tag{70}$$

$$\|k\|_{L^p([0, T], W^{1,p}(\Omega))} \leq C_2. \tag{71}$$

5.4. End of the proof of the main Theorem

The proof now is the same as in [\[14–17\]](#), up to the additional terms due to the extra boundary conditions for the velocity. We construct a sequence of smooth approximated

solution $(\tilde{\mathbf{u}}_n, k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (for instance by truncating the l.h.s of the k -equation and using the Galerkin method). The trick is to prove the weak convergence in $L^2([0, T], V)$ of the sequence $(\tilde{\mathbf{u}}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (up to a subsequence) to $\tilde{\mathbf{u}} \in W$ which satisfies the formulation (66), and in particular, that can be taken as a test function in (66). Once this task is finished, the rest is classical and works as in [14–17] since we already have obtained all the required *a priori* estimates.

Let $\mathbf{u} \in W$. One has, after a part integration on the convective term,

$$\begin{aligned} & \langle \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_n, \mathbf{v} \rangle - \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}_n \otimes \tilde{\mathbf{u}}_n \nabla \mathbf{v} + \int_0^T \int_{\Gamma_o} (\tilde{\mathbf{u}}_n \cdot \mathbf{n}) \tilde{\mathbf{u}}_n \cdot \mathbf{v} \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} 2v_t(k_n) \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_n) : \varepsilon(\mathbf{v}) + \int_0^T \int_{\Gamma_o} \frac{1}{2} [(\tilde{\mathbf{u}}_n + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n}]^- \tilde{\mathbf{u}}_n \cdot \mathbf{v} \\ & - \int_0^T \int_{\Gamma_o} [(\tilde{\mathbf{u}}_n + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v} + \int_0^T \int_{\Omega} \mathcal{P}(\tilde{\mathbf{u}}_n) \cdot \mathbf{v} \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{v}_0 \nabla)(\tilde{\mathbf{u}}_n + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{v} + \int_0^T \int_{\Omega} 2v_t(k) \varepsilon(\mathbf{v}_0) : \varepsilon(\mathbf{v}) \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma_o} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_0, q_0, k) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} = 0. \end{aligned} \tag{72}$$

By using (70), one knows that the sequence $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded in W and one may extract a subsequence (still denoted by the same) that weakly converges in $L^2([0, T], V)$ and in $L^\infty([0, T], L^2)$ to some $\tilde{\mathbf{u}} \in W$. One needs compactness, and for it we shall use the Aubin–Lions Lemma. Of course, all the terms involved in (66) satisfied by each $\tilde{\mathbf{u}}_n$ are nice except the terms

$$\int_0^T \int_{\Gamma_o} (\tilde{\mathbf{u}}_n \cdot \mathbf{n}) \tilde{\mathbf{u}}_n \cdot \mathbf{v} \quad \text{and} \quad \int_0^T \int_{\Gamma_o} [(\tilde{\mathbf{u}}_n \cdot \mathbf{n})]^- \tilde{\mathbf{u}}_n \cdot \mathbf{v}, \tag{73}$$

which are the worse terms and which constitutes the only new difficulty in this problem compared with previous works already quoted. Thanks to inequality (69) combined with (70), the applications

$$\mathbf{v} \mapsto \int_0^T \int_{\Gamma_o} (\tilde{\mathbf{u}}_n \cdot \mathbf{n}) \tilde{\mathbf{u}}_n \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \mapsto \int_0^T \int_{\Gamma_o} [(\tilde{\mathbf{u}}_n \cdot \mathbf{n})]^- \tilde{\mathbf{u}}_n \cdot \mathbf{v}$$

are bounded in the space $L^{8/5}([0, T], V')$ ((70) holds for the second one, the proof is the same for the first one). Since we are working in a 2D case, and thanks to the regularity of \mathbf{v}_0 , all the other terms are bounded in $L^2([0, T], V')$. Therefore, the sequence $(\partial_t \tilde{\mathbf{u}}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded in $L^{8/5}([0, T], V')$ as well as in W' . Applying the Aubin–Lions Lemma, one concludes that the sequence $(\tilde{\mathbf{u}}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is compact in $L^{8/5}([0, T], (L^2(\Omega))^2)$. Hence we are back to the usual situation concerning compactness in this type of problem. We bypass the details. We still denote by $(\tilde{\mathbf{u}}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ the subsequence which converges to $\tilde{\mathbf{u}}$ almost everywhere in Ω and strongly in $L^4([0, T], (L^4(\Omega))^2)$ (we are in the 2D case).

One has analogous compactness properties for the sequence $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ which converges weakly in each $L^p([0, T], W_0^{1,p}(\Omega))$ (up to a subsequence and $p < 5/4$) to

some k in the space $\cap_{p < 5/4} L^p([0, T], W_0^{1,p}(\Omega))$, almost everywhere in Ω and strongly in $L^q([0, T] \times \Omega)$ for some $q > 1$.

Passing to the limit in all the terms in (72) is a classical game and follows proofs done already in previous papers (we are in the 2D case), except concerning the terms (73). We show how to pass to the limit in the first one, the second one being treated by the same reasoning. Notice that one has

$$H^1 \subset H^{3/4} \subset V',$$

the injections being dense and compact. Hence, the sequence $(\tilde{\mathbf{u}}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is compact in the space $L^{8/3}([0, T], (H^{3/4}(\Omega))^2)$. By uniqueness of the limit, it converges to $\tilde{\mathbf{u}}$ in this space. Following the chain rule of the proof of Lemma 5.2, one deduces that $(\tilde{\mathbf{u}}_n \cdot \mathbf{n})_{n \in \mathbb{N}}$ converges strongly to $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}$ in $L^4([0, T], L^2(\Gamma_o))$ while $(\tilde{\mathbf{u}}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converges strongly to $\tilde{\mathbf{u}}$ in $L^{8/3}([0, T], (L^4(\Gamma_o))^2)$. Therefore,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Gamma_o} (\tilde{\mathbf{u}}_n \cdot \mathbf{n}) \tilde{\mathbf{u}}_n \cdot \mathbf{u} = \int_0^T \int_{\Gamma_o} (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}) \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}.$$

The rest of the proof is now classical.

5.5. Neumann boundary condition type for the TKE

We are now working in the case where k does satisfy on Γ_o

$$\mu_t \frac{\partial k}{\partial \mathbf{n}} = -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^- k \tag{74}$$

instead of $k = 0$. Because this case yields serious mathematical complications, we shall not give a complete proof of the existence result. We shall limit ourself to locating the difficulties, giving the main *a priori* estimate and to indicating the direction to take. Details will be written in a forthcoming paper.

5.5.1. Variational formulation

When k satisfies (74) at Γ_o instead of $k = 0$, the variational formulation for the k -equation becomes: for all $r \in C^\infty([0, T] \times \Omega)$, with $r|_{\Gamma_i \cup \Gamma_1} = 0$ and $r(T, \cdot) = 0$,

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t r k + \int_0^T \int_{\Omega} ((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \nabla) k \cdot r + \int_0^T \int_{\Omega} \mu_t(k) \nabla k : \nabla r \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma_o} ((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^- k r + \int_{\Omega} k_0(\mathbf{x}) r(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} [2v_t(k) |\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}})|^2 - \mathcal{E}(k) + v_t(k) (4\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) \varepsilon(\mathbf{v}_0) \\ & + 2|\varepsilon(\mathbf{v}_0)|^2)] r. \end{aligned} \tag{75}$$

The source of difficulty is the additional term

$$I_k = \int_0^T \int_{\Gamma_o} ((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^- k r.$$

5.5.2. *À priori estimate*

One starts first with the *à priori estimate*. We show that in the following, there is a situation where the Boccardo-Gallouët result [4] can be applied.

Let g be any non-decreasing non-negative piecewise C^1 bounded function defined on \mathbb{R}^+ , $G(k) = \int_0^k g(k') dk'$. Notice that G is non-negative and thanks to the monotonicity of g , one has

$$\forall k \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leq kg(k) - G(k). \quad (76)$$

Therefore, by choosing $g(k)$ as test function in (67), with $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0$, one has

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G(k) + \int_{\Omega} \mu_t(k) |g'(k)| |\nabla k|^2 + \int_{\Gamma_o} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^+ G(k) \\ + \int_{\Gamma_o} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^- (kg(k) - G(k)) \\ = \int_{\Omega} g(k) [2\nu_t(k) |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 - \mathcal{E}(k)] \end{aligned} \quad (77)$$

Since g is non-negative, combining (46), (117) and (76) one has

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G(k) + \int_{\Omega} \mu_t(k) |g'(k)| |\nabla k|^2 \leq \tilde{C} \|g\|_{\infty}, \\ \tilde{C} = \tilde{C}(\mathbf{u}_1, N, \nu_0, \alpha, \beta, T). \end{aligned} \quad (78)$$

Therefore one can deduce that the results in [4] apply. Therefore the estimate (71) still holds in this case.

5.5.3. *Consistency of the variational formulation*

As said already, the difficulty is due to the term I_k . From the proof of Lemma 5.2 (see Appendix A), $((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^- \in L^4([0, T], L^2(\Gamma_o))$. On the other hand, by combining the trace theorem with the Sobolev Theorem, it easily checked that $k \in \cap_{p < 4/3} L^p([0, T], L^{\frac{p}{p-2}}(\Gamma_o))$. Here the critical case is the space $L^{4/3}([0, T], L^2(\Gamma_o))$, which is not achieved. Therefore, it is not guaranteed that the integral I_k is defined.

The way to go round this difficulty is to renormalize the equation for k , as in [16] chapter 5 and also in [22]. Roughly speaking, one does not take a test function r in the equation, but $r\psi(k)$ for functions ψ having compact support. Then I_k becomes

$$I_{k,\psi} = \int_0^T \int_{\Gamma_o} ((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^- k\psi(k)r,$$

which is defined since $k\psi(k)$ is bounded. Of course, when doing this, new terms appear in the variational formulation. This is now out of the scope of the present paper and will be the subject of a next paper.

6. Numerical simulations

Simulations have been performed using the free software Freefem++ (see [12]). It allows computations of 2D and axisymmetric fluid dynamics by the means of the finite elements method (FEM).

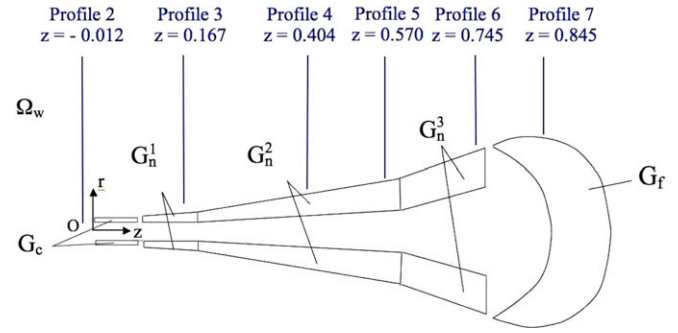


Fig. 8. Geometry of the net.

Remember that the net is modelled as a porous membrane and enclosed in a fictive cylinder. Assume that flow is also axisymmetric. Recall this is a strong hypothesis but reasonable in the case of the study of the mean velocity around a rigid net. Then the problem reduces to a 2D one. The geometry shown on Fig. 8 and drawn in Freefem++ has an outer net profile and a catch profile in agreement with the model of *Boulogne-Sur-Mer*. The inner net profile is defined by the minima of the z -component of the velocity located on the LDV profiles (see Table 1). To take into account the difference of permeability of the net (mainly due to the variations in the mesh opening), the domain G_n has been decomposed in three subdomains: G_n^1, G_n^2, G_n^3 .

Let us work in cylindrical coordinates, the z -axis being the revolution axis of the membrane:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z. \end{cases} \quad (79)$$

Let $\Omega = \{(r, z, \theta), r \in [r_{\min}, r_{\max}], z \in [z_{\min}, z_{\max}], \theta \in [0, \pi]\}$. Let $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$ denote the mean velocity unknown in cylindrical coordinates.

Assuming a planar flow, then $u_\theta = 0$ and thanks to the axisymmetric hypothesis, derivatives with respect to the variable θ are zero.

At a fixed value of θ , we work on a 2D domain:

$$\begin{aligned} \Omega_{r,z} &= \{(r, z), r \in [r_{\min}, r_{\max}], z \in [z_{\min}, z_{\max}]\} \\ &= \Omega_w \cup G_c \cup G_n \cup G_r. \end{aligned}$$

Notice we keep the notations: Ω_w for the fluid domain, G_c for the ring that maintains the model inside the tank, G_n for the membrane (net) domain and G_r for the catch domain.

In the following, the operators (gradient, divergence, etc.) are considered in cylindrical coordinates.

The solid part has a very small permeability, denoted $K_s(r, z) \ll 1$, leading to force the velocity to be zero in that part (then forcing a no-slip boundary condition).

The porous part has a permeability chosen here to be constant by subdomains G_n^i , denoted $K_{G_n^i}$, $i = 1, 2, 3$. The fluid domain has an infinite permeability so that the penalization term vanishes in that part, denoted $K_f(r, z) \gg 1$.

The coupled problem (30)–(38) is implemented under the following variational form.

6.1. Weak formulation

At first, let us assume that there is no reflexion at the outer boundary and consider the boundary conditions (34)–(74) reduced to:

$$\sigma(\mathbf{u}, p, k) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_o} = 0, \tag{80}$$

$$\frac{\partial k}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_o} = 0. \tag{81}$$

Moreover, let us replace the no-slip boundary condition for the velocity (see Eq. (36)) on Γ_1 by slip boundary condition and the homogeneous Dirichlet condition for k on Γ_1 by a non-homogeneous one:

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = 0, \quad u_r = 0, \quad k = k_0 \quad \text{sur } \Gamma_1. \tag{82}$$

Denote $\mathcal{V}(\Omega_{r,z})$ and $\mathcal{Q}(\Omega_{r,z})$ the space defined as:

$$\mathcal{V}(\Omega_{r,z}) = \{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega_{r,z}))^2, v_z = 0 \text{ sur } \Gamma_i, v_r = 0 \text{ sur } \Gamma_i \cup \Gamma_1 \}, \tag{83}$$

$$\mathcal{Q}(\Omega_{r,z}) = \{ q \in L^2(\Omega_{r,z}) \} \tag{84}$$

and

$$\mathcal{W}(\Omega_{r,z}) = \{ w \in L^2(\Omega_{r,z}), w = 0 \text{ sur } \Gamma_i \cup \Gamma_1 \}. \tag{85}$$

A weak formulation of the coupled problem (30)–(35), with the boundary conditions (80)–(82) yields:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Find } (\mathbf{u} = (u_r, u_z), p, k) \in \mathcal{V}(\Omega_{r,z}) \times \mathcal{Q}(\Omega_{r,z}) \times \mathcal{W}(\Omega_{r,z}) \text{ such that:} \\ \int_{\Omega_{r,z}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \mathbf{v} |r| \pi dr dz + \int_{\Omega_{r,z}} (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \mathbf{v} |r| \pi dr dz \\ - \int_{\Omega_{r,z}} p \nabla \cdot \mathbf{v} |r| \pi dr dz + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{r,z}} (v_0 + v_t) (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})') : \\ (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})') |r| \pi dr dz \\ + \int_{\Omega_{r,z}} \mathcal{P}(\mathbf{u})(t, (r, z)) \mathbf{v} |r| \pi dr dz - \int_{\Omega_{r,z}} \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{q} |r| \pi dr dz = 0, \\ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega_{r,z}), \quad \forall q \in \mathcal{Q}(\Omega_{r,z}); \\ \int_{\Omega_{r,z}} \frac{\partial k}{\partial t} w |r| \pi dr dz + \int_{\Omega_{r,z}} (\mathbf{u} \nabla) k w |r| \pi dr dz \\ + \int_{\Omega_{r,z}} \tilde{v}_t (\nabla k : \nabla w) |r| \pi dr dz \\ - \int_{\Omega_{r,z}} \frac{\nu_t}{2} |\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})'|^2 w |r| \pi dr dz \\ + \int_{\Omega_{r,z}} \frac{C_3}{\ell(\mathbf{x})} k^3 w |r| \pi dr dz = 0, \quad \forall w \in \mathcal{W}(\Omega_{r,z}). \end{array} \right. \tag{86}$$

with

$$\mathcal{P}(\mathbf{u})(t, (r, z)) = \left(\frac{1}{K_s(r, z)} (\mathbb{1}_{G_f \cup G_c}(r, z)) + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{K_{G_n^i}(r, z)} \mathbb{1}_{G_n^i}(r, z) + \frac{1}{K_f(r, z)} \mathbb{1}_{\Omega_w}(r, z) \right) \mathbf{u}(t, (r, z)). \tag{87}$$

6.2. Finite elements discretization

Using the mesh generator of Freefem++, one builds an unstructured mesh \mathcal{T}_h of the domain $\{(r, z), r \in [r_{\min}, r_{\max}], z \in [z_{\min}, z_{\max}]\}$:

$$\mathcal{T}_h = \cup_{i=1, N} K_i.$$

Here, K_i are triangle elements. An example of such a mesh, built from the profiles of the different regions is shown on Fig. 9. Recall that the entire domain is meshed even inside

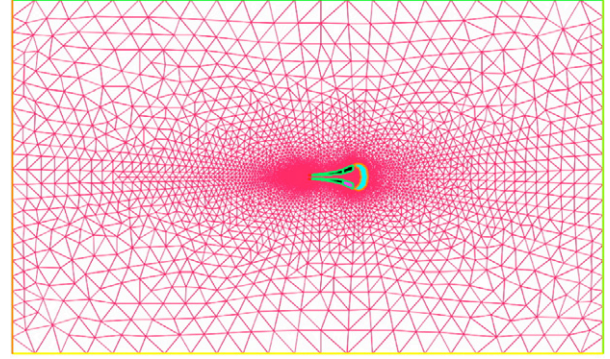


Fig. 9. Unstructured mesh of the domain Ω (10978 vertices – 21862 triangles).

the catch and collar regions because equations are set in the entire domain by the means of the permeability of the different media. Remark we did not make the calculations in half the domain given on Fig. 9 because we wanted to check the axisymmetry of the results with the use of an unstructured mesh and a parameter, $\ell(\mathbf{x})$, that depends on the local mesh side.

Mesh refinements are located near the region G , since it is the region where most of the turbulence occurs.

The space discretization of the problem is based on the finite elements method. The velocity and pressure unknowns are approximated using P2/P1 finite elements.

The associated discrete finite element spaces are the following:

$$\mathcal{V}_h(\Omega_{r,z}) = \{ \mathbf{v}_h = (v_r, v_z) \in (\mathcal{C}^0(\Omega_{r,z}))^2, \forall K_i \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_{K_i} \in P^2(K_i), \mathbf{v}_h|_{\Gamma_i \cap \partial K_i} = 0 \text{ and } v_r|_{\Gamma_i \cap \partial K_i} = 0 \}, \tag{88}$$

$$\mathcal{Q}_h(\Omega_{r,z}) = \{ q_h \in \mathcal{C}^0(\Omega_{r,z}), \forall K_i \in \mathcal{T}_h, q_h \in P^1(K_i) \}. \tag{89}$$

The turbulent kinetic energy k is approximated by P2 finite elements.

The associated discrete finite element space is:

$$\mathcal{W}_h(\Omega_{r,z}) = \{ w_h \in \mathcal{C}^0(\Omega_{r,z}), \forall K_i \in \mathcal{T}_h, w_h \in P^2(K_i), w_h|_{\Gamma_i \cap \partial K_i} = 0, w_h|_{\Gamma_i \cap \partial K_i} = 0 \}. \tag{90}$$

The discrete weak formulation of the problem (30)–(35), (80)–(82) is the following:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Finding } (\mathbf{u}_h, p_h, k_h) \in \mathcal{V}_h(\Omega_{r,z}) \times \mathcal{Q}_h(\Omega_{r,z}) \times \mathcal{W}_h(\Omega_{r,z}) \text{ such that:} \\ \int_{\Omega_{r,z}} \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} \mathbf{v}_h |r| \pi dr dz + \int_{\Omega_{r,z}} (\mathbf{u}_h \nabla) \mathbf{u}_h \mathbf{v}_h |r| \pi dr dz \\ - \int_{\Omega_{r,z}} p_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h |r| \pi dr dz \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{r,z}} (v_0 + v_t) (\nabla \mathbf{u}_h + (\nabla \mathbf{u}_h)') : (\nabla \mathbf{v}_h + (\nabla \mathbf{v}_h)') |r| \pi dr dz \\ + \int_{\Omega_{r,z}} \mathcal{P}(\mathbf{u}_h)(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}_h |r| \pi dr dz \\ - \int_{\Omega_{r,z}} \nabla \cdot \mathbf{u}_h \mathbf{q}_h |r| \pi dr dz = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h(\Omega_{r,z}), \quad \forall q_h \in \mathcal{Q}_h(\Omega_{r,z}); \\ \int_{\Omega_{r,z}} \frac{\partial k_h}{\partial t} w_h |r| \pi dr dz + \int_{\Omega_{r,z}} (\mathbf{u}_h \nabla) k_h w_h |r| \pi dr dz \\ + \int_{\Omega_{r,z}} \tilde{v}_t (\nabla k_h : \nabla w_h) |r| \pi dr dz \\ - \int_{\Omega_{r,z}} \frac{\nu_t}{2} |\nabla \mathbf{u}_h + (\nabla \mathbf{u}_h)'|^2 w_h |r| \pi dr dz \\ + \int_{\Omega_{r,z}} \frac{C_3}{\ell(\mathbf{x})} k_h^3 w_h |r| \pi dr dz = 0, \quad \forall w_h \in \mathcal{W}_h(\Omega_{r,z}). \end{array} \right. \tag{91}$$

6.3. Time discretization

Denote δt the time step. Let \mathbf{u}_h^m , P_h^m and k_h^m be the time approximates of the mean velocity, the modified pressure and the turbulent kinetic energy respectively, at the time $t^m = m\delta t$.

The convective terms in the problems are approximated using a characteristic Galerkin method [12,21].

Consider a convective term like $(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{b}$.

A Taylor expansion of the derivative

$$\frac{D\mathbf{b}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{b} \quad (92)$$

yields the approximation

$$\frac{D\mathbf{b}}{Dt} \cong \frac{\mathbf{b}^{m+1} - (\mathbf{b}^m(x - \mathbf{u}^m(x)\delta t))}{\delta t}. \quad (93)$$

Let $X(x, t; s)$ be the solution of the problem:

$$\begin{cases} \frac{dX}{ds} = \mathbf{u}(X, s), \\ X|_{s=t} = x. \end{cases} \quad (94)$$

$X(x, t; s)$ is the position at time s of the particle situated at position x at time t .

Then:

$$\frac{D\mathbf{b}}{Dt} \cong \frac{\mathbf{b}^{m+1} - \mathbf{b}^m \circ X^m}{\delta t}, \quad (95)$$

where $X^m(x) = X(x, t^{m+1}; t^m)$.

