

Marc Pavec

15 mai 2007

**Instabilités barocline et
paramétrique des courants de bord,
application au front d'Ouessant**

Thèse réalisée au laboratoire de physique des océans sous la direction de Xavier Carton

LPO - université de Bretagne Occidentale - UFR sciences

6 avenue le Gorgeu - BP 809

29 285 Brest Cédex

e-mail : marc.pavec@univ-brest.fr

Table des matières

Introduction	1
1 Contexte de l'étude	6
1.1 Observations de courants instables, de talus ou côtiers	6
1.1.1 Mélange de l'eau méditerranéenne en Atlantique	6
1.1.2 Le courant des Aiguilles	9
1.1.3 La mer d'Iroise et le front d'Ouessant	11
1.2 Les conséquences de la variabilité de méso-échelle des courants côtiers .	14
1.2.1 Impact sur la circulation générale	15
1.2.2 Propriétés biologiques	15
1.2.3 Intérêt écologique	16
1.2.4 Intérêt stratégique	17
1.3 Etude bibliographique	17
1.3.1 Etudes d'instabilités d'ordre générales	17
1.3.2 Instabilité paramétrique	25
1.4 Equations utilisées	29
2 Deux études préliminaires	33

2.1	Une approche dans un cadre frontal géostrophique	33
2.2	Une approche dans un cadre quasi-géostrophique	43
2.3	Conclusion	54
3	L'instabilité paramétrique en régime quasi-géostrophique	57
3.1	Introduction à l'article	57
3.2	Compléments à l'article	92
3.2.1	Outils analytiques	92
3.2.2	Code numérique	92
4	Application sur un cas réel	94
4.1	Introduction	94
4.1.1	Généralités	94
4.1.2	Grandeurs caractéristiques	95
4.2	Observations	96
4.2.1	Présentation des jeux de données	96
4.2.2	Analyse des instabilités du front	98
4.3	Les outils de l'étude	103
4.3.1	Configuration	103
4.3.2	Calcul analytique de l'instabilité barocline linéaire du front stationnaire	105
4.3.3	Modèle numérique shallow-water non linéaire	108
4.4	Résultats stationnaires	109
4.4.1	Cas de référence	109

4.4.2	Etude de sensibilité	113
4.4.3	Interprétations	116
4.5	Instabilité paramétrique	119
4.5.1	Etude linéaire	119
4.5.2	Résultats non-linéaires	120
4.5.3	Conclusions	125
	Conclusion	127
	Bibliographie	138

Introduction

POUR présenter l'objet de l'océanographie physique au grand public, il est fréquent de recourir à la comparaison avec la météorologie. En effet, les phénomènes météorologiques nous concernent tous et sont bien souvent plus directement ressentis que leurs équivalents océaniques.

Dans l'atmosphère comme dans l'océan, les mouvements peuvent être classés selon leurs échelles temporelles et spatiales. Sous nos latitudes, nous connaissons bien les dépressions porteuses de vent et de pluies. Les cartes de prévisions météorologiques montrent ces structures plus ou moins circulaires d'un millier de kilomètres de diamètre sur l'Atlantique. Ces structures induisent des perturbations qui traversent la France en quelques heures en s'estompant parfois progressivement. Les marins et les plaisanciers connaissent bien également les brises thermiques qui s'établissent le long des côtes lorsque, par temps calme et ensoleillé, la différence de température entre la terre et la mer devient importante. Contrairement aux dépressions, ces événements très locaux ont une influence sur des distances de quelques dizaines de kilomètres au plus. Ces deux phénomènes atmosphériques sont de nature très différente et ont des implications qui ne sont pas comparables en termes d'échelles de temps et d'espace.

Prenons deux exemples pour transposer cette disparité d'échelle aux mouvements océaniques. Les phénomènes océaniques les plus connus sont certainement les marées d'une part, et la circulation générale (du moins une partie de sa composante Nord-Atlantique constituée par le Gulf Stream) d'autre part. Les marées sont des phénomènes rapides avec des périodes caractéristiques principales de l'ordre de quelques heures. Les vitesses associées peuvent atteindre plusieurs mètres par seconde. Leur impact est très

local puisque les masses d'eau concernées ne se déplacent que de quelques kilomètres et ont un mouvement qui peut être considéré comme périodique en première approche. Le Gulf Stream et ses extensions déplacent des masses d'eau sur plusieurs milliers de kilomètres mais avec des vitesses qui excèdent peu $1m.s^{-1}$. Là encore, les effets sont de nature très différente et vont justifier des études séparées.

Historiquement, l'océanographie physique s'est intéressée aux phénomènes les plus directement visibles, à commencer bien sûr par les marées dont le lien avec les mouvements des astres était déjà suspecté par Aristote en 350 avant J.C. Ces mouvements rapides et immédiatement détectables depuis la côte ont été très largement étudiés et sont aujourd'hui parfaitement expliqués. Avec le développement du commerce trans-Atlantique au XIX^e siècle, des mouvements de plus grande échelle ont été repérés par les capitaines de navires marchands. En constatant des écarts entre leur position effective et le cap tenu par le bateau, il était possible de déduire la présence d'un courant ainsi qu'une direction et une vitesse approximatives. Des courants tels que le Gulf Stream ont ainsi pu être détectés. Partant de la connaissance de grands systèmes de courants sur l'ensemble des océans, des théories de circulation globale à l'échelle des bassins océaniques ont été bâties à partir du milieu du XX^e siècle.

Tous les phénomènes qui seront abordés dans cette thèse vont se classer entre ces deux extrêmes en termes d'échelles spatiales et temporelles et se rangent dans la catégorie dite **activité de méso-échelle**. Pour illustrer les disparités d'échelles présentes dans l'océan et donner quelques exemples de ce qu'est la méso-échelle, la figure 1 propose une classification des phénomènes océaniques en fonction de leur taille et de leur échelle temporelle.

Les phénomènes qui vont nous intéresser par la suite ont une extension spatiale de l'ordre de quelques dizaines à une ou deux centaines de kilomètres au plus, et les vitesses associées sont généralement inférieures ou égales à $1m.s^{-1}$. Dans les manifestations d'activité méso-échelle, l'aspect le plus important est l'existence de structures

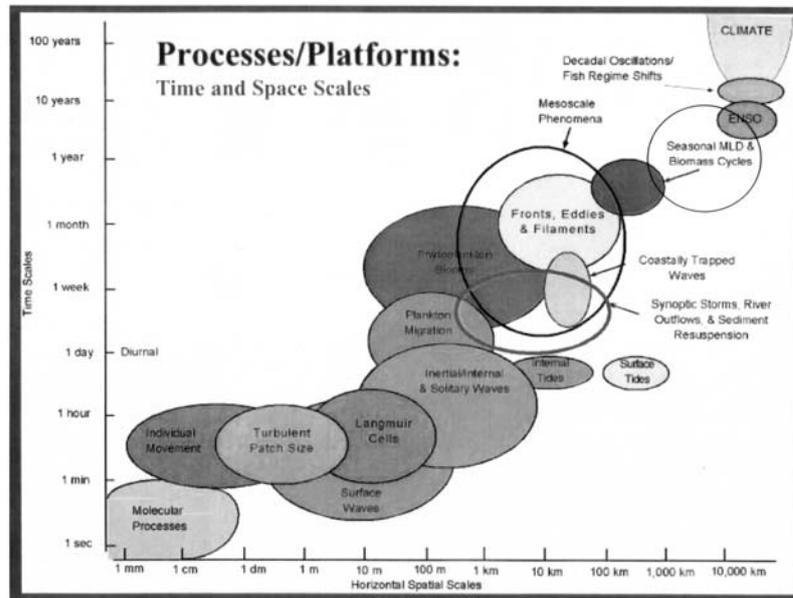


Figure 1 — Classification des phénomènes océaniques en fonction de leurs échelles spatiales et temporelles.

cohérentes, des tourbillons par exemple, associés à des instabilités de courants de plus grande échelle. Ces structures cohérentes sont capables de se propager sur des distances de plusieurs milliers de kilomètres parfois, et ainsi propager des eaux issues d'une zone particulière de l'océan à de très grandes distances de leur point d'origine et donc de leur lieu de formation. On entrevoit ici l'importance de ces phénomènes puisqu'ils participent activement au mélange des propriétés dans l'océan. La figure 2 illustre une intense activité de moyenne échelle dans le Golfe de Gascogne.

Les sources de variabilité de moyenne échelle sont multiples. Toutes les zones de mouvements intenses dans l'océan sont susceptibles d'être des lieux de formation de structures cohérentes de moyenne échelle : les zones de forts courants, tel le bord ouest des océans, et plus généralement toutes les zones de frottement liées à la bathymétrie, mais aussi les zones de mélange entre deux masses d'eau aux propriétés différentes. La turbulence qui résulte de cette activité peut être interprétée en termes d'énergie cinétique. Pour donner un exemple, la figure 3 présente la répartition de l'énergie cinétique turbulente en méditerranée. On remarque nettement une intensification de

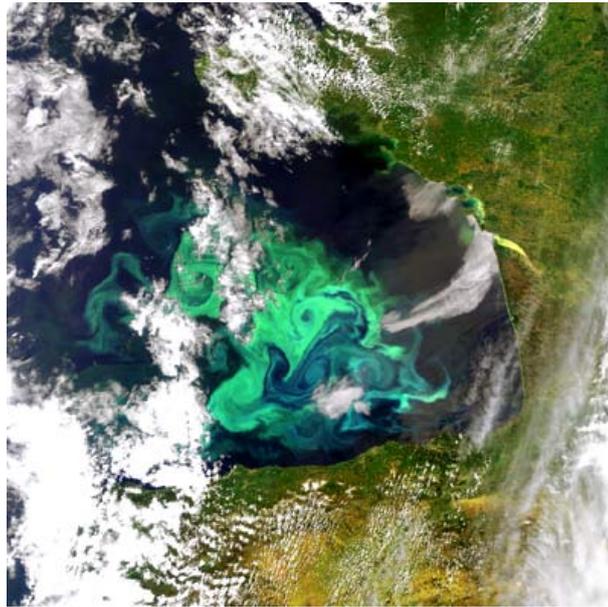


Figure 2 — Mise en évidence d'activité méso-échelle dans le Golfe de Gascogne lors d'une floraison d'algues (source : ESA)

l'énergie le long des côtes. Les zones côtières étant reconnues comme zones de forte activité méso-échelle, l'essentiel de ce travail de thèse va être consacré à l'étude de processus côtiers, et en particulier de **courants côtiers**. Ce terme sera entendu dans la suite comme couvrant le plateau et le talus continental.

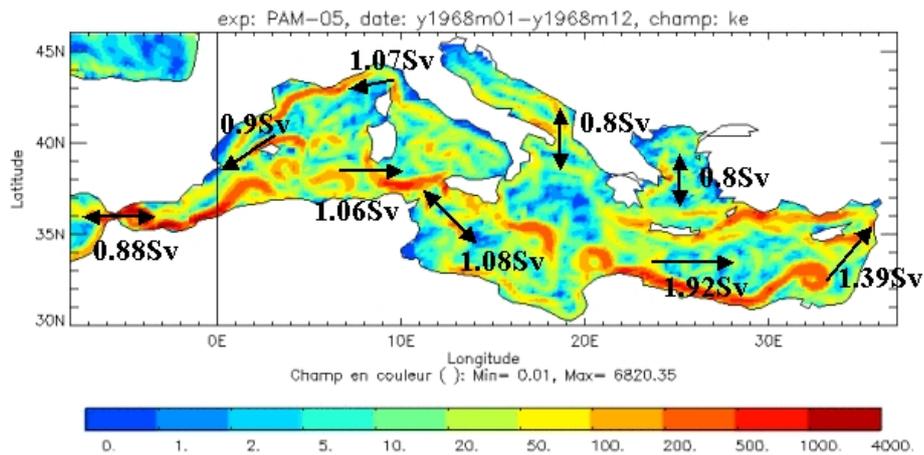


Figure 3 — Carte d'énergie cinétique turbulente en Méditerranée

Le but de cette thèse est de participer à l'amélioration de la compréhension de certains phénomènes liés à l'activité de méso-échelle en étudiant plusieurs mécanismes

influant sur cette activité, ou en étant à l'origine. L'impact que peuvent avoir des **fluctuations périodiques** des courants côtiers sera particulièrement étudié à travers le phénomène d'instabilité paramétrique, alors que la plupart des études réalisées jusqu'alors ne considéraient que des courants stationnaires. Un autre aspect abordé dans cette thèse sera la frontalité des courants, soit en vorticité potentielle soit en densité. Pour cela, une représentation idéalisée de ces courants sera mise en place par des jeux d'équations que nous étudierons analytiquement dans un premier temps, puis numériquement par la suite. Le premier chapitre de cette thèse est consacré à une présentation détaillée des motivations et des implications de ce travail, ainsi qu'à une étude bibliographique. Dans un deuxième chapitre, deux études analytiques préliminaires sont présentées, chacune d'elles ayant fait l'objet d'une publication. Le troisième chapitre est quant à lui consacré à une étude complète de l'instabilité paramétrique dans un modèle quasi-géostrophique, avec un traitement numérique des développements non-linéaires. Enfin, le quatrième chapitre est consacré à une évaluation de la possibilité d'existence de l'instabilité paramétrique sur un exemple réel. Le cadre choisi pour réaliser cette application réaliste est la mer d'Iroise.

A PARTIR des quelques notions sur l'activité de méso-échelle données dans l'introduction, la première partie de ce chapitre est consacrée à l'exposition d'exemples motivant notre étude. Les trois paragraphes ci-après décrivent trois exemples de courants de bords ou côtiers dans lesquels des processus de méso-échelle jouent un rôle majeur. Ces exemples permettront d'une part de mieux cerner les phénomènes que recouvrent la notion d'activité de moyenne échelle et d'autre part d'en-trevoir plus précisément quelles en sont les implications et ce que leur compréhension peut apporter à la communauté océanographique. La fin du chapitre est consacrée à la description des instabilités qui peuvent affecter ces courants, et aux modèles qui les décrivent.

1.1 Observations de courants instables, de talus ou côtiers

1.1.1 Mélange de l'eau méditerranéenne en Atlantique

Présentation

La mer Méditerranée constitue un bassin d'évaporation. En effet, compte tenu des conditions climatiques qui y règnent, l'évaporation est importante et la concentration en sel de l'eau méditerranéenne est supérieure à la moyenne océanique. Au détroit de Gibraltar, un échange permanent se produit entre la mer Méditerranée et l'océan Atlantique. La salinité supérieure de l'eau méditerranéenne permet ensuite de repérer son parcours en Atlantique. On a mis en évidence par des mesures que l'écoulement de

l'eau issue de la Méditerranée se fait sous la forme de deux veines profondes le long de la côte sud de la péninsule ibérique (Ambar et Howe (1979), Ochoa et Bray (1991)). Des instabilités de cette veine d'eau ont été très clairement identifiées au niveau des canyons et près des caps rencontrés par ces deux veines (Serra et Ambar (2000)). Le résultat de ces instabilités est la formation de tourbillons cohérents qui se détachent du courant principal. Ces tourbillons baroclines sont nommés *meddies* par contraction de "mediterranean eddies". Certains de ces tourbillons se propagent sur de très longues distances en Atlantique en diluant peu à peu leurs propriétés thermohalines dans l'eau environnante. Cela signifie qu'ils vont apporter une quantité importante de sel et de chaleur en Atlantique nord-est (certaines estimations vont jusqu'à la moitié de l'apport de sel à 1000m). La figure 1.1 le confirme en représentant une modélisation de la salinité du bassin Atlantique à la profondeur à laquelle se stabilise l'eau méditerranéenne (environ 1000m).

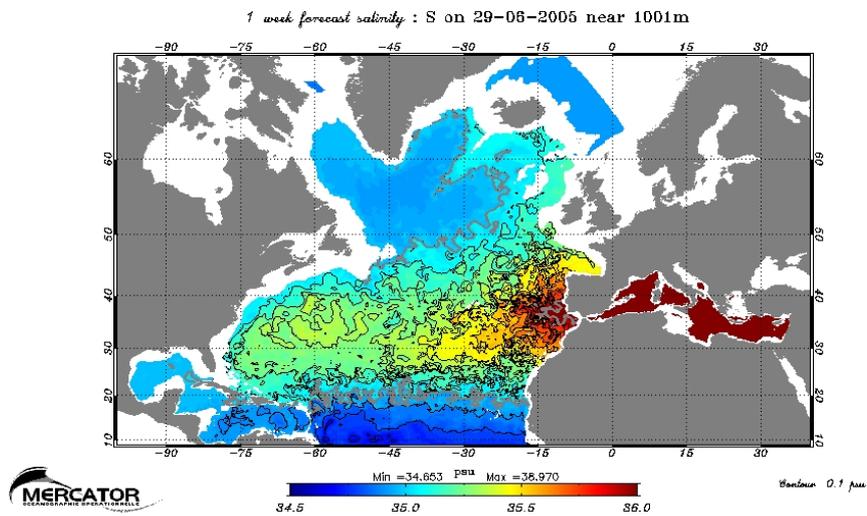


Figure 1.1 — Modélisation de la salinité sur le bassin Atlantique à une profondeur d'environ 1000m.

Variabilité

Les résultats décrits ici proviennent de la thèse de Nuno Serra (2004), *Observations and numerical modeling of the mediterranean outflow*. Dans ce travail, plusieurs séries

de mesures sont utilisées pour mettre en évidence différentes périodes de variabilité dans les propriétés de l'écoulement de l'eau méditerranéenne en Atlantique. La variabilité de méso-échelle y est définie comme recouvrant tous les événements dont la variabilité temporelle est supérieure à la période inertielle (environ 20h) et inférieure à 30 jours. Les mesures utilisées concernent la vitesse du courant, la salinité et la température de l'eau.

Les mesures susceptibles de nous intéresser ici proviennent de données acquises par deux courantomètres mouillés en deux points représentés en bleu sur la figure 1.2. Les mesures se sont étalées de Juin à Décembre 1997. Ces deux points de mesures se trouvent en aval d'un fort accident topographique, le canyon de Portimao. Cette zone est connue pour être une zone importante de formation de tourbillons, comme le montrent les trajectoires représentées sur la figure 1.2.

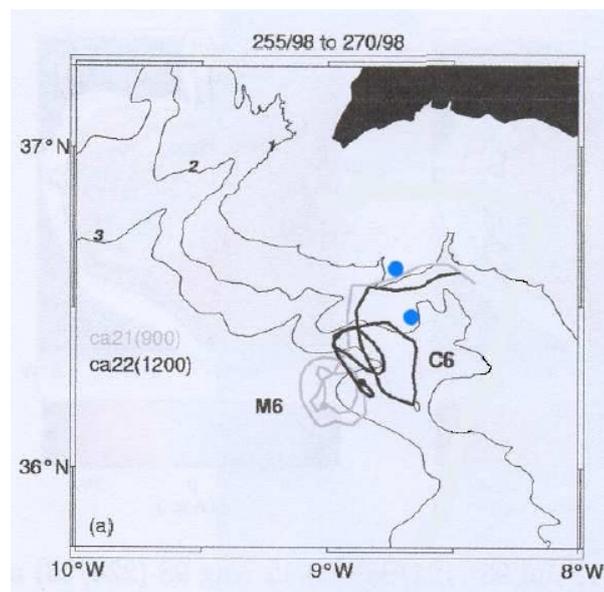


Figure 1.2 — En bleu, les positions des deux mouillages utilisés pour l'analyse en ondelettes. En gris et noir, deux trajectoires de flotteurs montrant l'éjection d'un dipôle cyclone-anticyclone au niveau du canyon de Portimao

La figure 1.3 présente une analyse en ondelettes des valeurs mesurées en vitesse et en température. On distingue clairement plusieurs périodes de l'ordre de la dizaine de jours sur l'une et l'autre des quantités. Plus précisément, une période de 4 à 6 jours et

une autre de l'ordre de 10 jours sont observées sur les vitesses.

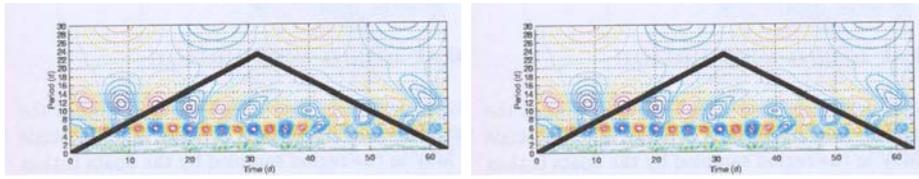


Figure 1.3 — Analyse en ondelettes de mesures en aval du canyon de Portimao. Mesures de température sur la figure de gauche et de courants sur la figure de droite.

D'autres résultats non présentés ici montrent que de telles variations existent déjà en amont du canyon. L'origine de ces variations n'est pas clairement identifiée, même si N. Serra avance l'hypothèse de l'effet d'une onde de Rossby topographique. L'impact de ces variations sur la stabilité du courant et par conséquent sur un éventuel détachement de tourbillon n'a jamais été étudié.

1.1.2 Le courant des Aiguilles

Présentation

Lutjeharms (2006) offre un panorama complet des phénomènes liés au courant des Aiguilles. Le courant des Aiguilles est un courant de bord ouest qui s'écoule le long de la côte Est de l'Afrique du Sud. Il participe au transfert de propriétés entre l'océan Indien et l'océan Atlantique en inversant sa course au large du Cap de Bonne Espérance (rétroflexion). La limite nord généralement retenue pour les études de ce courant est l'extrémité sud du canal du Mozambique. Les eaux alimentant le courant du Mozambique proviennent essentiellement de deux sources : le courant sud-équatorial d'une part et une recirculation dans un gyre au sud-ouest de l'océan Indien d'autre part. La figure 1.4 propose un schéma d'organisation de ces différents courants pour former le courant des Aiguilles.