Following [21], an implicit scheme (see Eq. (96)) is chosen for the Navier–Stokes problem with eddy viscosity and a half-implicit one (see Eq. (97)) for the turbulent closure equation

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{For all } m = 0, \dots, \frac{T}{\delta t}, \\ \text{find } (\mathbf{u}_h^{m+1}, P_h^{m+1}, k_h^{m+1}) \in \mathcal{V}_h(\Omega_{r,z}) \times \mathcal{Q}_h(\Omega_{r,z}) \times \mathcal{W}_h(\Omega_{r,z}) \text{ such as:} \\ \frac{1}{\delta t} \int_{\mathcal{T}_h} (\mathbf{u}_h^{m+1} - \mathbf{u}_h^m \circ X_h^m) \mathbf{v}_h |r| \pi \, dr \, dz \\ - \int_{\mathcal{T}_h} P_h^{m+1} \nabla \cdot \mathbf{v}_h |r| \pi \, dr \, dz \\ + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{T}_h} (v_0 + C_1 \ell(\mathbf{x}) \sqrt{k_h^m}) (\nabla \mathbf{u}_h^{m+1} + (\nabla \mathbf{u}_h^{m+1})') : (\nabla \mathbf{v}_h + (\nabla \mathbf{v}_h)') |r| \pi \, dr \, dz \\ + \int_{\mathcal{T}_h} \mathcal{P}(\mathbf{u}_h^{m+1}) \mathbf{v}_h |r| \pi \, dr \, dz \\ - \int_{\mathcal{T}_h} \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{m+1} q_h |r| \pi \, dr \, dz \\ - \int_{\mathcal{T}_h} P_h^{m+1} q_h \alpha_0 |r| \pi \, dr \, dz = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h(\Omega_{r,z}), \forall q_h \in \mathcal{Q}_h(\Omega_{r,z}); \end{array} \right. \quad (96)$$

with $\alpha_0 = 10^{-7}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\delta t} \int_{\mathcal{T}_h} (k_h^{m+1} - k_h^m \circ X_h^m) w_h |r| \pi \, dr \, dz \\ \int_{\mathcal{T}_h} \left(C_2 \ell(\mathbf{x}) \sqrt{k_h^m} \right) (\nabla k_h^{m+1} : \nabla w_h) |r| \pi \, dr \, dz \\ + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{T}_h} \left(-C_1 \ell(\mathbf{x}) \sqrt{k_h^m} \right) |\nabla \mathbf{u}_h^m + (\nabla \mathbf{u}_h^m)'|^2 \frac{k_h^{m+1}}{k_h^m} w_h |r| \pi \, dr \, dz \\ + \int_{\mathcal{T}_h} \frac{C_3}{\ell(\mathbf{x})} \sqrt{k_h^m} k_h^{m+1} w_h |r| \pi \, dr \, dz = 0, \end{array} \right. \quad (97)$$

where $X_h^m(x)$ is a numerical approximation of $X^m(x)$. The parameters $C_i (i = 1, 2, 3)$ are adimensionalized constants.

The penalization term in Eq. (96)

$$\int_{\mathcal{T}_h} P_h^{m+1} q_h \alpha_0 |r| \pi \, dr \, dz,$$

with $\alpha_0 = 10^{-7}$, leads to a more regular problem [12].

The initial values for the velocity and pressure unknowns (\mathbf{u}_h^0, P_h^0) are obtained by solving an auxiliary Stokes problem, and the turbulent kinetic energy k_h^0 is initialized to a constant in the entire domain.

The solving process is iterative. As soon as the final time T is not reached, one solves numerically the kinetic energy problem, then the Navier–Stokes/Brinkman with eddy viscosity part, the time step is increased, the kinetic energy part is solved again and so on.

6.4. Parameters settings

Different parameters have to be set to perform the simulations:

- the parameter $\ell(\mathbf{x})$ in the definition of the eddy viscosity function (see Eq. (14)) is defined as a constant in each triangle, its value in a triangle being equal to the longest edge of this triangle,
- the water kinematic viscosity ν_0 in equation (see Eq. (14)): $\nu_0 = 1.141 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ at 15 °C,
- the initial turbulent kinetic energy equal to a constant in the entire domain and equal to $0.01 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$,
- the permeability K in the different regions:

$$K(\mathbf{x}) = \begin{cases} 10^4 \text{ s in the fluid region } \Omega_w; \\ 10^{-6} \text{ s in the catch region } G_c \text{ and collar region } G_f; \\ 1 \text{ s in the net region } G_n^1; \\ 5 \text{ s in the net region } G_n^2; \\ 6 \text{ s in the net region } G_n^3. \end{cases} \quad (98)$$

The unit of K is [s] since it is formally the ratio between a permeability surface [m^2] under the kinematic viscosity [$\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$].

Simulations have shown that the subdomain G_n^3 could be considered as permeable (i.e. as a fluid part). In fact, the mesh opening in G_n^3 is so high that the meshes do not disturb the flow.

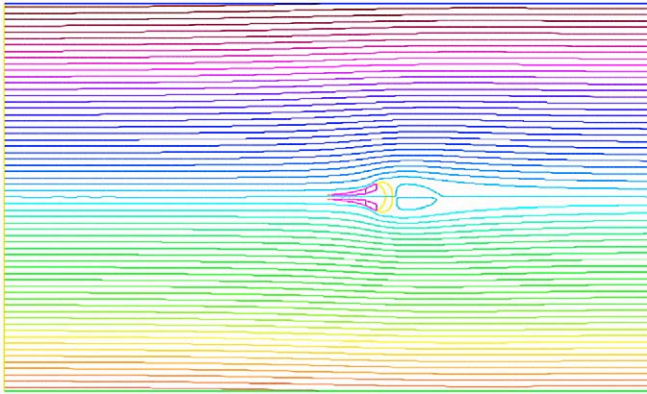


Fig. 10. Streamlines.

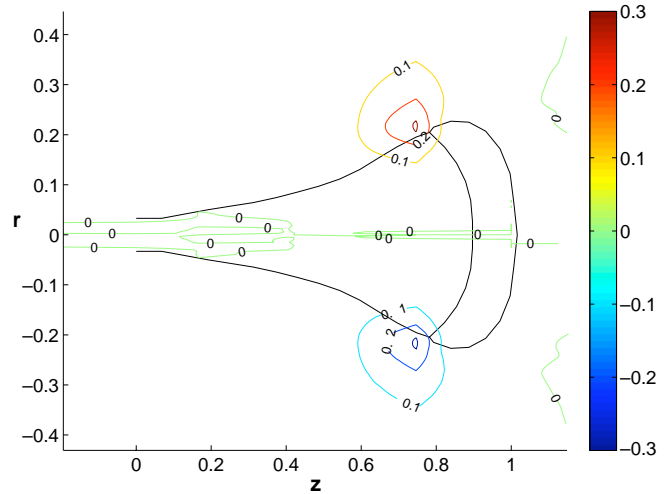


Fig. 12. Level curves for u_r .

- the time step set equal to 0.667 s,
- the adimensionalized constants, found numerically: $C_1 = 0.1$; $C_2 = 0.05$; $C_3 = 0.03$.

6.5. Numerical results

Using the parameters defined in the previous section, we use the free software FreeFem++ to compute the fluid problem. Runs were made on a bi-processor Pentium Xeon EM64T 3.2 GHz, with 2 Go RAM.

The global behavior of the flow is shown on Fig. 10 where the streamlines are drawn.

The level curves of the z -component of the mean velocity are given in Fig. 11.

Fig. 12 gives the level curves of u_r , and the Figs. 13 and 14 gives those for the turbulent kinetic energy k .

The use of an unstructured mesh leads to a slight asymmetry in the graphics for the turbulent kinetic energy.

Those figures give several results:

- a laminar flow at the output (see Fig. 10). It allows us to keep the simplified boundary conditions (80), (81) at the output,

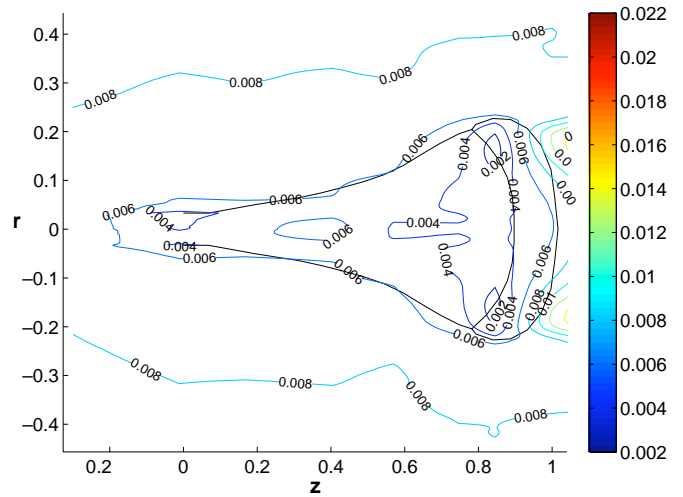


Fig. 13. Level curves for k in the surroundings of the net.

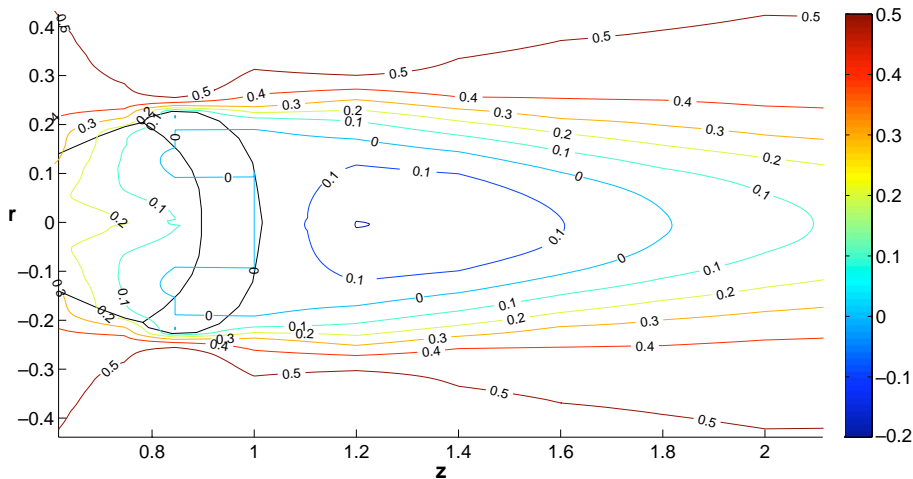


Fig. 11. Level curves of u_z behind the catch.

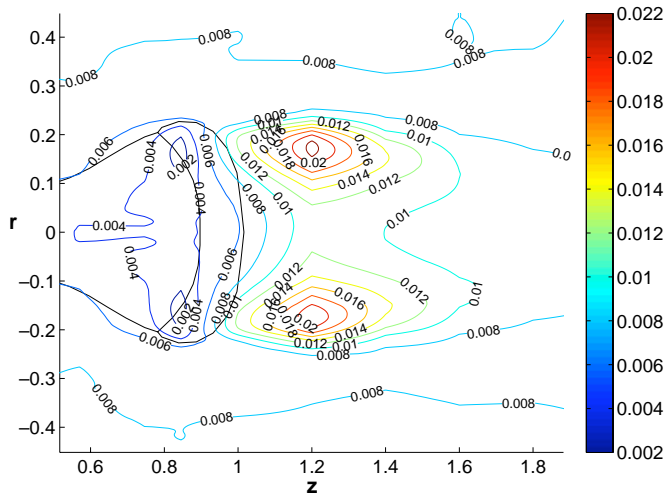


Fig. 14. Level curves for k behind the catch.

- the escapement of the inner velocity inside the net takes place just in front of the catch (see Fig. 12),
- the turbulence is mainly located behind the catch and is low in the surroundings of the net (see Figs. 13 and 14),
- two main eddies are located behind the catch (see Figs. 10, 11, 14).

Remark 6.1. Notice the axisymmetry hypothesis of the flow prevents any vortex shedding. Such an hypothesis is reasonable in the case of the rigid net model to predict the velocity profiles near the net. However it would no longer be valid in the fully 3D case with a moving net.

Let us compare now the experimental profiles given at the beginning (Fig. 3), measured by a LDV technique for u_z with those obtained numerically (see Figs. 15–17).

One can see that the numerical profiles fit well with those obtained experimentally (see Figs. 15–17).

An interesting feature is emphasized by computing the norm 2 of the difference of the velocity and the turbulent kinetic energy between two successive iterations (see Fig. 18). A stationary state is reached after about 50 iterations: the residual for \mathbf{u} is equal to 10^{-3} , and the one for k equal to 4×10^{-4} . This is in agreement with the fact that we are studying mean quantities.

To conclude, we have a model that leads to remarkable results in comparison with the available experimental data. In this particular case of a rigid net, our model looks appropriate. Moreover, this model has the advantage that its application to a 3D problem is possible, especially if we make use of a fictitious domain technique that does not require a complex mesh generation.

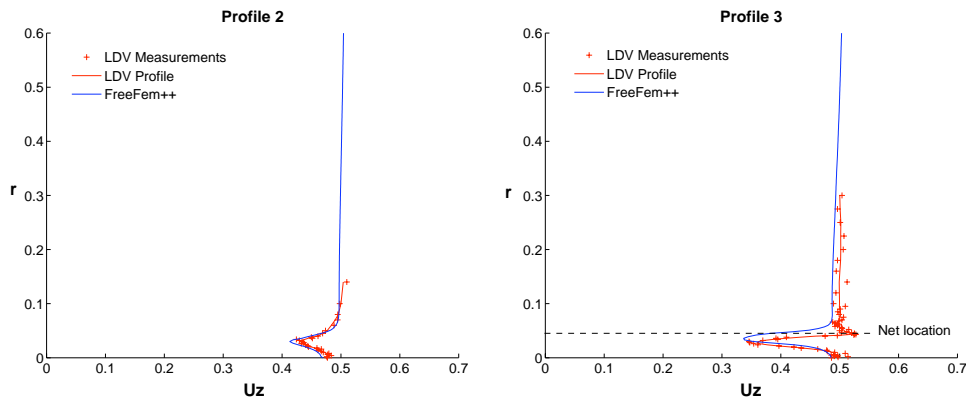


Fig. 15. Profiles 2 and 3 after 50 iterations.

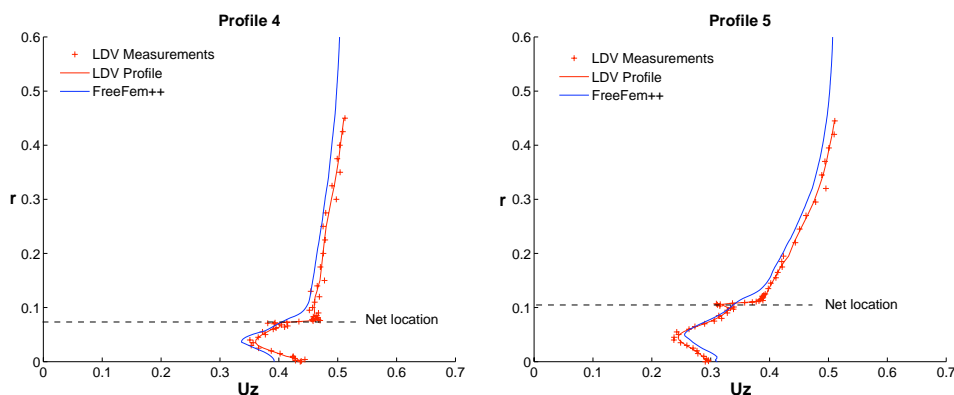


Fig. 16. Profiles 4 and 5 after 50 iterations.

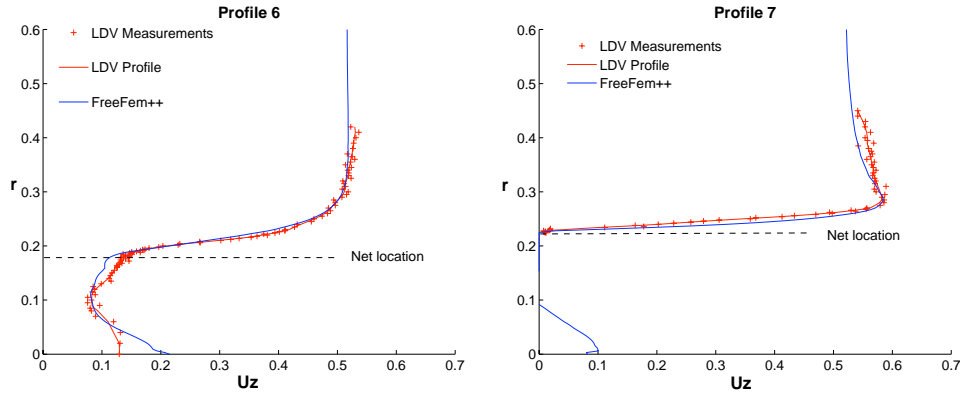


Fig. 17. Profiles 6 and 7 after 50 iterations.

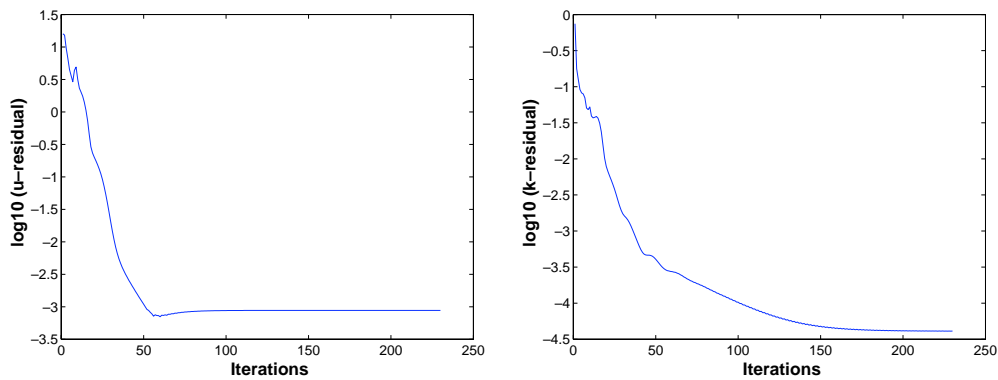


Fig. 18. Log10 of the residual computed for the velocity and TKE vs iterations.

Acknowledgements

We thank IFREMER and the region Bretagne for the financial support of this work. We are very grateful toward F. Hecht for fruitful discussions about the numerical simulation of our problem. We also thank G. Germain and his team of the IFREMER center of *Boulogne-sur-Mer* for the experimental data, B. Vincent of the IFREMER center of *Lorient* (France) for his relevant remarks and D. Priour of the IFREMER center of *Brest* (France). Finally we express our grateful gratitude to D. Madden who has reread this paper and corrected the English.

Appendix A. Proofs of Lemmas and Proposition

Here are given the proofs of the technical Lemmas 5.1 and 5.2 and of Proposition 5.1.

• **Lemma 5.1.** *Let*

$$V = \{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2; \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \mathbf{v}|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = \mathbf{0}. \} \tag{99}$$

and

$$\mathcal{V} = \{ \mathbf{v} \in [C^\infty(\Omega)]; \exists \tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathcal{V}} \text{ s.t. } \mathbf{v} = \mathbf{v}_r \}. \tag{100}$$

The space \mathcal{V} is dense in V .

Proof. Let $\mathbf{v} \in V$. Recall we denote:

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= \{ \mathbf{v} \in (H^1(\tilde{\Omega}))^2; \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \mathbf{v}|_{\partial\tilde{\Omega}} = \mathbf{0} \}, \\ \tilde{\mathcal{V}} &= \{ \mathbf{v} \in (\mathcal{D}(\tilde{\Omega}))^2; \cdot \mathbf{v} = 0 \}. \end{aligned}$$

Since $\tilde{\Omega}$ is simply connected and has a Lipschitz boundary, one knows thanks to Corollary 2.5 in [10] that $\tilde{\mathcal{V}}$ is dense in \tilde{V} . Therefore, there exists a sequence $(\mathbf{w}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of fields in $\tilde{\mathcal{V}}$ that converges to \mathbf{v}^e in the space \tilde{V} . One obviously has

$$\int_{\Omega} |\nabla((\mathbf{w}_n)_r - \mathbf{v})|^2 \leq \int_{\Omega^s} |\nabla(\mathbf{w}_n - \mathbf{v}^e)|^2.$$

This shows that the sequence $((\mathbf{w}_n)_r)_{n \in \mathbb{N}}$ converges to \mathbf{v} in V and each $(\mathbf{w}_n)_r$ lies in \mathcal{V} by definition. The lemma is proven. \square

• **Lemma 5.2.** *Let*

$$W = L^2([0, T], V) \cap L^\infty([0, T], (L^2(\Omega))^2) \tag{101}$$

and $(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \in W \times W$. Then

$$\int_0^T \int_{\Gamma_o} [\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}]^- \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \leq C \|\tilde{\mathbf{u}}\|_W^2 \|\mathbf{v}\|_W, \tag{102}$$

where C is a constant that only depends on α and β . Moreover, there also exists a constant \tilde{C} such that

$$\begin{aligned} \forall \tilde{\mathbf{v}} \in L^{8/3}([0, T], V), \int_0^T \int_{\Gamma_0} [\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}]^- \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \\ \leq C \|\tilde{\mathbf{u}}\|_W^2 \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{L^{8/3}([0, T], V)}. \end{aligned} \quad (103)$$

Proof. Let $\mathbf{v} \in W$. One starts from the classical interpolation inequality (see in [19])

$$\|\mathbf{v}\|_{H^{3/4}} \leq \|\mathbf{v}\|_{L^2}^{1/4} \|\mathbf{v}\|_{H^1}^{3/4}.$$

One deduces that

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{L^{8/3}(H^{3/4})} &\leq \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(L^2)}^{1/4} \|\mathbf{v}\|_{L^2(V)}^{3/4} \\ &\leq \frac{1}{4} \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(L^2)} + \frac{3}{4} \|\mathbf{v}\|_{L^2(V)} \leq \|\mathbf{v}\|_W. \end{aligned} \quad (104)$$

One deduces by the trace Theorem that

$$\|\mathbf{v}\|_{L^{8/3}(H^{1/4}(\Gamma_0))} \leq C \|\mathbf{v}\|_W. \quad (105)$$

Moreover, thanks to the Sobolev Theorem,

$$\|\mathbf{v}\|_{L^{8/3}(L^4(\Gamma_0))} \leq C \|\mathbf{v}\|_W. \quad (106)$$

Let $\tilde{\mathbf{u}} \in W$. It is clear that at Γ_0 ,

$$\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \in L^\infty(H^{-1/2}(\Gamma_0)) \cap L^2(H^{1/2}(\Gamma_0)).$$

By using again a simple interpolation inequality one deduces easily that

$$\|\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}\|_{L^4(L^2(\Gamma_0))} \leq C \|\tilde{\mathbf{u}}\|_W. \quad (107)$$

Therefore, $(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n})\tilde{\mathbf{u}} \in L^{8/5}(L^{4/3}(\Gamma_0))$, as well as $(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n})^- \tilde{\mathbf{u}}$ and one has

$$\|(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n})^- \tilde{\mathbf{u}}\|_{L^{8/5}(L^{4/3}(\Gamma_0))} \leq C \|\tilde{\mathbf{u}}\|_W^2. \quad (108)$$

The rest of the proof is now a direct consequence of (104), (106) and Hölder inequality. \square

- **Proposition 5.1.** *There exists a constant $C_1 = C_1(\mathbf{u}_0, u_1, \nu, \alpha, \beta)$ and for each $p < 4/3$ a constant $C_2 = C_2(\mathbf{u}_0, u_1, \nu, \mu, p, \alpha, \beta)$ such that for any smooth solution $(\tilde{\mathbf{u}}, k)$ to the variational problem (67), (66) one has*