La circulation autour de Madagascar et la façon dont le courant sud-équatorial influence le courant des Aiguilles sont encore mal comprises. L'idée de la séparation du courant sud-équatorial en deux branches dont l'une descendrait le détroit du Mozam-

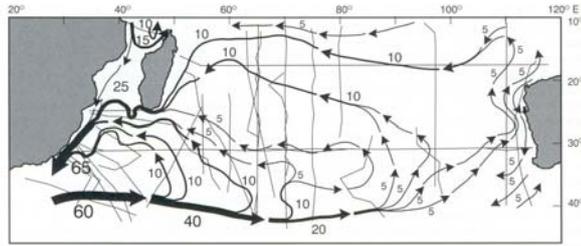


Figure 1.4 — Organisation des courants dans le sud-ouest de l'océan indien. source : Lutjeharms (2006).

bique est remise en cause, puisque des observations ont démontré l'absence de courant stable dans ce détroit et montrent plutôt une succession de tourbillons à cet endroit. Les seules sources régulières du courant des Aiguilles passeraient donc à l'est et au sud de Madagascar. La course du courant des Aiguilles est stable et régulière le long de la côte Est de l'Afrique du Sud. Le plateau continental y est très étroit mais présente peu d'accidents bathymétriques. Au sud du continent, le trait de côte change brutalement de direction et le plateau continental s'élargit pour former le banc des Aiguilles. Le courant se détache alors de la côte pour suivre le talus, où les accidents topographiques sont plus nombreux que dans la partie nord. Arrivé au sud du banc des Aiguilles, le talus fait un angle très marqué. Le courant s'en détache et subit une rétroflexion vers l'ouest en formant un large méandre. Cette zone de rétroflexion est connue pour présenter un des plus hauts taux d'activité méso-échelle dans l'océan. En particulier, de larges structures anticycloniques, les "Agulhas ring", sont formées à cet endroit. De manière similaires aux "meddies" issus de la Méditerranée, ils vont s'éloigner progressivement de leur lieu de formation et influencer sur les masses d'eau environnantes. Des structures cycloniques, plus petites, sont également observées régulièrement le long du parcours du courant et dans la zone de rétroflexion.

Variabilité

Plusieurs sources de variabilité liée au courant des Aiguilles peuvent être identifiées. Premièrement un cycle saisonnier. L'océan Indien et donc le courant sud-équatorial sont

influencés par la mousson. Comme ce courant est une des sources du courant des Aiguilles, une variabilité saisonnière liée à la mousson peut se retrouver dans le courant des Aiguilles. Nous venons également de présenter l'écoulement intermittent dans le canal du Mozambique sous la forme de passage de tourbillons. Certains de ces tourbillons vont être intégrés dans le courant des Aiguilles et y constituent par conséquent une source de variabilité. Une autre caractéristique du courant des Aiguilles est connue sous le nom de "Natal Pulses". Il s'agit de méandres qui apparaissent dans le cours du courant au niveau de la baie de Natal (sur la partie Est de la côte, là où le plateau est très étroit). A cet endroit, une échancrure de la côte produit un élargissement local du plateau et la pente du talus devient plus faible. Des méandres se forment périodiquement en ce lieu puis suivent le cours du courant jusqu'à atteindre le banc des Aiguilles. Ces fluctuations dans les contours du courant ont des conséquences sur son évolution et influent jusque sur le détachement des "Agulhas rings". Des observations satellitaires ont en effet montré une corrélation entre l'apparition d'un "Natal pulse" et le détachement d'un "Agulhas ring". Comprendre le lien entre ces fluctuations amont du courant des Aiguilles et la formation des cyclones et des anneaux du courant des Aiguilles sera l'objet d'une campagne océanographique, BONUS-Goodhope lag 2 (proposée pour 2008-2009).

1.1.3 La mer d'Iroise et le front d'Ouessant

Présentation

Alors que les deux autres exemples s'intéressaient à des courants côtiers clairement identifiés en tant que tels, ce troisième exemple présente une structure barocline légèrement différente. La mer d'Iroise, se situe à la pointe de la Bretagne (voir carte) et se trouve à la rencontre des eaux venant de L'Atlantique et de la Manche.

Les marées y sont très importantes et engendrent de forts courants. L'un des phénomènes dynamiques clé de cette zone est généralement appelé front d'Ouessant.



Figure 1.5 — Zoom sur la mer d'Iroise

De Mai à Septembre, le réchauffement des couches de surface de l'océan provoqué par le rayonnement solaire entraîne l'apparition d'une thermocline saisonnière. Mais en Mer d'Iroise, près de la côte, l'intensité du frottement des courants de marée sur le fond empêche cette stratification de s'établir et l'on assiste alors à l'apparition d'un front de surface séparant des eaux stratifiées au large d'eaux homogènes près de la côte (voir Lefevre et Grall (1970) pour une première description, Le Magueresse (1974), Mariette et Le Cann (1983)). Un courant géostrophique s'établit le long de ce front, laissant les eaux homogènes sur sa gauche. A l'inverse, au fond, le gradient de température entre la zone homogène et la zone stratifiée est opposé, pouvant entraîner l'apparition d'un contre-courant (Mariette (1983)). Voir la figure 1.6.

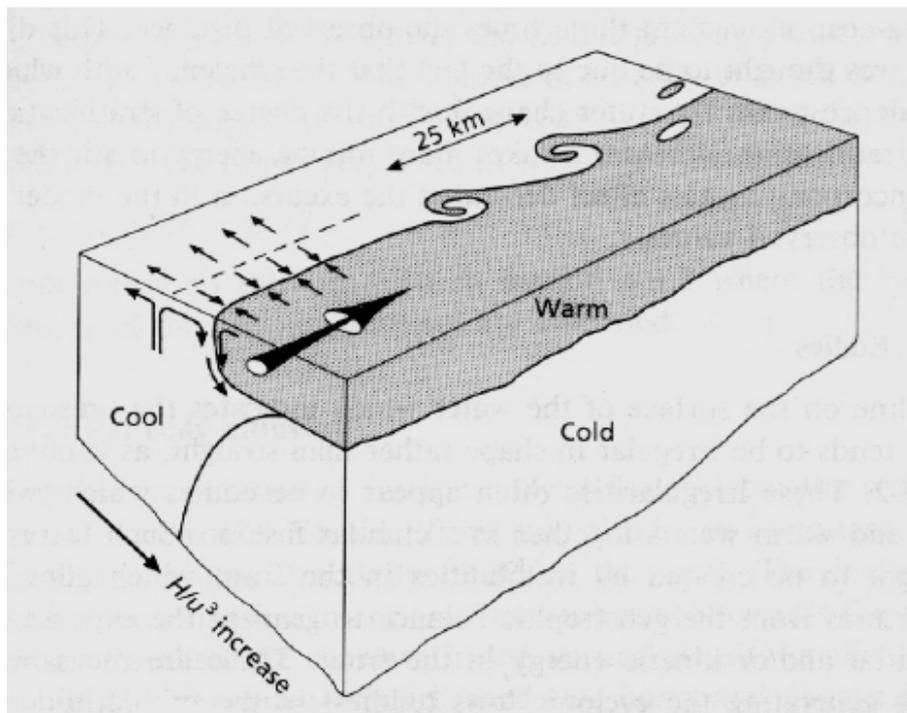


Figure 1.6 — Diagramme schématisique d'une structure frontale telle que celle rencontrée en mer d'Iroise (d'après Simpson (1981))

Variabilité

Une première source de variabilité évidente en Mer d'Iroise provient directement du courant de marée. Ces forts courants périodiques se superposent à la structure barocline du front, le cycle vives-eaux/morte-eaux est également un forçage périodique présent dans le système. D'autres variabilités indirectes sont liées à ce phénomène.

L'existence du front d'Ouessant est mise en évidence très clairement sur des cartes de température de surface (à laquelle il pourra être fait référence sous le nom de SST, pour Sea Surface Temperature). La figure 1.7 présente deux images de SST sur la zone. Sur la carte de gauche qui correspond à la date du 15 Juin 2003, la zone homogène et le front sont beaucoup plus marqués que sur la carte de droite qui présente la situation le 24 Juin. La première image correspond à une période de vives-eaux (coefficient 93) alors que la seconde correspond à une période de morte-eaux (coefficient 43). Ce résultat était tout à fait prévisible étant donné que la zone homogène se crée en raison du frottement

du courant de marée sur le fond. Plus le courant est fort plus le mélange sur la verticale est intense, et par conséquent plus le front est marqué.

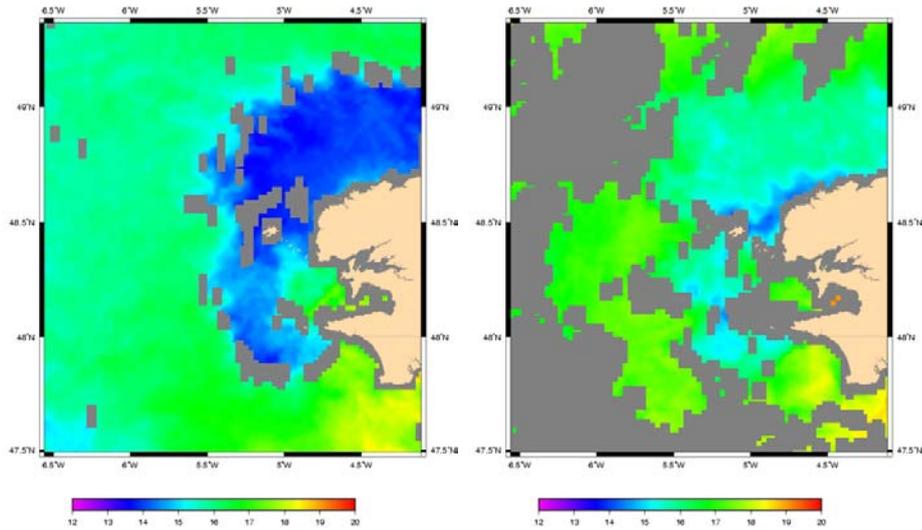


Figure 1.7 — SST mesurée en Mer d'Iroise le 15 Juin 2003 (coefficient de marée 96) et le 24 Juin 2003 (coefficient de marée 43)

La densité des eaux de surface subit donc une variabilité d'une période de 15 jours. La position du front semble également subir une variation à 15 jours puisqu'en période de mortes-eaux il a tendance à se rapprocher de la côte.

1.2 Les conséquences de la variabilité de méso-échelle des courants côtiers

Quatre implications des processus décrits ci-dessus sont développés ici. Ils montrent que la compréhension des mécanismes liés à ces différentes manifestations d'activité méso-échelle peut avoir un intérêt majeur dans un grand nombre de domaines, allant de la recherche théorique à l'application la plus directe.

1.2.1 Impact sur la circulation générale

La circulation de grande échelle dans l'océan étant déterminée principalement par la structure tri-dimensionnelle de la température et de la salinité, les variations de cette structure en Atlantique ont une influence sur la circulation et indirectement sur le climat de tout le bassin. Sans une activité de moyenne échelle liée aux courants de bord ouest comme aux courants de bord est, cette répartition de chaleur et de sel se ferait de manière très différente, voir l'exemple de la propagation des meddies en Atlantique notamment. Il est donc essentiel de représenter correctement et de savoir quantifier la formation de ces structures sur des échelles de l'ordre de quelques dizaines de kilomètres, en particulier sur les marges continentales.

1.2.2 Propriétés biologiques

L'activité biologique sous-marine est intimement liée aux propriétés physico-chimiques de l'eau. Les eaux froides sont connues pour être riches en nutriments et sels minéraux. Les micro-organismes (phyto et zooplancton) s'y développent donc préférentiellement. Ces organismes qui sont la base de la chaîne alimentaire vont provoquer l'abondance d'autres espèces. Les eaux de surface de l'océan étant généralement les plus chaudes, localiser les zones froides représente un intérêt primordial pour le suivi des populations de poissons et par conséquent pour la pêche. Les zones d'upwelling sont à ce titre intéressantes, puisque de l'eau froide y remonte du fond de l'océan en bordure de côte. En mer d'Iroise, la répartition entre eau mélangée (froide) et eau stratifiée (chaude en surface) est essentielle pour l'équilibre du milieu. La variabilité associée à l'interface entre ces deux masses d'eaux et les instabilités qui y sont associées déterminent l'extension de la zone d'eau froide et ont donc une influence directe sur les ressources naturelles de la zone (zone à forte concentration algale, présence de poissons pélagiques).

Par ailleurs, les tourbillons de méso-échelle constituent un écosystème propre et

peuvent contribuer largement au transport d'espèces attachées à cet écosystème.

1.2.3 Intérêt écologique

Ici nous considérons les modifications des propriétés de l'eau de mer dans une zone restreinte résultant d'une activité humaine. Un exemple immédiat est celui d'une eau relativement chaude issue du circuit de refroidissement d'une centrale nucléaire. Cette eau est rejetée en mer à une température supérieure (d'environ 10°C) à celle de l'eau de mer. Pour l'équilibre de l'écosystème, il est essentiel que cette eau chaude se mélange le plus rapidement possible aux eaux environnantes. Or le mélange ne résulte pas d'un mécanisme unique dans l'océan. En particulier les processus de mélange sont différents géographiquement et dépendent de la présence ou non d'ondes déferlantes, de vent variable, de turbulence de méso-échelle ou sous méso-échelle... Dans le domaine côtier, le mélange affecte également les panaches qui se forment à l'embouchure de certains fleuves, mais un front de masses d'eau peut rester marqué au voisinage des côtes comme le montre la figure 1.8.



Figure 1.8 — Vue aérienne d'un front dans l'océan, illustrant la séparation de deux masses d'eaux aux propriétés différentes

Une bonne compréhension des mécanismes de mélange à l'interface entre deux masses d'eau est donc nécessaire avant de prévoir ce genre d'installations. En particulier, savoir quantifier l'influence de la bathymétrie ou des courants de marée sur l'intensité du mélange est primordial.

1.2.4 Intérêt stratégique

Ce point reprend l'exemple déjà évoqué du détachement de tourbillons du sous-courant méditerranéen et de leur propagation en Atlantique. Il est connu que la propagation des ondes sonores est très dépendante de la nature du milieu. Ainsi, un changement de température marqué dans l'eau de mer peut constituer une barrière acoustique sur laquelle les ondes se réfléchissent. Le gradient de température et de salinité entre le coeur d'un *meddy* et l'eau environnante est suffisant pour que les ondes acoustiques ne le traversent pas sur quelques dizaines de kilomètres. Cette capacité du tourbillon à servir de "cache acoustique" est particulièrement recherché lors des opérations militaires sous-marines. La sensibilité des moyens de détection et la nécessité pour les sous-marins de passer inaperçu fait revêtir à ces tourbillons un intérêt stratégique important. Par conséquent, savoir prédire la formation de ce genre de structures, ou du moins être capable de déterminer des lieux ou des périodes privilégiées pour leur formation est important.

1.3 Etude bibliographique

1.3.1 Etudes d'instabilités d'ordre générales

Cette étude bibliographique s'attache à recenser les références concernant les phénomènes d'instabilité de courants côtiers. La complexité du sujet et la diversité des approches possibles, font qu'une littérature importante existe sur ce thème.

Parmi les mécanismes d'instabilité, tant atmosphériques qu'océaniques, un des plus

étudiés est l'instabilité barocline, dont l'existence fut mise en évidence par Charney (1948). Un modèle largement utilisé pour l'étude de l'instabilité barocline a été le modèle à deux couches sans cisaillement de courant horizontal de Phillips (1954). Cette instabilité barocline est associée aux mouvements géostrophiques causés par des gradients de vorticité potentielle (du courant ou du milieu ambiant sur une planète en rotation). Le principe physique sous-jacent s'explique par l'interaction entre deux ondes se propageant sur ces gradients de vorticité et se retrouvant en blocage de phase avec un déphasage vertical opposé au cisaillement. Il en résulte la formation d'anomalies de vorticité potentielle de signe opposés avec une orientation favorable à leur éloignement du courant d'origine. Ce gradient de vorticité potentielle peut être une combinaison d'effets dus à un courant cisailé, à l'effet β , ou encore à un courant topographique.

A d'autres échelles, d'autres ondes vont interagir pour provoquer également des déstabilisations. Dans un modèle shallow-water, des ondes de gravité existent, et en présence d'un gradient de densité on pourra observer par exemple des interactions d'ondes Kelvin-Rossby.

Les phénomènes associés à ces instabilités sont souvent comparables. Lorsque deux masses d'eau aux propriétés thermohalines différentes sont en contact, l'instabilité va se traduire par une déformation de l'interface entre les deux masses d'eau. Selon l'intensité et la longueur d'onde préférentielle du phénomène, cette déformation peut aller de la simple filamentation avec intrusion d'une masse d'eau dans l'autre jusqu'au détachement de structures cohérentes, comme dans l'exemple déjà évoqué de la propagation des meddies en Atlantique

Les différents exemples de courants déjà évoqués jusqu'ici ont en commun le fait de faire progresser le long de la côte des eaux de densité différente des eaux environnantes (des eaux chaudes et salées provenant de la mer Méditerranée par exemple). Du fait de cette particularité, ces courants sont parfois appelés "courants de densité". La propagation de ces courants a été largement étudiée, que ce soit analytiquement,

numériquement ou en laboratoire. L'article de Griffiths (1986) offre une excellente revue des mécanismes et des phénomènes associés à ce type de courants. Il explique notamment que lorsqu'un fluide est introduit dans un autre fluide de densité différente dans un système tournant, un équilibre géostrophique s'installe. En présence d'une côte, les vitesses normales à la côte s'annulent et l'écoulement se fait parallèlement à la côte dans la direction imposée par le signe du paramètre de Coriolis. C'est pourquoi l'écoulement de l'eau Méditerranéenne en Atlantique se fait vers la droite à la sortie du détroit de Gibraltar. Différentes configurations idéalisées de courant sont également proposées dans des modèles en couches, et l'intérêt d'utiliser des courants de vorticité potentielle uniforme est souligné. Après cette partie descriptive sur les profils de vitesse des courants de gravité, l'auteur s'intéresse aux problèmes de stabilité associés et propose des solutions analytiques par linéarisation des équations du mouvement autour d'un écoulement de base. Il est notamment montré qu'un écoulement présentant deux fronts de vorticité potentielle est presque toujours déstabilisé par une perturbation qui couple les deux fronts. De nombreuses expériences de laboratoire sont présentées pour illustrer ces instabilités. Les références sur lesquelles s'appuient cette revue sont reprises et complétées par des études plus récentes dans ce qui suit.

Les premières études théoriques consacrées aux instabilités de courants côtiers utilisaient des courants uniformes dans des modèles quasi-géostrophiques. Mysak (1977) a utilisé le modèle de Phillips (1954) dans un canal avec une pente de fond pour modéliser le sous-courant Californien. Il obtient un mode vortical lié à la pente de fond. Mysak et al (1981) regardent les modifications apportées à cette instabilité par la modification des conditions aux frontières. La suppression de la frontière au large ou le remplacement du trait de côte par une seconde pente topographique introduit un mode barotrope supplémentaire mais affecte peu le mode barocline déjà identifié. Ikeda (1983) a étendu cette étude à un modèle à 3 couches, et a mis en évidence une instabilité supplémentaire liée à un mode barocline intensifié en surface.

Plus de dix ans après, ces études ont été généralisées à des écoulements représentés par des bandes de vortacité potentielle uniforme. Des études barotropes tout d'abord, avec deux bandes de vortacité et une pente topographique dans (Chérubin et al, 1996). Pour un courant prograde, il est démontré que l'instabilité barotrope augmente avec la pente. Shimada et Kubokawa (1997) ont étudié numériquement le comportement de ce genre de courants et ont montré que pour des bandes de vortacité potentielle opposée, l'instabilité peut conduire à l'éjection de paires de vortex vers le large. Pour un fort cisaillement de courant dans la bande côtière, les vortex issus de la seconde bande restent piégés à la côte alors que pour un cisaillement important dans la bande extérieure, des méandres apparaissent. Grimshaw et Yi (1991) ont montré par des études numériques que le paramètre clé dans la détermination des régimes issus de l'instabilité d'un front de vortacité potentielle barotrope sur une pente est le ratio entre la vortacité potentielle "ambiante" et le saut de vortacité potentielle à travers le front. Le problème de bandes de vortacité non parallèles a été abordé par Send (1989). Il était montré que sur une pente de fond, l'instabilité produit des vortex qui restent piégés près de la côte.

Plusieurs études se sont ensuite intéressées à des fronts de vortacité potentielle baroclines le long d'une côte, toujours dans des modèles quasi-géostrophiques. Capet et Carton (2002) traitent l'instabilité de 2 bandes de vortacité potentielle uniforme superposées le long d'une côte. Ils examinent la façon dont l'eau de surface peut se séparer par instabilité barocline ou forçage topographique. Différents régimes non-linéaires sont mis en évidence, il est montré que leur répartition dans l'espace des paramètres dépend peu du taux de croissance de la perturbation subie par le courant, mais que le détachement des tourbillons du courant se produit à une distance de la côte où la vitesse du courant moyen est égale à la vitesse de phase des perturbations (ligne critique). Capet et al (2002) utilisent un système similaire pour tester l'influence du transport et de la largeur du courant sur sa stabilité. Il est montré que les débits les plus faibles conduisent à la génération des tourbillons les plus gros avec le taux de croissance le plus rapide, et une

explication à la variabilité de la taille des meddies issus de l'outflow méditerranéen est proposée.

Les limitations associées à la quasi-géostrophie ont amené d'autres auteurs à se pencher sur les instabilités de modèles frontaux géostrophiques. Les instabilités rencontrées dans ces modèles vont être comparables aux instabilités des modèles quasi-géostrophiques en termes de mécanismes puisque tous ces modèles reposent sur l'hypothèse de géostrophie et filtrent donc les ondes de gravité. Reszka et Swaters (1999) traitent le cas d'un courant côtier de surface par des simulations numériques dans un modèle frontal géostrophique bi-couche. Ils observent l'apparition de filaments et de vortex le long de la ligne d'outcrop. Les mêmes auteurs s'intéressent au cas d'un courant de fond sur une pente dans un modèle du même type (2001). Il est montré par des considérations en termes de réservoirs d'énergie potentielle que les instabilités se développent préférentiellement sur la partie du front située vers le bas de la pente.

Pour s'intéresser aux fronts de densité, auxquels sont associés des ondes de gravité, il est nécessaire de se placer dans le formalisme shallow-water. La transition entre les modèles géostrophiques et shallow-water est faite dans Boss et al (1996). Les auteurs s'intéressent à un courant représenté par un front de vorticité potentielle dans un modèle à deux couches. Deux types d'instabilités sont comparées, la classique instabilité barocline résultant de l'interaction d'ondes vorticales et similaire à celle rencontrée en quasi-géostrophie, et une instabilité résultant de l'interaction entre une onde de gravité et un mode vortical. Paldor et Ghil (1991) s'intéressent aussi à la stabilité d'un écoulement côtier dans un modèle shallow-water, ils montrent que le taux de croissance de l'instabilité est lié à la vitesse du courant. Parmi les études sur les fronts de densité, Paldor et Ghil (1997) utilisent un modèle une couche et demie, ce qui a pour effet de supprimer des modes de gravité associés à l'interface. L'épaisseur de la couche supérieure est en $\tanh(y)$ et peut tendre vers une situation d'outcrop. Le mode instable qui apparaît dans leur modèle est un mode purement vortical. Shi et Roed

(1999) s'intéressent aux instabilités liées aux upwellings en utilisant une modélisation en couches inhomogènes (voir la description du cas de référence sur la figure 1.9). Trois modes instables apparaissent : (1) un mode purement vortical correspondant à l'instabilité barocline, (2) un mode mixte résultant d'un couplage entre un mode de gravité dû au gradient de densité et un mode vortical dû au cisaillement de courant vertical, (3) un mode barotrope. Des simulations avec des paramètres réalistes sont conduites avec un $\Delta\rho$ de $1kg.m^3$ à travers le front, et un rayon de Rossby estimé à $8 km$. Ces valeurs ne sont pas incompatibles avec les ordres de grandeurs rencontrés le long du front d'Ouessant. Le mode le plus instable a une longueur d'onde de $15 km$ et un temps de croissance caractéristique de 1.7 jours. En supprimant le gradient de densité dans la couche supérieure, le mode mixte disparaît, et toutes les longueurs d'ondes inférieures à $40 km$ sont stables. L'instabilité frontale est donc liée à de courtes longueurs d'ondes.

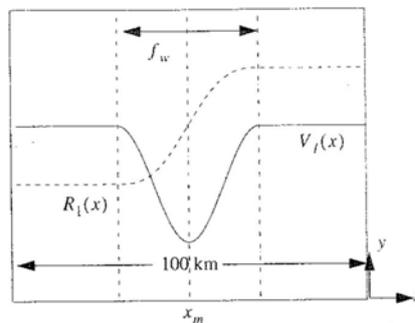


Figure 1.9 — Cas de référence étudié par Shi et Roed (1999), R représente la densité dans la couche supérieure, V la vitesse dans cette même couche.

A ces études analytiques ou numériques, il faut ajouter quelques expériences de laboratoire qui aident à mieux comprendre les caractéristiques des courants de densité. Jacobs et al (1999) déterminent la stabilité d'un courant en fonction de paramètres adimensionnels classiques (Rossby, Burger, Ekman) à partir d'expériences de laboratoire. Yecko et Meacham (1998), mesurent des vitesses de propagation du courant le long d'un trait de côte et trouvent un accord entre leurs expérimentations et la théorie analytique. En revanche, ils n'expliquent pas les instabilités généralement observées le

long des courants de pente. Enfin, Lentz et Helfrich (2002) se basent également sur des expériences de laboratoire pour extrapoler des vitesses de propagation de courant le long d'une pente.

Toutes les études évoquées jusqu'ici s'intéressent à la déstabilisation de courants par des mécanismes liés aux propriétés intrinsèques de l'écoulement ou à la présence d'une pente de fond qui influe sur la vorticité potentielle du courant. Mais dans le cas de courants côtiers, l'instabilité peut également être le résultat d'un phénomène extérieur, comme la forme de la côte ou un accident topographique.

Pichevin et Nof (1996 et 1997) se sont intéressés à l'effet d'un changement de direction du trait de côte sur un courant. Ils démontrent analytiquement dans un modèle à gravité réduite qu'un courant qui suit une côte présentant un angle droit ne peut bifurquer de façon simple et stationnaire pour suivre la côte car cela conduirait à une contradiction en termes de bilan de quantité de mouvement. Pour compenser la force centrifuge qu'il subit lorsqu'il "tourne" pour suivre la côte, le courant alimente un tourbillon qui peut finir par se détacher par effet β ou par advection. La taille du tourbillon ainsi formé ne dépend plus des propriétés thermohalines du courant, mais des équilibres de quantité de mouvement. Ce mécanisme peut jouer un rôle dans la zone de réflexion du courant des Aiguilles notamment, où des tourbillons faisant jusqu'à 400 km de diamètre sont observés. Toujours dans l'idée d'une irrégularité du trait de côte, D'Asaro (1988) propose un autre processus de détachement de tourbillons. Près de la côte, la friction modifie la vorticité relative dans la couche limite. Si le courant se sépare de la côte, la vorticité présente dans cette couche limite va se transformer en tourbillons.

D'autres mécanismes sont décrits pour expliquer la déstabilisation du courant au niveau d'un canyon et sont généralement appliqués à l'exemple du sous-courant méditerranéen au niveau du canyon de Portimao. Chérubin et al (2002) étudient la formation de méandres dans la veine d'eau supérieure du sous-courant méditerranéen au

niveau du canyon. La “chute” dans le canyon de l’écoulement de la veine inférieure est étudiée par Serra (2004). Il montre que ce phénomène peut induire l’apparition d’une circulation cyclonique qui conduira à la formation d’un tourbillon. Un événement topographique peut également être le déclencheur ou un amplificateur d’une instabilité barocline ou barotrope.

Pour finir sur cette revue de la littérature des instabilités de courants côtiers, des études mixtes reliant les propriétés intrinsèques de l’écoulement à la forme de la côte ou de la bathymétrie existent. Dans “The Reddy Maker” (2002), Nof et al proposent une condition reliant les propriétés physiques des masses d’eaux et la pente du fond, selon laquelle un courant ne peut plus exister sous forme continue et se scinde en une suite de tourbillons. Ce critère est appliqué au courant de densité issu de l’écoulement de la Mer Rouge dans l’océan Indien, zone dans laquelle la bathymétrie permet de satisfaire ces conditions. Enfin, Nof (1990) approche le problème de la stabilité liée à l’intermittence du courant. Dans un papier intitulé “Lenses generated by intermittent currents”, il propose par une étude analytique non-linéaire un mécanisme de fission du courant en allée de tourbillons, basé sur l’irrégularité du transport du courant, qu’il appuie par des expériences en laboratoire.

Ce dernier article traite du caractère instationnaire du courant, et c’est une innovation par rapport à la multitude d’études analytiques ou numériques, linéaires ou non-linéaires qui s’intéressent toutes à l’étude de phénomènes associés à des courants constants dans le temps. En effet, de nombreuses simplifications s’imposent lorsque l’on souhaite aborder un problème aussi complexe que celui de l’instabilité de courants océaniques. En particulier, la simplification du courant côtier en courant stationnaire élimine la possibilité d’instabilité paramétrique, que nous décrivons ci-dessous. Or, deux articles publiés récemment (Pedlosky et Thomson (2003), Poulin et al (2003)) montrent que cette instabilité paramétrique est importante pour les jets instationnaires dans le contexte de courants océaniques. Notre travail généralisera ce résultat aux courants

côtiers.

1.3.2 Instabilité paramétrique

Introduction

Avec les deux articles évoqués ci-dessus et détaillés dans la section suivante, la notion d'instabilité paramétrique va intervenir. Il est donc nécessaire de préciser quelques éléments de base de ce phénomène avant d'exposer les résultats de ces articles. Cette instabilité a été largement étudiée dans le cas de systèmes physiques simples. Le plus simple est celui d'un pendule dont le point d'attache est soumis à un déplacement vertical périodique. Le dispositif expérimental est décrit sur la figure 1.10.

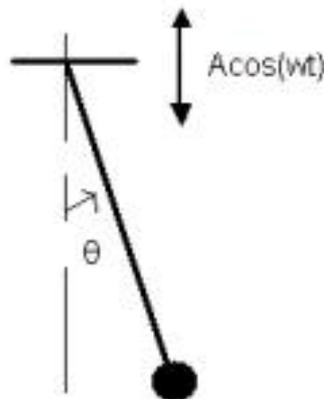


Figure 1.10 — Description du pendule paramétrique.

La position du point d'attache du pendule est donc :

$$z = z_0(1 + \varepsilon \cos(\omega t))$$

avec $\omega = 2\pi f$. L'équation qui régit le mouvement du pendule est connue sous le nom d'équation de Mathieu qui s'écrit sous sa forme générale :

$$\frac{d^2}{dt^2}\phi + (\omega_0^2 + \varepsilon \cos(2\pi ft))\phi = 0 \quad (1.1)$$

Pour $\varepsilon = 0$, l'on se ramène à l'équation du pendule simple non forcé, qui admet une solution oscillante de période ω_0 . Pour un a non nul, on montre que l'équation admet des solutions instables pour des valeurs de f telles que :

$$f = \frac{\omega_0}{n\pi} = \frac{2f_0}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Le mode ayant le taux de croissance le plus élevé est $n = 1$. Cela signifie donc que le pendule peut être déstabilisé si la fréquence du forçage est égale à la moitié de sa fréquence propre, c'est une instabilité sub-harmonique.

Une interprétation physique de cette résonance est proposée dans Berge et al (1984). Le pendule décrit un mouvement de va et vient entre deux points extrêmes, points en lesquels sa vitesse s'annule puis change de signe. En donnant une légère impulsion au pendule chaque fois que sa vitesse s'annule, ce qui revient à un forçage à une fréquence double de sa fréquence propre, on l'écarte peu à peu de son régime d'oscillation régulière, allant jusqu'à déstabiliser complètement le mouvement. Cela est rationalisé en terme d'énergie par la considération suivante : au moment où le pendule atteint sa position extrême, sa vitesse, et donc son énergie cinétique, s'annulent. Une légère impulsion sur le pendule à ce moment là provoque donc une augmentation de l'énergie cinétique sans modifier l'énergie potentielle du système.

L'instabilité paramétrique a été aussi étudiée sur des systèmes physiques plus complexes, y compris en mécanique des fluides. Kumar et Tuckerman (1994) traitent de l'instabilité paramétrique à laquelle est soumise l'interface entre deux fluides dans une cuve subissant une vibration verticale. La prise en compte de la viscosité empêche de réduire le système à l'équation de Mathieu présentée ci-dessus, la résolution du problème est donc plus complexe. Il existe encore d'autres études du même genre sur des systèmes physiques réels, notamment sur les problèmes de résonance paramétrique d'une structure offshore soumise à l'effet d'une houle régulière (voir Rho et al (2005)).

L'instabilité paramétrique en océanographie ; étude de mécanismes

Les deux articles évoqués à la fin de la section 1.3.1 traitent de l'instabilité paramétrique de jets océanique.

Pedlosky et Thomson (2003) traitent le cas d'un écoulement bi-couche uniforme dans un canal sur un plan β (modèle de Phillips (1954)). L'écoulement est régi par les équations quasi-géostrophiques, la vitesse du courant barocline varie périodiquement selon l'équation :

$$U = U_0(1 + \varepsilon G + \varepsilon^2 H \cos(\omega t)) \quad (1.2)$$

H et G sont des constantes d'ordre 1 et représentent respectivement un léger incrément dans le courant uniforme et l'amplitude de la variation périodique de l'écoulement de base. Le paramètre U est critique dans la stabilité de l'écoulement de base. Soit U_c la valeur critique du courant au dessus de laquelle le courant est instable barocliniquement. L'on se place alors dans un cas tel que $U_0 < U_c$. L'écoulement de base (c'est à dire avec $H = G = 0$) est stable. L'intérêt de cette formulation est qu'elle permet, selon la valeur de G d'étudier l'impact de la variation périodique à la fois sur un écoulement subcritique et sur un écoulement super-critique. Il est montré que certaines valeurs de ω tendent à stabiliser un écoulement super-critique et qu'inversement il est également possible de déstabiliser un écoulement subcritique. Il est notamment montré qu'en notant σ la fréquence naturelle d'oscillation du système stable, les fréquences pour lesquelles il est possible d'obtenir une déstabilisation sont de la forme :

$$\omega = \frac{2\sigma}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Le phénomène de l'instabilité paramétrique est donc retrouvé dans un cadre océanique.

Poulin et al (2003) arrivent à des conclusions similaires sur un système légèrement différent, puisqu'ils s'intéressent à un modèle barotrope présentant un ou plusieurs fronts de vortacité potentielle. Là encore, le formalisme quasi-géostrophique est utilisé. Le paramètre variable est cette fois la valeur du saut de vortacité potentielle au travers des fronts. Cet article présente une méthode générale de résolution des systèmes dynamiques forcés périodiquement qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{d}{dt}X = (M_0 + \varepsilon M_1 \cos(\omega t)), \quad (1.4)$$

Cette méthode sera expliquée et utilisée dans le chapitre 3 de la thèse.

exemples océaniques

Les deux études précédentes sont purement théoriques et ne s'appuient pas sur une application à des situations expérimentales. Il est donc légitime de se demander quelle est la pertinence physique de ce genre de phénomènes dans l'océan. Il a été montré au début de ce chapitre que des variabilités périodiques existent dans l'océan, mais les échelles de temps de ces systèmes sont elles compatibles avec le mécanisme d'instabilité paramétrique décrit ?

Un premier élément de réponse est apporté par D'Orgeville et Hua (2004), où un cas plus concret est étudié. Les auteurs montrent qu'il peut exister une résonance paramétrique d'ondes d'inertie équatoriales en fonction de la latitude.

Parmi nos exemples, reprenons celui de l'eau Méditerranéenne s'écoulant en Atlantique. Un calcul simple à partir des données montre que les temps de développement des instabilités et les pulsations propres des perturbations et les fréquences de variabilité de l'outflow ne sont pas incompatibles. En effet, Serra (2004) estime la vitesse de phase des ondes de Rossby au voisinage du canyon de Portimao à environ $v_\phi = 0.2 m.s^{-1}$. Comme les instabilités de ces ondes de Rossby sont à l'origine de détachements de tourbillons, leur longueur d'onde peut être estimée à $2D$ où D est le diamètre moyen

d'un tourbillon détaché. Pour un D de l'ordre de 100 km, on peut estimer la période de l'onde par :

$$T = \frac{2D}{v_\phi} = 10^6 s = 11.5 \text{ jours}$$

La théorie prédit que l'instabilité paramétrique se déclenche pour une fréquence de forçage égale à 2 fois la fréquence propre de l'onde. Pour la période calculée ci-dessus, cela donne une période de forçage de l'ordre de 6 jours. Cette période est compatible avec les périodes issues de l'analyse des données dont émergeait une variabilité de 4 à 6 jours. Cela ne signifie bien évidemment pas que l'on s'attend à pouvoir conclure facilement sur l'existence d'une résonance paramétrique comme source de l'instabilité, mais cela montre qu'*a priori* il n'est pas absurde de considérer que ce mécanisme peut jouer un rôle dans l'instabilité.

1.4 Equations utilisées

Pour étudier l'instabilité paramétrique d'un courant nous allons devoir utiliser des représentations analytiques simplifiées de ce courant. L'étude bibliographique a fait ressortir trois formalismes différents retenus par les auteurs pour des études de stabilité de courants côtiers : quasi-géostrophique, frontal géostrophique et shallow-water. Ces trois formulations mathématiques d'un écoulement océaniques seront utilisées successivement dans cette thèse. Les équations shallow-water seront décrites et manipulées dans le dernier chapitre. Les travaux des chapitres 2 et 3 seront réalisés sur des écoulements géostrophiques. L'équilibre géostrophique s'obtient en négligeant les termes d'accélération relatives par rapport à l'accélération de Coriolis dans les équations shallow-water :

$$-f\mathbf{k} \times \mathbf{U} = -g\nabla \cdot \eta \tag{1.5}$$

où η représente la déviation de l'interface du fluide considéré (surface libre ou interface entre couches). Il est donc naturel d'introduire un paramètre mesurant le rapport entre les ordres de grandeurs de ces deux accélérations. Ce rapport est appelé nombre de Rossby et sera noté dans la suite ε :

$$\varepsilon = \frac{U}{fL} \quad (1.6)$$

où U est un ordre de grandeur de la vitesse et L une échelle caractéristique de l'extension spatiale de l'écoulement. Un écoulement est donc géostrophique dès que $\varepsilon \ll 1$.

Sous l'hypothèse de, géostrophie, il va être possible de distinguer plusieurs "sous-régimes". Il est nécessaire pour cela d'introduire deux paramètres adimensionnels supplémentaires qui vont être le nombre de Burger, Bu , et le rapport d'aspect, λ , définis comme suit :

$$\begin{aligned} Bu &= \frac{gH}{f^2L^2} \\ \lambda &= \frac{\eta}{H} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Bu est le carré du rapport de la taille des mouvements au rayon de déformation de Rossby. Bu représente le ratio des effets gravitationnels (flottabilité) aux effets de rotation d'entraînement. λ mesure l'amplitude de la déviation de l'interface du fluide par rapport à l'épaisseur de la couche. En termes de dimensions, l'équation (4.11) s'écrit :

$$fU = g\frac{\eta}{L} \quad (1.8)$$

qui se transforme en

$$\frac{U}{fL} = g\frac{\eta}{f^2L^2} \quad (1.9)$$

et se résume donc à la relation suivante :

$$\varepsilon = Bu\lambda \quad (1.10)$$

En se fixant un $\varepsilon \ll 1$, faire varier l'un des deux autres paramètres permet alors de décrire les différents “sous régimes” de la géostrophie. Il est commode de faire varier Bu . La figure (1.11) résume ces propriétés.

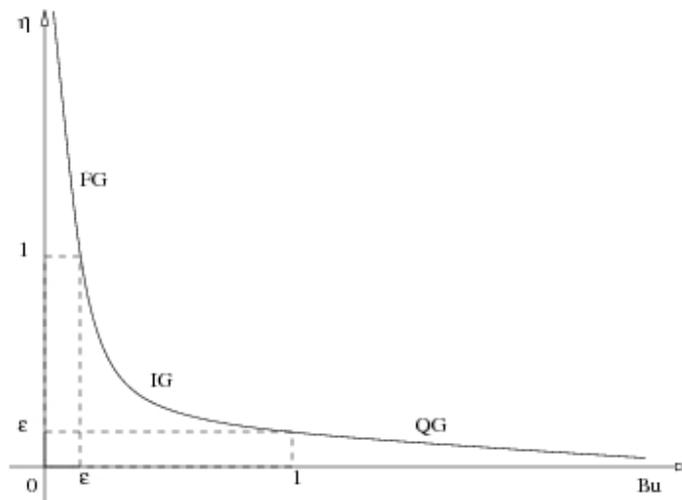


Figure 1.11 — Représentation des différents régimes géostrophiques pour ε fixé

- Pour $Bu > 1$: régime quasi-géostrophique (QG), η est inférieur a ε , les déviations de la surface libre sont donc limitées en amplitude, ce formalisme ne sera pas adapté pour représenter des fronts, en particulier il ne permet pas de représenter une couche dont l’interface intersecte la surface ou le fond.
- Pour $Bu < \varepsilon$: régime frontal géostrophique (FG), cette fois ci les variations d’amplitudes de la surface libre ne sont plus limitées.
- Pour $\varepsilon < Bu < 1$, c’est le régime intermédiaire géostrophique (IG).

Les deux régimes les plus étudiés sont les régimes frontaux et quasi-géostrophiques. Des approximations propres à chaque situation permettent de fournir un jeu d’équations pour chacun de ces modèles et donc de fournir des codes numériques adaptés. Les équations les plus maniables analytiquement sont généralement les

équations QG, elles ont été largement utilisées dans nombre d'études de processus, malgré les fortes limitations qui y sont associées et qui les éloignent souvent de conditions réalistes. Le chapitre suivant présente deux approches de l'instabilité paramétrique, l'une dans un modèle frontal géostrophique, l'autre dans un modèle quasi-géostrophique.

Deux études préliminaires

CE chapitre présente deux études analytiques réalisées sur deux jeux d'équations différents. Le premier travail a fait l'objet d'une publication dans *Journal of Physical Oceanography*, alors que le second a été publié dans *Regular and Chaotic Dynamics*. Le texte des articles est ici repris intégralement et quelques compléments sont ajoutés.

2.1 Une approche dans un cadre frontal géostrophique

Dans cette étude, le travail de Pedlosky et Thomson (2003) est repris et étendu. Les auteurs étudiaient l'instabilité paramétrique dans le cadre d'un écoulement quasi-géostrophique en reprenant le modèle de Phillips (1954). Des résultats similaires sont obtenus ici dans un modèle frontal géostrophique représentant un courant de fond s'écoulant sur une pente. Le modèle utilisé a été dérivé par Swaters (1991) et utilisé depuis dans plusieurs études de courants de fond (Reszka et Swaters (1999, 2001)). Ce modèle offre l'avantage de présenter une formulation analytique relativement simple qui permet de résoudre le problème de l'instabilité paramétrique.

La première partie de l'article est consacrée à l'étude de la stabilité linéaire du problème. L'instabilité est envisagée en termes de résonance d'ondes. Les ondes présentes dans le système sont d'une part une onde de Rossby associée au cisaillement de vitesse verticale et d'autre part une onde de Rossby topographique. L'interface entre les deux couches est une pente linéaire. Trois configurations d'écoulement sont possibles en fonction du rapport entre la pente de l'interface et la pente topographique.

Il est montré que, dans le modèle frontal géostrophique, l'instabilité barocline ne peut se déclencher que dans l'une de ces 3 situations, lorsque la pente de l'interface est supérieure à la pente topographique. Dans le modèle quasi-géostrophique, 2 situations sont favorables à l'instabilité (celles où les gradients méridiens de vorticité potentielle sont de signe opposé). Dans le modèle frontal géostrophique, la différence vient de la suppression de la vorticité relative de fond qui supprime une résonance d'onde. Physiquement, l'énergie potentielle du courant sur la pente de fond favorise la direction aval pour le développement des perturbations.

Dans une seconde partie, une variation périodique est ajoutée dans l'épaisseur de la couche de fond, notée h , qui devient alors :

$$h = h_0 + [1 + \varepsilon^2 G + \varepsilon H \cos(\omega t)]$$

Cette notation similaire à celle utilisée par Pedlosky et Thomson (2003) permet de comparer les résultats de cet article à ceux que nous obtenons ici dans le formalisme frontal géostrophique. Les résultats obtenus sont similaires puisque nous montrons qu'il est possible de déstabiliser paramétriquement un écoulement barocliniquement stable au voisinage de la marginalité. Inversement, il est aussi possible de stabiliser un courant barocliniquement instable.

Baroclinic Instability of Frontal Geostrophic Currents over a Slope

MARC PAVEC AND XAVIER CARTON

Laboratoire de Physique des Océans, UMR6523, IFREMER/CNRS/UBO, Brest, France

GORDON SWATERS

Department of Mathematical Sciences, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada

(Manuscript received 7 January 2004, in final form 13 October 2004)

ABSTRACT

The Phillips problem of baroclinic instability is generalized in a frontal geostrophic model. The configuration used here is a two-layer flow (with quasigeostrophic upper-layer current) over a sloping bottom. Baroclinic instability in the frontal model has a single unstable mode, corresponding to isobaths and isopycnals sloping in the same direction, contrary to the quasigeostrophic model, which has two unstable modes. In physical terms, this is explained by the absence of relative vorticity in the lower (frontal) layer. Indeed, the frontal geostrophic model can be related to the quasigeostrophic model in the limit of very small thickness of the lower layer, implying that potential vorticity reduces to vortex stretching in this layer. This stability study is then extended to unsteady flows. In the frontal geostrophic model, a mean flow oscillation can stabilize an unstable steady flow; it can destabilize a stable steady flow only for a discrete spectrum of low frequencies. In this case, the model equations reduce to the Mathieu equation, the properties of which are well known.