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2([0, T], V)} + \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^\infty([0, T], L^2(\Omega))} \leq C_1, \quad (109)$$

$$\|k\|_{L^p([0, T], W^{1,p}(\Omega))} \leq C_2. \quad (110)$$

Proof. We proceed in two steps. We first estimate the velocity and then the Turbulent Kinetic Energy (TKE). *Step 1. Estimating the velocity.* One multiplies the Eq. (51) by $\tilde{\mathbf{u}}$ and integrates on Ω . A technical but easy computation using the boundary condition \tilde{u} (56) yields:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega 2\nu_t(k) |\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})|^2 + \int_\Omega 2\nu_t(k) \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0) \\ + \int_\Omega \mathcal{P}(\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \int_\Omega \mathbf{v}_0 \otimes (\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) : \nabla \tilde{\mathbf{u}} \\ + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} ((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^+ |\tilde{\mathbf{u}}|^2 = 0. \end{aligned} \quad (111)$$

Since

$$0 \leq \int_\Omega \mathcal{P}(\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{and} \quad 0 \leq \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} ((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^+ |\tilde{\mathbf{u}}|^2,$$

using (22) and (46), the energy equality (111) yields

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega 2\nu_t(k) |\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})|^2 \leq N \int_\Omega |\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})| |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0)| \\ + \|\mathbf{v}_0\|_\infty \int_\Omega |\tilde{\mathbf{u}}| |\nabla \tilde{\mathbf{u}}| + \|\mathbf{v}_0\|_\infty^2 \int_\Omega |\nabla \tilde{\mathbf{u}}|. \end{aligned} \quad (112)$$

By using Young and Korn's inequalities, one has

$$\int_\Omega |\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})| |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0)| \leq \frac{1}{2\zeta} \int_\Omega |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0)|^2 + \frac{\zeta}{2} \int_\Omega |\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})|^2, \quad (113)$$

$$\int_\Omega |\tilde{\mathbf{u}}| |\nabla \tilde{\mathbf{u}}| \leq \left(\frac{1}{2\zeta} + C\right) \int_\Omega |\tilde{\mathbf{u}}|^2 + \frac{\zeta}{2} C \int_\Omega |\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})|^2, \quad (114)$$

where ζ will be fixed later on and C is the constant in the Korn inequality. Finally, by always using the Young inequality combined with the Cauchy–Schwarz inequality,

$$\|\mathbf{v}_0\|_\infty^2 \int_\Omega |\nabla \tilde{\mathbf{u}}| \leq \frac{\alpha\beta}{2\zeta} \|\mathbf{v}_0\|_\infty^4 + \frac{\zeta}{2} \int_\Omega |\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})|^2. \quad (115)$$

Therefore, (112) combined with (22) yields

$$\begin{aligned} \frac{d}{2dt} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\nu_0 - (\zeta/2)(N + C + 1)) \int_\Omega |\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})|^2 \\ \leq \left(\frac{1}{2\zeta} + C\right) \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{N}{2\zeta} \int_\Omega |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0)|^2 + \frac{\alpha\beta}{2\zeta} \|\mathbf{v}_0\|_\infty^4. \end{aligned} \quad (116)$$

We choose ζ be such that $(\nu_0 - (\zeta/2)(N + C + 1)) = \nu_0/2$. One deduces from (116) and Gronwall's lemma, combined again with Korn's inequality, the existence of $\tilde{C} = \tilde{C}(\mathbf{u}_1, N, \nu_0, \alpha, \beta, T, \mathbf{u}_0)$, which blows up in a e^T rate and such that

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_W = \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^\infty([0, T], L^2(\Omega))} + \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2([0, T], V)} \leq \tilde{C}. \quad (117)$$

Step 2. Estimating the TKE. Notice first that by using the same arguments as in [15] or in [16], one can make sure that $k \geq 0$ a.e. as far as we assume $k_0 \geq 0$. The boundary terms does not create any troubles because

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} ((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^- k(-k^-) = \int_0^T \int_{\Gamma_0} ((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^- (k^-)^2 \geq 0.$$

The other terms are like in the general situation studied in [16, chapter 4]. From now and throughout the rest of the paper, one works with $k \geq 0$.

Thanks to (117), we can use the Classical Boccardo–Gallouët estimate (see [4]). By a proof already done in [14–17] and since we are working in a 2D case and $k = 0$ on $\partial\Omega$, one deduces that

$$\exists \bar{C} = \bar{C}(\mathbf{u}_1, N, \nu_0, \alpha, \beta, T, \mathbf{u}_0); \|k\|_{L^\infty([0,T], L^1(\Omega))} \leq \bar{C} \quad (118)$$

and

$$\forall p < 4/3, \quad \exists \hat{C} = \hat{C}(p, \mathbf{u}_1, N, \nu_0, \alpha, \beta, T, \mathbf{u}_0); \|k\|_{L^p([0,T], W_0^{1,p}(\Omega))} \leq \hat{C}. \quad \square \quad (119)$$

References

- [1] G. Allaire, Homogenization of the Navier–Stokes equations and derivation of Brinkman’s law, in: C. Carasso et al. (Eds.), *Applied Mathematics for Engineering Sciences*, Cépaduès Editions, Toulouse, 1991, pp. 7–20.
- [2] P. Angot, C.H. Bruneau, P. Fabrie, A penalization method to take into account obstacles in viscous flows, *Numer. Math.* 81 (1999) 497–520.
- [3] L. Botsford, J. Castilla, C. Peterson, The management of fisheries and marine ecosystems, *Science* 277 (1997) 509–515.
- [4] L. Boccardo, T. Gallouët, Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data, *J. Funct. Anal.* 87 (1989) 149–169.
- [5] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, seconde ed., Masson, 1993.
- [6] C.-H. Bruneau, P. Fabrie, New efficient boundary conditions for incompressible Navier–Stokes equations: a well-posedness result, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* 30 (1996) 815–840.
- [7] M. Dauge, C. Bernardi, Y. Maday, *Spectral Methods for Axisymmetric Domains*, Gauthier Villars, 1999.
- [8] M. Dauge, C. Bernardi, Y. Maday, *Polynomials in the Sobolev World*, Publications du Laboratoire J.-L. Lions, 2003.
- [9] G. Germain, J.V. Facq, D. Priour, Flow characterization around a cod-end, *IMAM congress*, Portugal, 2005.
- [10] V. Girault, P.-A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations*, Springer-Verlag, 1986.
- [11] P. Grisvard, *Singularités des solutions du problème de Stokes dans un polygone*, Univ. de Nice, 1978.
- [12] F. Hecht, O. Pironneau, A. Le Hyaric, K. Ohtsua, *FreeFem++ Manual*, Laboratoire Jacques Louis Lions, Paris, 2006. <http://freefem.org/ff++>.
- [13] K. Khadra, P. Angot, S. Parneix, J.P. Caltagirone, Fictitious domain approach for numerical modelling of Navier–Stokes equations, *Int. J. Numer. Methods Fluids* 34 (2000) 651–684.
- [14] J. Lederer, R. Lewandowski, On the RANS 3D model with unbounded eddy viscosities, *Ann. IHP An. Nonlin.* 24 (2007) 413–441.
- [15] R. Lewandowski, The mathematical analysis of the coupling of a turbulent kinetic energy equation to the Navier–Stokes equation with an eddy viscosity, *Nonlin. Anal. TMA* 28 (2) (1997) 393–417.
- [16] R. Lewandowski, *Analyse Mathématique et Océanographie*, Masson, 1997.
- [17] R. Lewandowski, Vorticities in a LES model for 3D periodic turbulent flows, *J. Math. Fluid Mech.* 8 (2006) 398–422.
- [18] H. Le Dret, R. Lewandowski, D. Priour, F. Chagneau, Numerical simulation of a cod end net. Part I: Equilibrium in a uniform flow, *J. Elasticity* 76 (2004) 139–162.
- [19] J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et application*, vol. 1, Dunod, 1968.
- [20] R. Mittal, G. Iaccarino, Immersed boundary methods, *Annual Rev. Fluid Mech.* 37 (2005) 239–261.
- [21] B. Mohammadi, O. Pironneau, *Analysis of the k -epsilon Turbulence Model*, Masson, Springer, 1994.
- [22] F. Murat, *Soluciones renormalizadas de EDP elípticas no lineales*, Lectures at Sevilla’s University, 1990.
- [23] F.-G. O’Neill, Axisymmetric trawl cod-ends made from netting of a general mesh shape, *IMA J. Appl. Math.* 62 (1999) 245–262.
- [24] C.-S. Peskin, Flow patterns around heart valves: a numerical method, *J. Comput. Phys.* 10 (1972).
- [25] G. Pichot, *Modélisation et analyse numérique du couplage filet-écoulement hydrodynamique en vue d’estimer la forme de la prise dans une poche chalut*, Ph.D. Thesis of Rennes 1 University, to be defended, 2007.
- [26] D. Priour, Calculation of net shapes by the finite element method with triangular elements, *Comm. Numer. Meth.* 15 (1999) 755–763.
- [27] B. Vincent, *Etude numérique et expérimentale des écoulements guidés par une paroi perméable axisymétrique*, Application à la modélisation des chaluts pour en améliorer la sélectivité, Thèse Ecole Centrale Nantes, 1996.

Problèmes mathématiques de la mécanique

Sur l'écoulement turbulent au voisinage d'un filet de pêche

Roger Lewandowski^a, Géraldine Pichot^b

^a IRMAR, campus Beaulieu, université de Rennes I, 35000 Rennes, France

^b IFREMER, technopôle Brest Iroise, 29280 Plouzane, France

Reçu le 4 juillet 2006 ; accepté le 2 novembre 2006

Disponible sur Internet le 22 décembre 2006

Présenté par Olivier Pironneau

Résumé

L'objet de cette Note est la modélisation et la simulation d'un écoulement turbulent au voisinage d'un filet de pêche rigide. Nous décrivons la modélisation, un résultat d'existence au système d'équations puis quelques résultats numériques comparés avec des résultats expérimentaux pour valider le code. *Pour citer cet article : R. Lewandowski, G. Pichot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

On the turbulent flow around a fishing net. We consider the flow around a rigid fishing net. We describe the model and show an existence result. Numerical results are shown and compared with experimental data. *To cite this article: R. Lewandowski, G. Pichot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Recent experimental works [1] show that there are less and less fish in the ocean because of intensive industrial fishing. It is essential to make fishing nets more selective. Unfortunately, it is difficult to get experimental data in situ. Therefore, a numerical tool has had to be developed in order to seek new solutions.

In this problem, there are four features: the elastic deformations of the net, the understanding of the flow, the fluid/structure coupling and the catches. Elastic models for a net in a given fixed flow already exist [6,10]. The hydrodynamics have been studied in [11] in an axisymmetric case. For several reasons, this work does not allow a future coupling of the flow with the structure.

Our study starts from experiments carried out at *Boulogne sur Mer* in the IFREMER tank. A model net, rigidified by a resin, has been constructed. We have been able to measure components of the velocity of the water outside and inside the net thanks to a LDV measurement technique ([3] and [8]).

Our work aims to give a mathematical model describing the flow around and inside this net, by taking the turbulent features of the flow into account. We then wrote a numerical code to simulate this turbulent flow.

Adresses e-mail : Roger.Lewandowski@univ-rennes1.fr (R. Lewandowski), Geraldine.Pichot@ifremer.fr (G. Pichot).

URL : <http://perso.univ-rennes1.fr/roger.lewandowski/> (R. Lewandowski).

Our model is made of three features. First, the net is considered to be a porous membrane so as to simplify the geometry of the fluid domain. Then we take the net and fish into account directly in the equations by a penalization technique, leading to Navier–Stokes/Brinkman equations, and, finally, we use a first order turbulent closure model with an eddy viscosity $\nu_t = \nu_t(k)$ where k is the turbulent kinetic energy. The function ν_t is a truncature of the function $\nu_0 + \ell\sqrt{k}$, ℓ being locally equal to the size of the numerical mesh.

The geometry is described by (1). The equations are (3) below and the boundary conditions (4)–(6). We prove an existence result in the two-dimensional case.

Theorem 0.1. *Let $T > 0$. Assume that ν_t , μ_t are C^1 bounded functions, bounded below by a strictly positive constant and K and ℓ are piecewise C^1 functions, also strictly positive. Moreover, we assume that $u_1 \in H_{00}^{3/2}(\Gamma_i)$ and $(\mathbf{u}_0, k_0) \in L^2(\Omega) \times L^1(\Omega)$, $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$, $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_i} = u_1$, $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_e} = 0$. Then the system (3)–(6) has a weak solution (\mathbf{u}, p, k) on $[0, T] \times \Omega$ where $\mathbf{u} \in L^2([0, T], H^1(\Omega)) \cap L^\infty([0, T], L^2(\Omega))$, $k \in \bigcap_{p < 4/3} L^p([0, T], W^{1,p}(\Omega)) \times L^\infty([0, T], L^1(\Omega))$, $p \in \mathcal{D}'([0, T], L^2(\Omega))$.*

The proof is based on the energy equalities (7) and (8) and uses an adaptation to the present case of the scheme introduced at the origin in [7]. It has to be noticed that usually one uses $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$ on the outside boundary of the computational box. In this case and with no information on the sign of $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ there is no a priori estimate. In the laminar case $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^- = 0$ on Γ_o in (5) up to the additional term $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{u}_1$. However, this force term looks naturally outwards. Without it, one needs a smallness assumption on \mathbf{u}_1 to prove an existence result which excludes the turbulent cases.

Numerical simulations have been performed using the finite elements technique in the axisymmetric case. Following [9], one uses an implicit scheme for the Navier–Stokes/Brinkman equations with eddy viscosity and a half-implicit scheme for the turbulent closure equation. The solving process is iterative: once the turbulent kinetic energy is computed, the Navier–Stokes/Brinkman equations are solved numerically, then the turbulent kinetic energy is computed again and so on, until the final computation time is reached.

Our program has been written using the free software Freefem++ [4]. Experimental LDV profiles for the main component of the velocity have been compared with the corresponding profiles obtained numerically. One notices a really good agreement between both (Fig. 3). Moreover, a stationary state is reached after about 50 iterations, which is correct since we are studying mean quantities.

1. Introduction

Des récentes analyses [1] montrent que les océans sont de moins en moins poissonneux en raison de la pêche industrielle massive. Il est indispensable de rendre les filets plus sélectifs pour éviter de capturer les poissons trop petits et impropres à la consommation. Les difficultés pour l'obtention de mesures in situ sont les principales motivations du développement d'un outil numérique fiable pour tester la sélectivité des filets et l'améliorer.

Le développement d'un tel outil présente quatre aspects : les déformations élastiques du filet, l'écoulement hydrodynamique, le couplage fluide/structure et la prise en compte des captures de poissons. De nombreux travaux ont déjà été entrepris (par ex. [6,10]) pour traiter la question de modèles élastiques dans des flots uniformes. On trouve dans [11] une étude intéressante de la partie hydrodynamique mais qui ne permet pas semble-t-il d'envisager le couplage fluide/structure. Notre travail est une approche de la partie hydrodynamique pour obtenir un modèle approprié qui permettra le couplage fluide/structure ultérieur, la prise en compte des captures et qui tient compte de la turbulence de l'écoulement.

Notre étude a pour point de départ une série de campagnes expérimentales au bassin d'essai de l'IFREMER de Boulogne sur Mer. Grâce à des techniques de mesures LDV, on a pu collecter des valeurs des vitesses de l'eau sur des sections d'une maquette de filet rigide (voir [3] et [8]). Nous avons ensuite mis au point un modèle mathématique simulant l'écoulement turbulent au voisinage de cette maquette. L'objet de cette note est la présentation de ce modèle et des résultats obtenus, théoriques et numériques, dans le cas axisymétrique.

Dans la suite, nous présentons le modèle, nous énonçons un résultat d'existence d'une solution faible dans le cas 2D. Enfin, nous donnons des indications sur l'algorithme de programmation et quelques résultats numériques comparés aux résultats expérimentaux.

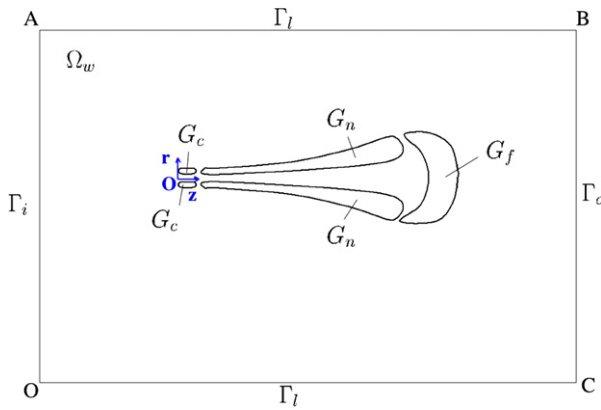
2. Modélisation

Notre modèle présente trois aspects :

- Une modélisation du filet par une membrane poreuse, de perméabilité à définir, de sorte de s’affranchir d’un maillage coûteux qui reposerait sur les fils et les noeuds,
- Suivant [5], une prise en compte des obstacles (solides et poreux) dans l’écoulement continûment dans les équations de Navier–Stokes incompressibles par l’ajout d’un terme de pénalisation de la vitesse,
- L’utilisation d’un modèle classique de fermeture à une équation (voir [9]), avec viscosité turbulente ν_t où $\nu_t = \nu_t(k)$, k étant l’énergie cinétique turbulente. Nous utilisons une troncature de la fonction $\nu_t = \nu + \ell\sqrt{k}$ où ℓ est prise égale en chaque point à la taille locale du maillage ; k est solution de l’équation standard.

Considérons une poche de chalut remplie de poissons, prise dans une configuration axisymétrique et immergée dans une boîte cylindrique. Moyennant une hypothèse d’axisymétrie de l’écoulement, raisonnable pour l’étude de l’écoulement moyen, notre problème se réduit à un problème dans le plan $(O, \mathbf{r}, \mathbf{z})$. Notons $(\mathbf{u} = (u_z, u_r), p)$ les inconnues (vitesse moyenne, pression modifiée).

Soit Ω le domaine de calcul, bordé par $\Gamma_i \cup \Gamma_l \cup \Gamma_o$ (Fig. 1) :



$$\begin{aligned} \Gamma_i &= [O, A], & 0 &= (0, 0), & A &= (0, \alpha), \\ \Gamma_l &= [C, O] \cup [A, B], & B &= (\beta, \alpha), & C &= (\beta, 0), \\ \Gamma_o &= [B, C], \\ \Gamma &= \Gamma_i \cup \Gamma_l \cup \Gamma_o, & \Omega &= \Omega_w \cup G_n \cup G_c \cup G_f. \end{aligned} \quad (1)$$

Le domaine fluide est noté Ω_w , la prise G_f , le filet est décrit par le domaine G_n , G_c étant le support de l’entrée du filet (voir [3]).

Fig. 1. Géométrie et notations.

Fig. 1. Geometry and notation used.

La perméabilité des domaines est défini comme suit :

$$K(\mathbf{x}) = \begin{cases} K_w(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_w, \text{ avec } K_w(\mathbf{x}) \gg 1, \\ K_s(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in G_f \cup G_c, \text{ avec } K_s(\mathbf{x}) \ll 1, \\ K_n(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in G_n. \end{cases} \quad (2)$$

Le système final posé dans Ω est,

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p, k) + \left(\frac{1}{K_s(\mathbf{x})} \mathbb{1}_{G_f \cup G_c} + \frac{1}{K_n(\mathbf{x})} \mathbb{1}_{G_n} + \frac{1}{K_w(\mathbf{x})} \mathbb{1}_{\Omega_w} \right) \mathbf{u} &= \mathbf{0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p, k) = 2(\nu_0 + \nu_t(k, \mathbf{x})) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - p \mathbf{Id}, \\ \partial_t k + \mathbf{u} \cdot \nabla k - \nabla \cdot (\mu_t(k, \mathbf{x}) \nabla k) &= 2\nu_t(k, \mathbf{x}) |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|^2 - \frac{k\sqrt{k}}{\ell}. \end{aligned} \quad (3)$$

Pour les conditions aux limites : le flot d’entrée est pris constant. Sur les bord $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Pour éviter les réflexions numériques de tourbillons sur Γ_o et s’assurer d’avoir une solution dissipative, on généralise la méthode de [2] au cas turbulent.

$$\text{sur } \Gamma_i : \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 = (u_1, 0), \quad k = 0, \quad \text{sur } \Gamma_l : \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad k = 0, \quad (4)$$

$$\text{sur } \Gamma_o : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p, k) \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^-(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{u}_1, \quad \mu_t \frac{\partial k}{\partial \mathbf{n}} = -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^- k, \quad (5)$$

$$\mathbf{u}_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad k_{t=0} = k_0. \quad (6)$$

3. Résultat d’existence

Théorème 3.1. Soit $T > 0$ et on se place dans le cas 2D. On suppose les fonction ν_t, μ_t , bornées de classe C^1 minorées par une constante strictement positive et K et ℓ C^1 par morceaux et strictement positives. On suppose que $u_1 \in H_{00}^{3/2}(\Gamma_i)$ et $(\mathbf{u}_0, k_0) \in L^2(\Omega) \times L^1(\Omega)$, $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$, $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_i} = u_1$, $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_\ell} = 0$. Alors le système (3)–(6) admet une solution faible (\mathbf{u}, p, k) sur $[0, T] \times \Omega$ avec $\mathbf{u} \in L^2([0, T], H^1(\Omega)) \cap L^\infty([0, T], L^2(\Omega))$, $k \in \bigcap_{p < 4/3} L^p([0, T], W^{1,p}(\Omega)) \times L^\infty([0, T], L^1(\Omega))$, $p \in \mathcal{D}'([0, T], L^2(\Omega))$.

La démonstration est détaillée dans [8]. On commence par faire un relèvement de la condition aux limites sur Γ_i en notant $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{v}_0$ où $\mathbf{v}_0 = 0$ sur $\Gamma_i \cup \Gamma_l$, vaut \mathbf{u}_1 sur $\Gamma_i \cup \Gamma_o$ et est solution d’un problème de Stokes, nulle sur le domaine filet. La condition $u_1 \in H_{00}^{3/2}(\Gamma_i)$ est cruciale. On a les égalités, où $\mathcal{P}(\mathbf{u})$ est le terme de perméabilité,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \nu_t(k) |\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})|^2 + \int_{\Omega} \nu_t(k) \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0) \\ + \int_{\Omega} \mathcal{P}(\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \int_{\Omega} \mathbf{v}_0 \otimes (\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) : \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_o} ((\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n})^+ |\tilde{\mathbf{u}}|^2 = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

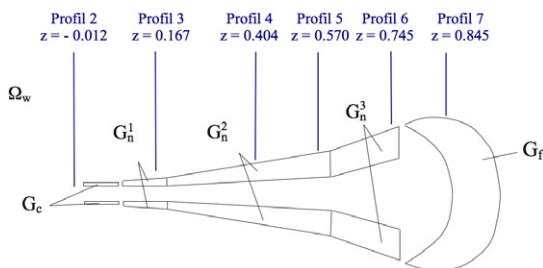
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G(k) + \int_{\Omega} \mu_t(k) |g'(k)| |\nabla k|^2 \\ + \int_{\Gamma_o} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^+ G(k) + \int_{\Gamma_o} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^- (kg(k) - G(k)) = \int_{\Omega} g(k) \left[\nu_t(k) |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|^2 - \frac{k\sqrt{k}}{\ell} \right] \end{aligned} \tag{8}$$

pour chaque g, C^1 par morceaux positive sur \mathbb{R}^+ , impaire et croissante ($kg(k) - G(k) \geq 0$), bornée. On en déduit les bornes habituelles comme dans [7] par exemple. On construit des approximations par la méthode de Galerkin et on passe à la limite dans les équations.