1. Introduction

Baroclinic instability of intense flows has long since been recognized as one of the major sources of meso-scale variability in the atmosphere and oceans. In the ocean, the instability of intense zonal jets of the general circulation (such as the Gulf Stream) has been studied at length, both experimentally and numerically (see Holland and Haidvogel 1980; Kontoyannis and Watts 1994; Flierl et al. 1999). Many other flows, deep or abyssal, with a frontal¹ structure and flowing over a sloping bottom, can be baroclinically unstable. A well-known example is the Mediterranean Water Undercurrents that originate from the watermass exchange at the Straits of Gibraltar between the Atlantic Ocean and the Mediterranean Sea. South of Portugal (near 8°W), this flow is composed of two thin jets of warm and salty water on the Iberian continental slope at 800-m and 1200-m depth; each jet is roughly 200–300 m thick with

velocity maxima in the 0.3–0.5 m s⁻¹ range. This flow structure (over a steep slope) corresponds to noticeable vertical deviations of isopycnal surfaces. As they encounter the Portimão Canyon and Cape Saint Vincent, these MWU undergo baroclinic instability and long-lived anticyclonic eddies (meddies) detach, sometimes accompanied by shallower cyclones. The MWU are also subject to low-frequency variability at their source, the Straits of Gibraltar, also observed downstream (Chérubin et al. 2003). One can wonder if a pulsating source can change the stability properties of a current, rendering it more stable than its time average (i.e., steady) analog.

The aim of this paper is therefore to investigate the baroclinic instability of both steady and unsteady currents over a sloping bottom in a frontal geostrophic model. The choice of this model (as compared with the quasigeostrophic framework) is justified by its ability to handle frontal flows over sloping topography. Though many oceanic currents are narrow jets (e.g., the MWU), we consider here (as a first step) a simplified flow and geometric configuration. A two-layer zonal channel flow is used and the mean flow velocity is chosen uniform horizontally in each layer. We neglect the planetary beta effect, and the bottom slope is constant. This problem is therefore an extension of the Phillips (1954) model, already generalized to time-dependent currents

¹ By “frontal,” we mean “associated with vertical displacement of isopycnal surfaces on the order of the current thickness.”

Corresponding author address: Xavier Carton, LPO, Center IFREMER de Brest, BP 70, 29280 Plouzané, France.
E-mail: xcarton@ifremer.fr

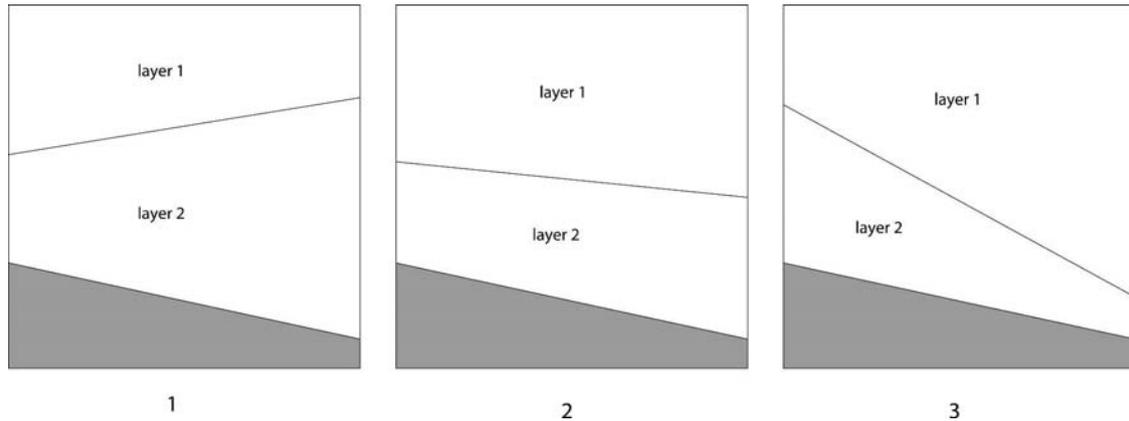


FIG. 1. Three flow/topography configurations for baroclinic instability.

by Pedlosky and Thomson (2003) for quasigeostrophic flows. We recall that in quasigeostrophic theory two unstable modes are found for this problem, one with isobaths and isopycnals sloping in opposite directions (case 1 of Fig. 1) and one with the isobaths and isopycnals sloping in the same direction (case 3). The flow and topography configuration where both layer thicknesses increase in the same direction (case 2) is stable in the quasigeostrophic model.

2. Model equations

The frontal geostrophic model is used here in a two-layer, zonal channel configuration. It includes bottom topography and allows the lower layer to be frontal, while the upper one has only minor variations in thickness. The model equations were first derived in (Swaters 1991) using an expansion in the topographic slope. For simplicity, we retain here the notations used in (Swaters 1998):

$$\nabla^2 \eta_t + J(h + \eta, h_b) + J(\eta, \nabla^2 \eta) = 0 \quad \text{and}$$

$$h_t + J(\eta + h_b, h) = 0, \quad (1)$$

where η is the surface elevation, h is the bottom layer thickness, and h_b is the bottom topography elevation (see Fig. 2). The pressure in the lower layer is $p = h_b + \eta + h$ (in dimensionless form). The Jacobian is defined as usual: $J(A, B) = A_x B_y - A_y B_x$. Velocity in each layer is geostrophic. Note that the surface elevation could be replaced by upper-layer pressure in the case of a rigid lid (see section 3). The channel has width L .

To transpose Phillips' problem with topography into that model, the mean flow U_1 and U_2 must be zonal and uniform in each layer and the corresponding surface elevation $\bar{\eta}$ and lower-layer thickness \bar{h} must vary linearly with latitude. Since only the velocity shear $U_1 - U_2$ is involved in the stability calculation, we can impose

$U_1 = 0$ with no loss of generality. Then we have $\bar{\eta} = 0$,

$$h_b = sy, \quad \text{and} \quad \bar{h} = h_0 + by.$$

In dimensionless form, the vertical shear is $U_1 - U_2 = b + s$. By symmetry, we can choose $s < 0$ and b can be either positive or negative, allowing all configurations described in Fig. 1.

3. Linear instability of steady flow

The stability of the stationary two-layer flow is investigated using a normal-mode perturbation approach:

$$\eta = \eta' \quad \text{and} \quad h = \bar{h} + h',$$

with

$$(\eta', h') = \Re\{\{\alpha(t), \beta(t)\} \exp[i(kx + ly)]\},$$

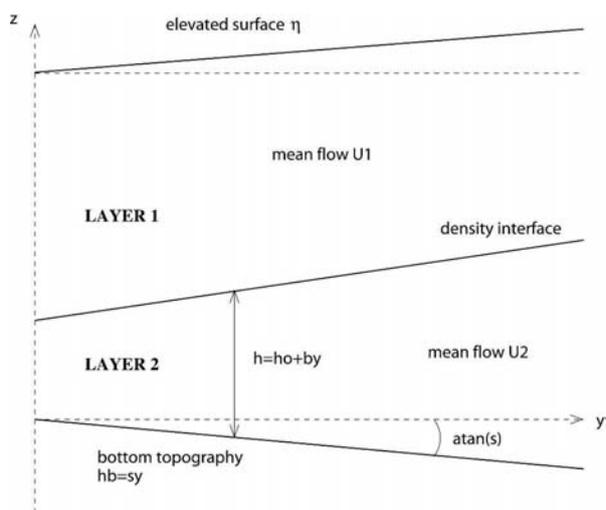


FIG. 2. Configuration and variables for the frontal geostrophic and quasigeostrophic models.

where $\Re(z)$ stands for the real part of the complex number z . The dynamical Eqs. (1) are linearized in the perturbation to yield

$$\partial_t \mathbf{X} = \mathbf{M} \mathbf{X},$$

where \mathbf{M} is a 2×2 matrix, and \mathbf{X} is a vector with components α and β . With $K^2 = k^2 + l^2$, we have

$$\mathbf{M} = ik \begin{pmatrix} \frac{s}{K^2} & \frac{s}{K^2} \\ -b & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Setting now $[\alpha(t), \beta(t)] \sim (\alpha, \beta) \exp(-ikct)$, the linearized perturbation equation can be solved to yield

$$c = c_{\pm} = \frac{-s(K^2 + 1)}{2K^2} \pm \frac{s}{2K^2} \sqrt{\Delta},$$

with $\Delta = (K^2 + 1)^2 - 4K^2(1 + b/s)$. The vector components are then determined by

$$(K^2 - 1 \pm \sqrt{\Delta}) \alpha_{\pm} + 2\beta_{\pm} = 0.$$

The marginal stability condition is obtained by imposing Δ to vanish, rendering the eigenvalues of \mathbf{M} real:

$$(K^2 + 1)^2 - 4K^2 \left(1 + \frac{b}{s}\right) = 0. \quad (3)$$

The stability regimes are plotted in the plane $(K^2, b/s)$ on Fig. 3. We note that only one situation is unstable, that with isopycnals and isobaths sloping in the same direction. Indeed, in the frontal geostrophic model, baroclinic instability is associated with the release of gravitational potential energy due to the down slope motion of the dense current while overlying fluid moves upslope. This creates a preferred direction in the frontal geostrophic model, that described by case 3, where the reservoir of dense fluid lies upslope initially. Mathematically, the integrated perturbation energy equation [Eq. (3.5a) in Swaters (1991)] must have a positive right hand side for baroclinic instability, that is, a net upslope transport of light fluid.

4. Comparison with the quasigeostrophic model

a. Comparison of model equations and of their intrinsic relations

Since the quasigeostrophic approximation filters out fast waves, we do not write the model equations with a free surface elevation but with surface pressure π (we refer to Fig. 2 for the description of the variables in the quasigeostrophic model). Using these notations, the two-layer frontal geostrophic equations are in dimensionless form:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \pi_t + J(h + \pi, h_b) + J(\pi, \nabla^2 \pi) &= 0 \quad \text{and} \\ h_t + J(\pi + h_b, h) &= 0. \end{aligned}$$

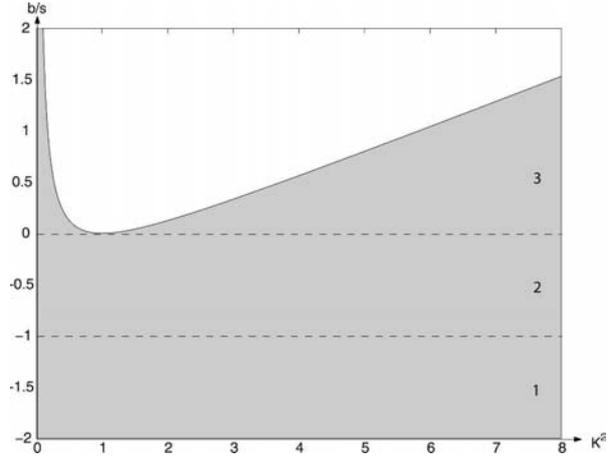


FIG. 3. Baroclinic instability of a uniform baroclinic current in the two-layer frontal geostrophic model. The flow is stable in the shaded area of the $K^2, b/s$ plane and unstable elsewhere. Cases 1, 2, and 3 correspond to the flow/topography configurations of Fig. 1.

The two-layer quasigeostrophic equations are (scaling surface pressure by the upper-layer thickness H_1)

$$(\nabla^2 \pi + h)_t + J(\pi, \nabla^2 \pi + h + h_b) = 0 \quad (4)$$

and

$$\begin{aligned} [\delta \nabla^2 (\pi + h) - h]_t + J[\pi + h + h_b, \delta \nabla^2 (\pi + h) \\ + h_b] - h] = 0, \quad (5) \end{aligned}$$

where $\delta = H_2/H_1$ is the layer thickness ratio. Setting $\delta = 0$, Eq. (5) becomes

$$h_t + J(\pi + h_b, h) = 0,$$

the second frontal geostrophic equation, which subtracted from Eq. (4) provides the first frontal geostrophic equation.

The similarities between the two models result from their derivation from the primitive equation shallow-water (PE-SW) model. This derivation is based on an expansion in Rossby number, followed by a truncation at first order, for the quasigeostrophic (QG) model. The frontal geostrophic (FG) model is derived from the same (PE-SW) equations, by using the bottom slope as a small parameter (with similar effect as the Rossby number). In particular, both systems of equations are quadratic in barotropic pressure and in interface elevation, whereas frontal geostrophic equations for surface flows are cubic in these variables (Benilov and Reznik 1996).² Frontal geostrophic equations for surface flows become quadratic in their variables only when the barotropic mode is strong and takes over the evolution of the interface from the baroclinic mode (Benilov and

² The origin of these cubic terms lies in the degeneracy of the quasigeostrophic equation for the baroclinic mode in the frontal limit when the advecting velocity is essentially baroclinic and geostrophic.

Reznik 1996, and references therein). Such dynamics are then governed by the often-used set of equations

$$\begin{aligned} \nabla^2 \pi_t + J(\pi, \nabla^2 \pi) + \alpha \pi_x &= 0 \quad \text{and} \\ h_t + J(\pi, h) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

where α is a scaled planetary beta effect (see also Dewar and Gaillard 1993). In the present frontal geostrophic model, the lower-layer thickness is advected both by upper-layer (barotropic) pressure gradients and by gradients of bottom topography. Therefore only quadratic terms are present.

The differences between the two models are

- 1) the absence of relative vorticity in the lower layer in the FG model [indeed, in the FG model, the lower-layer velocity scales as the upper one multiplied by $\delta/(1 + \delta)$] and
- 2) the necessity of a finite bottom slope in the FG model since its derivation is based on this parameter (whereas the QG model does not have this limitation).

b. Comparison of instability properties in the two models

To avoid a lengthy comparison of linearized model equations and solution properties, we follow Sakai (1989) or Pichevin (1998) and consider baroclinic instability as the resonance between two layerwise Rossby waves. The upper-layer Rossby wave has phase speed $c_1 = -(b + s)/(K^2 + 1)$ due to the slope of the density interface; the lower-layer Rossby wave has $c_2 = -(b + s) + b/(\delta K^2 + 1)$, a combination of the effects of the sloping interface and of the bottom slope (also including the mean flow). Sakai states that a necessary condition for baroclinic instability is that the two Rossby waves mutually reinforce and thus propagate at the same speed. This leads to

$$\frac{b}{s} = \frac{K^2(1 + \delta K^2)}{1 - \delta K^4}.$$

Therefore, two unstable modes are possible if $\delta \neq 0$ with either sign of b/s . When $\delta = 0$ (the frontal geostrophic case), b/s must be positive for baroclinic instability to occur. Clearly, the disappearance of relative vorticity in the lower layer renders the lower-layer phase speed solely dependent on the bottom slope. In the frontal geostrophic model, baroclinic instability can only occur in case 3 (referring to Fig. 1) where the layerwise waves propagate in the same direction. On the contrary, in case 1, the lower-layer phase speed does not change sign in the FG model (contrary to the QG case), and thus there can be no phase locking nor resonance between waves.

Another approach to compare the instability properties of the two models is to solve numerically the linearized equations of the quasigeostrophic model for

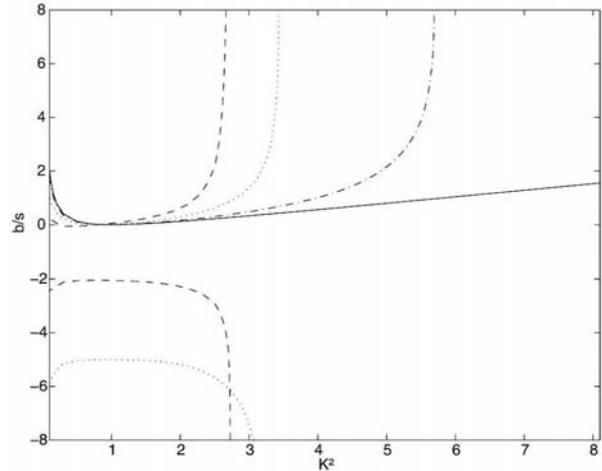


FIG. 4. Marginal stability curves in the K^2 , b/s plane for the uniform baroclinic current in a quasigeostrophic model for various values of δ : dashed lines $\delta = 1$, solid lines $\delta = 0$, $\delta = 0.25$ in dotted lines, and $\delta = 0.025$ in dash-dotted lines.

normal mode perturbations and to decrease δ . The marginal stability curves for various values of δ are superimposed on Fig. 4. Clearly, the unstable mode corresponding to interface and topography sloping in opposite directions progressively disappears when δ diminishes.

Two complementary notes to this analysis are the following:

- 1) bringing the bottom slope to zero in the FG model (though this is not allowed formally) brings growth rates of perturbations to zero also, and
- 2) the vertical structure of the unstable modes is comparable in the QG and FG models. Short waves are intensified in lower-layer thickness, and long waves are intensified in barotropic (or here surface) pressure.

5. Linear instability of oscillating flow

a. Derivation of the evolution equation for the amplitude of the perturbation

The stability of a time-dependent flow is now investigated in the neighborhood of the marginal curve (in the frontal geostrophic model), following the method described in Pedlosky and Thomson (2003). The time-dependent part of the shear is included here in \bar{h} , the lower-layer thickness:

$$\bar{h} = h_0 + [1 + f(t)]by. \quad (7)$$

The time-dependent part of the mean shear can be written (following Pedlosky and Thomson 2003 and references therein):

$$f(t) = \varepsilon^2 G + \varepsilon H \cos(\omega\tau), \quad (8)$$

with $\varepsilon \ll 1$. Here G is an increment of the steady shear in the vicinity of the marginal stability curve and H is the amplitude of its oscillating part. We have also introduced two time scales, τ and T , so that $\partial_t = \partial_\tau + \varepsilon \partial_T$. Unsteady flow instability will take place over the slower time scale T while the forcing of the mean flow occurs on the faster one τ . Note that Eq. (7) is comparable with Eq. (4.1) of Mooney and Swaters (1996), who developed a weakly nonlinear asymptotic analysis for marginally unstable flows for the frontal geostrophic equations (albeit without the time varying part).

To accommodate both quasigeostrophic and frontal geostrophic cases, the algebraic developments are presented hereinafter in generic form. Again the evolution of $\mathbf{X}(h', \pi')$ is given by $\partial_t \mathbf{X} = \mathbf{M}\mathbf{X}$, where the matrix \mathbf{M} is now $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \varepsilon H \cos(\omega\tau)\mathbf{M}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{G}\mathbf{M}_1$, with

$$\mathbf{M}_j = ik \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} \quad (j = 0, 1) \quad (9)$$

and

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha[(s + b)(1 + 2\delta K^2) - b], \\ b_0 &= \alpha[(s + b)(1 + \delta K^2) - b], \\ c_0 &= K^2\alpha[(s + b)\delta(K^2 - 1) - b], \\ d_0 &= K^2\alpha[(s + b)(\delta K^2 + 1) - b], \\ a_1 &= 2\delta K^2 b/\alpha, \quad b_1 = \delta K^2 b/\alpha, \\ c_1 &= [\delta(K^2 - 1) - 1]b/(K^2\alpha), \\ d_1 &= \delta b/\alpha, \quad \text{and} \\ \alpha &= \frac{1}{K^2(1 + \delta + \delta K^2)} \end{aligned}$$

[from Eqs. (4)–(5)], the frontal geostrophic case being recovered for $\delta = 0$. The calculations can be usefully simplified by setting

$$\begin{aligned} B &= X \exp[-ik(a_0 + d_0)t/2] \quad \text{and} \\ N_0 &= M_0 - ik(a_0 + d_0)Id/2. \end{aligned}$$

Expanding $B = B_0 + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2$ we obtain

$$\begin{aligned} \partial_\tau B_0 &= N_0 B_0, \\ \partial_T B_0 + \partial_\tau B_1 &= N_0 B_1 + H \cos(\omega\tau)M_1 B_0, \quad \text{and} \\ \partial_T B_1 + \partial_\tau B_2 &= N_0 B_2 + H \cos(\omega\tau)M_1 B_1 + GM_1 B_0, \end{aligned}$$

and the calculation follows that of Pedlosky and Thomson (2003).

At zeroth order in ε , with the marginality condition $(a_0 - d_0)^2 = -4b_0c_0$, we recover the independence of B_0 from the fast time: $\partial_\tau B_0 = 0$, and the proportionality between layerwise components of B_0 : $B_{01} = (a_0 - d_0)B_{02}/2c_0$.

At first order in ε and setting $\alpha_{11} = a_1(a_0 - d_0)/2 + b_0c_1$ and $\alpha_{12} = b_1(a_0 - d_0)/2 + b_0d_1$, we have

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{-ikH}{\omega^2} [ik \cos(\omega\tau)(\alpha_{11}B_{01} + \alpha_{12}B_{02}) \\ &\quad - \omega \sin(\omega\tau)(a_1B_{01} + b_1B_{02})] \quad \text{and} \\ B_{12} &= \frac{1}{ikb_0} \left[\frac{dB_{01}}{dT} - \frac{k^2H}{\omega} \sin(\omega\tau)(\alpha_{11}B_{01} + \alpha_{12}B_{02}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{ikB_{11}}{2}(a_0 - d_0) \right]. \end{aligned}$$

At second order in ε , the secular terms in the equation

$$\partial_T B_1 - H \cos(\omega\tau)\mathbf{M}_1 B_1 - \mathbf{G}\mathbf{M}_1 B_0$$

must vanish in some integral sense (by averaging over the period of fast variation). Substituting the expressions for the first-order terms in the resulting equation leads to the slow time variation of the zeroth-order amplitude:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 B_{01}}{dT^2} + k^2[b_0c_1 - d_1(a_0 - d_0)/2] \\ &\times \left[\frac{k^2 H^2}{2\omega^2} \left(\alpha_{11} - \alpha_{12} \frac{a_0 - d_0}{2b_0} \right) + G \right] B_{01} = 0 \quad (10) \end{aligned}$$

(obviously B_{02} satisfies the same equation).

b. Interpretation in the frontal geostrophic case

In the frontal geostrophic case, Eq. (10) becomes

$$\frac{d^2 B_{01}}{dT^2} + \frac{k^2 bs}{K^2} \left(\frac{k^2 H^2}{2\omega^2} \frac{bs}{K^2} - G \right) B_{01} = 0,$$

leading to the condition for instability

$$\frac{k^2 bs}{2\omega^2 K^2} H^2 < G. \quad (11)$$

Then two cases must be investigated:

- 1) For a subcritical flow ($G < 0$), this condition cannot be met because $b/s > 0$ in the vicinity of the marginal curve. A high- or medium-frequency oscillation cannot destabilize a stable flow.
- 2) For a supercritical flow ($G > 0$), an unstable steady flow can be stabilized by a mean flow pulsation as shown by Fig. 5.

To investigate the influence of a low-frequency oscillation on the stability of a subcritical flow in the frontal geostrophic model, we have to rescale the pulsation ω as $\varepsilon\omega$ and set $\delta(T) = \varepsilon^2[G + H \cos(\omega T)]$ (as in Pedlosky and Thomson 2003). The expansion in ε leads to the well-known Mathieu equation

$$\partial_T^2 B_0 - \frac{k^2 bs}{K^2} [G + H \cos(\omega T)] B_0 = 0$$

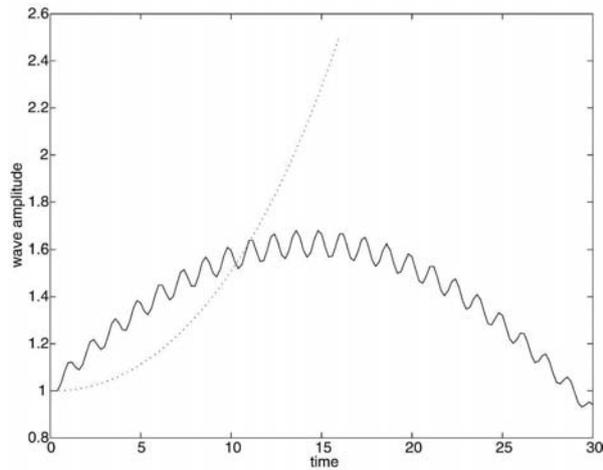


FIG. 5. Time evolution of wave amplitude obtained by integration of the Mathieu equation with $K^2 = 3$, $b = 1$, $s = 3$, and $k = 1$ for $G = 0.01$, $H = 0.8$, and $\omega = 5$; the dotted line shows the corresponding evolution of the unstable normal mode of the stationary flow.

(Bender and Orszag 1978, 560–566), showing instability for a discrete spectrum of frequencies

$$\omega = \frac{2}{n} \sigma, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \text{and} \quad \sigma = \left(-\frac{kbs}{K^2} G \right)^{1/2},$$

when $G < 0$. This equation can be integrated numerically and its solution can be compared with that of the steady problem. Figure 6 shows the destabilization of a linearly stable steady flow by a low-frequency oscillation.

c. Comparison with the quasigeostrophic case

Here, we return to the quasigeostrophic model, using the complete expressions for a_j , b_j , c_j , and d_j given in

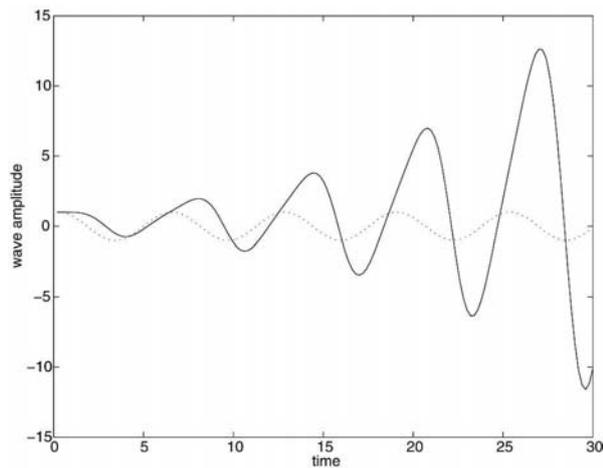


FIG. 6. As in Fig. 5 but for $G = -1$, $H = 1$, and $\omega = 1$ (first critical frequency, $n = 1$); the dotted line shows the corresponding evolution of the stable normal mode of the stationary flow.

section 5a. We study the instability of the unsteady flow in the transition regime between the quasigeostrophic and frontal geostrophic models, that is, when $\delta \rightarrow 0$.

First, since the instability occurs in the vicinity of the marginal stability curve for steady flow, we expand the marginal stability condition $(a_0 - d_0)^2 = -4b_0c_0$ in powers of $\delta \ll 1$. Keeping only linear terms in δ , we obtain

$$\theta^2[(1 - K^2)^2 + 2\delta(2K^4 - 7K^2 - 1)] + 2K^2\theta[-2 + \delta(K^4 + K^2 + 2)] - 4K^2\delta = 0,$$

with $\theta = s/b$. Moreover, Fig. 4 shows that, in the limit of small wavenumbers, marginal stability occurs for both signs of b/s when δ decreases. Neglecting terms in $K^n \delta^m$ with $(n, m) > 1$, we have

$$\theta_{1,2} \sim \frac{2K^2}{(1 - K^2)^2} [2; -\delta/2].$$

For $\delta = 0$, we recover the positive value of b/s . For finite δ , a negative value of b/s exists, the module of which grows as δ decreases (see again Fig. 4).

Now, for both signs of b/s , we inspect how the term

$$\left(b_0c_1 + d_1 \frac{d_0 - a_0}{2} \right) \left[\frac{k^2 H^2}{2\omega^2} \left(\alpha_{11} + \alpha_{12} \frac{d_0 - a_0}{2b_0} \right) + G \right]$$

can change sign, again in the limit of small δ and near marginality. This corresponds to changes from stability to instability for the oscillating flow.

The first term $T_1 = b_0c_1 + d_1 d_0 - a_0/2$ reduces to

$$T_1 = \frac{b^2}{K^2} \left[\theta \left(-1 + \frac{\delta}{2} + 2\delta K^2 + \frac{\delta}{K^2} \right) + \delta K^2 \right]$$

when only linear terms in δ are kept. For $b/s > 0$, we have $\theta = 4K^2/(1 - K^2)^2 + O(\delta)$ so that $T_1 \sim -4b^2/(1 - K^2)^2 + O(\delta) < 0$. For $b/s < 0$ and small K , we have $\theta \sim -\delta/(1 - K^2)^2$ so that $T_1 = \delta K^2 [1 + 1/(1 - K^2)^2] > 0$. In both cases, T_1 does not change sign near marginality and therefore does not contribute to a transition from stability to instability. The second term

$$T_2 = \frac{k^2 H^2}{2\omega^2} \left(\alpha_{11} + \alpha_{12} \frac{d_0 - a_0}{2b_0} \right) + G$$

can be written

$$T_2 = \frac{k^2 H^2 b^2}{2\omega^2 K^2} \left[\theta(-1 + 2\delta + \delta K^2) - 2\delta K^2 + \frac{2\delta}{K^2 - 1} \right] + G.$$

For $b/s > 0$, we have $\theta = 4K^2/(1 - K^2)^2 + O(\delta)$ near the marginal curve so that $T_2 \sim G - 2k^2 H^2 b^2 / [\omega^2 (1 - K^2)^2]$, which can change sign and therefore contribute to the stabilization of an otherwise unstable steady flow as in the frontal geostrophic model. For $b/s < 0$, and

again for small K , the expression for T_2 near the marginal stability curve of the steady flow is

$$T_2 = \frac{k^2 H^2 b^2}{2\omega^2 K^2} \left[\frac{\delta K^2}{(1 - K^2)^2} + \frac{2\delta}{(K^2 - 1)} - 2\delta K^2 \right] + G$$

or

$$T_2 = \frac{-\delta k^2 H^2 b^2}{\omega^2 K^2} + G$$

for long waves, so that stabilization of an unstable steady flow by a small oscillatory component requires increasingly low frequencies as δ goes to zero.

In summary, parametric instability in the quasigeostrophic model is allowed near the marginal stability curve for $b/s > 0$ as $\delta \rightarrow 0$, while it requires increasingly low frequencies of the oscillatory component for $b/s < 0$ in the long wave limit, again as $\delta \rightarrow 0$. In that case, rescaling of ω must be performed as in section 5b. When $\delta = 0$, parametric instability leads to stabilization of supercritical flows with $b/s > 0$ as shown previously.

6. Conclusions and perspectives

A generalized Phillips problem (the baroclinic instability of a horizontally uniform, vertically sheared current in a two-layer fluid) was studied in a frontal geostrophic model for bottom flows over topography. Contrary to the quasigeostrophic model, the frontal geostrophic model allows only one unstable mode for steady bottom flows, corresponding to like-signed isopycnic and topographic slopes. In physical terms, this corresponds to the release of available potential energy of the mean flow lying upslope. Formally, it was shown that this frontal model is the limit of the quasigeostrophic model when the lower-layer thickness becomes very small. It was also mentioned that this frontal geostrophic model retains only quadratic terms in its dynamical equations since the density interface evolution is governed by barotropic and topographic flow advection. A simple stability analysis showed that the resonance of Rossby waves vanishes for opposite-signed topographic and isopycnic slopes when the lower-layer thickness becomes negligible; this is due to the absence of relative vorticity in the lower layer. This explains why only a single unstable mode exists for steady, frontal geostrophic, bottom flows.

This study was then extended to unsteady flows having an oscillatory component. A multiple time-scale expansion was used to obtain the slow time evolution of the amplitude of the perturbation. In the frontal geostrophic model, an unstable steady flow can be stabilized by a mean flow pulsation, and a subcritical flow can be destabilized by a low-frequency oscillation for a discrete spectrum of frequencies. In the limit of small lower-layer thickness, the quasigeostrophic model also allows stabilization of otherwise unstable steady flows

by an oscillatory component for like-signed isopycnic and topographic slopes. For opposite signed slopes, effects of the oscillatory component on flow stability can only occur for increasingly low frequencies, in the long wave domain, as the lower-layer thickness decreases to zero. For subcritical flows with low-frequency pulsation, the slow time evolution of the variables is governed by a Mathieu equation.

There are interesting extensions of this work:

- 1) *The case of a frontal geostrophic surface flow.* For such flows, the dynamical equations most often retain cubic terms and lead to differential equations with nonconstant coefficients for the linear stability problem.
- 2) *The application of the present theory to the Mediterranean water outflow in the Gulf of Cadiz, a frontal current propagating on the Iberian continental slope.* In the wavelet analysis of current-meter recordings of this outflow upstream of Portimão Canyon, Serra (2004) has identified oscillations with periods ranging between 6 and 14 days. Future work will quantify how much this oscillation can modify the baroclinic instability of this flow near Portimão Canyon, and if it may control meddy formation.

Acknowledgments. The first author was supported during the course of this work by a Ph.D. grant from the French Ministry of Defence (DGA/SREA). The second author acknowledges funding by IFREMER. Two anonymous referees are warmly thanked for their fruitful suggestions.

REFERENCES

- Bender, C. M., and S. A. Orszag, 1978: *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, 593 pp.
- Benilov, E. S., and G. M. Reznik, 1996: The complete classification of large-amplitude geostrophic flows in a two-layer fluid. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **82**, 1–22.
- Chérubin, L., N. Serra, and I. Ambar, 2003: Low-frequency variability of the Mediterranean Undercurrent downstream of Portimao Canyon. *J. Geophys. Res.*, **108**, 3058, doi:10.1029/2001JC001229.
- Dewar, W. K., and C. Gaillard, 1993: The dynamics of barotropically dominated rings. *J. Phys. Oceanogr.*, **24**, 5–29.
- Flierl, G. R., X. J. Carton, and C. Messenger, 1999: Vortex formation by unstable oceanic jets. *ESAIM: Proc. Fourth Int. Workshop on Vortex Flows*, Vol. 7, Paris, France, SMAI, 137–150.
- Holland, W. R., and D. B. Haidvogel, 1980: A parameter study of the mixed instability of idealized ocean currents. *Dyn. Atmos. Oceans*, **4**, 185–215.
- Kontoyannis, H., and D. R. Watts, 1994: Observations of the variability of the Gulf-Stream path between 74°W and 70°W. *J. Phys. Oceanogr.*, **24**, 1999–2013.
- Mooney, C. J., and G. E. Swaters, 1996: Finite amplitude baroclinic instability of a mesoscale gravity current in a channel. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **82**, 173–205.
- Pedlosky, J., and J. Thomson, 2003: Baroclinic instability of time dependent currents. *J. Fluid Mech.*, **490**, 189–215.

- Phillips, N. A., 1954: Energy transformations and meridional circulations associated with simple baroclinic waves in a two-level quasi-geostrophic model. *Tellus*, **6**, 273–286.
- Pichevin, T., 1998: Baroclinic instability in a three layer flow: A wave approach. *Dyn. Atmos. Oceans*, **28**, 179–204.
- Sakai, S., 1989: Rossby-Kelvin instability: A new type of ageostrophic instability. *J. Fluid Mech.*, **202**, 149–176.
- Serra, N., 2004: Observations and numerical modeling of the Mediterranean outflow. Ph.D. thesis, Faculdade de Ciencias, Universidade de Lisboa, Portugal, 234 pp.
- Swaters, G. E., 1991: On the baroclinic instability of cold-core coupled density fronts on a sloping continental shelf. *J. Fluid Mech.*, **224**, 361–382.
- , 1998: Numerical simulations of the baroclinic dynamics of density-driven coupled fronts and eddies on a sloping bottom. *J. Geophys. Res.*, **103**, 2945–2961.

2.2 Une approche dans un cadre quasi-géostrophique

La configuration utilisée ici sera reprise et largement étendue dans le chapitre suivant. Cet article représente une première approche de la configuration quasi-géostrophique dans laquelle le courant est représenté par la superposition de deux veines de vortacité potentielle uniforme. Par rapport à l'étude précédente, un cisaillement horizontal de vitesse est donc introduit, ainsi que le confinement du courant près de la côte. La variation périodique source de l'instabilité paramétrique est introduite indifféremment sur la vortacité potentielle ou sur le transport barocline de l'écoulement. Il est montré que ces deux considérations, bien que physiquement différentes, mènent à des jeux d'équations similaires. Un forçage périodique de l'une ou l'autre de ces quantités à un multiple de la demie fréquence propre du système pourra être cause d'instabilité paramétrique. Une intégration numérique du système linéaire est effectuée pour déterminer les zones d'instabilité en fonction des paramètres du forçage ω et ϵ . L'influence du transport barocline sur l'instabilité paramétrique est également étudiée. Il est montré que pour un transport barocline nul, un flot subcritique peut toujours être déstabilisé, alors que pour un transport barocline non-nul, ce phénomène est absent dans la limite de très longues ou très courtes longueurs d'ondes, ainsi que pour un jet très étroit.

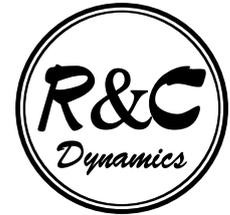
Le calcul des vitesses associées à l'état stationnaire effectué dans le papier présente deux erreurs. Tout d'abord une erreur typographique est présente dans la définition du paramètre γ qui est défini comme le rayon interne de déformation, et qui doit être pris comme l'inverse de ce rayon. Ensuite, une erreur a été faite dans les coefficients de la vitesse barocline, erreur due à une confusion dans la recopie des calculs, faits dans deux cas différents. Ces calculs seront repris et corrigés dans le chapitre suivant. Cette erreur ne remet cependant pas en cause les résultats obtenus dans ce papier, puisque le calcul d'instabilité est fait en utilisant de manière symbolique les coefficients de la

matrice du système et non en explicitant à chaque pas ces coefficients, ce qui aurait propagé l'erreur tout au long du calcul.

L'argument utilisé dans cet article pour démontrer l'instabilité paramétrique repose sur une quantité analytique issue des équations et appelée le Wronskien. Cet outil est régulièrement utilisé lors d'études d'instabilité paramétrique (voir Poulin et al (2003) par exemple), mais est un outil purement théorique qui masque les caractéristiques physiques du phénomène mis en jeu. Là encore, une autre démonstration de l'existence de la résonance paramétrique sera proposée dans le chapitre suivant.

M. PAVEC, X. CARTON

Laboratoire de Physique des Océans
IFREMER, BP70 - 29280 Plouzané
UBO 6, avenue Le Gorgeu
BP809 - 29285 Brest Cedex, France
E-mail: Marc.Pavec@ifremer.fr
E-mail: Xavier.Carton@ifremer.fr



PARAMETRIC INSTABILITY OF A TWO-LAYER WALL JET

Received October 7, 2004

DOI: 10.1070/RD2004v009n04ABEH000292

The parametric instability of a wall jet, with time-varying potential vorticity or transport of the baroclinic mean flow, is studied in a two-layer quasi-geostrophic model. This wall jet is composed of two superimposed strips of uniform potential vorticity, and the layer thicknesses are equal. The steady flow is stable with respect to short waves and its domain of linear instability grows with stratification. The time-dependent flow evolution is governed by a Hill equation which allows parametric instability. This instability indeed appears in numerical flow calculations. It is favored near the marginal stability curve of the steady flow. Near that curve, the evolution equation of the flow is calculated with a multiple time-scale expansion. This equation shows that for zero baroclinic transport of the mean flow, subcritical steady flows can be destabilized by flow oscillation, and supercritical steady flows can be stabilized by medium frequency oscillations. For finite baroclinic transport, this parametric instability vanishes in the limit of short waves or of long waves and narrow potential vorticity strips. Consequences for coastal flows in the ocean are drawn.

1. Introduction

Parametric instability originates in the resonance between the forced oscillation of a basic flow and the free oscillations of stable perturbations of the time-averaged basic flow when the frequency of the free oscillation is a multiple of the half frequency of the forced oscillation [3]. A typical example of parametric instability is given by the increasing oscillation of a pendulum subject to a vertical periodic motion of its support. This oscillation is described by a Mathieu equation, which has been widely studied (see for example [13] for algebraic calculations, or [2] for a physical explanation). The usual form of the Mathieu equation is:

$$\partial_t^2 X + (\alpha + \varepsilon \cos(\omega t))X = 0 \quad (1.1)$$

where X is the dynamical variable under consideration. For the forced pendulum, this variable is the oscillation angle θ . Mathematically, for $\varepsilon = 0$, the solutions correspond to the well-known free oscillations of the pendulum, with a period $\sigma = \sqrt{\alpha}$. For non-zero ε , a proper choice of ω can destabilize those oscillations. In particular, for $\varepsilon \ll 1$, unstable solutions are found for ω in the vicinity of critical values defined by:

$$\sigma = \frac{n\omega}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.2)$$

Parametric instabilities can also occur in hydrodynamics; the first occurrence of such an observation dates back to Faraday [4] who observed standing waves in water covering a vibrating plate. Since then, many studies were devoted to the investigation of parametric instability of flows (see [1] for

Mathematics Subject Classification 76E

the Faraday problem; [11] for the Taylor-Couette flow; [5] for the Poiseuille flow; [6] for the Kelvin-Helmholtz instability; [9] and [8] for baroclinic instability; [7] for equatorial inertial instability). Very recently, Poulin et al [10] studied the parametric instability of a horizontally sheared, oscillating flow in a single-layer quasi-geostrophic model.

In the present note, we present the parametric instability of a wall jet, in a two-layer quasi-geostrophic model. Contrary to previous studies concerning time-dependent jets in a two-layer model ([8], [9]) the present study will concern a jet of finite width. After presenting the framework of the study and the linear stability of the steady flow, we investigate the influence of the variation of potential vorticity or of transport on the parametric instability of this wall jet. The growth of perturbations due to parametric resonance, near the marginal stability curve, is specifically addressed.

2. Model equations and stability of the steady flow

2.1. Model equations

The two-layer quasi-geostrophic model used here describes the evolution of a fluid, strongly constrained by rotation and by stratification (small Rossby and Froude numbers); the fluid stratification is idealized as two superimposed homogeneous layers. The fluid evolution is governed by the potential vorticity equation for forced flows

$$[\partial_t + J(\psi_j, \cdot)]q_j = G_j(y, t), \quad q_j = \nabla^2\psi_j + F_j(\psi_k - \psi_j), \quad k = 3 - j$$

where q_j is quasi-geostrophic potential vorticity in layer $j = 1, 2$ (upper, lower layers), ψ_j is the layerwise streamfunction, G_j is the forcing of the mean flow (generating its oscillation¹), $F_j = f_0^2/g'H_j$ is the layer coupling, f_0 is the Coriolis parameter, g' is the reduced gravity between the two layers, H_j is the layer thickness at rest; we choose $H_1 = H_2$. Finally the horizontal velocity is given by $\vec{u}_j = \vec{k} \times \vec{\nabla}\psi_j$.

This layerwise formulation of the equations is equivalent to that in barotropic and baroclinic modes:

$$\psi_t = [\psi_1 + \psi_2] / 2, \quad \psi_c = [\psi_1 - \psi_2] / 2$$

for which the potential vorticities are defined by

$$q_t = \nabla^2\psi_t, \quad q_c = \nabla^2\psi_c - \frac{1}{\gamma^2}\psi_c$$

with $\gamma = \sqrt{g'H}/2f_0$, where H is the total fluid thickness.

Initially, the mean flow is a wall jet, defined by two strips of uniform potential vorticity (one in each layer), with intensity Q_1, Q_2 and width w ; potential vorticity is null outside the strips (see figure 1).

This model is therefore the simplest one representing a narrow wall jet, allowing its baroclinic instability and retaining as few parameters as necessary.

The mean flow is computed under the condition of continuity through the potential vorticity interface and of zero flow at infinity. The barotropic mean flow is

$$U_t(y) = Q_t(w - y), \quad y \leq w, \quad 0, \quad y > w$$

and the baroclinic mean flow is

$$U_c(y) = -\gamma A \exp(\gamma y) + \gamma B \exp(-\gamma y), \quad y \leq w, \quad \gamma C \exp(-\gamma y), \quad y > w$$

¹ G_j does not enter in the perturbation equation of potential vorticity

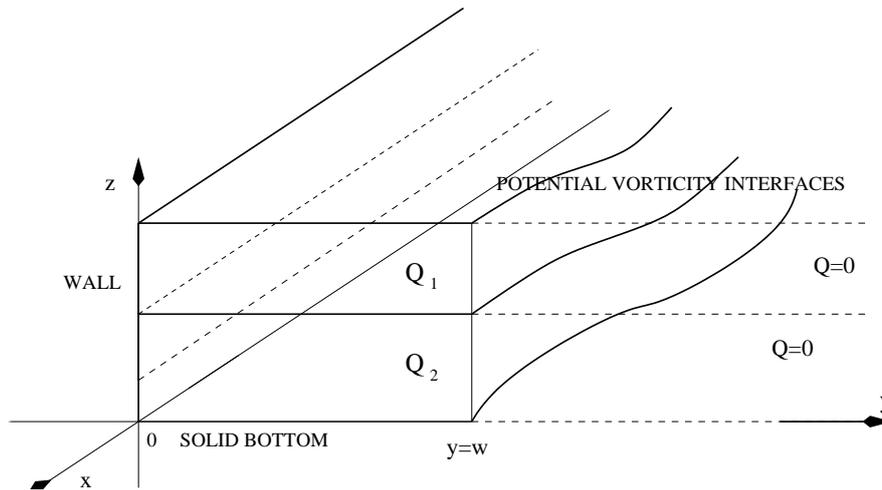


Fig. 1. Model configuration, physical variables and parameters

with

$$A = \frac{Q_c}{2\gamma^2} \exp(-\gamma w), \quad B = -\exp(\gamma w) \left[T_c + \frac{Q_c}{2\gamma^2} \right], \quad C = -\exp(\gamma w) \left[T_c + \frac{Q_c}{\gamma^2} \right]$$

where T_c is the baroclinic transport of the mean flow, which will be specified later. Note that, since length and time scales must be chosen, we set hereafter $\gamma = 1, Q_t = 1$ for numerical applications (these parameters will still appear in the mathematical expressions for their homogeneity).