Il faut noter qu’en général, on choisit $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur le bord de sortie de la boîte de calcul. Dans ce cas, sans information sur le signe de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ on n’a pas d’estimation a priori. Noter que dans le cas laminaire $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^- = 0$ en sortie on retrouve le cas habituel dans (5) au terme additionnel $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{u}_1$ près. Ce terme de forçage semble cependant naturel. Sans ce dernier, on est conduit à imposer une condition de petitesse sur \mathbf{u}_1 pour prouver un résultat d’existence, ce qui exclut les cas turbulents.

4. Résultats numériques

La résolution repose sur la technique des éléments finis. S’inspirant de [9], un schéma implicite est choisi pour le problème régissant les inconnues (\mathbf{u}, p) (initialisées en résolvant un problème de Stokes auxiliaire) et un schéma semi-implicite pour k (initialisée à une constante). Le processus de résolution est itératif. On résoud alternativement les deux problèmes jusqu’à ce que le temps final de calcul soit atteint.



Perméabilité du domaine filet :

$$K_n(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in G_n^1, \\ 5 & \text{si } \mathbf{x} \in G_n^2, \\ 6 & \text{si } \mathbf{x} \in G_n^3. \end{cases}$$

Perméabilité du domaine fluide $\Omega_w : K_w = 10^5$

Perméabilité des domaines solides $G_f \cup G_c : K_s = 10^{-5}$

Fig. 2. Découpage du domaine filet et profils de mesures.

Fig. 2. Breakdown of the net domain, and measurement profiles.

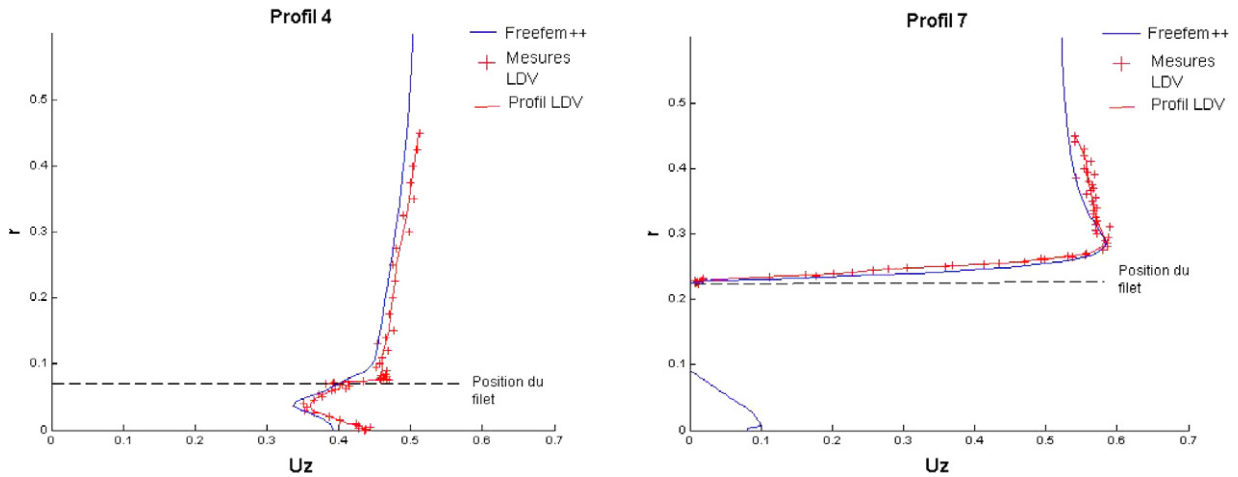


Fig. 3. Comparaisons des profils LDV et numériques : profils 4 et 7.

Fig. 3. Comparison of the LDV measurements and calculations: profiles 4 and 7.

Le domaine G_n a été découpé en trois zones G_n^i ($i = 1, 2, 3$) : $G_n = \bigcup_{i=1}^3 G_n^i$, et l'épaisseur de la membrane choisie en fonction de la couche limite observée sur les profils LDV (Fig. 2).

Notre code a été écrit sous le logiciel *Freefem++* (voir [4]). Nous donnons ci-dessus quelques résultats numériques obtenus pour la composante u_z de la vitesse le long de deux des profils de mesures et les comparons avec les profils expérimentaux correspondants (Fig. 3).

Nous constatons que les résultats numériques coïncident parfaitement avec les données expérimentales. De plus, un état stationnaire est atteint au bout de 50 itérations, ce qui est en accord avec le fait d'étudier l'écoulement moyen.

Remerciements

Nous remercions l'IFREMER et la région Bretagne pour le financement de ces recherches. Nous remercions vivement F. Hecht avec qui nous avons eu des discussions fructueuses sur la simulation numérique de notre problème, ainsi que G. Germain et son équipe de l'IFREMER de *Boulogne sur Mer* pour la donnée des profils expérimentaux, B. Vincent de l'IFREMER de Lorient pour ses remarques pertinentes et D. Priour de l'IFREMER de Brest.

Références

- [1] L. Botsford, J. Castilla, C. Peterson, The management of fisheries and marine ecosystems, *Science* 277 (1997) 509–515.
- [2] C.H. Bruneau, P. Fabrie, New efficient boundary conditions for incompressible Navier–Stokes equations: a well-posedness result, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* 30 (1996) 815–840.
- [3] G. Germain, J.V. Facq, D. Priour, Flow characterization around a cod-end, in: IMAM Congress, Portugal, 2005.
- [4] F. Hecht, O. Pironneau, A. Le Hyaric, K. Ohtsua, *FreeFem++ Manual*, Laboratoire Jacques Louis Lions, Paris, <http://freefem.org/ff++>, 2006.
- [5] K. Khadra, P. Angot, S. Parneix, J.P. Caltagirone, Fictitious domain approach for numerical modelling of Navier–Stokes equations, *Int. J. Numer. Methods Fluids* 34 (2000) 651–684.
- [6] H. Le Dret, R. Lewandowski, D. Priour, F. Chagneau, Numerical simulation of a cod end net. Part 1: Equilibrium in a uniform flow, *J. Elasticity* 76 (2004) 139–162.
- [7] R. Lewandowski, The mathematical analysis of the coupling of a turbulent kinetic energy equation to the Navier–Stokes equation with an eddy viscosity, *Nonlinear Anal. TMA* 28 (2) (1997) 393–417.
- [8] R. Lewandowski, G. Pichot, Numerical simulation of water flow around a rigid fishing net, 2006, soumis, voir aussi à http://perso.univ-rennes1.fr:8080/roger.lewandowski/Article_fini_modif220806.pdf.
- [9] B. Mohammadi, O. Pironneau, *Analysis of the k-Epsilon Model*, Masson, 1994.
- [10] D. Priour, Calculation of net shapes by the finite element method with triangular elements, *Comm. Numer. Methods* 15 (1999) 755–763.
- [11] B. Vincent, Etude numérique et expérimentale des écoulements guidés par une paroi perméable axisymétrique. Application à la modélisation des chaluts pour en améliorer la sélectivité, Thèse Ecole Centrale Nantes, 1996.

PROCEEDINGS IN FLOW MODELLING IN THE SURROUNDINGS OF THE END PART OF A TRAWL

GÉRALDINE PICHOT¹

Abstract. This paper is devoted to the presentation of modelling procedures and of numerical simulations of the flow in the surroundings of the end part of a trawl, where fish are caught. We present first the hydrodynamical data collected in November 2004 at the IFREMER tank of Boulogne-sur-Mer around and inside an axisymmetric rigid net model. Then we show the use of averaged Navier-Stokes/Brinkman equations with an eddy viscosity coupled with an equation for the turbulent kinetic energy (TKE) (RANS type model of order one) as for a turbulent fluid model. Finally, we test this last model by comparing the numerical results obtained with the code that we have written in Freefem++ and the experimental data available.

Résumé. Cet article présente les avancées concernant la modélisation et la simulation numérique de l'écoulement autour de la poche d'un chalut. Nous présentons tout d'abord la campagne expérimentale menée en Novembre 2004 au bassin d'essais de l'IFREMER de Boulogne-sur-Mer afin de collecter des données hydrodynamiques sur l'écoulement autour d'une poche de chalut rigide axisymétrique. Nous exposons dans une deuxième partie le modèle fluide utilisé, basé sur les équations de Navier-Stokes/Brinkman avec viscosité turbulente couplées à un modèle de turbulence à une équation. Enfin, nous testons la capacité du modèle à reproduire l'écoulement dans le cas simple de la maquette de Boulogne-sur-Mer par l'intermédiaire du code de calcul que nous avons écrit pour le logiciel Freefem++.

INTRODUCTION

This study aims at describing the proceedings in flow modelling around and inside a cod-end net, which is a complex 3D structure. One has to deal with three difficulties: the complex geometry of the fluid domain, the turbulent feature of the flow and the boundary conditions at the output of the computational box.

Firstly, one has to process the complexity of the fluid domain in the surrounding of the net and the catch. Using a classical finite elements method would require a far too complex 3D mesh generation. It is wise to use an equivalent geometry to represent the net. An equivalent membrane is considered in [12]. However, this model is axisymmetric and its generalization to the 3D case seems difficult. We propose here to keep the idea of accounting for the net by the means of a porous membrane. However, instead of applying transfer equations at the membrane location, the membrane, as well as the catch considered as impermeable, are introduced continuously in the fluid equations by the means of a penalization term, based on the Brinkman law. It allows to set the same fluid equations in the entire domain, provided a permeability function is defined. Similar techniques are described and applied in different contexts (see [11], [9], [2], [1], [4], [6]). In our case, a high

¹ IFREMER, Technopôle Brest-Iroise, BP 70, 29280 Plouzane Cedex et IRMAR, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, geraldine.pichot@ifremer.fr

constant permeability value is set in the fluid domain, a low one in the catch domain. In the membrane, a permeability function has to be estimated. One can refer to section 3 for an example of such a function.

Secondly, the turbulent feature of the flow makes it difficult to perform Direct Numerical Simulation since it would require too high computer resources to deal with all various scales of turbulence. In the case of the study of the net model of Boulogne-sur-Mer, the Reynolds number is equal to 10^5 . That is why a Reynolds Averaged Navier-Stokes/Brinkman model with an eddy viscosity coupled to an equation for the turbulent kinetic energy (TKE) is used and averaged quantities are studied.

Thirdly, one has to define outer boundary conditions. The computational box should not disturb the flow, that is why ghost boundary conditions are derived (see [8]) and they are essential whenever the flow is turbulent at the output to avoid eddy reflections. One can see in section 3 that a classical output boundary condition is actually used in the simulations, since the outflow is laminar.

First, we present the experimental data available, collected by G. Germain and his IFREMER team of Boulogne-sur-Mer with the participation of the author of the present paper. Then we give the fluid system of equations, that is the averaged Navier-Stokes/Brinkman equations with an eddy viscosity, coupled with one equation for the TKE. Finally we conclude by describing our Freefem++ code and by a comparison between experimental and numerical results.

1. EXPERIMENTAL WORK

1.1. Experimental framework

Experiments have been carried out in November 2004 at the IFREMER center of Boulogne-Sur-Mer (France). Velocity profiles have been measured inside and around a rigid resin made model built by the Boulogne-Sur-Mer IFREMER team (Figure 1). This model is like an axisymmetric rigid 1/6 scaled cod-end net towed at a velocity about 1.25 m/s with diamond-shaped meshes. The end of the net is filled with a resin mass modelling a catch of 30 kg of fishes.

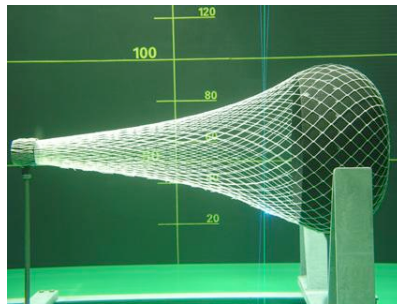


FIGURE 1. Model of the cod-end net model built at IFREMER - Boulogne-sur-Mer

Working on a rigid axisymmetric net restricts the study but it makes it easier to perform velocity measurements. The model is 1 m long and has an outer maximal diameter of 0.45 m. It is maintained with a frame and set at the bottom of the IFREMER tank. The estimation of the velocity to apply in the tank comes from a Froude similitude yielding a reference velocity of 0.51 m/s.

1.2. Experimental data

Hydrodynamical measures are obtained using a Laser Doppler Velocimeter (LDV) technique, giving the velocity profiles at different positions, as shown on figure 2.

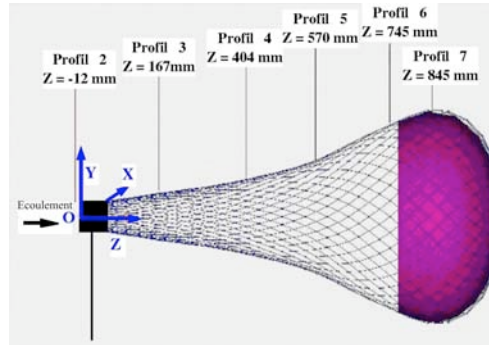


FIGURE 2. Profiles considered for the LDV measurements

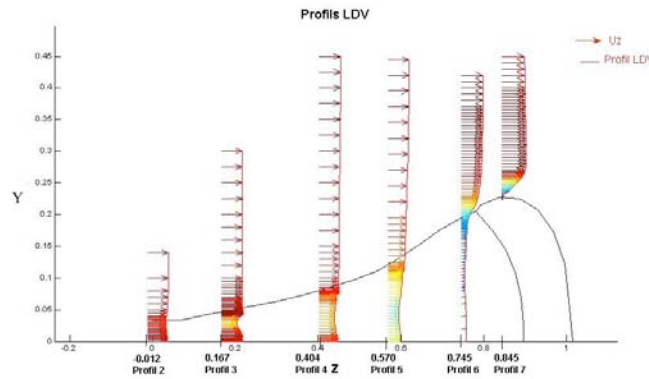


FIGURE 3. LDV profiles

One defines a cartesian coordinate system in the tank, the origin being set at the entrance of the net. We study the z velocity component since it has the direction of the entrance flow, and then the higher values. The results obtained for this component are displayed on figure 3.

Our aim is now to present the turbulent model chosen to simulate the flow inside and around a rigid net, to show the results obtained with our code written in Freefem++ [5] and to compare them with the experimental profiles.

2. A REYNOLDS AVERAGED NAVIER-STOKES/BRINKMAN MODEL

The flow around the end part of a trawl is governed by Navier-Stokes equations. Due to the presence of the catch, the twines and the nodes, the flow is turbulent. Taking the maximal catch diameter, equal to 0.45 m, as a reference length and the entrance velocity, equal to 0.51 m/s, as a reference velocity gives a high Reynolds number equal to 10^5 . Therefore direct numerical simulation is compromised and a turbulent model is required (see e.g. [10]). We chose to use averaged Navier-Stokes equations with an eddy viscosity model coupled to an equation for the TKE (see [7] and [10] for generalities concerning those models), leading us to work with averaged quantities (averaged velocity and averaged pressure).

Another problem comes with the complex geometry of the fluid domain that makes any mesh generation an impossible task. The idea to overcome the difficulty of the netting is to define an equivalent net model. Let us consider the net as a porous membrane of thickness given by the minima of z velocity along the LDV profiles (Figure 3).

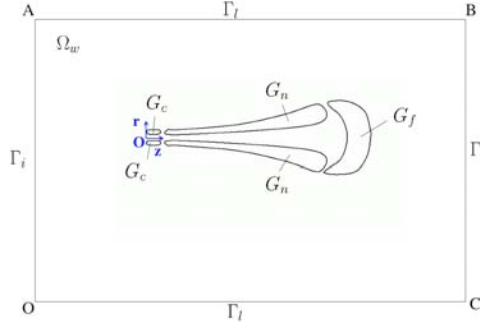


FIGURE 4. An equivalent net model

For a sake of simplicity, we consider in the following the axisymmetric case of the Boulogne-sur-Mer’s model. The real flow is actually 3D but since we are dealing with mean quantities, the hypothesis of an axisymmetric flow around the axisymmetric cod-end net is reasonable. Then working in cylindrical coordinates allows us to reduce our 3D problem to the study of two components. We denote G_n the net domain, G_f the catch, Ω_w the fluid domain and G_c the rigid frame that maintains the model in the tank (Figure 4).

It remains to determine how the porous media are taken into account in the fluid equations. This comes with a penalization method that leads to add a penalization term of the velocity in the classical Navier-Stokes equations in order to account for the presence of the net and the catch. The resulting equations are coupled with the equation for the TKE by the means of an eddy viscosity, denoted ν_t in the following, leading to a Reynolds Averaged Navier-Stokes/Brinkman model.

In the following we denote $(\mathbf{u} - P)$ the mean velocity and modified pressure unknowns and k the TKE. The flow is governed by:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} - \nabla \cdot \sigma_t(\mathbf{u}, P, k) + \frac{1}{K(\mathbf{x})} \mathbf{u} = 0, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \sigma_t(\mathbf{u}, P, k) = -P Id + (\nu_0 + \nu_t)(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t) \\ \frac{\partial k}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) k = \nabla \cdot (\tilde{\nu}_t \nabla k) + \frac{\nu_t}{2} |\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t|^2 - C_3 \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\ell(x)} \end{cases} \quad (1)$$

with

$$\begin{aligned} \sigma_t(\mathbf{u}, P, k) &= -P Id + (\nu_0 + \nu_t)(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t), \text{ the turbulent strain tensor} \\ P &= p + \frac{2}{3}k, \text{ the modified pressure} \\ \nu_t &= C_1 \ell(\mathbf{x}) k^{\frac{1}{2}}, \text{ the eddy viscosity coefficient,} \\ \ell(\mathbf{x}) &= \text{the mixing length,} \\ \tilde{\nu}_t &= C_2 \ell(\mathbf{x}) k^{\frac{1}{2}}, \quad \nu_0 \text{ the kinematic viscosity of water,} \\ C_1, C_2, C_3 &= \text{adimensionalized constants.} \end{aligned} \quad (2)$$

The parameter $K(\mathbf{x})$ characterizes the permeability of the different media.

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\epsilon} \quad \rightarrow \quad +\infty \quad \text{if } x \in \Omega_w, \\ K(\mathbf{x}) &= \epsilon \quad \rightarrow \quad 0 \quad \text{if } x \in G_f \cup G_c, \\ K(\mathbf{x}) &= K_f \quad \text{if } x \in G_n, \end{aligned} \quad (3)$$

Initial and boundary conditions are the following:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad k(0, \mathbf{x}) = k_0(\mathbf{x}) \\ \mathbf{u}|_{\Gamma_i} = \mathbf{u}_I = (u_I, 0), \quad k|_{\Gamma_i} = 0, \\ \mathbf{u}|_{\Gamma_l} = \mathbf{0}, \quad k|_{\Gamma_l} = 0, \\ \boldsymbol{\sigma}_t(\mathbf{u}, p, k) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_o} = -\frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^-(\mathbf{u} - \mathbf{u}_I) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{u}_I, \quad \tilde{\nu}_t \frac{\partial k}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_o} = -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^- k. \end{array} \right. \quad (4)$$

In practice, $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ is given by solving a Stokes problem and $k_0(\mathbf{x})$ is set to be a constant in the entire domain. The boundary conditions at the interface Γ_o are studied in [8]. It generalizes to the turbulent case the work performed in [3]. These output boundary conditions aim to avoid numerical vortices reflections at Γ_o in the case the fluid would be turbulent there. Also, the existence of a solution in the sense of the distributions to our coupled problem (1)-(4) that satisfies the standard energy balance has been proved in the 2D case, when the eddy viscosity is bounded [8].

3. TEST OF THE MODEL IN A SIMPLE CASE

We have tested our model to the case of the flow around the Boulogne-sur-Mer's model. Numerical simulations have been performed using the free software Freefem++ [5]. We have decomposed the net domain G_n in three subdomains to take the increase of permeability due to the mesh opening into account (Figure 5).

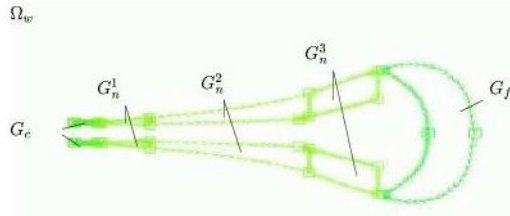


FIGURE 5. Net domain decomposition

The flow has been computed using the finite elements method. An implicit scheme is chosen for the Navier-Stokes/Brinkman problem and a semi-implicit one for the turbulent kinetic energy problem. Then the problems are solved iteratively until a chosen time is reached. Actually one shows that a stationary state is reached which is in agreement with the study of mean quantities. Moreover experiments suggest that the flow is laminar far from the net reducing the boundary conditions (4) to classical output boundary conditions, the ones used in the Freefem++ code:

$$\boldsymbol{\sigma}_t(\mathbf{u}, p, k) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_o} = 0, \quad \tilde{\nu}_t \frac{\partial k}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_o} = 0. \quad (5)$$

3.1. Numerical simulations

An unstructured body fitted mesh is built, even in the porous and solid media (Figure 6).

After a set of simulations, one gets the value of the different parameters included in the model:

- $K_{\Omega_w} = 10000$, $K_{G_f} = 0.000001$, $K_{G_c} = 0.000001$, $K_{G_n^1} = 1$, $K_{G_n^2} = 5$, $K_{G_n^3} = 6$,
- Mesh: 10978 vertices; 21862 triangles,
- Time step: 0.66667 s,
- $\ell(x)$ defined locally on each triangle as its higher side length,
- $C_1 = 0.1$; $C_2 = 0.05$; $C_3 = 0.03$,
- Thickness of the net: given by the minima of u_z given by the LDV profiles.

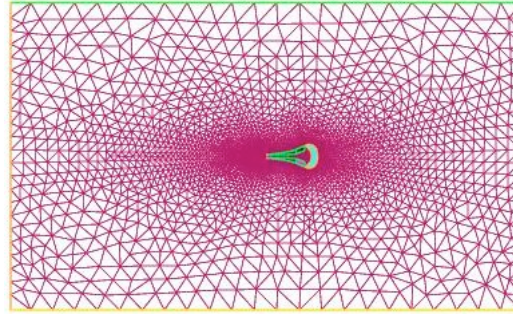


FIGURE 6. Unstructured mesh domain (10978 vertices - 21862 triangles)

Notice the permeability parameter is defined constant by parts, its values being set so as to fit the available experimental data. A matrix form may be more appropriate to control the permeability in the different directions but it brings even more parameters to set, that is why we chose a simple form in a first approximation. To find the constant values, several simulations were performed. The obtained results were consistent with what could be expected : an increase in the permeability constant in a given region increases the corresponding velocity, a decrease leads to a slowdown of the velocity. A best choice is to find the permeability in the net domain as a function of the net characteristics (like the mesh opening, the mesh orientation in the flow, ...). This is the aim of our current work.

Remark also that the length scale $\ell(\mathbf{x})$ depends on the local mesh side. As this parameter is devoted to control the turbulent kinetic energy, it mainly acts behind the catch where the turbulence rate is the highest. In comparison, the turbulence in the surroundings of the net is low. Then, a mesh refinement leads to similar velocity profiles, however it decreases the turbulent kinetic energy behind the catch. The subject of our forthcoming work is to add an equation for the length scale (leading to a $k - \ell$ model) that would prevent this mesh dependency and lead to suitable values for the turbulent kinetic energy behind the catch by comparison with experimental data.