2.2. Linear instability of the steady flow

To evaluate the flow stability, a normal-mode perturbation is added to the potential vorticity interface, which becomes $w + \eta_j \exp ik(x - ct)$. The corresponding streamfunction of the perturbation $\psi'_j = \phi_j \exp ik(x - ct)$ is obtained under the condition of antisymmetry with respect to the origin in y , of continuity of ψ'_j and of the zonal velocity $u'_j + \eta_j dU_j/dy$ at the potential vorticity interface

$$\phi_t = A_t \exp(ky) + B_t \exp(-ky), \quad y \leq w, \quad C_t \exp(ky), \quad y > w$$

with $A_t = -[\eta_t Q_t + \eta_c Q_c] \exp(-kw)/2k = -B_t, C_t = A_t(\exp(2kw) - 1)$. The baroclinic streamfunction of the perturbation is

$$\phi_c = A_c \exp(K_\gamma y) + B_c \exp(-K_\gamma y), \quad y \leq w, \quad C_c \exp(K_\gamma y), \quad y > w$$

with $K_\gamma^2 = k^2 + \gamma^2$ and $A_c = [\eta_t Q_c + \eta_c Q_t] \exp(-K_\gamma w)/2K_\gamma = -B_c, C_c = A_c(\exp(2K_\gamma w) - 1)$. Note that, contrary to the mean flow, the potential vorticity of the perturbation is conserved.

The evolution of η_i is governed by the linearized kinematic condition $[U_j(w) - c]\eta_j = \psi'_j$, written in vertical modes

$$[U_t(w) + \theta_1 Q_t - c]\eta_t + [U_c(w) + \theta_1 Q_c]\eta_c = 0$$

$$[U_t(w) + \theta_2 Q_t - c]\eta_c + [U_c(w) + \theta_2 Q_c]\eta_t = 0$$

with $\theta_1 = \sinh(kw) \exp(-kw)/k, \theta_2 = \sinh(K_\gamma w) \exp(-K_\gamma w)/K_\gamma$, which provides the condition for flow stability. Note that for the steady flow, we have to impose the value of the baroclinic transport T_c , chosen null.

Figure 2 shows the marginal stability curve in the (k, Q_c) plane for given w, Q_t (and various values of γ). The choice of equal layer thickness made here renders the problem symmetric with respect to a change in sign of Q_c . Stability occurs in the limit of short waves. As expected from baroclinic instability, the unstable region grows with γ and shorter waves then become unstable.

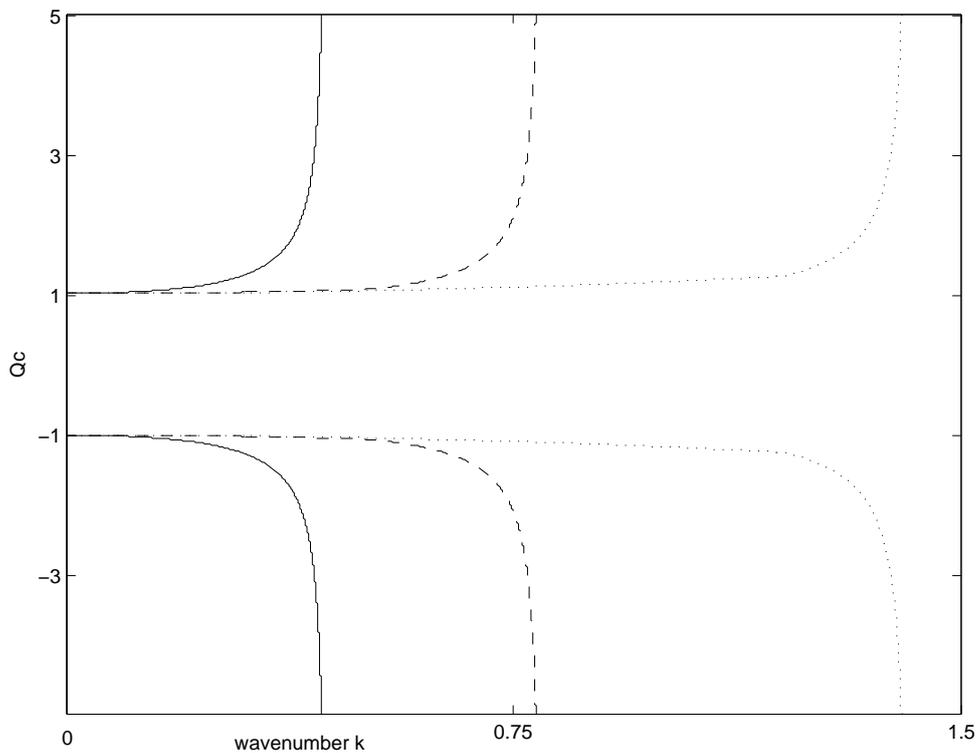


Fig. 2. Marginal stability curve for the steady flow in the (k, Q_c) plane for $w = 1, Q_t = 1$ and $T_c = 0$; solid lines indicate the $\gamma = 1.5$ case, dashed lines are for $\gamma = 2$, dotted lines for $\gamma = 3$.

3. Linear instability of a time-dependent mean flow

3.1. Existence of parametric instability

For a given barotropic mean flow, we impose that the baroclinic potential vorticity or the baroclinic transport of the mean flow vary with time as $Q_c = Q_c^0(1 + \varepsilon \cos(\omega t))$ or $T_c = T_c^0(1 + \varepsilon \cos(\omega t))$. Though the two variations are physically different, they provide the same equations in the present framework (since they intervene in the off-diagonal terms). Therefore, the mathematical developments are presented here in a general form.

Naturally, normal modes cannot be used for the time-dependent problem but sinusoidal perturbations can still be considered. They have wavenumber k here. The dynamical equations for the potential vorticity interfaces in barotropic and baroclinic modes are thus

$$\partial_t \begin{pmatrix} \eta_t \\ \eta_c \end{pmatrix} = -ik \begin{pmatrix} U_t(w) + \theta_1 Q_t & U_c(w) + \theta_1 Q_c \\ U_c(w) + \theta_2 Q_c & U_t(w) + \theta_2 Q_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_t \\ \eta_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_t \\ \eta_c \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

We write symbolically the linear system $\partial_t \eta = M\eta$. With the time variation of the mean flow given hereabove, each term of the matrix can be written as $a = a_0 + \varepsilon a_1 \cos(\omega t)$ The matrix M can therefore be written $M = M_0 + \varepsilon M_1 \cos(\omega t)$. Note that $U_t(w) = 0$ here. A phase shift of the solution by $\exp(ik(\theta_1 + \theta_2)Q_t t/2)$ is performed, so that the matrix M_0 is modified into N_0

$$N_0 = -ik \begin{pmatrix} (\theta_1 - \theta_2)Q_t/2 & U_c^0(w) + \theta_1 Q_c^0 \\ U_c^0(w) + \theta_2 Q_c^0 & (\theta_2 - \theta_1)Q_t/2 \end{pmatrix}$$

It is now straightforward to derive a second-order differential equation for each component of η by deriving the former relation and by substituting a component as a function of the other. This equation is of the Hill type

$$\partial_t^2 \eta + p(t)\partial_t \eta + q(t)\eta = 0$$

where p and q have the period $2\pi/\omega$. The Wronskian of a particular set of linearly independent solutions for such an equation is defined by:

$$W(t) = W_0 \exp \left[- \int_0^t p(s) ds \right]$$

where W_0 is a constant depending on the choice of the set of solutions. As remarked by Poulin et al [10], one can deduce from [13] that if $W(t)$ has period $2\pi\omega$, then the solutions of the Hill equation have similar properties as the solutions of the Mathieu equation. Here, the Wronskian indeed has period $2\pi\omega$ since the trace of N_0 is null, since M_1 does not have diagonal terms and since its off-diagonal terms are periodic with $2\pi\omega$. Therefore, parametric instability can occur for small ε and ω verifying (1.2). Furthermore, solutions corresponding to transition points from stability to instability are periodic with period $2\pi/\omega$ or π/ω .

3.2. Application to the time variation of baroclinic potential vorticity or of transport

Parametric instability is now illustrated by numerical experiments. We consider a configuration which ensures stability of the steady problem, and we use the fourth-order Runge-Kutta scheme to solve numerically the corresponding differential equations. First, for given Q_t, Q_c, k, γ, w , the frequencies of free oscillations of the steady flow are obtained so that we can predict the values of ω for which parametric resonance will occur. For the particular case studied, we find : $\omega = 0.1196, 0.0598, 0.0399, \dots$

Then the time-dependent part of potential vorticity is included in the equations and the problem is solved for different values of ε and ω . The unstable regions are plotted on figure 3. Regions of instability develop exactly around the values predicted by theory.

The behavior of the unstable solution is illustrated on figure 4. The parametrically unstable flow solution has the same periodicity as that for the steady problem, but the amplitude of oscillations increase exponentially with time.

The results with a time variation of the baroclinic transport are quite similar to those for the potential vorticity variations, and therefore are not detailed here. In both cases, it is found numerically that parametric instability grows faster near the marginal stability curve of the steady problem. This justifies a specific study in the vicinity of that curve.

3.3. Multiple time-scale expansion near the marginal curve

A specific study is now performed in the vicinity of the marginal curve for the steady flow, for which Q_c^0 is the critical value for given Q_t, w, γ . The mean baroclinic potential vorticity is chosen to undergo a time variation as $Q_c = Q_c^0(1 + \varepsilon \cos(\omega t)H + \varepsilon^2 G)$. The increment $Q_c - Q_c^0$ contains the time oscillation and a small component G to allow a subcritical or supercritical steady flow. This increment will lead to slow variations of the perturbation amplitude. Therefore, a slow time scale T is introduced so that $\partial_t = \partial_\tau + \varepsilon \partial_T$. The potential vorticity interface displacement η is also expanded in ε , $\eta = \eta_0 + \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 \dots$

The kinematic relation is now $\partial_\tau \eta + \varepsilon \partial_T \eta = (N_0 + \varepsilon \cos(\omega \tau) H M_1 + \varepsilon^2 G M_1) \eta$, leading to the equations at each order in ε :

$$\begin{aligned} \partial_\tau \eta_0 &= N_0 \eta_0 \\ \partial_\tau \eta_1 + \partial_T \eta_0 &= N_0 \eta_1 + H \cos(\omega \tau) M_1 \eta_0 \\ \partial_\tau \eta_2 + \partial_T \eta_1 &= N_0 \eta_2 + H \cos(\omega \tau) M_1 \eta_1 + G M_1 \eta_0 \end{aligned}$$

At zeroth order in ε , the potential vorticity interface displacement obeys $\partial_\tau \eta_0 = 0$ and its baroclinic and barotropic components are related by $\eta_{0c} = -(a_0/b_0) \eta_{0t}$.

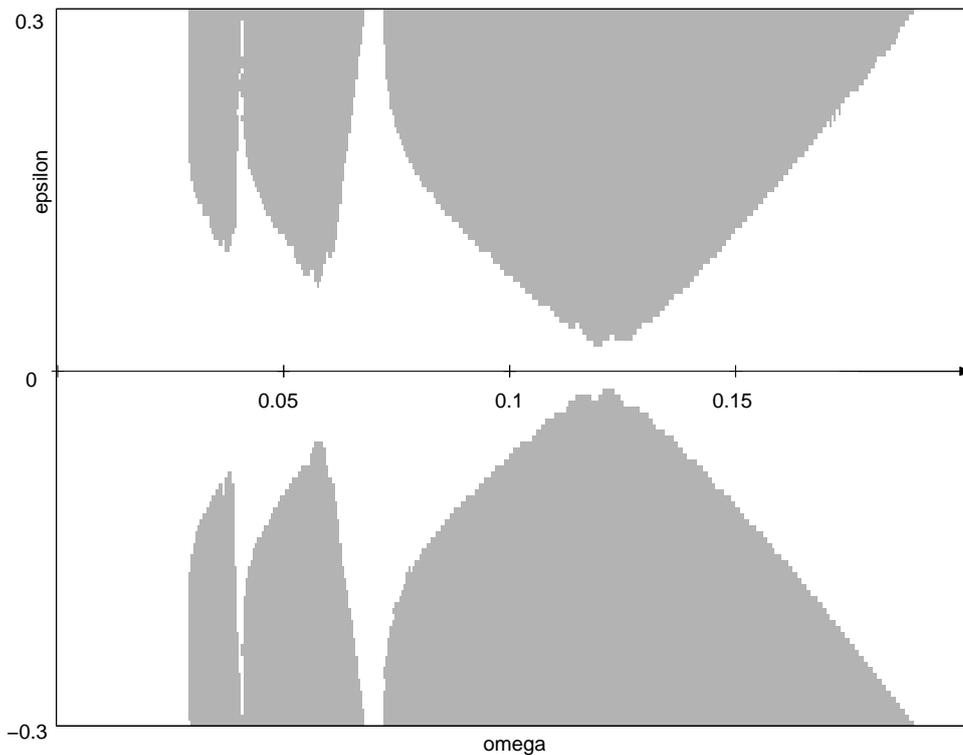


Fig. 3. Numerical approximation of instability regions (shaded) for a time-dependence of baroclinic potential vorticity $Q_c = Q_c^0(1 + \varepsilon \cos(\omega t))$ with $k = 1$, $\gamma = 2$, $w = 2$, $Q_t = 1$, $Q_c^0 = 1.5$. Only the three most unstable modes ($n = 1, 2, 3$) are shown.

At first order in ε , we derive the equation for the barotropic component of the interface displacement η_{1t} , twice with respect to τ

$$\partial_\tau^2 \eta_{1t} = H [\alpha_1 \cos(\omega\tau) - \beta_1 \sin(\omega\tau)] \eta_{t0}$$

with $\alpha_1 = a_0(a_1 - d_1) + b_0c_1 - a_0^2b_1/b_0$ and $\beta_1 = a_1 - a_0b_1/b_0$. Since $\partial_\tau \eta_{0t} = 0$, we have

$$\eta_{1t} = -H [\alpha_1 \cos(\omega\tau) - \beta_1 \sin(\omega\tau)] \eta_{0t} / \omega^2$$

It is then straightforward to obtain η_{1c} by substitution in the equation for η_{1t} :

$$b_0 \eta_{1c} = \frac{\alpha_1}{\omega} \sin(\omega\tau) H \eta_{0t} + \frac{d\eta_{0t}}{dT} + a_0 \left[\frac{\alpha_1}{\omega^2} \cos(\omega\tau) - \frac{\beta_1}{\omega} \sin(\omega\tau) \right] H \eta_{0t}$$

At second order in ε , the secular terms must vanish in a time-averaged sense, i.e.

$$\langle \partial_T \eta_1 \rangle = H \langle \cos(\omega\tau) M_1 \eta_1 \rangle + G \langle M_1 \eta_0 \rangle$$

where $\langle \cdot \rangle$ denotes an average over a period $2\pi/\omega$. Substitution of η_1 in terms of η_0 as computed above, leads to the final equation

$$\frac{d^2 \eta_{0t}}{dT^2} + (a_0 d_1 - b_0 c_1) \left[\frac{\alpha_1 H^2}{2\omega^2} + G \right] \eta_{0t} = 0 \quad (3.2)$$

which provides the slow time evolution of the perturbation due to the time variation of the mean flow near marginality.

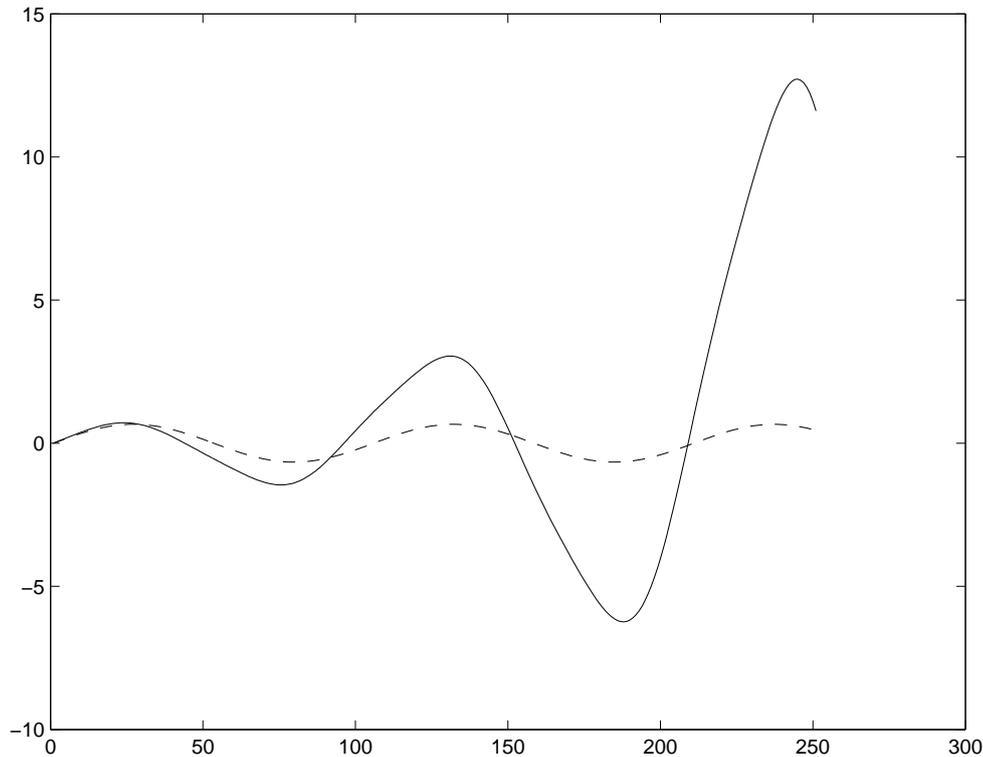


Fig. 4. Time evolution of the flow perturbation amplitude in the steady case (dashed) and for the first unstable mode of the time-dependent flow ($\omega = 0.1196, \varepsilon = 0.1$) with $k = 1, \gamma = 2, w = 2, Q_t = 1, Q_c^0 = 1.5$ and $Q_c = Q_c^0(1 + \varepsilon \cos(\omega t))$.

With $Q_c = Q_c^0[1 + \varepsilon H \cos(\omega t) + \varepsilon^2 G]$, we define

$$U_c(w) = \lambda Q_c + \mu, \quad \lambda = -[1 + \exp(2\gamma w)]/2\gamma, \quad \mu = -\gamma T_c \exp(\gamma w)$$

so that the various matrix elements are

$$a_0 = -d_0 = (\theta_1 - \theta_2)Q_t/2, \quad b_0 = \mu + (\lambda + \theta_1)Q_c^0, \quad c_0 = \mu + (\lambda + \theta_2)Q_c^0$$

$$a_1 = d_1 = 0, \quad b_1 = (\lambda + \theta_1)Q_c^0, \quad c_1 = (\lambda + \theta_2)Q_c^0$$

The first term $T_1 = a_0 d_1 - b_0 c_1 = -b_0 c_1$ has a sign which depends on T_c .

If $T_c = 0$, the marginal stability condition $b_0 c_0 = a_0 d_0$ will be simply $(\lambda + \theta_1)(\lambda + \theta_2) = -a_0^2 < 0$. Since $K_\gamma \geq \gamma$ and since $w > 0$, we have $\lambda + \theta_2 < 0$. Then $\lambda + \theta_1 > 0$ and $T_1 = -(\lambda + \theta_1)(\lambda + \theta_2)(Q_c^0)^2 > 0$.

If $T_c \neq 0$, we have $T_1 = -b_0(c_0 - \mu) = a_0^2 + \mu^2 + \mu(\lambda + \theta_1)Q_c^0$. Therefore the sign of T_1 will depend on $\mu(\lambda + \theta_1)Q_c^0$. For given T_c, Q_t and γ , the marginal stability condition for the steady flow relates Q_c^0, w and k . Since the sign of $\lambda + \theta_1$ depends on k and w , both signs are possible for Q_c^0 in general and therefore for T_1 . Nevertheless, two asymptotic cases are of interest:

- in the short wave limit ($k, K_\gamma \gg 1$), the two terms $\theta_1, \theta_2 \rightarrow 0$ so that $a_0, d_0 \rightarrow 0, b_0, c_0 \rightarrow (\mu + \lambda Q_c^0)$ and the marginal stability condition of the stationary flow imposes that $\mu + \lambda Q_c^0 \rightarrow 0$. Then $T_1 = -b_0 c_1 \rightarrow 0$. Parametric instability disappears in this limit.
- in the long wave limit ($k \rightarrow 0, K_\gamma \rightarrow \gamma$), and assuming small width of the potential vorticity strip ($\gamma w \ll 1$), we have $\theta_1 \rightarrow 0, \lambda \sim -\theta_2 \rightarrow -1/\gamma, \mu \sim -\gamma T_c$. Then $c_1 \rightarrow 0$ and $T_1 \rightarrow 0$. Parametric instability also vanishes in this limit.

The second term is $T_2 = G + \alpha_1 H^2 / 2\omega^2$. The sign of T_2 will depend in particular on that of G , which conditions subcritical ($G < 0$) or supercritical ($G > 0$) steady flow. The full form of α_1 is

$$\alpha_1 = b_0 c_1 - \frac{a_0^2}{b_0} b_1 = Q_c^0 [\mu + (\lambda + \theta_1) Q_c^0] [(\lambda + \theta_2) - \frac{(\theta_1 - \theta_2)^2 Q_t^2}{4[\mu + (\lambda + \theta_1) Q_c^0]^2} (\lambda + \theta_1)]$$

If $T_c = 0$, we have $\mu = 0$ and therefore $b_0 = b_1, c_0 = c_1$. Thus $\alpha_1 = -2a_0^2 < 0$ and we have shown previously that $T_1 > 0$. Therefore, subcritical steady flows are always destabilized by an oscillatory component since $G + \alpha_1 H^2 / 2\omega^2 < 0$, whereas supercritical steady flows can be stabilized by such a component if the pulsation is not too small.

If $T_c \neq 0$, Q_c^0 will depend on w and k via the marginal stability condition for the steady flow, for given T_c , Q_t and γ . Then both signs are possible in general for α_1 and T_2 . Again two asymptotic cases are of interest:

- in the short wave limit, we have $a_0, b_0, c_0, d_0 \rightarrow 0$ as shown before, with a_0 and b_0 having similar asymptotic behavior. Then α_1 will vanish and $T_2 \sim G$ in this limit.
- in the long wave limit with narrow strip, the marginal stability condition is $b_0 c_0 = \mu^2 + \mu \lambda Q_c^0 = -a_0^2$ so that $\mu \lambda Q_c^0 < 0$. Then $\alpha_1 = b_1 c_0 = \mu \lambda Q_c^0 < 0$ in this limit, leading to $T_2 < 0$ for subcritical steady flows.