3.2. Comparison with experimental data

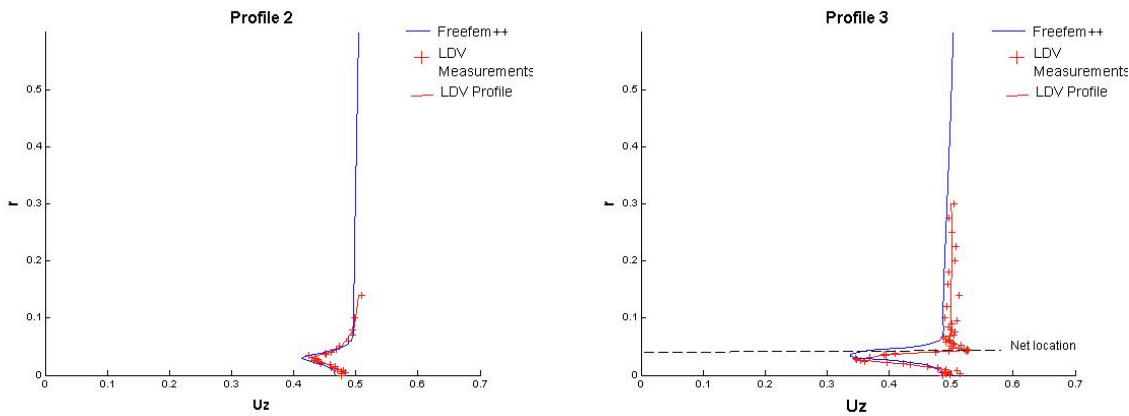


FIGURE 7. Profiles 2 and 3

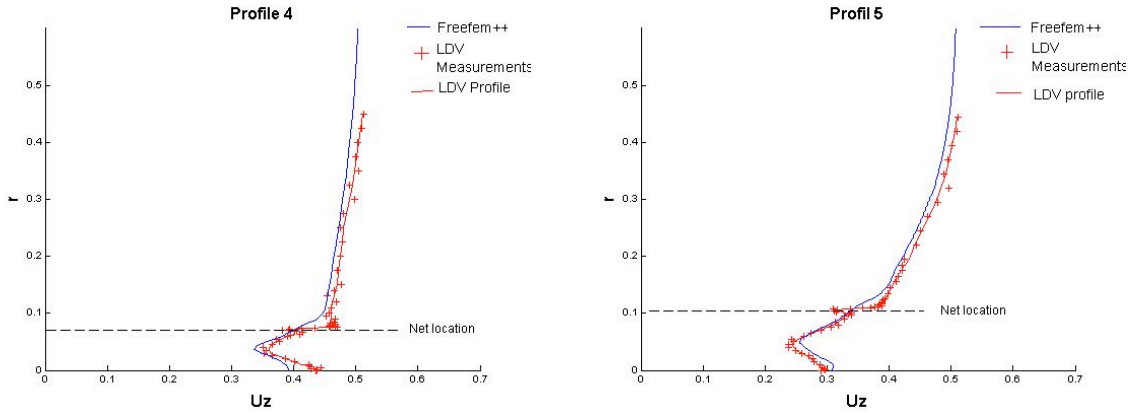


FIGURE 8. Profiles 4 and 5

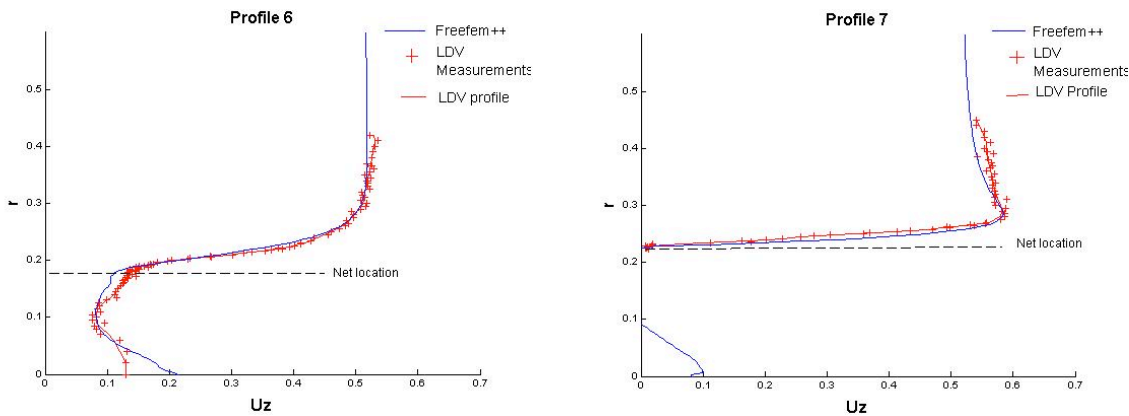


FIGURE 9. Profiles 6 and 7

We have compared the profiles obtained numerically and the LDV profiles (see figures 7, 8 and 9). The results obtained with the model fit very well with the experimental data. Moreover a stationary state is reached. This is emphasized by computing the L^2 norm of the difference between two successive iterations of the velocity on one hand and of the TKE on the other hand. One observes that the difference tends to zero in both cases. Drawing the streamlines shows two expected vortices behind the catch (Figure 10).

4. CONCLUSION

The fluid model we consider is promising. The test done in the particular case of the flow around the rigid net model shows a good agreement between numerical and experimental data. The generalization of this method to the 3D case is in progress. More experimental data have been collected to complete the validation of the code. This will be the subject of our forthcoming work as well as the research of laws that govern the parameters required in the model (mainly the permeability, the thickness of the membrane and the length scale).

Acknowledgments. I thank IFREMER and the region Bretagne for the financial support of this work. I am very grateful toward R. Lewandowski (IRMAR, Rennes) for his relevant collaboration and I wish to express my gratitude to F. Hecht (Laboratoire J. L. Lions, Paris 6) for fruitful discussions about the numerical simulations. I also thank the IFREMER team of Boulogne-sur-Mer for making me familiar with some experimental techniques

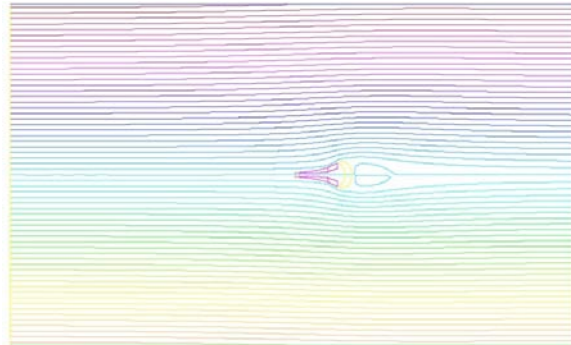


FIGURE 10. Streamlines

and for providing the experimental data. Finally I express my gratitude to D. Priour (IFREMER, Brest) for his support on this work.

REFERENCES

- [1] P. ANGOT, C. BRUNEAU, AND P. FABRIE, *A penalization method to take into account obstacles in viscous flows.*, Numer. Math., 81 (1999), pp. 497–520.
- [2] E. ARQUIS AND J. P. CALTAGIRONE, *Sur les conditions hydrodynamiques au voisinage d'une interface milieu fluide-milieu poreux: application à la convection naturelle*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris., 299(Série II) (1984), pp. 1–4.
- [3] C. H. BRUNEAU AND P. FABRIE, *New efficient boundary conditions for incompressible navier-stokes equations: a well posedness result*, RAIRO Mathematical modelling and numerical analysis, 30 (1996), pp. 815–840.
- [4] G. CARBOU AND P. FABRIE, *Boundary layer for a penalization method for viscous incompressible flow*, Advances in Differential equations, 8 (2003), pp. 1453–1480.
- [5] F. HECHT, O. PIRONNEAU, A. LE HYARIC, AND K. OHTSUA, *FreeFem++ Manual*, Laboratoire Jacques Louis Lions, Paris (<http://freefem.org/ff++>), 2006.
- [6] K. KHADRA, P. ANGOT, S. PARNEIX, AND J. CALTAGIRONE, *Fictitious domain approach for numerical modelling of navier-stokes equations*, International journal for numerical methods in fluids, 34 (2000), pp. 651–684.
- [7] R. LEWANDOWSKI, *The mathematical analysis of the coupling of a turbulent kinetic energy equation to the Navier-Stokes equation with an eddy viscosity*, Nonlinear Analysis TMA, 28 (1997), pp. 393–417.
- [8] R. LEWANDOWSKI AND G. PICHOT, *Numerical simulation of water flow around a rigid fishing net*, Submitted, (2006).
- [9] R. MITTAL AND G. IACCARINO, *Immersed boundary methods*, Annual Rev. Fluid Mech., 37 (2005), pp. 239–261.
- [10] B. MOHAMMADI AND O. PIRONNEAU, *Analysis of the k-epsilon turbulence model*, Springer, masson ed., 1994.
- [11] C. S. PESKIN, *Flow patterns around heart valves: a digital computer method for solving the equations of motion*, PhD thesis, Albert Einstein College of Medicine, 1972.
- [12] B. VINCENT, *Etude numérique et expérimentale des écoulements guidés par une paroi perméable axisymétrique. Application à la modélisation des chaluts pour en améliorer la sélectivité*, Thèse Ecole Centrale Nantes, 1996.

On the experimental study of the flow around a fishing net

Géraldine Pichot ^{a,*}, Grégory Germain ^b, Daniel Priour ^a

^a*IFREMER, Technopôle Brest Iroise, 29280 PLOUZANE, France*

^b*IFREMER, Centre de Boulogne 150 Quai Gambetta - BP 699, 62321
Boulogne-sur-Mer, France*

Abstract

Selectivity of fishing gears like trawls is obviously conditioned by the fish behaviour but also by the net and the flow. With the aim of a better understanding of the fluid behavior in presence of a net and a catch, we suggest, through the experimental study below, to determine and to analyze the flow over a rigid cod-end in two configurations: with a closed and an open net entrance. Trials took place in a free surface flume tank and the flow characteristics were determined from velocity measurements obtained by laser velocimetry (inside, outside and through the meshes of the stiff cod-end). The experimental device, the measures and their analyses are given here.

Key words: Fluid mechanics ; Hydrodynamics ; Experimental ; Fluid structure interaction.

1 Introduction

Generally speaking, during fishing operations, juveniles, small fish or non-marketable fish are accidentally caught. These non-target fish are dead when discarded overboard. This leads to a waist for future fishing operations and contributes to a decline of marine resources [3]. Selectivity is the ability of fishing gears to prevent such by-catches. Bottom and mid-trawls are known to have a pretty poor selectivity. It is also known that trawl selectivity occurs mainly in the rear part, named the cod-end [2]. Many studies are carried out each year in order to improve cod-end selectivity, for example by testing different mesh sizes or different mesh numbers. These studies are based on sea trials which must be numerous to avoid the effect of non controllable

* Corresponding author. Tél.: +33 (0)2 23 23 65 46; fax: +33 (0)2 23 23 67 90
Email address: Geraldine.Pichot@ifremer.fr (Géraldine Pichot).

parameters such as fish population entering the trawl. Consequently these studies are expensive and sometimes inconclusive. One cheap way to proceed is to perform numerical simulations to study some specific aspect of cod-end selectivity.

Softwares that govern the net deformations already exist, like FEMNET [15] or the one developed by Le Dret et al. [11]. Also fish behaviour softwares exist like behavioRis [4] and PRESEMO [7], [8]. A promising flow model is given by Lewandowski and Pichot [9], [10], [14]. It comes with a turbulent model and a permeability parameter that has to be fitted.

The present paper describes the experimental studies undertaken over these last years. They were motivated by the need of a physical understanding of the flow around a cod-end net and the need of test cases for numerical developments [9], [10]. A specific stiff cod-end was developed to avoid instabilities during flume tank tests. This structure is perfectly stable in the flow and its geometrical shape is known. It has allowed to collect data on the flow by Laser Doppler Velocimetry (LDV) and Particle Image Velocimetry (PIV) techniques. Velocity profiles, as well as punctual estimations of the turbulent kinetic energy are given. Two situations are under consideration, the first one deals with an open net entrance, and the second one with a closed one, the cod-end net entrance being closed with a cap.

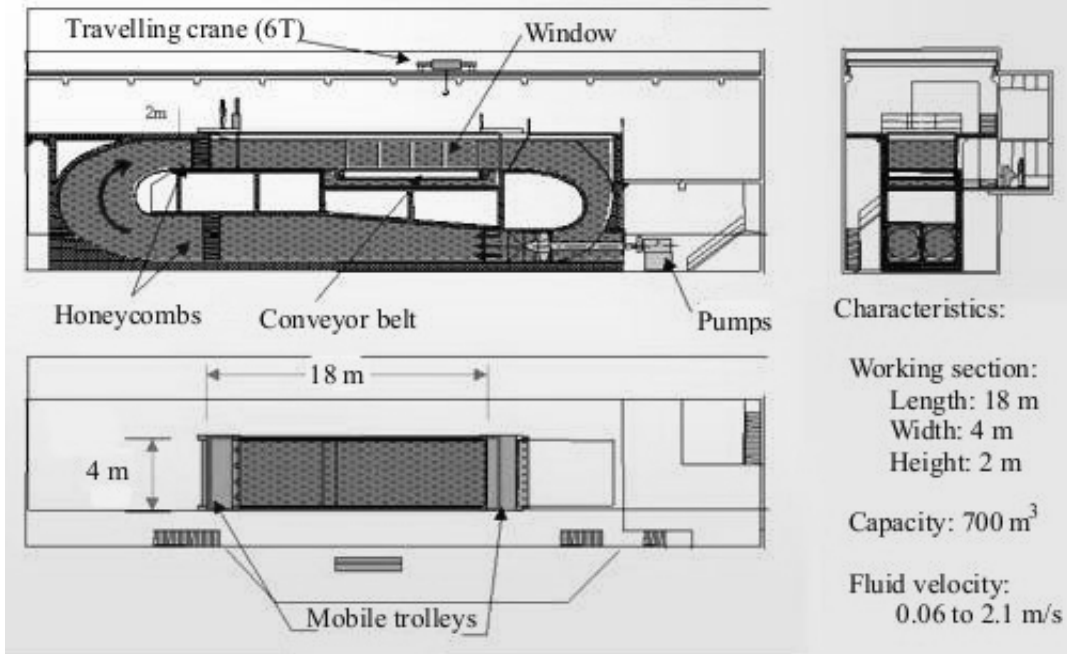
The choice of the second configuration needs some explanation. Here only the cod-end net part is under study. But, in reality, it is preceded by an extension piece which is a cylindrical-shaped piece of netting. The unknown is the amount of fluid entering the cod-end net. As we shall see in the following, this significantly modifies the inner net flow. Building an extension piece would have been costly. So we opted for another configuration and the decision was taken to close the net entrance with a cap. It will not lead to the same flow as that obtained with an extension piece but, at least, a second validation test case is available, quickly and in a cheap way. Moreover such experiments give information on the nature of the flow as well as on the influence of the fluid entering the cod-end net on the inner net flow. A forthcoming work would be to plan new experimental campaigns to quantify the amount of fluid entering the cod-end. Notice that some sea measurements already performed tend to predict a velocity inside the net above the cod-end close to the trawling velocity [16].

2 Experimental device

2.1 *Experimental setup*

The experimental study took place in the IFREMER (French Research Institute for Exploitation of Sea) free surface flume tank in Boulogne-sur-Mer, France. The flume tank (Fig. 1) is 18 m long by 4 m wide and 2 m deep with a side observation window of 8 m x 2 m. The flow turbulence rate is less than 5 % and the flow velocity ranges from 0.06 to 2.1 m/s.

Fig. 1. Presentation of IFREMER facility



As the selectivity takes place mainly in the cod-end, we focus our work on this part of the trawl. The drag of a cod-end and the resulting twine tensions influence the overall cod-end geometry and the enlargement of the meshes [12]. In order to measure the shape and tension in a cod-end net, tests have been carried out for few netting characteristics, several catches and types of cod-ends. These preliminary tests are not described in the present paper. The external shape of a 1/3 scaled model of a 6 meter long cod-end has thus been measured during these tests. The flow has not been measured during this first phase due to the instabilities of the cod-end and especially of the catch inside the structure. Thus, a specific stiff cod-end has been developed to avoid instabilities [6]. The structure is axi-symmetric and the catch inside the cod-end is limited by two spherical caps, so its shape is known. The 1/6 scaled model is 1 m long, made of PA twine of 1200 m/kg, with diamond-shaped meshes of 30 mm mesh side and set at the bottom of the IFREMER flume tank. The catch is 30 kg, which gives an external diameter of 454 mm. The stiff cod-end consists of 36 meshes on the perimeter and 21.5 meshes long. The water speed is 0.51 m/s. At real scale (at sea), this gives a 6 m long cod-end, a catch of 6480 kg and a towing speed around 2.5 knots.

2.2 Instrumentation

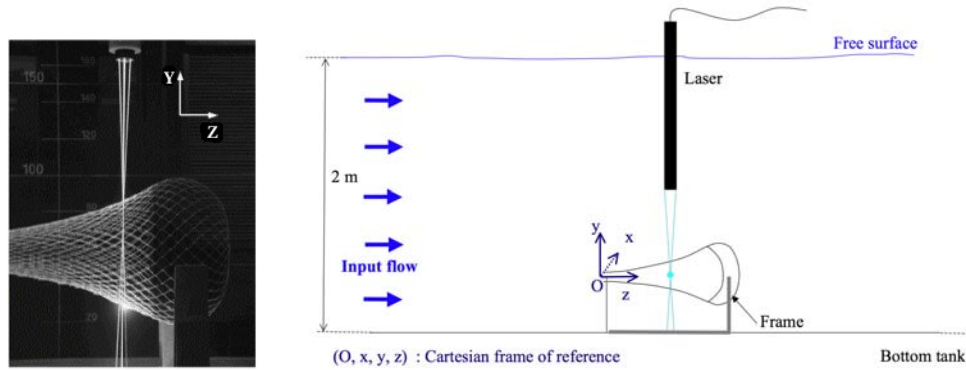
Two non-intrusive optical measurement devices are used to characterize the flow over the stiff cod-end:

- a two components Laser Doppler Velocimetry (LDV) for local measurements,
- a two components Particle Image Velocimetry (PIV) technique for global information on the flow.

The seeding particles used for the experiments are $15 \mu\text{m}$ in diameter.

The LDV technique is a non-intrusive technique used to achieve velocity measurements at single points. It is based on the Doppler effect. Fig. 2 displays the LDV device. Let us denote (O, x, y, z) , the global frame of reference, its origin being set at the entrance of the net model. The available LDV device allows to measure two velocity components thanks to two wavelengths (514.5 nm and 488 nm). The measured components are the ones along the x and z directions.

Fig. 2. LDV system



A particular feature of the LDV measurements is that the number of data recorded in a given time window is strongly dependent on the local seeding conditions [5]: measurements are possible only when a particle moves across the probe volume. Consequently, there are some regions (clean flow) where acquisitions with a relatively high data rate were possible (exceeding 50 Hz); on the other hand, close to the walls or near recirculating zones the rate falls to very low values (lower than 10 Hz). In order to achieve samples of data as homogeneous as possible, an inhibit method was used and data were recorded under time rather than sample length control. This technique allowed to obtain a sample length never exceeding 100 seconds (which is an order of magnitude for the time window larger than the time scale of the flow fluctuations) with a number of data per sample never exceeding 5000. The long time span allows an accurate estimate of average values for velocity and turbulence intensity.

The PIV technique provides information over a flow field, simultaneously at many points. It is based on illuminating the seeding particles and storing the resulting camera images to analyse displacements of particles between two successive images. The velocities are obtained by dividing the distance by the elapse time of laser pulses. The laser used is a two-chamber Gemini PIV Nid-Yag 2 x 120 mJ at 15 Hz pulsed laser. The camera is a Hi-sense, 1280×1024 pixels², with a focal lens length of 60 mm with a filter wavelength of 3 nm. The measurement plane is typically 260×220 mm². The image processing is done with the software *Flow Map 1500* from Dantec dynamics. It is based on image intercorrelation on regions of 32×32 pixels², with a covering rate of 25 %. The vector field was evaluated by a predefined velocity magnitude and the invalid one were replaced by the moving average method. Instantaneous velocity fields were obtained and generally, a series of instantaneous

measurements were statistically average to get the mean velocity field. The instantaneous and mean velocity fields and turbulence quantities are of great practical interests.

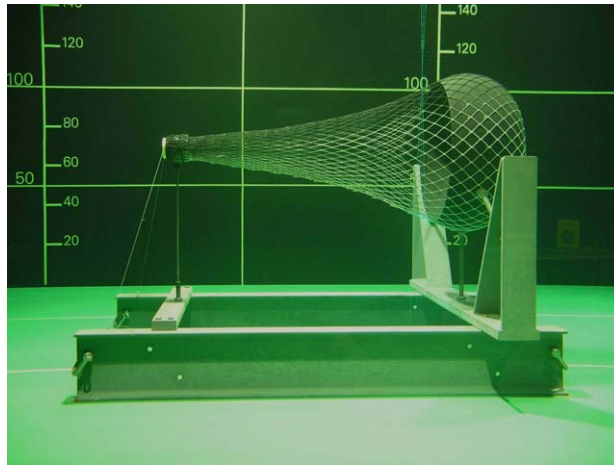
2.3 *Experimental protocol*

The aims of these experimental campaigns are multiple :

- (1) Emphasizing the turbulent nature of the flow;
- (2) Supplying LDV profiles in two different situations (open and closed net) yielding two different test configurations to validate numerical simulations;
- (3) Understanding the interactions between the inner net flow and the external one.

So data were collected in two different situations. First, we completed measurements in an open net configuration. Then, the entrance of the net was closed by a cylindrical-shaped foam and measurements were performed by the LDV technique to estimate the impact on the internal flow (Fig. 3).

Fig. 3. Net model with a closed entrance and its frame set at the bottom of the IFREMER flume tank



For both cases, mean velocity profiles as well as punctual turbulence intensity were collected using the non-intrusive techniques previously described. PIV images were stored in the case of the open net entrance to emphasize the turbulent feature of the flow. Velocity profiles were collected along the six profiles drawn on figure 4 [6]. Punctual turbulence intensity measures were gathered in the two configurations. Point positions are given in figure 5.

Fig. 4. Locations of the measurement profiles

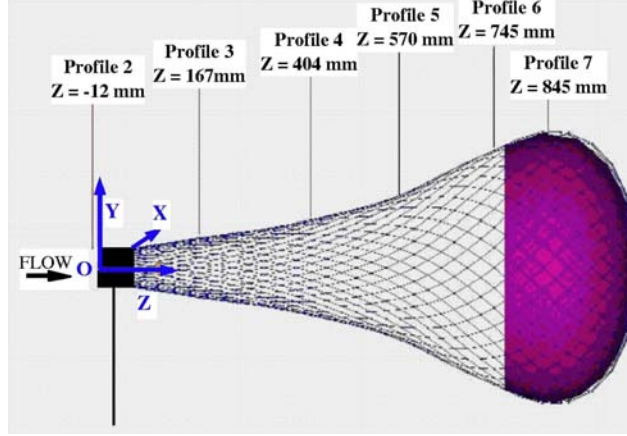
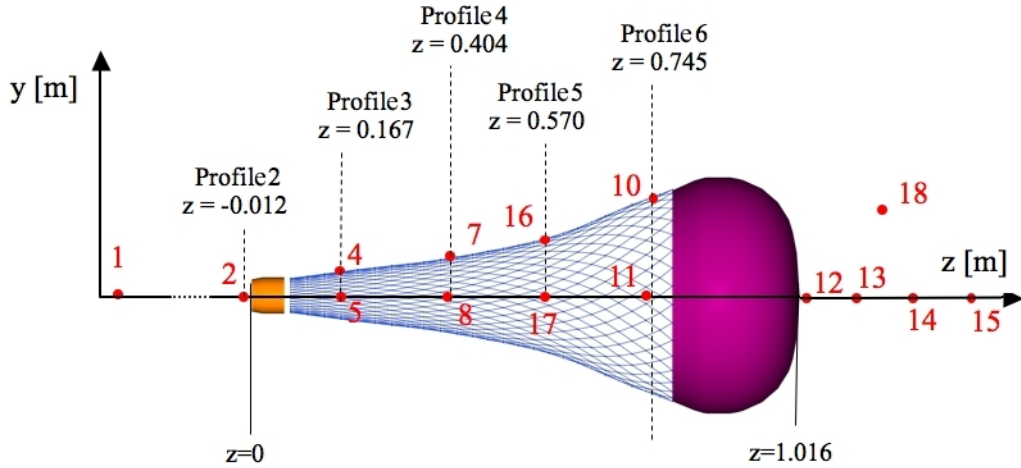


Fig. 5. Dot positions for punctual LDV measurements



3 Open net model

3.1 PIV results

An indicator of the turbulence feature of the flow is the Reynolds number, which can be computed using the maximal diameter of the catch (0.45 m) as the reference length L and the input velocity (0.51 m/s) as the reference velocity U :

$$Re = \frac{UL}{\nu} = 2.10^5, \quad (1)$$

with ν the kinematic viscosity of water, equal to $1.141e-6 \text{ m}^2/\text{s}$ at $15 \text{ }^\circ\text{C}$.

Such a high value of the Reynolds number indicates that the flow is probably turbulent. Observations of the flow using the PIV technique confirm its turbulent feature,

by the storage of instantaneous images. Figures 6 and 7 show the velocity field near the catch. One can see birth, growth and movement of vortices caused by the catch.

Fig. 6. PIV Images of the instantaneous velocity field - open net - Zoom near the upper limit of the catch

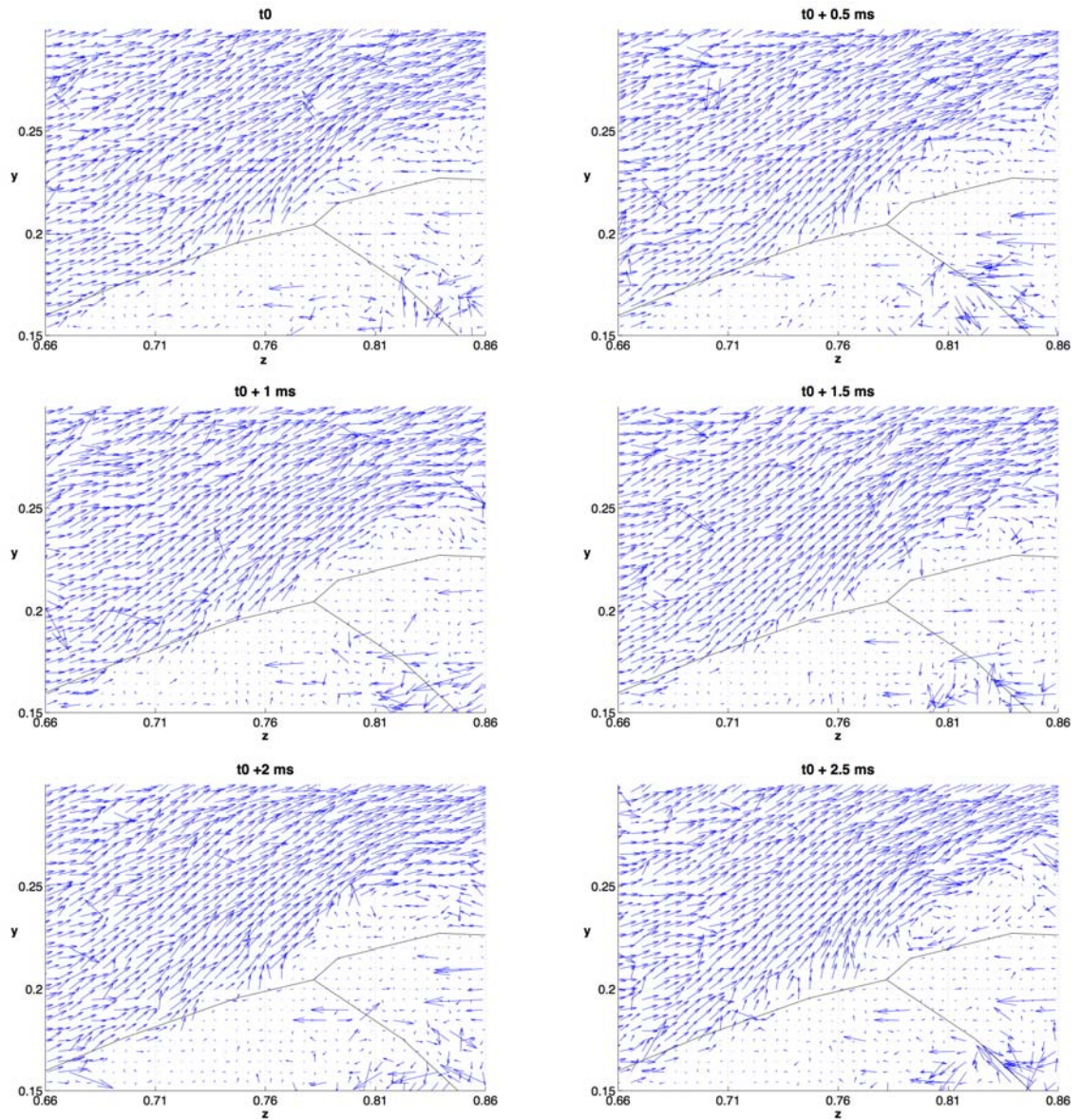
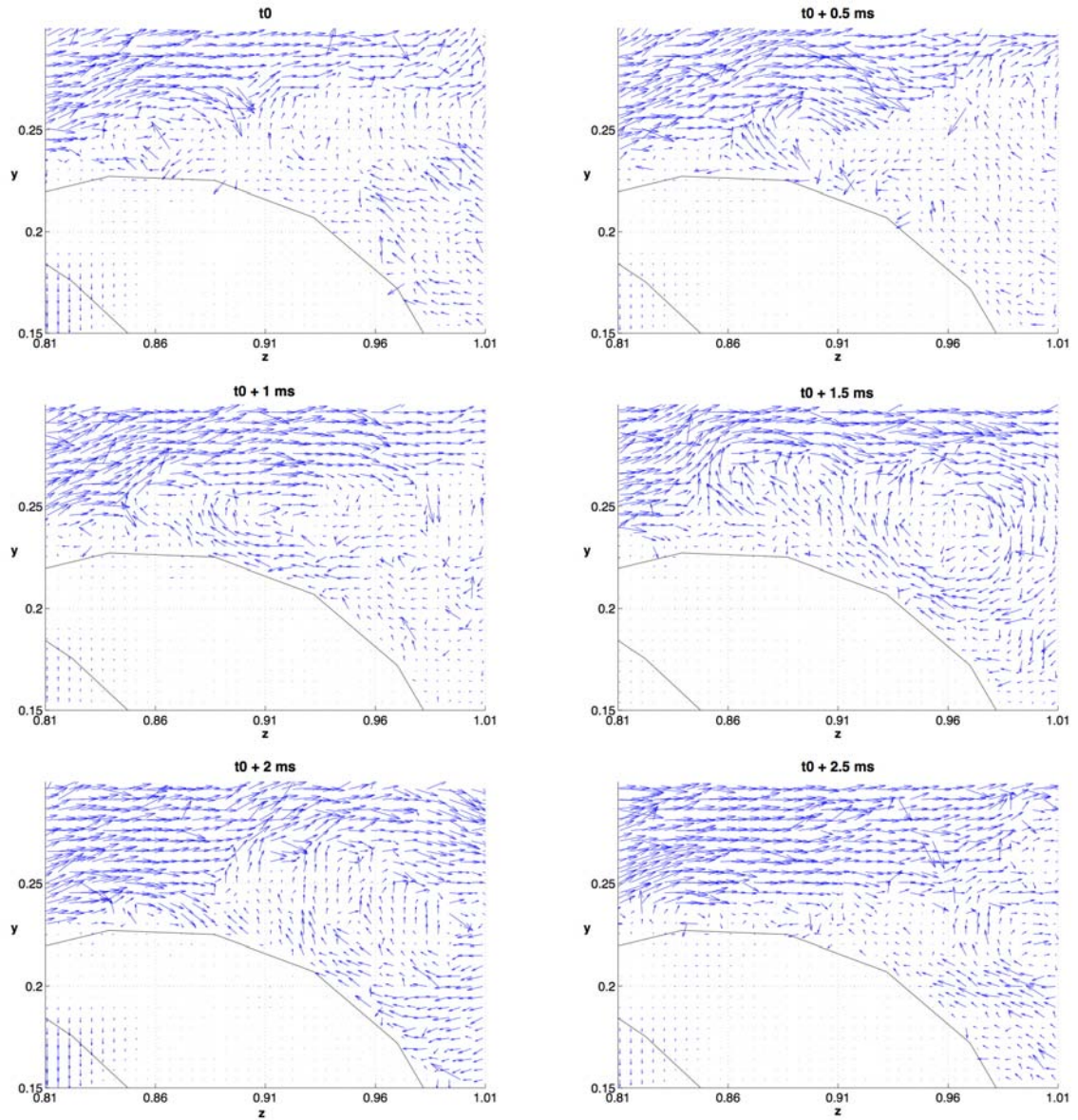


Fig. 7. PIV Images of the instantaneous velocity field - open net - Zoom near the catch



Then punctual LDV measurements were collected to reach more precise values of the turbulence rate in the different regions around the net. The LDV and PIV profiles will be presented in a second time.

3.2 LDV measurements

LDV measurements allow to gather velocity data at different positions during a long time in order to access turbulent kinetic energy, which measures the velocity deviation to the mean.

Figure 5 shows the distribution of the measurement points around the geometry. The data acquisition time is 15 minutes per point to get significant means and standard deviations.

Recall that with the LDV technique available at Ifremer flume tank, the velocity components along the z and x direction are measured simultaneously (Fig. 2).

In case of points located on the symmetry axis, only the component along the z axis is considered because of the axi-symmetric hypothesis of the net model and of the surrounding mean flow. The velocity components along the directions x et y are expected to be zero. As we shall see in the following table 1, this hypothesis is satisfied. For points 3, 4, 6, 7, 9 et 10, the y velocity has to be measured. This has been carried out by placing the laser on the side of the model, in the plane $(\mathbf{O}, \mathbf{x}, \mathbf{z})$, with a strictly negative value of the x laser location, equal to the y component of the point, up to the sign. Then the velocity components measured are the ones along the z and x axes respectively, which correspond to the components along the z and y direction, thanks to the axi-symmetry assumption.

Fig. 8, 9 and 10 displays the z velocity components measured at points 1, 11 and 12 respectively. The velocity components vary in an irregular pattern, especially at point 11 and 12. It is a characteristic signature of turbulence.

Fig. 8. LDV measurements for u_z at point 1 during 50s

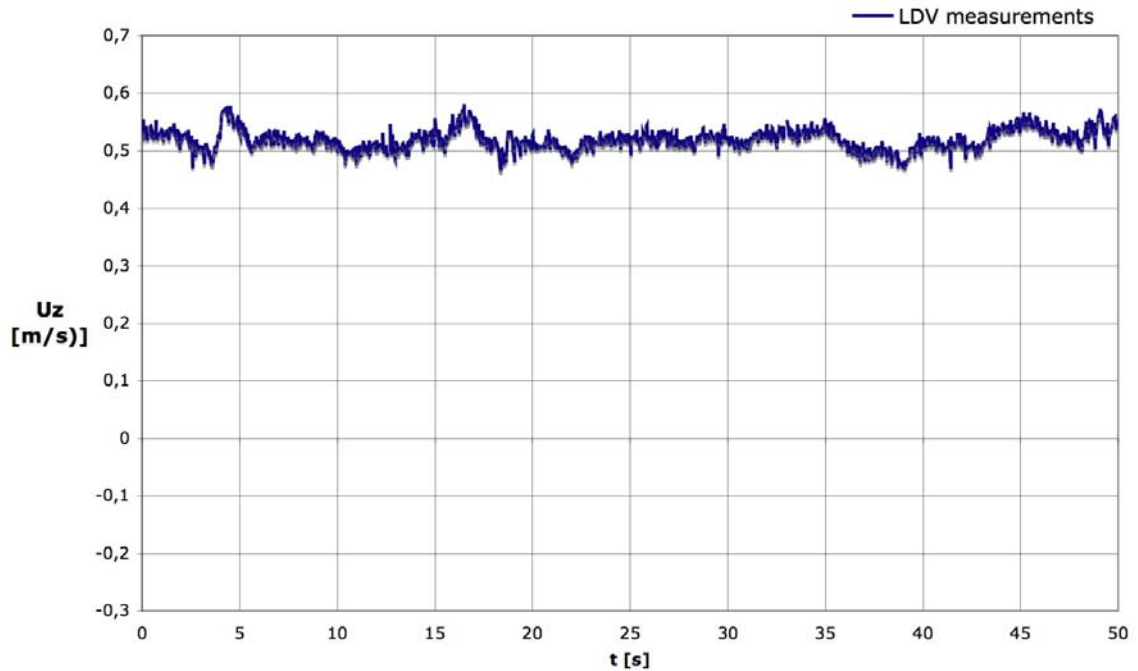


Fig. 9. LDV measurements for u_z at point 11 during 50s

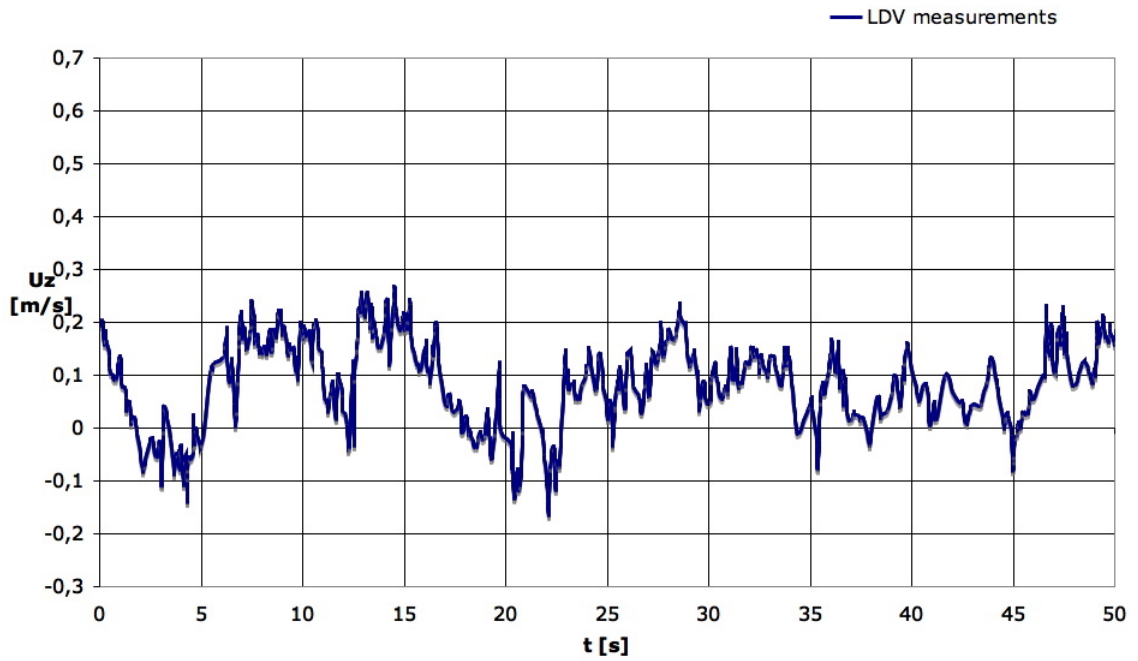
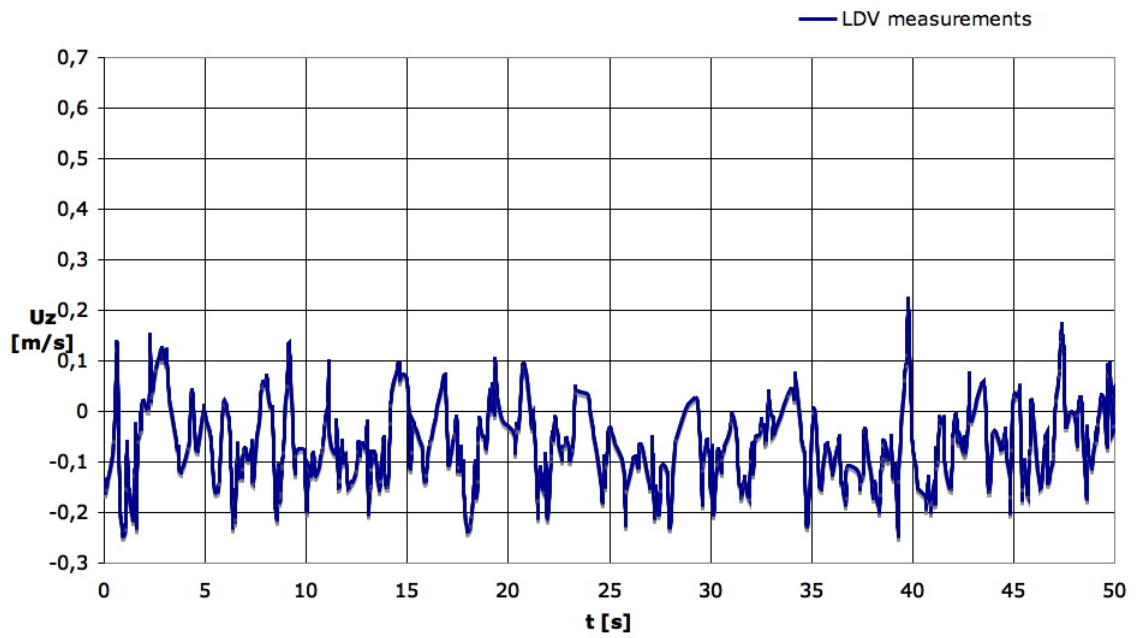


Fig. 10. LDV measurements for u_z at point 12 during 50s

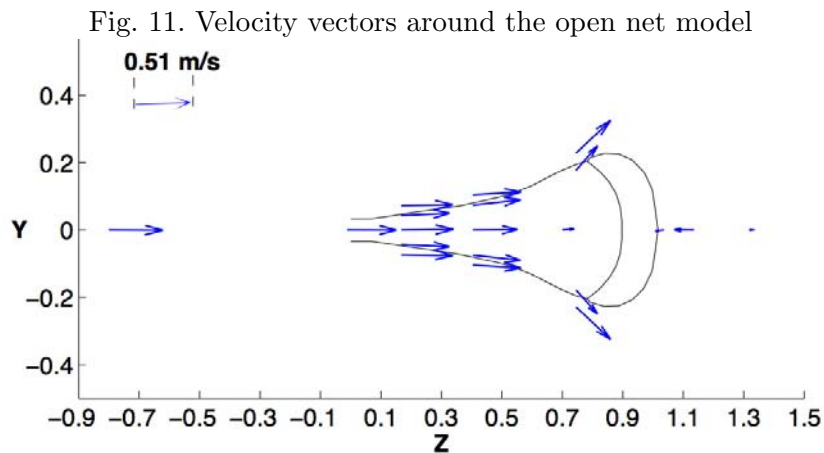


Tables 1 and 2 give the mean, the standard deviation and the turbulent kinetic energy at different locations.

Point	Coordinates			Mean velocity components			Mean velocity [m/s]
	x	y	z	mean(u_x)	mean(u_y)	mean(u_z)	
1	0	0	-0.8	-0.0025	-0.0025	0.5122	0.5122
2	0	0	-0.012	-0.0016	-0.0016	0.4653	0.4653
3	0	0.073	0.167	-0.0024	0.0063	0.4891	0.4891
4	0	0.043	0.167	-0.0077	0.0196	0.4571	0.4576
5	0	0	0.167	0.0047	0.0047	0.4940	0.4941
6	0	0.104	0.404	-0.0009	0.0251	0.4560	0.4567
7	0	0.074	0.404	-0.0030	0.0459	0.4528	0.4551
8	0	0	0.404	0.0027	0.0027	0.4219	0.4220
9	0	0.228	0.745	-0.0159	0.2764	0.3266	0.4281
10	0.011	0.178	0.745	-0.0137	0.2078	0.2060	0.2929
11	0.011	0	0.7	0.0086	0.0086	0.1114	0.1121
12	0	0	1.036	-0.0085	-0.0085	-0.0814	0.0823
13	0	0	1.136	0.0015	0.0015	-0.1895	0.1895
14	0	0	1.336	0.0003	0.0003	-0.0496	0.0496
15	0	0	1.536	-0.0074	-0.0074	0.1749	0.1752

Table 1
Mean velocity at the defined points.

Velocity vectors are drawn on figure 11 thanks to the data given in table 1.



Point	Standard deviation			TKE	Turbulence rate
	for u_x	for u_y	for u_z	[m ² .s ⁻²]	%
1	0.01489	0.01489	0.02543	0.00054	4.56
2	0.01352	0.01352	0.02374	0.00046	4.21
3	0.01614	0.01250	0.02404	0.00050	4.35
4	0.03365	0.03286	0.05193	0.00245	9.67
5	0.01097	0.01097	0.02628	0.00047	4.21
6	0.01500	0.01286	0.02389	0.00048	4.28
7	0.02172	0.02727	0.03060	0.00108	6.41
8	0.02670	0.02670	0.0389	0.00147	7.49
9	0.02120	0.02641	0.03553	0.00120	6.78
10	0.03219	0.03685	0.03670	0.00187	8.44
11	0.05895	0.05895	0.08725	0.00728	16.66
12	0.110480	0.11048	0.08899	0.01617	24.82
13	0.12860	0.12860	0.08957	0.02055	27.99
14	0.17363	0.17363	0.11991	0.03734	37.73
15	0.16960	0.16960	0.11194	0.03503	36.54

Table 2
Turbulent kinetic energy.

3.3 Analysis of the results

First notice that the x components are of the order of 10^{-3} , which corresponds to the order of error committed by the experimentation, therefore satisfying the axisymmetric hypothesis previously set. Concerning points 10 and 11, notice a non zero value for the x position for those points so as for the laser to avoid the twines.

The entrance velocity is given by the velocity at point 1, that is 0.512 m/s. The velocity inside the net just before the catch (point 11 Tab. 1) is almost five times lower (0.11 m/s) than the entrance velocity inside the net (point 5), which is equal to 0.49 m/s. Due to the conical shape of the net, the inner flow is slowed down with the increase of z .

Concerning the points located inside a mesh, named 4, 7 and 10, the closer to the catch they are, the higher value the y component has. It points out an increasing escapement of fluid through the meshes, linked to the increase in mesh opening and the proximity of the catch.

Points 3, 6 et 9, located in the $(\mathbf{O}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ plane, at a distance of 0.030 m above the

net along the y direction, suggest the bypass of the net by the fluid, as suggested by the increase in the y velocity component (Tab. 1).