In summary, for null baroclinic transport of the mean flow, subcritical steady flows are always destabilized by an oscillatory component, whereas supercritical steady flows can be stabilized by such a component if the pulsation is not too small. For finite transport, similar effects can occur except in the two limits of very short waves, or very long waves and narrow strip. Note also that growth rates of parametric instability which go as $1/\omega^2$ are larger near the marginal stability of the steady flow where phase speeds are slower.

4. Conclusion

This short study has investigated the stability of steady and of time-dependent wall jets, composed of two superimposed strips of uniform potential vorticity, in a two-layer quasi-geostrophic model. This potential vorticity distribution is an idealization of coastal flows with baroclinic structure, in the ocean. Linear analysis has shown that the steady flow is stable with respect to short waves and its domain of instability grows with stratification. The time-dependent flow evolution is governed by a Hill equation; its solutions have a periodic Wronskian which shows that parametric instability is possible if the neutral wave pulsation is a multiple of the half pulsation of the mean flow oscillation. Numerical calculations of flow solutions show indeed that parametric instability leads to the growth with time of such solutions (which would be neutral for the steady flow). Parametric instability is favored near the marginal stability curve of the steady flow. In the vicinity of this curve, a multiple time-scale expansion of the potential vorticity interface equation leads to a second-order equation for the slow-time evolution of the interface displacement. This equation shows that for zero baroclinic transport of the mean flow, subcritical steady flows can be destabilized by flow oscillation, and supercritical steady flows can be stabilized by medium frequency oscillations. For finite baroclinic transport, this parametric instability vanishes in the limit of short waves or of long waves and narrow potential vorticity strips.

In the ocean, intense jets exist along basin boundaries: in the Northeastern Atlantic Ocean, the Mediterranean Water Undercurrents flow at more than 0.5 m/s along the Southern Iberian Peninsula, at depth close to 1000 m. These undercurrents possess a baroclinic structure (the upper flow being faster than the lower one). Recent measurements [12] have shown that, near 37°N , $8^\circ 30'\text{W}$, these currents undergo velocity modulations at time scales of 5 and of 10 days; these oscillations amplify

downstream. This site is known for the formation of anticyclonic and of dipolar vortices from this current over time-scales comparable to that period of modulation. The present work has shown that both potential vorticity and baroclinic transport variations of intense jets along a boundary can lead to their parametric instability. In the future, experiments with currentmeters and thermistors should measure the transport and vorticity variations of these currents, and correlate them with independent measurements of vortex detachment from the currents downstream to determine if parametric instability can be held responsible for such vortex formation.

Acknowledgements

The first author is supported by a doctoral grant from DGA/SREA (Research Agency of the French Ministry of Defence). The second author acknowledges the support of IFREMER during the course of this work.

References

- [1] *T. B. Benjamin, F. Ursell.* The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. *Proc. Roy. Soc. A.* 1954. V. 225. P. 505–515.
- [2] *P. Bergé, Y. Pomeau, C. Vidal.* Order within chaos. J. Wiley and Sons. 1984. P. 329.
- [3] *P. G. Drazin, W. H. Reid.* Hydrodynamic stability. Cambridge University Press. 1981. P. 527.
- [4] *M. Faraday.* On the forms and states assumed by fluids in contact with vibrating elastic surfaces. *Phil. Trans. Roy. Soc.* 1831. V. 121. P. 319–340.
- [5] *C. von Kerczek.* The instability of oscillatory plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.* 1982. V. 116. P. 91–114.
- [6] *A. J. Majda, M. Shefter.* The instability of stratified flows at large Richardson numbers. *Proc Natl. Acad. Sci. USA.* 1998. V. 95. P. 7850–7853.
- [7] *M. d’Orgeville, B. L. Hua.* Equatorial inertial parametric instability of zonally symmetric shear flows. Submitted to *J. Fluid Mech.* 2004.
- [8] *M. Pavec, X. Carton, G. Swaters.* Baroclinic instability of frontal geostrophic currents over a slope. Submitted to *J. Phys. Oceanogr.* 2004.
- [9] *J. Pedlosky, J. Thomson.* Baroclinic instability of time-dependent currents. *J. Fluid Mech.* 2003. V. 490. P. 189–215.
- [10] *F. J. Poulin, G. R. Flierl, J. Pedlosky.* Parametric instability in oscillatory shear flows. *J. Fluid Mech.* 2003. V. 481. P. 329–353.
- [11] *S. Rosenblat.* Centrifugal instability of time-dependent flows. Part 1. Inviscid periodic flows. *J. Fluid Mech.* 1968. V. 33. P. 321–336.
- [12] *N. Serra.* Observations and numerical modeling of the Mediterranean Outflow. PhD thesis. University of Lisbon, Portugal. 2004. P. 234.
- [13] *J. Stoker.* Nonlinear vibrations in Mechanical and Electrical Systems. New York: Interscience Publishers. 1950.

2.3 Conclusion

Ces deux études préliminaires ont montré la possibilité d'obtenir une instabilité paramétrique dans deux configurations idéalisées de courant côtiers. La grandeur physique forcée périodiquement était la vitesse de l'écoulement dans le cas frontal, puis la vorticité potentielle ou le transport barocline dans le cas quasi-géostrophique. Ces deux exemples supplémentaires tendent à démontrer que l'instabilité paramétrique peut se rencontrer dans un grand nombre de situations où existe une oscillation de l'une de ces variables. A ce stade du travail et en reprenant l'ensemble des travaux antérieurs, l'instabilité paramétrique dans un écoulement océanique a été démontrée pour les systèmes suivants, par ordre de complexité :

- Courant quasi-géostrophique dans un système à deux couches, sans cisaillement horizontal de vitesse. La variation périodique était introduite sur la vitesse de l'écoulement (Pedlosky et Thomson (2003)).
- Courant frontal de fond dans un système à deux couches sans cisaillement horizontal de vitesse s'écoulant le long d'une côte, avec variation périodique de la vitesse dans la couche de fond. C'est le travail détaillé dans le premier article présenté dans ce chapitre.
- Système quasi-géostrophique barotrope avec un ou plusieurs fronts de vorticité potentielle, la variation temporelle est introduite sur la valeur de la vorticité potentielle (Poulin et al (2003)).
- Système quasi-géostrophique bi-couche le long d'une côte présentant un front de vorticité potentielle dans chaque couche, le paramètre variable est la vorticité potentielle. C'est le cas étudié dans le second article de ce chapitre et approfondi dans le chapitre suivant.

Tous les exemples traités dans ces études se ramènent au traitement d'un système dynamique qui se met sous la forme :

$$\partial_t X = M_0 X + \varepsilon \cos(\omega t) M_1 X$$

où M_0 et M_1 sont deux matrices dont la taille dépend des données du problème. D'après Poulin et al (2003), il ressort qu'une condition suffisante pour qu'un tel système soit instable paramétriquement est que les matrices M_0 et M_1 ne commutent pas. Ce résultat n'a pas été formellement démontré mais aucun contre-exemple n'a été trouvé. En particulier, si $M_0 = M_1 = M$, il est simple de démontrer que la variation temporelle n'a pas d'influence sur le système. Les solutions sont de la forme :

$$X = \exp\left(M \int_0^t \cos(\omega s) ds\right)$$

en supposant M diagonalisable, on arrive à une écriture de la forme :

$$X = P \exp\left(t \left[1 + \frac{\sin(\omega t)}{\omega t}\right] D\right) P^{-1} X_0$$

Comme D est une matrice diagonale, chaque terme de la matrice exponentielle ci-dessus est de la forme :

$$\exp\left(t \left[1 + \frac{\sin(\omega t)}{\omega t}\right] c_i\right)$$

où les c_i sont les valeurs propres de M . La stabilité des solutions ne dépend donc que de ces valeurs propres qui déterminent également la stabilité du système stationnaire. Ce cas de figure est rencontré par Poulin et al (2003) quand l'écoulement n'est constitué que d'un seul front de vorticité potentielle. Un cas de commutativité des matrices se retrouve dans notre étude quasi-géostrophique **si la variation temporelle est introduite sur le courant barotrope**, les seuls termes où cette variation apparaît sont les termes diagonaux de la matrice M .

Maintenant que l'existence de l'instabilité paramétrique est identifiée, le chapitre suivant va s'intéresser plus précisément à ses conséquences sur les écoulements étudiés en termes d'évolution non-linéaire du courant instable.

L'instabilité paramétrique en régime quasi-géostrophique

C E chapitre est consacré à une étude complète d'un exemple d'instabilité paramétrique en partant d'un raisonnement linéaire simple pour aller jusqu'à la simulation numérique complète des effets non-linéaires et leur conséquence en termes de détachement de méandres ou de tourbillons. Le cadre retenu pour cette étude est celui d'un courant de bord quasi-géostrophique représenté par deux bandes de vorticité potentielle superposées, déjà traité linéairement dans le chapitre précédent via des limites asymptotiques.

3.1 Introduction à l'article

Les limitations des modèles quasi-géostrophiques sont connues et l'hypothèse quasi-géostrophique est rarement vérifiée pour des études de courants côtiers. Mais ce formalisme filtre les ondes de gravité et retient la dynamique lente qui nous intéresse ici. De plus, la simplicité des calculs permet d'étudier analytiquement les phénomènes et donc de mieux percevoir les processus physiques mis en jeu. L'instabilité paramétrique peut être comprise comme un couplage entre deux ondes présentes dans un système. En généralisant ce résultat dans un cadre quasi-géostrophique, il sera ensuite possible de le transposer dans un formalisme différent en faisant l'inventaire des ondes présentes dans ce nouveau système et en identifiant la fréquence d'un forçage susceptible de faire résonner ces ondes. Enfin, il existe plusieurs outils numériques simples résolvant ces équations, et étant (plus ou moins facilement) modifiables pour y implanter de nouveaux éléments. Ces codes sont généralement peu coûteux en ressources informatiques et il a ainsi été possible de tester de nombreuses configurations différentes.

La plupart des résultats de ce chapitre ont servi à la rédaction d'un article soumis pour publication dans *Dynamics of Atmosphere and Oceans*. L'intégralité du texte de cet article est inclus dans la suite. Quelques compléments et détails de calculs sont précisés ensuite.

Le plan de l'article suit la progression du travail effectué. Le courant moyen étant fixé, des calculs analytiques sont menés pour déterminer sa stabilité en régime stationnaire. Le problème de l'instabilité paramétrique est ensuite abordé analytiquement et les développements sont faits pour une variation périodique de la vorticité potentielle du courant moyen. Les calculs permettent de déterminer les fréquences du forçage nécessaires à une déstabilisation de l'écoulement. Le taux de croissance de l'instabilité paramétrique est également déterminé analytiquement. La sensibilité de l'instabilité paramétrique linéaire à la distribution de vorticité potentielle (intensité, largeur des bandes) est évaluée. La seconde partie de l'article est consacrée à l'étude numérique non-linéaire. Il est tout d'abord montré que les taux de croissance analytiques sont en accord avec les taux de croissance issus du modèle numérique. Plusieurs régimes d'instabilité sont ensuite identifiés et comparés aux régimes issus de l'instabilité barocline : on retrouve les mêmes régimes de filamentation, formation de méandres et détachement de tourbillons. Dans une dernière partie, le critère de Capet et Carton (2002) sur la distance critique de détachement d'un tourbillon par instabilité barocline est étendu à l'instabilité paramétrique.

Parametric instability of boundary currents in a two-layer model

Marc PAVEC (1), Xavier CARTON (1), Francis POULIN (2)

(1) LPO, UBO, Brest, France

(2) Maths Institute, University of Waterloo, Canada

Abstract

The parametric instability of boundary currents with piecewise-constant potential vorticity is studied in a two-layer quasi-geostrophic model. This instability results here from varying with time either the baroclinic transport or the baroclinic potential vorticity of the mean flow. In linear dynamics, with a time-varying baroclinic transport of the mean flow, parametric instability can occur for both long and short waves; its maximal growth rates are obtained for subharmonic resonance and near the marginal curve for baroclinic instability; they are also obtained for relatively narrow strips, and for finite values of steady baroclinic transport. When baroclinic potential vorticity is varied, similar characteristics are obtained for linear parametric instability. In that case, the domain of parametric instability is smaller in parameter space for short waves than for long waves.

Nonlinear regimes of parametric instability for a boundary current are then studied numerically : they include wave breaking (with filamentation or turbulent evolution of the flow), meander formation or vortex detachment. The Fourier analysis of the perturbation in each case indicates that wave breaking occurs when multiple waves interact (and in particular short waves), while vortex detachment is obtained when long waves dominate. When vortices detach, maximum deformation occurs at the tip of the filament, close to the vortex. This point is a stagnation point of the relative flow (i.e. the instantaneous velocity minus the phase speed of the most unstable wave).

Keywords : Coastal currents, instability, mathematical models, flow structures, vortices (ASFA Thesaurus).

Corresponding author address : Xavier Carton, LPO/UBO, 6 avenue Le Gorgeu, 29200 Brest, France. xcarton@univ-brest.fr

1 Rationale for the study

Oceanic boundary currents substantially contribute to the transport of heat, energy and tracers in ocean basins, by advecting and mixing heterogeneous water masses. Conspicuous examples of such currents are the intense western boundary jets like the Gulf Stream along the North American coast or the Kuroshyo along the Japanese coast. But near eastern boundaries, other currents, most often less intense than western boundary currents, also contribute to the heat and tracer transport. For instance, a complex current system exists along the continental margin of the Iberian Peninsula. It comprises surface intensified currents (with seasonal reversals) and deeper, intrathermocline currents, the Mediterranean Water Undercurrents. Both western and eastern boundary currents are prone to barotropic and/or baroclinic instabilities, thus forming meanders and shedding eddies (see Kontoyannis and Watts, 1994; Lee, 1994, for the Gulf Stream, or Chérubin et al., 2000; Serra and Ambar, 2002, for the Mediterranean Water Undercurrents). These eddies are a powerful means of redistribution of water masses, since they are large (up to a few Sverdrups of water can recirculate within them) and long-lived (up to two or three year lifetimes for the Mediterranean Water eddies).

The instabilities of boundary currents have been widely studied in simple models (e.g. in the quasi-geostrophic framework), and most often in the context of a steady mean flow (Chérubin et al., 1996; Shimada and Kubokawa, 1997; Capet and Carton, 2004). Nevertheless, in the ocean, these boundary currents undergo time variations of their mean properties (width, thickness, mean velocity), due to various phenomena affecting their source (tidal or atmospheric forcing, topographic control) or their upstream course (e.g. vortex or wave absorption). As a result of this time variation of the mean flow, parametric instability can occur. This type of instability has been studied by Poulin et al. (2003) for a horizontal shear flow in the open ocean, by Pedlosky and Thomson (2003) for a vertically sheared, uniform flow in a quasi-geostrophic model, and by Pavec et al. (2005) for a similar flow in a frontal geostrophic model.

In this paper, the parametric instability of a boundary current is studied in a two-layer quasi-geostrophic model. This current is composed of a strip of uniform potential vorticity along the coast in each layer. Thus two new and essential aspects are introduced compared to previous studies : a horizontal velocity shear, and a coast which constrains the development of meanders and eddies. A preliminary approach to this problem, using asymptotic expansions, can be found in Pavec and Carton (2004). The aim of the present paper is to identify generic properties of parametric instability of boundary currents in a two-layer quasi-geostrophic model, and to study the sensitivity of its linear properties to parameter variations. This simple physical model is chosen to allow a quasi-analytical study of

the phenomenon. In section 2, the model equations, mean flow and perturbations are recalled. Section 3 provides the equations and solutions for linear parametric instability of this flow. Section 4 describes the linear instability results for time-varying mean transport or mean potential vorticity. Section 5 presents the various nonlinear regimes in parameter space and analyzes each of them. Directions for a generalization of this study to more complex flows are proposed in the conclusion.

2 Model equations and mean flow

2.1 Model equations

A two-layer current flows along a straight coast, under the constraint of strong ambient rotation and stratification. Vertically, the fluid is bounded by a flat bottom and by a rigid lid and the flow is forced periodically in time. The nonlinear equations governing the fluid motion are

$$[\partial_t + J(\psi_j, \cdot)] [\nabla^2 \psi_j + F_j(\psi_k - \psi_j)] = G_j(\omega t)$$

where ψ is the streamfunction, $j = 1, 2$ is the (upper, lower) layer index, $k = 3 - j$ is the index of the layer opposite to layer j , $F_j = f_0^2/g'H_j$ is the Froude number and $G_j(\omega t)$ is the forcing function. With equal layer thickness $H_1 = H_2 = H/2$, we define the barotropic and baroclinic components of flow variables (e.g. streamfunction, potential vorticity) as $X_t = (X_1 + X_2)/2$, $X_c = (X_2 - X_1)/2$, where X_j are the layerwise components of these variables. Due to the relatively small horizontal length scales of the flow, a constant Coriolis parameter is used. Layerwise potential vorticity (hereafter, PV) is $q_j = \nabla^2 \psi_j + F_j(\psi_k - \psi_j)$. Viscous dissipation is neglected in this study (oceanic flows are characterized by very high Reynolds numbers).

The flow domain is zonally periodic, with a southern coast. The mean PV distribution is composed of one zonal strip of uniform PV per layer. Each PV strip hugs the southern coast, has intensity $q_j = Q_j \neq 0$ and width w (see figure 1). This simple PV configuration corresponds to zonal jets along the boundary; it allows the control of flow characteristics by varying Q_j , w and/or the stratification. The choice of piecewise-constant PV is not too restrictive since flows with piecewise-constant or continuous PV profiles have similar instability properties, provided that some characteristics of their velocity profiles remain comparable (for a quantitative comparison, see Carton and Legras 1994). Here, the boundary condition imposed at infinity north of the flow is that the velocity is zero (this ensures finite kinetic and potential energies for the mean flow).

2.2 Mean flow

Under these assumptions, the mean flow is zonal and is given by

$$U_t(y) = \begin{cases} Q_t(w - y) & \text{for } y \leq w \\ 0 & \text{for } y \geq w \end{cases},$$

$$U_c(y) = \begin{cases} -\frac{Q_c R_d}{2} \exp((y - w)/R_d) + \left[\frac{Q_c R_d}{2} + \frac{T_c}{R_d(1 - \exp(-w/R_d))} \right] \exp(-y/R_d) & \text{for } y \leq w \\ \left[\frac{T_c}{R_d(1 - \exp(-w/R_d))} + \frac{Q_c R_d}{2} (1 - \exp(w/R_d)) \right] \exp(-y/R_d) & \text{for } y \geq w \end{cases},$$

which is continuous at the PV front. The external Rossby deformation radius is $R_d = \sqrt{g'H}/f_0$ and its inverse is γ . The baroclinic transport of the mean flow between $y = 0$ and $y = w$ is T_c .

To generate parametric instability, either T_c or the mean baroclinic PV, Q_c , varies sinusoidally with time

$$T_c = T_c^0 [1 + \epsilon \cos(\omega t)], \quad \text{or} \quad Q_c = Q_c^0 [1 + \epsilon \cos(\omega t)]$$

with only slight temporal variation; $\epsilon \ll 1$. In the first case (time variation of baroclinic transport), barotropic PV is kept null; in the second case (time variation of baroclinic PV), T_c or barotropic PV is kept finite.

3 Linear parametric instability

3.1 Linear equation for the perturbation

The linear stability properties are obtained by imposing a weak sinusoidal deviation of the PV front $\eta_j(x, t) = \eta_j^0(t) \exp(ikx)$. The corresponding PV anomaly generates a perturbation streamfunction $\psi'_j(x, y, t) = A_j(t) \phi_j(y) \exp(ikx)$ to the mean flow. In the linear framework, this perturbation satisfies three equations :

- (1) continuity of the zonal velocity at the front, $[\partial_x \psi'_j]_w = 0$, where $[X]_w$ stands for the jump of X at the front (external - internal value),
- (2) continuity of the meridional velocity at the front, $[\partial_y \psi'_j]_w - \eta_j [dU_j/dy]_w = 0$,
- (3) kinematic equation for the front

$$(\partial_t + U_j(w) \partial_x) \eta_j = \partial_x \psi'_j(y = w)$$

Equation 1 implies continuity of perturbation streamfunction at the front. Inserting equation 2 into equation 3 yields the linearized evolution equation for potential vorticity.

If the perturbation potential vorticity is identically zero within each strip, the perturbation streamfunction is, in vertical modes

$$\psi'_t = \begin{cases} 2A_t(t) \sinh(ky) \exp(ikx) & \text{for } y \leq w \\ A_t(t) (\exp(2kw) - 1) \exp(-ky) \exp(ikx) & \text{for } y \geq w \end{cases},$$

$$\psi'_c = \begin{cases} 2A_c(t) \sinh(K_d y) \exp(ikx) & \text{for } y \leq w \\ A_c(t)(\exp(2K_d w) - 1) \exp(-K_d y) \exp(ikx) & \text{for } y \geq w \end{cases},$$

where $K_d^2 = k^2 + (1/R_d^2)$, assuming that the streamfunction is zero at the coast and that the velocity is zero at infinity.

If we write

$$\begin{aligned} U_t &= U_t(w) = 0, \\ U_c &= U_c(w), \\ \theta_1 &= \sinh(kw)/(k \exp(kw)), \\ \theta_2 &= \sinh(K_d w)/(K_d \exp(K_d w)), \end{aligned}$$

the linear stability is determined by the system of coupled linear ordinary differential equations which are obtained by combining equations 2 and 3

$$\frac{dX}{dt} = M X$$

where $X(t)$ is the PV front deviation in vertical modes, $X(\eta_t^0, \eta_c^0)$, and M is a 2×2 matrix,

$$M = -ik \begin{pmatrix} U_t + \theta_1 Q_t & U_c + \theta_1 Q_c \\ U_c + \theta_2 Q_c & U_t + \theta_2 Q_t \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1)$$

It is straightforward to see that the stationary mean flow (with $\epsilon = 0$) will be linearly unstable to normal mode perturbations as soon as $\Delta = (a-d)^2 + 4bc < 0$.

Whatever the choice of mean flow variation (baroclinic transport or baroclinic PV), we have

$$\begin{aligned} a &= a_0, & b &= b_0 + \epsilon b_1 \cos(\omega t), \\ c &= c_0 + \epsilon c_1 \cos(\omega t), & d &= d_0. \end{aligned}$$

For a time variation of the mean baroclinic transport, we have

$$b_1 = c_1 = kT_c^0 \exp(-w/R_d) / [R_d * (1 - \exp(-w/R_d))].$$

For a time variation of the mean baroclinic PV, with zero baroclinic transport, we have

$$b_1 = b_0 = -k(U_c^0 + \theta_1 Q_c^0), \quad c_1 = c_0 = -k(U_c^0 + \theta_2 Q_c^0),$$

where U_c^0 is the baroclinic mean velocity at $y = w$ with $Q_c = Q_c^0$ and $T_c^0 = 0$.