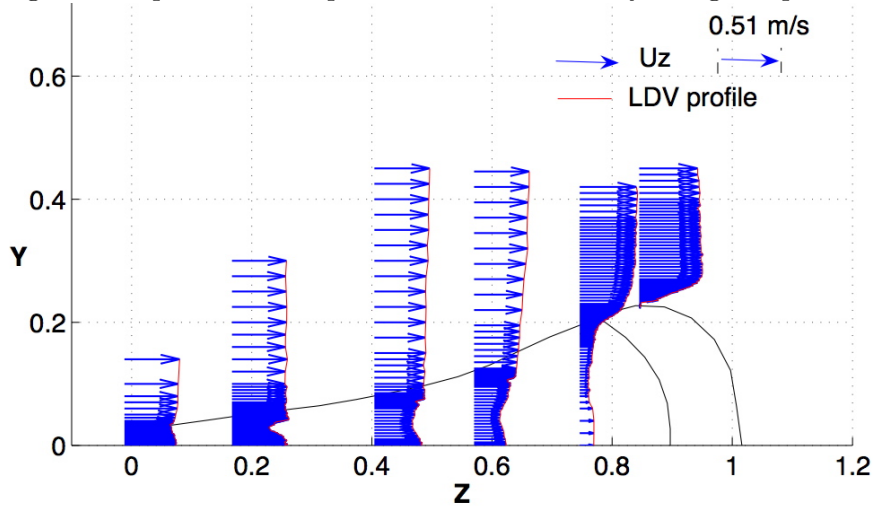
The natural turbulence in the tank is equal to $0.00054 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$ (point 1 Tab. 2). One computes its root square, then divides it by the entrance velocity, 0.51 m/s yielding 4.56% . The higher turbulent rates are reached behind the catch, as expected ($\approx 38 \%$). There is also a non negligible turbulent rate just in front of the catch, at point 11 ($16,66 \%$, Tab. 1), where the fluid is forced to bypass the catch and to flow out by the sides.

These punctual LDV measurements provide information on the turbulent kinetic energy but it is also interesting to access the influence of the net on the mean flow. To achieve this purpose, we collect LDV and PIV profiles at the different positions along the net.

3.4 LDV and PIV profiles

Velocity data were collected by the LDV technique along the six profiles drawn on figure 4. The acquisition time was chosen equal to 100 s for each point, which seems a correct value to get a significant number of data. The shapes of the z velocity profiles are given on figure 12.

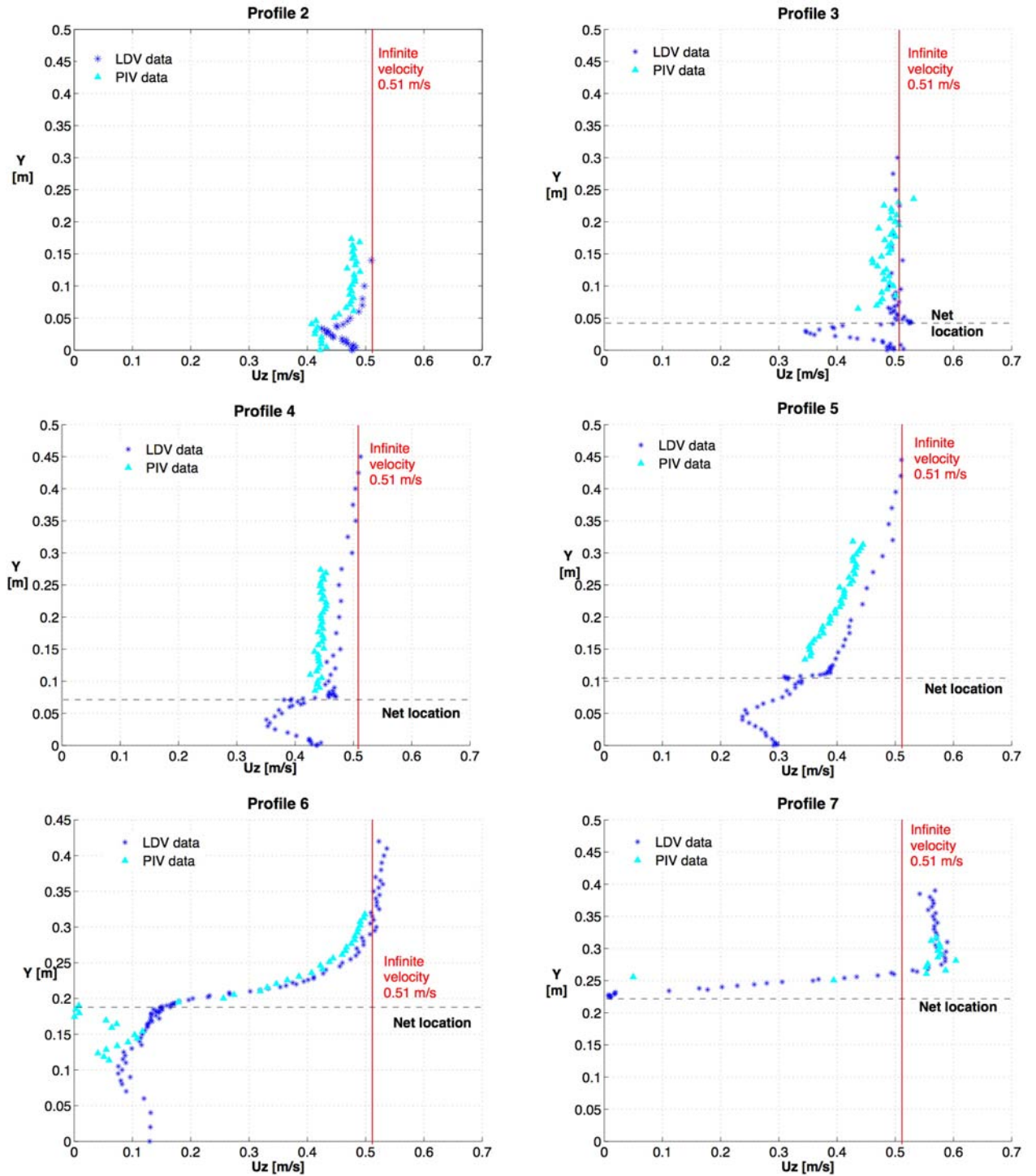
Fig. 12. Shape of the component u_z of the velocity along the profiles



The same measurements were collected using the PIV technique. This technique is less accurate than the LDV. Nevertheless, the profiles obtained are close to those obtained with the LDV (Fig. 13). An advantage of the LDV technique is that it allows measurements inside the net, by passing the laser beam through the mesh.

We observe on figure 13 a slowdown of the fluid at the net location, due to the frictions of the fluid on the twines and nodes. The conical shape of the net also lead to a decrease of the internal net flow. On the contrary, the external flow is

Fig. 13. LDV and PIV profiles - open net



accelerated. It is enriched by the internal flow just before the catch, an impermeable obstacle that the fluid has to circle.

Let us now consider what happens in the second configuration, when the net entrance is closed.

4 Closed net model

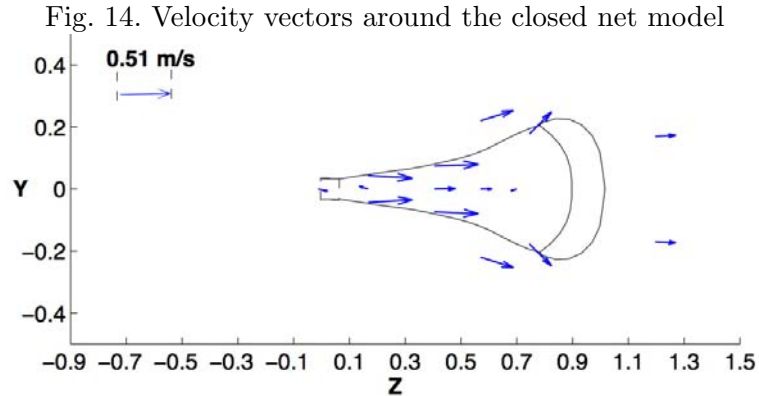
So as to achieve a better understanding of the effects of the outer net flow on the inner one, the entrance of the net was closed by a rigid cap-shaped foam (Fig. 3).

Temporal measurements were performed at some points, most of them at the same location as in the previous case (open net) and some new ones, like the points 16, 17 et 18 (Fig. 5). Tables 3 and 4 display the value of the mean, standard deviation and turbulent kinetic energy for the different points. The velocity vectors given by table 3 are represented on figure 14.

Point	Coordinates			Mean velocity components			Mean velocity [m/s]
	x	y	z	mean(u_x)	mean(u_y)	mean(u_z)	
2	0	0	-0.012	-0.0214	-0.02138	0.0983	0.1028
4	0	0.043	0.167	0.0024	-0.02377	0.4549	0.4556
5	0	0	0.167	0.0256	0.02556	-0.0912	0.0981
7	0	0.074	0.404	-0.00234	0.01610	0.4539	0.4542
8	0	0	0.404	0.00345	0.0035	0.2181	0.2181
16	0	0.220	0.570	-0.00534	0.0949	0.3375	0.3507
17	0	0	0.570	1.7E-05	1.7e-5	0.1158	0.1158
10	0.01075	0.1775	0.745	-0.0177	0.2022	0.2269	0.3044
11	0.01075	0	0.700	-0.0172	-0.0172	-0.0622	0.0668
18	0	0.170	1.196	0.0083	0.0083	0.2124	0.2127

Table 3

Mean value at the different points - closed net

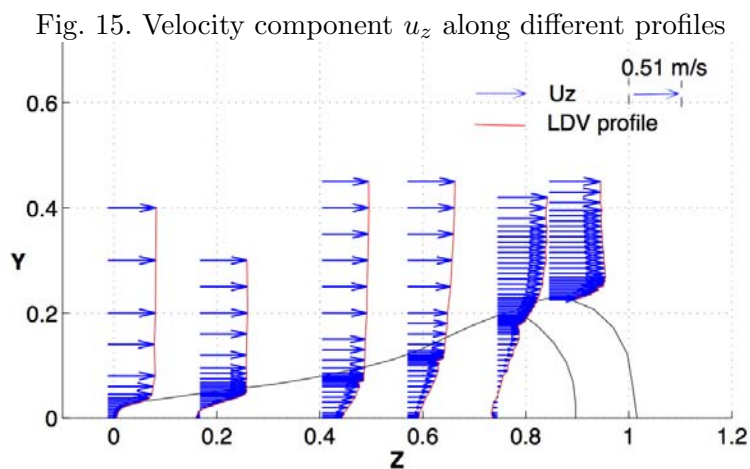


As previously, LDV profiles were collected in this new configuration (Fig. 15). Fig. 16 displays the comparisons of the LDV profiles between the open net and the closed net configurations.

From these results, we can see that profile 2 corroborates the bypass of the closed

Point	Standard deviation			TKE [m ² .s ⁻²]	Turbulence rate %
	for u_x	for u_y	for u_z		
2	0.01384	0.01384	0.00643	0.00021	2.84
4	0.04708	0.02711	0.05796	0.00316	10.97
5	0.05970	0.05970	0.05150	0.00489	13.65
7	0.02036	0.01821	0.02860	0.00078	5.46
8	0.04707	0.04707	0.05149	0.00354	11.62
16	0.02907	0.02970	0.05129	0.00218	9.11
17	0.05758	0.05758	0.07328	0.00600	15.12
10	0.04430	0.04925	0.05411	0.00366	11.81
11	0.10118	0.10118	0.09739	0.01498	23.90
18	0.15392	0.15392	0.09386	0.02810	32.73

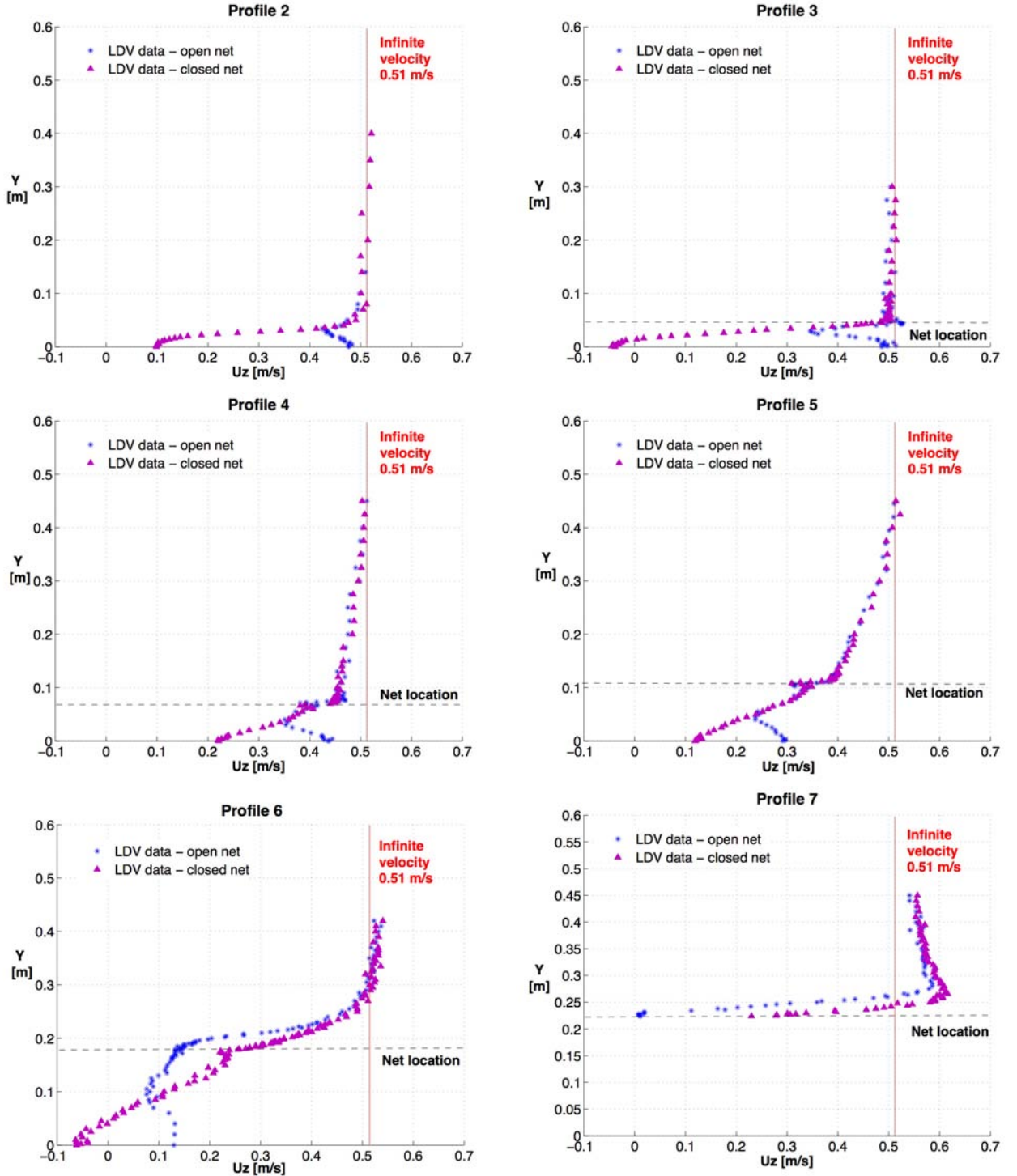
Table 4
Standard deviation and Turbulent kinetic energy.



entrance by the fluid. Notice (Fig. 16) that profiles 2, 3, 4 and 5 in the two configurations are superimposed after a certain point inside the net. Between the net axis of symmetry and that point, the value of the z velocity component is naturally lower in the case of the closed net than with the open net. This means that the outer flow has an influence on the inner flow up to a point. Below that point, the flow is mainly fed by the fluid that comes by the entrance.

On profile 3, the z velocity component at the center (point 5 Tab. 3) is negative, which means that the fluid returns towards the entrance of the net. This is emphasized by a turbulence rate of 13.65 % (vs 4.21 % in the open net case). This is a local phenomena, since the z velocity component is positive again at point 8, equal to 0.21 m/s. Notice the x and y velocity components at points 5 and 11 are non negligible while they should be on account of the axi-symmetry assumption. This may be explained by a higher turbulence rate and lower value of the mean velocity for these

Fig. 16. LDV profiles - closed vs open net



points than with the open net. The negative value of the y velocity component at point 4, located on profile 3, points out an entrance of fluid at this place, justifying the mixing at point 5.

The y velocity components are all the more important since the catch is closer (0.2 m/s at point 10 vs 0.016 m/s at point 7). The catch forces the fluid to leave through the open meshes.

Profile 6 displays a negative value of the z velocity component at the center (point 11) of -0.06 m/s. At that point, the turbulent rate is high: 23.90% (vs 16.66% in the open net case). It emphasizes a more important mixing due to the presence of the impermeable catch than it was the case with the open net. This is caused by a stronger influence of the outer flow on the inner one, due to the fact that this latter is not fed by the entrance. Because of this recirculating zone, more fluid escapes by the sides. It is confirmed by profile 7, with the higher maximum value of the z velocity component (more than 0.6 m/s) than for the case of the open net (below 0.6 m/s).

Before concluding, notice the LDV and PIV measurements given here depend strongly on the number of particles that cross the laser. Indeed, the number of data collected depends on the seeding of the flow, the acquisition time and the local fluid behavior [5]. The data acquisition frequency is lower when the flow is turbulent (Fig. 17) and with a low velocity amplitude (Fig. 18).

Fig. 17. Acquisition rate for the punctual LDV measurements for u_z vs the turbulence rate

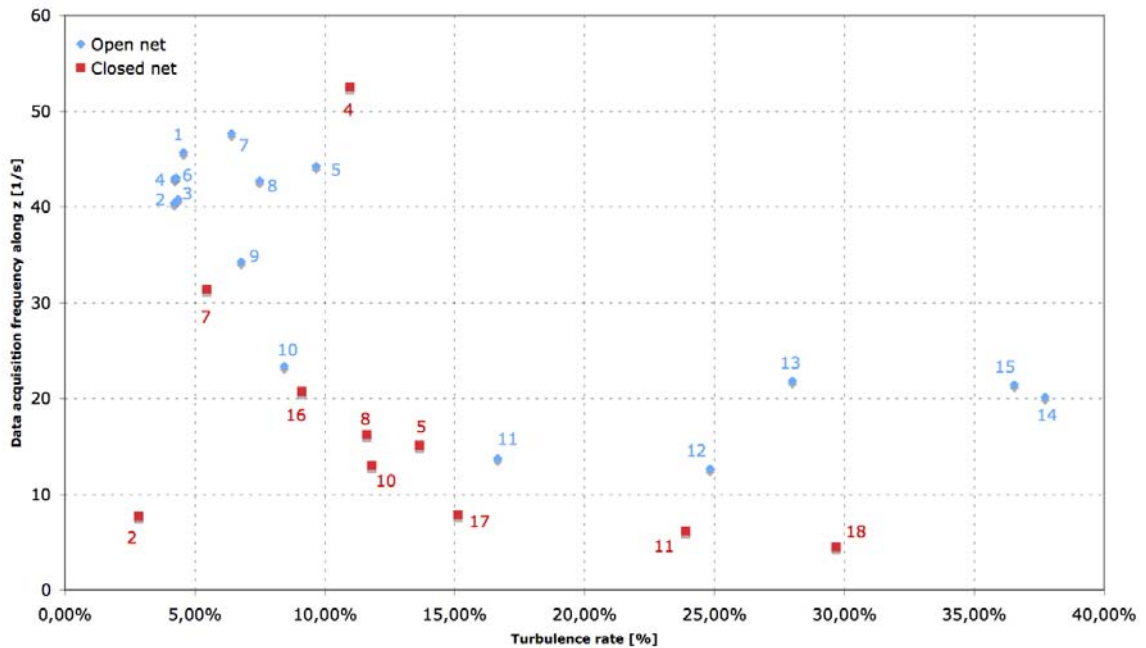
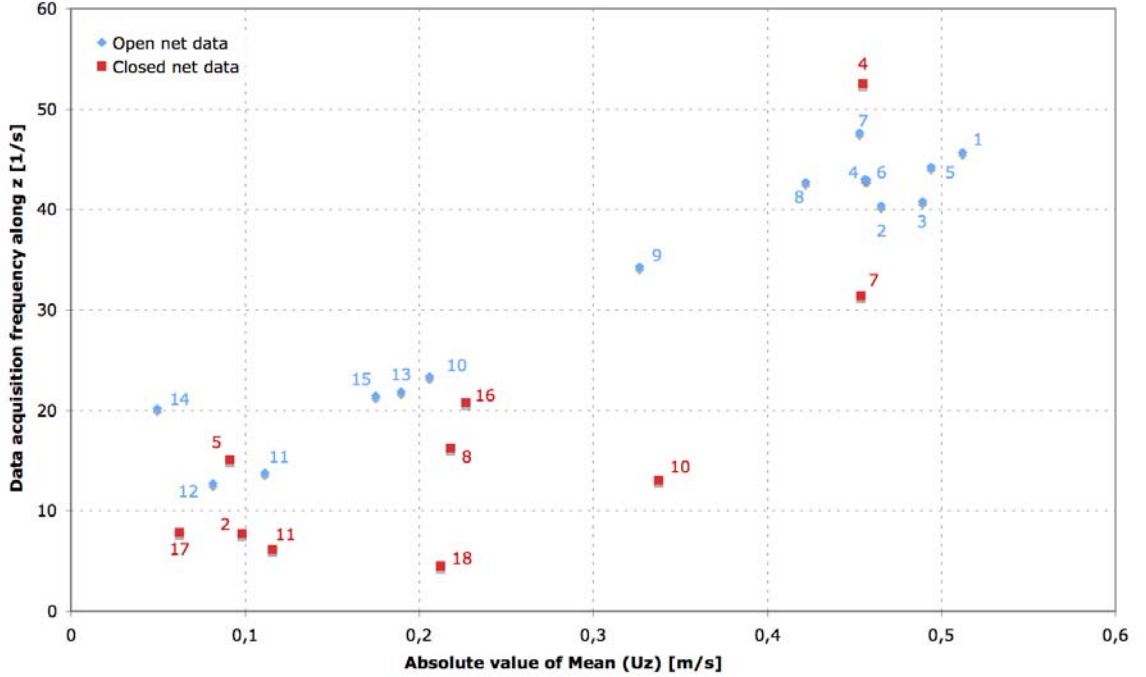


Fig. 18. Acquisition rate for the punctual LDV measurements along the z direction vs the corresponding absolute value of the mean of u_z



5 Conclusion

These experimental results confirm the turbulent feature of the flow around a cod-end net. They show that the entrance of the cod-end net supplies most of the internal flow. The fluid does not behave the same way when the net model is open or closed. In the case of the closed net, two recirculation zones are assumed inside the net. The first one is located closed to the entrance of the net. The fluid enters by the meshes, disordering the inner flow, yielding an increase of turbulence. This phenomena was not observed in the case of the open net, when the fluid tends to flow out of the net.

The second recirculation is caused by the catch. The turbulence is higher at the net center just in front of the catch than it was with the open net. Then the velocity is lower and even negative. The fluid bypasses this turbulent zone, increasing the amount of fluid escaping through the meshes, therefore enriching the outer flow. This zone of fluid escapement is also the one with the larger mesh opening, facilitating fish escapement by the sides, as confirmed by observations at sea like those conducted during the PREMECS-II ¹ (PREdictive Model of Cod-end Selectivity) project [13].

Schematically, the flow could be summed up by the streamlines drawn on figures 19 and 20 in both configurations.

¹ <http://www.ifremer.fr/premecs>

Fig. 19. Streamlines - open net

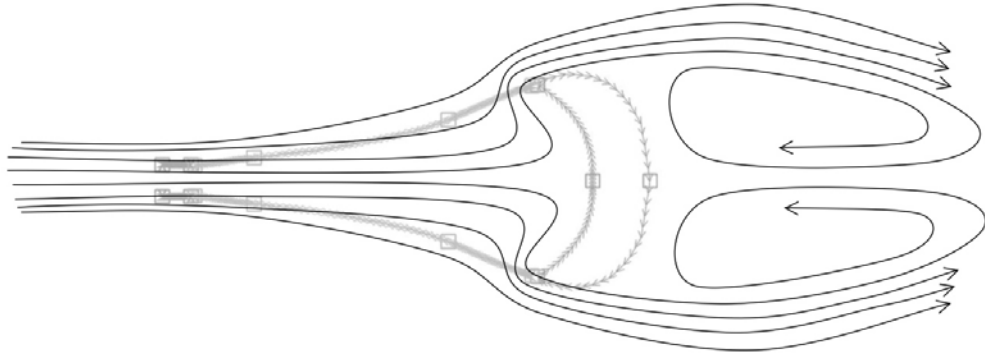
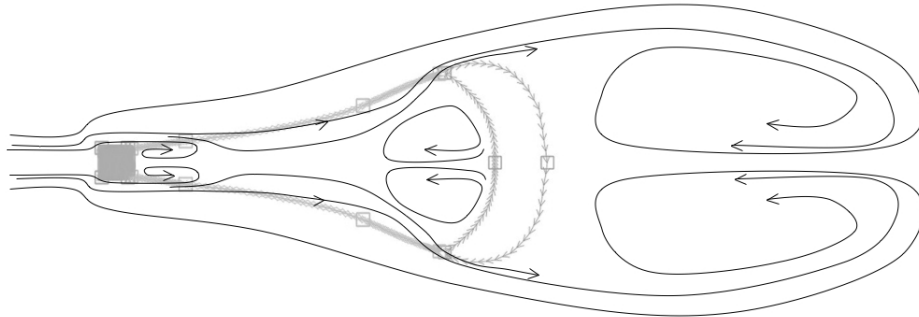


Fig. 20. Streamlines - closed net



Such experimental data are currently used to validate models for flow around a cod-end net. They are very useful since they allow to fit the model parameters by comparison between experimental and numerical results.

Acknowledgements: We thank IFREMER and the region Bretagne for the financial support of this work. We are grateful to the Commission of the European Communities who has funded the project PREMECS II (Development of predictive model of cod-end selectivity, QLRT-2001-01328) which was really helpful to begin this study.

References

- [1] G. -K. Batchelor, An introduction to fluid dynamics, Cambridge university press, 1973.
- [2] R. J. H. Beverton, Escape of fish through different parts of a codend, ICNAF Spec. Publ., No.5, pp 9-11.
- [3] L. Botsford, J. Castilla, C. Peterson, The management of fisheries and marine ecosystems, Science, Vol. 277, 509-515, 1997.
- [4] L. Coquelle, Simulation de comportements individuels instinctifs d'animaux dans leur environnement. De la description éthologique à l'exécution de comportements réactifs. Thèse ENIB, 2005.
- [5] F. Durst, A. Melling, J. H. Whitelaw, Principles and Practice of Laser-Doppler Anemometry, Pergamon press, Oxford, 1976.

- [6] G. Germain, J. V. Facq, D. Priour, Flow characterization around a cod-end, IMAM congress, Portugal, 2005.
- [7] B. Herrmann, Effect of catch size and shape on the selectivity of diamond shape mesh cod-ends. I. model development. Fisheries Research, 71:1-13, 2005.
- [8] B. Herrmann, Modelling and simulation of size selectivity in diamond mesh trawl cod-ends. PhD. Thesis. Aalborg University, Denmark, 2005.
- [9] R. Lewandowski, G. Pichot, Numerical simulation of water flow around a rigid fishing net. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Article in Press, 2007.
- [10] R. Lewandowski, G. Pichot, Sur l'écoulement turbulent au voisinage d'un filet de pêche. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. 344, pp. 141-145, 2007.
- [11] H. Le Dret, R. Lewandowski, D. Priour, F. Chagneau, Numerical Simulation of a Cod End Net. Part 1: Equilibrium in a Uniform Flow, Journal of Elasticity, Vol. 76, 139-162, 2004.
- [12] F. G. O'Neill, L. H. Knudsen, D. A. Wileman, S. J. McKay, Cod-end drag as a function of catch size and towing speed. Fisheries Research, 72, 163 - 171, 2005.
- [13] D. Priour, F. O'Neill, A. Sala, P. Chevallier, B. Hermann, PREMECS-II: Development of predictive model of cod-end selectivity, Final Report, Contract n° Q5RS-2002-01328, 2006.
- [14] G. Pichot, Modélisation et analyse numérique du couplage filet-écoulement hydrodynamique en vue d'estimer la forme de la prise dans une poche chalut, PhD Thesis of Rennes 1 University, to be defended, 2007.
- [15] D. Priour, Calculation of net shapes by the finite element method with triangular elements, Comm. in Num. Meth., Vol. 15, 755-763, 1999.
- [16] F. Théret, Development of a predictive model of cod-end selectivity, Individual Progress Report IFREMER - Second Year - From December 97 to November 98, European project Fair Programme CT96 1555, 1998.

Bibliographie

- [ABF99] P. Angot, C.H. Bruneau, and P. Fabrie. A penalization method to take into account obstacles in viscous flows. *Numer. Math.*, 81 :497–520, 1999.
- [Ada91] R. A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic press edition, 1991.
- [All89] G. Allaire. *Homogénéisation des équations de Stokes et de Navier-Stokes*. Thèse Université de Paris 6, 1989.
- [All91a] G. Allaire. Homogenization of the navier-stokes equations in open sets perforated with tiny holes. i. abstract framework, a volume distribution of holes. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 113 :209–259, 1991.
- [All91b] G. Allaire. Homogenization of the navier-stokes equations in open sets perforated with tiny holes. ii. non-critical sizes of the holes for a volume distribution and a surface distribution of holes. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 113 :261–298, 1991.
- [AM05] G. Allaire and F. Murat. Communications privées. 2005.
- [Bes97] J. S. Bessonneau. *Etude dynamique de surfaces réticulées souples et immergées; application aux chaluts*. Thèse Ecole Centrale de Nantes, 1997.
- [BF96] C. H. Bruneau and P. Fabrie. New efficient boundary conditions for incompressible Navier-Stokes equations : a well-posedness result. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 30 :815–840, 1996.
- [BF06] F. Boyer and P. Fabrie. *Éléments d’analyse pour l’étude de quelques modèles d’écoulements incompressibles de fluides visqueux incompressibles*. Springer, Mathématiques et Applications 52, SMAI, 2006.
- [BL92] R. P. Beyer and R. J. Leveque. Analysis of a one-dimensional model for the immersed boundary method. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 29 :332–364, 1992.
- [Bre93] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, seconde édition*. Masson edition, 1993.
- [BRHL07] C. Bernardi, T. C. Rebollo, F. Hecht, and R. Lewandowski. Automatic insertion of a turbulence model in the finite element discretization of the navier-stokes equations. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00173706/fr/>, 2007.
- [Bru98] C.H. Bruneau. Calcul d’écoulements incompressibles derrière des obstacles et analyse des solutions transitoires. *ESAIM : Proceedings - Actes du 29ème congrès d’analyse numérique*, 3 :37–50, 1998.

- [Cal94] J.P. Caltagirone. Sur l'interaction fluide-milieu poreux ; application au calcul d'efforts exercés sur un obstacle par un fluide visqueux. *C. R. Acad. Science Paris*, 318 (Série II) :571–577, 1994.
- [CBS66] G. Comte Bellot and S. Corrsin. The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence. *Journal of Fluids Mechanics*, 25 :657–682, 1966.
- [CDRG⁺06] J. Casado Diaz, T. Chacon Rebollo, V. Girault, M. Gomez Marmol, and F. Murat. Finite elements approximation of second order linear elliptic equations in divergence form with right-hand side in l^1 . *Numer. Math.*, 105 :337–374, 2006.
- [CF03] G. Carbou and P. Fabrie. Boundary layers for a penalisation method for incompressible flow. *Adv. Differential Equations*, 12, 8 :1453–1480, 2003.
- [Cia86] P. G. Ciarlet. *Elasticité tridimensionnelle*. Masson edition, 1986.
- [Con87a] C. Conca. Etude d'un fluide traversant une paroi perforée. i. comportement limite près de la paroi. *J. Math. pures et appl.*, 66 :1–43, 1987.
- [Con87b] C. Conca. Etude d'un fluide traversant une paroi perforée. ii. comportement limite loin de la paroi. *J. Math. pures et appl.*, 66 :45–69, 1987.
- [Coq05] L. Coquelle. *Simulation de comportements individuels instinctifs d'animaux dans leur environnement. De la description éthologique à l'exécution de comportements réactifs*. Thèse ENIB, 2005.
- [Cou89] J. Cousteix. *Aérodynamique. Turbulence et Couche Limite*. Collection La Chevêche, cepadues edition, 1989.
- [DBM99] M. Dauge, C. Bernardi, and Y. Maday. *Spectral methods for axisymmetric domains*. Gauthier villars edition, 1999.
- [DBM03] M. Dauge, C. Bernardi, and Y. Maday. *Polynomials in the Sobolev World*. Publications du Laboratoire J. -L. Lions edition, 2003.
- [Des03] G. Deschamps. *Les chaluts*. Engins et Techniques de pêche, ifremer edition, 2003.
- [dnuple95] Organisation des nations unies pour l'alimentation et l'agriculture. *Code de conduite pour une pêche responsable*. 1995.
- [Fab07] P. Fabrie. Communication privée. 2007.
- [Fou02] G. Fourestey. *Simulation numérique et contrôle optimal d'interactions fluide incompressible/structure par une méthode de Lagrange -Galerkin d'ordre 2. Applications aux ouvrages d'art*. Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2002.
- [GFP05] G. Germain, J. V. Facq, and D. Priour. Flow characterization around a cod-end. *IMAM congress, Portugal*, 2005.
- [GHP01] E. Guyon, J. P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique Physique*. EDP Sciences, cnrs edition, 2001.

- [GPF] G. Germain, D. Priour, and J.V. Facq. Etude expérimentale de l'écoulement autour d'un cul de chalut.
- [GPP94] R. Glowinski, T-W. Pan, and J. Periaux. A fictitious domain method for external incompressible viscous flow modeled by navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 112 :133–148, 1994.
- [GR86] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite element methods for the Navier-Stokes equations*. Springer, 1986.
- [Gri78] P. Grisvard. Singularités des solutions du problème de Stokes dans un polygone. *Publication de l'université de Nice*, 1978.
- [GS90a] W. A. Green and J. Shi. Deformations of discrete elastic networks. *Journal of Applied Mathematics*, 45 :99–113, 1990.
- [GS90b] W. A. Green and J. Shi. Plane deformations of membranes formed with elastic cords. *Journal of Applied Mathematics*, 43 :317–333, 1990.
- [Her05a] B. Herrmann. Effect of catch size and shape on the selectivity of diamond shape mesh cod-ends. i. model development. *Fisheries Research*, 71 :1–13, 2005.
- [Her05b] B. Herrmann. *Modelling and simulation of size selectivity in diamond mesh trawl cod-ends*. PhD. Thesis. Aalborg University, Denmark, 2005.
- [HPLHO06] F. Hecht, O. Pironneau, A. Le Hyaric, and K. Ohtsua. *FreeFem++ Manual*. Laboratoire Jacques Louis Lions, Paris (<http://freefem.org/ff++>), 2006.
- [Jol06] J. M. Jolion. *Probabilités - Statistiques*. 3ème année insa lyon edition, 2006.
- [Kan04] L. H. Kantha. The length scale equation in turbulence models. *Non Linear Process In Geophysics*, 11 :83–97, 2004.
- [KAPC00] K. Khadra, P. Angot, S. Parneix, and J.P. Caltagirone. Fictitious domain approach for numerical modelling of navier-stokes equations. *International journal for numerical methods in fluids*, 34 :651–684, 2000.
- [Kou04] G. Kourous. Pêches : Nouvelles estimations sur le rejet en mer. *FAO - Salle de presse - 14 septembre*, 2004.
- [Lad69] O. Ladyzhenskaya. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. Gordon and Breach, second english edition, 1969.
- [LB89] T. Gallouet L. Boccardo. Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data. *J. Funct. Anal.*, 87 :149–169, 1989.
- [LBM98] F. Le Bris and D. Marichal. Numerical and experimental study of submerged supple nets : applications to fish farms. *Journal of Marine Science and Technology*, 3 :161–170, 1998.
- [LDL04] H. Le Dret and R. Lewandowski. Communication privée. 2004.
- [LDLPC04] H. Le Dret, R. Lewandowski, D. Priour, and F. Chagneau. Numerical simulation of a cod-end net. part 1 : Equilibrium in a uniform flow. *Journal of Elasticity*, 76(2) :139–162, 2004.

- [Lew97a] R. Lewandowski. *Analyse Mathématique et Océanographie*. Masson edition, 1997.
- [Lew97b] R. Lewandowski. The mathematical analysis of the coupling of a turbulent kinetic energy equation to the Navier-Stokes equation with an eddy viscosity. *Nonlinear Analysis TMA*, 28 (number 2) :393–417, 1997.
- [Lew04] R. Lewandowski. Modélisation d’un cul de chalut pour la pêche sélective. *Rapport interne IFREMER*, 2004.
- [Lew06] R. Lewandowski. Vorticities in a LES model for 3D periodic turbulent flows. *Journ. of Math. Fluid Mech.*, 8 :398–422, 2006.
- [LL07] J. Lederer and R. Lewandowski. On the RANS 3D model with unbounded eddy viscosities. *Ann. IHP an. non lin.*, 24 :413–441, 2007.
- [LM68] J. L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et application, volume 1*. Dunod edition, 1968.
- [LP47] L. Landweber and M. H. Protter. The shape and tension of a light flexible cable in a uniform current. *Journal of Applied Mechanics*, A :121–126, 1947.
- [LP00] M-C. Lai and C. S. Peskin. An immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity. *Journal of computational physics*, 160 :705–719, 2000.
- [LP07a] R. Lewandowski and G. Pichot. Numerical simulation of water flow around a rigid fishing net. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196/45-48 :4737–4754, 2007.
- [LP07b] R. Lewandowski and G. Pichot. Sur l’écoulement turbulent au voisinage d’un filet de pêche. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I.*, 344 :141–145, 2007.
- [Mar05] D. Marichal. Etude de l’écoulement dans et au voisinage d’un cul de chalut gonflé par une capture. *Etude réalisée pour IFREMER - Contrat 2003*, 2005.
- [MC82] F. Murat and D. Cioranescu. A strange term coming from nowhere. *Non-linear partial differential equations and their applications, Collège de France seminar*, 2 & 3, 1982.
- [MI05] R. Mittal and G. Iaccarino. Immersed boundary methods. *Annual Rev. Fluid Mech.*, 37 :239–261, 2005.
- [MP94] B. Mohammadi and O. Pironneau. *Analysis of the k-epsilon turbulence model*. Springer, masson edition, 1994.
- [MSPM06] A. Minotti, F. Simon, J. F. Piet, and P. Millan. *Mesures de vitesse, impédance et intensité acoustiques en écoulement par Vélocimétrie Laser Doppler*. Présentation Onera, 2006.
- [Mur90] F. Murat. Soluciones renormalizadas de EDP elipticas no lineales. *Lectures at Sevilla’s University*, 1990.
- [O’N97] F. G. O’Neill. Differential equations governing the geometry of a diamond mesh cod-end of a trawl net. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 64 :7–14, 1997.

- [O'N99] F. G. O'Neill. Axisymmetric trawl cod-ends made from netting of a generalized shape. *Journal of Applied Mathematics*, 62 :245–262, 1999.
- [O'N05] F. G. O'Neill. A source panel model of plankton sampler hydrodynamics. *Maritime Transportation and Exploitation of the Ocean and Coastal Resources. Guedes Soares, Garbatov and Fonseca (eds). Taylor & Francis Group, London*, 2005.
- [O'N06a] F. G. O'Neill. *PremecsII : Development of predictive model of cod-end selectivity. Third periodic report - Partner 2 : MARLAB, Aberdeen, Fisheries Research Services, Marine Laboratory*. 2006.
- [O'N06b] F. G. O'Neill. Source models of flow through and around screens and gauzes. *Ocean Engineering*, 33, 2006.
- [OO97] F. G. O'Neill and T. O'Donoghue. The fluid dynamic loading on catch and the geometry of trawl cod-ends. *Proceeding Royal Society of London*, 453 :1631–1648, 1997.
- [OX94] F. G. O'Neill and L. Xu. Twine flexural rigidity and mesh resistance to opening. *ICES CM/B*, 31, 1994.
- [Pes72] C. S. Peskin. *Flow patterns around heart valves : a digital computer method for solving the equations of motion*. PhD thesis, Albert Einstein College of Medicine, 1972.
- [Pes02] C. S. Peskin. The immersed boundary method. *Acta Numerica*, pages 1–39, 2002.
- [peV00] La pêche européenne Vol. 3. *Comment préserver les jeunes poissons ? Vers des engins de pêche plus sélectifs*. Publication de la Commission Européenne, 2000.
- [Pic07] G. Pichot. Modélisation de l'écoulement autour d'une poche de chalut. *ESAIM : Proceedings, Octobre*, 22 :132–139, 2007.
- [POS⁺06] D. Priour, F. O'Neill, A. Sala, P. Chevallier, and B. Herrmann. *PremecsII : Development of predictive model of cod-end selectivity. Final report*. 2006.
- [Pri99] D. Priour. Calculation of net shapes by the finite element method with triangular elements. *Comm. in Num. Meth.*, 15 :755–763, 1999.
- [Pri01] D. Priour. Introduction of a mesh resistance to opening in a triangular element for calculation of nets by finite elements. *Comm. in Num. Meth. in Eng.*, 17 :229–237, 2001.
- [Pri03] D. Priour. Analysis of nets with hexagonal mesh using triangular elements. *International journal for numerical methods in engineering*, 56 :1721–1733, 2003.
- [Pri05] D. Priour. Fem modeling of flexible structures made of cables, bars and nets. *Maritime Transportation and Exploitation of Ocean and Coastal Resources - Guedes Soares, Garbatov & Fonseca*, pages 1285–1292, 2005.

- [Pri06] D. Priour. *PremecsII : Development of predictive model of cod-end selectivity. Third periodic report - Partner 1 : Ifremer Brest.* 2006.
- [Rey87] C. W. Reynolds. Flocks, herds, and schools : A distributed behavioral model. *Computer graphics*, 21(4) :25–34, 1987.
- [Riv55] R. S. Rivlin. Plane strain of a net formed by inextensible cords. *J. Rat. Mech. Anal.*, 4 :957–974, 1955.
- [Rub86] J. Rubinstein. On the macroscopic description of slow viscous flow past a random array of spheres. *Journal of statistical physics*, 44 :849–863, 1986.
- [San98] J. Sander. Dynamical equations and turbulent closures in geophysics. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 10 :1–28, 1998.
- [SB03] E. M. Saiki and S. Biringen. Numerical simulation of a cylinder in a uniform flow : application of a virtual boundary method. *Journal of Computational Physics*, 123 :450–465, 2003.
- [Sim87] J. Simon. Compact sets in the space $L^p([0, t], b)$. *Ann. Mat. Pura Appl. - série IV*, 146 :65–96, 1987.
- [SOB⁺04] A. Sala, F. G. O’Neill, G. Buglioni, G. Cosimi, and V. Palumbo and A. Lucchetti. Development of an experimental method for quantifying the resistance to opening of netting panels. *Report of the ICES Fisheries Technology Committee Working Group on Fishing Technology and Fish Behaviour, Gdynia (Poland)*, ICES CM 2004/B.05, 2004.
- [Tar77] L. Tartar. *Cours Peccot Collège de France.* 1977.
- [Tar80] L. Tartar. *Convergence of the homogenization process.* Appendice au livre de E. Sanchez-Palencia : Non-homogeneous media and vibration theory, 1980.
- [The93] F. Theret. *Etude de l’équilibre de surfaces réticulées placées dans un courant uniforme ; application aux chaluts.* Thèse Ecole Centrale Nantes, 1993.
- [The98] F. Theret. *Development of a predictive model of cod-end selectivity, Individual Progress Report IFREMER - Second Year - From December 97 to November 98, European project Fair Programme CT96 1555.* 1998.
- [VG86] P-A. Raviart V. Girault. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations.* Springer-verlag edition, 1986.
- [Vin96] B. Vincent. *Etude numérique et expérimentale des écoulements guidés par une paroi perméable axisymétrique. Application à la modélisation des chaluts pour en améliorer la sélectivité.* Thèse Ecole Centrale Nantes, 1996.
- [WBB⁺06] B. Worm, E. B. Barbier, N. Beaumont, J. E. Duffy, B. S. Halpern C. Folke, J. B. C. Jackson, H. K. Lotze, F. Micheli, S. R. Palumbi, E. Sala, K. A. Selkoe, J. J. Stachowicz, and R. Watson. Impacts of biodiversity loss on ocean ecosystem services. *Science*, 314 :787–790, 2006.
- [WHS⁺04] R. Wan, W. Q. Huang, X.F. Song, F. X. Hu, and T. Tokai. Statics of a gillnet placed in a uniform current. *Ocean Engineering*, 31 :1725–1740, 2004.

- [WHTM02] R. Wan, F. X. Hu, T. Tokai, and K. Matuda. A method for analysing the static response of submerged rope systems based on a finite element method. *Fisheries Science*, 68 :65–70, 2002.
- [ZP03] L. Zhu and C. S. Peskin. Interaction of two filaments in a flowing soap film. *Physics of fluids*, 15 :1954–1960, 2003.

Modélisation et analyse numérique du couplage filet-écoulement hydrodynamique dans une poche de chalut

Nous nous intéressons à la simulation numérique du phénomène de capture dans une poche de chalut. Nous présentons les modèles existants pour le filet et les poissons et montrons la nécessité de développer un modèle pour le fluide. Afin de mieux comprendre l'écoulement, nous avons mené des campagnes expérimentales autour d'une maquette de filet rigide axisymétrique dont nous décrivons les résultats. Nous proposons un modèle pour le fluide basé sur les équations de Navier-Stokes/Brinkman moyennées couplées à une équation pour l'énergie cinétique turbulente par le biais d'une viscosité turbulente, et les conditions aux limites appropriées. Nous montrons l'existence d'une solution faible au problème couplé en dimension 2. Puis, nous présentons le code de calcul axisymétrique que nous avons développé, nommé *SeaNet*. Nous avons alors procédé au calage des paramètres du modèle ainsi qu'à la validation du code par comparaison avec les résultats expérimentaux.

Mots clés : Sélectivité des engins de pêche; Mécanique des fluides; Turbulence; Interactions fluide/structure; Modélisation; Formulations variationnelles; Simulations numériques; Méthode des éléments finis;

Modelling and numerical analysis of the coupling process between the net and the hydrodynamic flow around a cod-end net.

We are interested in the numerical simulation of the catch process at the end part of a trawl. The study of previous works emphasizes the lack of a convincing flow model. The need of a physical understanding of the flow leads us to perform experimental campaigns around a rigid cod-end net model, whose results are given in the manuscript. We propose a model based on the Navier-Stokes/Brinkman equations coupled to an equation for the turbulent kinetic energy by the means of an eddy viscosity, with appropriate boundary conditions. Existence of a weak solution to our coupled problem is proved in dimension 2. Then, we present the axisymmetric code we developed, called *SeaNet*. We set the parameters of the model and validate the code by comparison with the experimental results.

Keywords : Selectivity of fishing gear; Fluid mechanics; Turbulence; Fluid/structure interactions; Modelling; Variational formulations; Numerical simulations; Finite Element Method;