To study both cases simultaneously, we write

$$M_j = i \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} \quad (2)$$

It is straightforward to check that M_0 and M_1 do not commute in general (except if $Q_t = 0$ and $T_c^0 = 0$), and therefore the flow is susceptible to parametric instability (Poulin et al., 2003).

3.2 Transition points and growth rates for parametric instability

We first solve the linear stationary problem with the normal mode decomposition, $X(t) = X_0 \exp(i\sigma t)$, which when substituted into the linear system yields the dispersion relation

$$\sigma^2 - \sigma(a_0 + d_0) + (a_0 d_0 - b_0 c_0) = 0.$$

The transition points for parametric instability occur at wavenumbers which have two waves forming a resonant triad with the oscillatory forcing

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = n^2 \omega^2$$

where σ_j are the two solutions of the dispersion relation for the steady flow. To each eigenvalue σ_j is associated an eigenvector $X_{0j}(-b_0, a_0 - \sigma_j)$. The solution of the adjoint problem is $X_{0j}^+(c_0, a_0 - \sigma_j)$.

To obtain the growth rates for parametric instability, we use the method of multiple time scales (see Poulin et al., 2003). We expand the linear instability equation

$$\frac{dX}{dt} = (M_0 + \epsilon M_1 \cos(\omega t)) X$$

such that $X = X_a + \epsilon X_b$, where $X_a = A_1(T)X_{01} \exp(i\sigma_1 t) + A_2(T)X_{02} \exp(i\sigma_2 t)$, and the long time scale is defined to be $T = \epsilon t$.

For the case of the subharmonic forcing ($n=1$), we also introduce a shift in pulsation $\omega = \sigma_1 - \sigma_2 + \epsilon \delta \omega$. A simple calculation then yields

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dT} &= \frac{1}{2} \frac{\langle X_{01}^+, M_1 X_{02} \rangle}{\langle X_{01}^+, X_{01} \rangle} \exp(i\delta \omega T) A_2 \\ \frac{dA_2}{dT} &= \frac{1}{2} \frac{\langle X_{02}^+, M_1 X_{01} \rangle}{\langle X_{02}^+, X_{02} \rangle} \exp(-i\delta \omega T) A_1. \end{aligned}$$

Setting $A_j = A_j^0 \exp(\Sigma T)$, we can combine the above two equations into one second order ordinary differential equation. The growth rate of the resulting equation is denoted by Σ and it is determined by the following equation

$$\Sigma^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{\langle X_{01}^+, M_1 X_{02} \rangle \langle X_{02}^+, M_1 X_{01} \rangle}{\langle X_{01}^+, X_{01} \rangle \langle X_{02}^+, X_{02} \rangle} - (\delta \omega)^2 \right]$$

where $\langle X, Y \rangle$ denotes the standard dot product. The calculation of the growth rates for the harmonic forcing ($n=2$) is given in appendix.

For a time-varying baroclinic transport, the above equation simplifies to

$$\Sigma^2 = \frac{-\epsilon^2 b_1^2 (a_0 - d_0)^2 - (b_0 - c_0)^2}{4 (a_0 - d_0)^2 + 4b_0 c_0}$$

in dimensional form, for $\delta\omega = 0$. Since the steady mean flow is stable, $\Delta = (a_0 - d_0)^2 + 4b_0 c_0 \geq 0$. Therefore parametric instability occurs for $(a_0 - d_0)^2 < (b_0 - c_0)^2$ which reduces to $|Q_t| < |Q_c|$.

For a time-varying baroclinic PV, the growth rates are

$$\Sigma^2 = \frac{-\epsilon^2 b_0 c_0 (a_0 - d_0)^2}{4\Delta}$$

again for $\delta\omega = 0$, and parametric instability occurs if $b_0 c_0 < 0$ (assuming that the mean steady flow is baroclinically stable). These two cases are now studied in more detail.

4 Characteristics of linear parametric instability at subharmonic resonance

In both our linear and nonlinear studies, we focus on instabilities due to subharmonic resonance since this type of resonance yields the largest growth rates. The linear equation with time-variable forcing is integrated numerically with a fourth-order Runge-Kutta scheme. Applying Floquet analysis to the numerically integrated system yields the growth rates for instability, if the system is in fact unstable. Each linear integration is initialized with a small value of the PV interface deviation ($\eta_t = 0.01, \eta_c = 0.01$) and parameters are set to reference values (pivotal cases) or to vary within given ranges (see hereafter the sensitivity of results to parameter variations). The linear model is evolved for 2000 time units. Realistic parameters for a coastal flow in the ocean are $Q_c \sim 0.4 \times 10^{-4} s^{-1}$, $w \sim 2 \times 10^4 m$ so that the maximum velocity of the current is about $0.2 m/s$. In dimensionless form, the parameters were chosen as $Q_1 = -Q_2 = 0.72, w = 0.7363$ (these specific values are convenient for the nonlinear numerical code). Results are presented hereafter in dimensionless form. To obtain dimensional values for an oceanic application, the time scale is about 7 hours and the length scale 27 kilometers.

4.1 Time-varying baroclinic transport

First, to justify the fact that we restrict our attention to the first subharmonic frequency, consider figure 2a where the growth rates of parametric instability are plotted versus ω and ϵ for $k = 1$ and $T_c^0 = 0.026$ (similar results are obtained

for other (finite) values of k and for larger values of T_c^0 . This figure is a classical Mathieu-type instability diagram with tongues of parametric instability. The transition frequencies (for $\epsilon = 0$) are given by

$$\omega_n = \frac{2}{n} \sqrt{(U_c^0 + \theta_1 Q_c^0)(U_c^0 + \theta_2 Q_c^0)}$$

which match very well with the numerical values computed using the method explained in section 3. For $\epsilon \ll 1$, the analytical $\epsilon - \omega$ relation at the boundary of the subharmonic instability tongue is recovered numerically, as is the relation for the harmonic instability tongue (see the appendix). The largest growth rates are obtained for subharmonic resonance with large values of mean flow variations. Therefore, we choose to study the sensitivity of the instability of the first subharmonic resonance, $n = 1$, to various physical parameters¹.

Second, we verify that there is good agreement between the analytical calculations and the numerical integration of the linear equations. Figure 2b compares the analytical (–) and numerical (+) growth rates with increasing amplitudes of the unsteady component of the baroclinic mean transport. The relative error is 10^{-7} for $\epsilon = 0.01$, it increases to 5% when ϵ reaches 0.25, and to 20% for $\epsilon = 0.5$. Note that the analytical growth rate is obtained via an expansion in ϵ and therefore is only approximate. The accuracy is nevertheless satisfactory up to moderate values of ϵ .

Next, we explain the mechanism of parametric instability in terms of the phase of the deviations of the PV front, and thus in the coupling of the resulting PV anomalies. Figure 3a plots the position of the upper layer PV front versus time for both a perturbed (dotted) and an unperturbed (dashed) time-varying mean flow in case of subharmonic forcing. The unperturbed PV front oscillates sinusoidally with time without any growth. The perturbed PV front grows at each half period, with an asymmetric evolution every quarter period. Similarly to a forced pendulum, there is a phase locking between the forcing and conditions favorable to the growth of the perturbation (here the vertical phase shift of the meanders on the front is related to the vertical gradient of mean PV). During each half period of its oscillation, the PV front is pushed away from its equilibrium position first by the forcing (first quarter period) and then by the vertical phase shift of the perturbation (see figure 3b). Indeed, when the front is pushed offshore, the vertical phase shift is positive while the baroclinic PV is negative. This condition is favorable to the outward motion of baroclinically coupled meanders; it creates PV anomalies which form baroclinic dipoles self-advecting offshore. The converse holds when fluid particles move shorewards. The result is an amplification of the

¹Note that larger growth rates than $\Sigma = 0.01$ can be obtained for other values of T_c^0 and k as seen hereafter

across-shore motion of the PV front.

Subsequently, we investigate the sensitivity of parametric instability (for subharmonic forcing) to the physical parameters. Figures 4a,b,c present the growth rates for pure parametric instability at the resonant pulsation ω_1 in the (T_c^0, γ) parameter plane (with $\epsilon = 0.2$), for $k = 0.5, 1.0, 3.0$. This choice of wavenumbers corresponds to realistic wavelengths in the ocean of about 340, 170 and 56 km. First, we observe that wide currents (with respect to the internal radius of deformation) are mostly baroclinically unstable, except if the mean baroclinic transport (and its variation) is large. In that latter case, parametric instability is naturally favored. Second, the maximum parametric instability is found in the close vicinity of the critical curve for baroclinic instability, a conclusion reached by (Pavec and Carton, 2004) with an asymptotic analysis of growth rates. Whatever the wavenumber, growth rates range between zero and about one tenth. In dimensional form, $\Sigma = 0.1$ roughly corresponds to a 70 hour e-folding time. The resonant pulsation increases away from the marginal curve and varies noticeably with k for identical values of T_c and of γ (not shown). Also, the maximum growth due to parametric instability shifts from negative T_c^0 for short waves to positive T_c^0 for long waves.

To compare the relative strengths of baroclinic and parametric instability, growth rates were plotted in the same parameter plane for a given pulsation of the mean flow ($\omega = 0.25$), again for $\epsilon = 0.2$ (figures 5a and b). In figure 5a, the largest unstable tongue corresponds to the region of dominant baroclinic instability and the smaller tongue is in the region of baroclinic stability. The relative amplitude of growth rates shows that baroclinic instability dominates parametric instability in the evolution of coastal currents (compare figures 5a and 5b). The influence of the mean flow variation is to stabilize weakly unstable baroclinic waves and to destabilize baroclinically stable waves. This effect was already mentioned in Pavec and Carton (2004), again with an asymptotic analysis of growth rates. Note though, that in this case that the maximum parametric instability is found in a band separate from the marginal stability curve in the (T_c^0, γ) plane. This tongue, centered near $T_c \sim 0.2$, corresponds to mean flow profiles with maximal velocity away from the coast; such flow profiles are comparable to the Mediterranean Water undercurrents, for instance. On the contrary, $T_c \sim 0$ corresponds to mean flows with a counter-current near the coast. Increasing ϵ above 0.2 amplifies the effects mentioned above (not shown).

In summary, the subharmonic forcing yields the largest growth rates; a comparison of the analytical and the numerical values of growth rates for parametric instability is satisfactory up to moderate values of ϵ . The mechanism of parametric instability is explained through the relative phases of the forcing and of the baroclinic component of the perturbation. When the mean baroclinic transport

varies with time, parametric instability can occur for both long and short waves ; it is favored near the marginal curve for baroclinic instability. For a given wave-number, parametric instability is stronger for larger mean baroclinic transports and for narrow mean flows corresponding to offshore jets. Mean flow variation damps baroclinic instability, which, on the contrary, is favored for wide PV strips compared to the deformation radius.

4.2 Time-varying baroclinic potential vorticity

Parametric instability can also be achieved if the mean baroclinic PV varies with time. The growth rates for parametric instability are non-zero only for finite values of the mean barotropic PV (and/or non-zero steady baroclinic transport). Growth rates of pure parametric instability are plotted in the (Q_c^0, γ) parameter plane for $Q_T = 0.5, T_c = 0.1, \epsilon = 0.2$ and at subharmonic resonance in Figures 6a,b,c for $k = 0.5, 1.0, 2.0$ (therefore baroclinic instability growth rates do not appear in the central band).

Clearly, parametric instability is at its strongest near the marginal curve for baroclinic instability. Baroclinic instability is favored for wide currents while parametric instability dominates for medium-width currents. The resonant pulsation for parametric instability increases away from this marginal curve (not shown). The maximum growth rates of parametric instability do not substantially depend on k and baroclinic instability is favored for wavelengths comparable to $2\pi R_d$. For short waves, the domain of parametric instability is smaller than for long waves. This conclusion had been reached by Pavec and Carton (2004) with an asymptotic analysis of growth rates : parametric instability tends to vanish for short waves when the baroclinic mean PV is time-varying.

In summary, parametric instability in this case shares important characteristics with the case of time-varying baroclinic transport of the mean flow.

5 Nonlinear parametric instability of the boundary current

The purpose of this section is to determine how parametric instability evolves when nonlinear wave interactions are allowed. The objective is not to identify the sensitivity to flow parameters in all nonlinear regimes, but rather to study the most important nonlinear regimes (more numerical experiments were performed than those shown here to support the generality of our findings). In particular, three finite-amplitude regimes of flow - wave breaking into filaments and turbulence ; stabilization of finite waves ; breaking of waves into vortices - will be presented in some detail.

To perform this study, we use a numerical model which solves the nonlinear

quasi-geostrophic equations in a zonally periodic channel². All variables are projected on Fourier components zonally and on Chebychev polynomials meridionally. The two layers have equal thickness. The horizontal resolution is 256x256 with $\Delta x = 2\Delta y = 0.05$ (or 1 km dimensionally) near the center of the domain. The meridional spacing of the grid is denser near the boundaries (Gauss-Lobatto distribution of points). The domain size is $2\pi \times 2\pi$. We checked that the presence of a (remote) northern boundary did not influence the evolution of the flow. The mean flow is initialized with the analytical solution given in subsection 2.2. The variation with time of its baroclinic PV is at resonant pulsation with amplitude $\epsilon = 0.2$. An initial perturbation, with very weak amplitude (10^{-5}), and random spatial distribution, is added to the PV front position (we recall that $k = 1$ corresponds to $\lambda = 2\pi w$). The time-step is $\Delta t = 0.004$. All variables are saved every 1.5 dimensionless time units. A hyperdiffusive operator (a Laplacian to the eighth power) is implemented in the code, but simulations remain numerically stable and physically identical even without viscosity.

5.1 Classification of nonlinear regimes

Figure 7 shows the nonlinear regimes in the $(Q_2, \gamma = 1/R_d)$ plane for $Q_1 = 0.72$ and $w = 0.7363$ (note again that these regimes are observed with other flow and parameter choices). Three regimes are obtained.

Filamentation and turbulent evolution of the perturbation due to wave breaking, without coherent vortex or stable wave formation (squares on the diagram). Wave breaking occurs in particular when the lower layer PV is weak (less than 1/3 of the upper layer PV). In that case, the dynamics of the lower layer is governed by the evolution of the upper layer PV anomalies. The difference in layerwise PV amplitude prevents the coherent coupling of perturbations, and the shear exerted by the upper layer PV on the lower front perturbations leads to their breaking (this was also observed by Chérubin, 2000 for pure baroclinic instability). Filamentation also occurs for small deformation radius which favors the initial growth of long-wave perturbations which interact and form small-scale PV anomalies. Such small-scale anomalies are prone to interacting with their neighbors and to the creation of turbulence (see also Chérubin, 2000).

Finite-amplitude meanders (crosses on the diagram) are obtained for deformation radii close to the PV strip width, for similar layerwise PV amplitudes (and thus for weak growth rates of parametric instability). In that case, wave breaking is avoided and the slow linear growth of the perturbation allows stabilizing nonlinear wave-wave interactions to take place.

Finally, coherent vortex formation and detachment (circles on the diagram) is observed for PV strip intensity of comparable values, for deformation radii smaller

²The presence of the northern boundary does not alter nonlinear evolutions since the channel is wide

than or equal to the PV strip width, and thus for medium to large growth rates of parametric instability.

5.2 Analysis of nonlinear regimes

An example of regime 1 (wave breaking), obtained for $\gamma = 2.6, Q_2 = -2.5$, is presented in Figure 8. Initially, the long waves grow, but the lower layer front evolution is driven in part by the upper layer front structure. The extrusion of fluid in the lower layer forms a filament, which follows the upper front meander. Simultaneously, offshore fluid penetrates into the lower layer front and forms an elliptical pool vertically aligned with each upper layer front extrusion. Small-scale features grow at the tip of the vorticity filaments in the lower layer, indicating that nonlinear interactions feed the large-wavenumber components of the perturbation. In this state, the outer envelope of the lower layer front is nearly in phase (vertically) with the upper layer meander, which indicates that the baroclinic coupling of meanders will not substantially favor their offshore growth. The final stage of the evolution is the breaking of these disturbances, which gives birth to two vorticity patches in the lower layer surrounded by a turbulent, small-scale vorticity distribution. In that process, the upper layer meanders do not amplify, as anticipated above.

Figure 9 is the Fourier spectrum (zonal wave decomposition) of the barotropic and baroclinic components of the perturbation streamfunction). The amplitudes of the first four wavenumbers are plotted versus time. Initially, all waves grow but the longest wave ($k = 1$) dominates. It must be remembered that similar growth rates are obtained for $k = 1, 2, 3$, which leads to comparable amplitudes of these three spectral components at $t = 100$ and thus to intense wave-wave interactions. Between $t = 100$ and $t = 200$ shorter waves dominate; they correspond to the small-scale features observed on the PV distribution at $t = 200$ for instance (the offshore filaments intruding shorewards in the lower layer). Finally, these intrusions break up into turbulent patches which are materialized in the spectrum by an equal contribution of all short waves.

Finite-amplitude meander formation, regime 2, is clearly illustrated on Figure 10 for $\gamma = 1.0$ and $Q_2 = -2.0$. This configuration has a weak growth rate and at $t = 1000$ the PV front interface has only small deviations, mostly on domain-scale waves. At $t = 2700$ a change in wavelength occurs and shorter waves, in fact the first harmonic, grow. The PV front now has a more complex shape with a superposition of two modal components. Finally, at $t = 3000$, the meanders in both layers attain a finite amplitude; the upper layer PV front deviation contains both zonal modes 1 and 2.

The spectral analysis of this simulation is presented in Figure 11 and clearly illustrates the predominance of mode $k = 1$. In the baroclinic spectrum the first mode is larger than the other modes by orders of magnitude for early times. At

$t \sim 2000$ the first harmonic, $k = 2$, grows in the barotropic perturbation and its amplitude approaches that of mode $k = 1$ at $t \sim 2500$; the same trend is observed with a delay of $\Delta t = 500$ in the baroclinic component. This confirms the observations in the PV maps.

Finally, vortex detachment, regime 3, is presented on Figure 12 for $\gamma = 2.6$ and $Q_2 = -1.0$. Clearly the vertical interaction of PV anomalies is favorable to the ejection of vortices; at $t = 140$ the layerwise perturbations are shifted by a quarter wavelength. In the lower layer, large PV poles form; they advect and elongate the upper PV anomalies (see $t = 185$). Smaller vortices form in the upper layer and detach offshore.

The spectral analysis of this evolution is presented in Figure 13. Medium-length waves, $k = 2$, grow and dominate the other components by two orders of magnitude until $t = 100$; this corresponds to the clear sinusoidal shape of the meanders. Starting from $t = 100$, short waves, $k = 4$, grow. These waves are necessary for the formation of small-scale structures which participate in the isolation and separation of the offshore PV poles. Finally, after vortex detachment, a zonal mean flow is restored and long waves grow.

5.3 A criterion for the localization of vortex detachment

Capet and Carton (2004) studied the baroclinic instability of a steady boundary current composed to two superimposed PV strips and they also observed vortex detachment from the mean flow. They provided an analytical criterion for the position of the detachment site : it corresponds to the latitude y where the mean flow velocity ($U(y)$) is equal to the phase speed c of the most unstable wave (the so-called critical latitude). This latitude is indeed a fair estimate of the real latitude of vortex detachment in numerical simulations. These authors also noticed that, at the detachment site, the instantaneous relative flow $(u - c, v)$ exhibits a saddle-point in nonlinear simulations.

A priori, this "critical latitude" criterion cannot apply rigorously here because the mean flow is unsteady. Two questions are therefore : how good an approximation of the detachment site does this criterion provide for parametric instability? Is the point of maximum deformation (where the vortex will detach from the mean flow) also a saddle-point of the relative flow?

To answer these questions, we compute first the two components of deformation (strain $\Xi_1 = \partial_x u - \partial_y v$, and shear $\Xi_2 = \partial_x v + \partial_y u$) in the upper layer for regime 3. We superimpose them, represented as a vector $(\vec{\Xi}(\Xi_1, \Xi_2))$ on the PV maps. Fig.14 shows the time series of these maps at the same moments as Fig.12. At $t = 100$, deformation is clearly maximum at the crests and troughs of the meanders. Deformation increases as the meanders steepen ($t = 140$). At $t = 185$ (last frame), deformation is clearly maximum at the tip of the filament connecting the

vortices to the boundary current, in the upper layer. The largest deformation (in the sense of the norm of $(\vec{\Xi})$) occurs at $x = 3.2, y = 0.2$ at the junction between the vortex and the filament.

Then, in figure 15, we superimpose the instantaneous relative velocity $(u(x, y) - c, v)$ of the upper layer flow on the PV maps for the same regime (c is the phase speed of the most unstable wave). We clearly observe a saddle-point of this relative velocity at the same location as the deformation maximum ($x = 3.2, y = 0.2$). Note that this latitude is not exactly that predicted by the linear criterion ($U(y_l) = c$), which is $y_l = 0.6$. But this discrepancy can be attributed to the influence of wave-wave interactions, at this late stage of nonlinear flow evolution. In summary, the linear criterion for critical latitude proposed by Capet and Carton (2004), based on the steady component of the mean flow, provides a rough estimate of the real position of the saddle-point of relative flow, where deformation is maximum. But the point of maximum deformation is indeed a saddle-point of relative velocity in nonlinear simulations.

6 Summary and conclusions

Parametric instability of a simple boundary current, composed of two superimposed strips of piecewise-constant PV, was studied in a two-layer quasi-geostrophic model. Two types of time variation of the mean flow were used : variation of the baroclinic transport or of the baroclinic PV. Linear parametric instability was studied by computing the growth rates of perturbations on the PV fronts via a multiple time scale expansion. Resonance conditions which relate the waves and the forcing frequency were determined. Growth rates were calculated for both subharmonic and harmonic resonances. A more detailed study was performed only for subharmonic resonance.

The growth rates of parametric instability were determined for various frequencies and amplitudes of forcing and exhibited the classical Mathieu-type diagram with instability tongues. Subharmonic forcing yields the largest growth rates of all possible forcing frequencies for our flow. Precise agreement was found between the Floquet analysis of the numerical integrations of the linear equation and analytical calculations of these growth rates for the case of weak forcing. For moderate forcing, the accuracy of analytical calculations remained satisfactory (20 % for $\epsilon = 0.5$). A physical explanation of the mechanism of parametric instability lies in the respective phases of the forcing and of the baroclinic component of the PV front.

For the two types of time variation of the mean flow, the main characteristics of parametric instability were obtained : it has maximum growth rates near the marginal stability curve for baroclinic instability. Moreover, mean flow variation

weakens baroclinic instability. These two conclusions had been reached previously by Pavec and Carton (2004) purely by analytical means using perturbation expansions. Baroclinic instability is favored for PV strips wide compared to the deformation radius.

For time varying mean baroclinic transport, the maximum growth rates of parametric instability are similar for various wavenumbers, but the choice of wavenumber considerably influences the resonant frequency. This choice also imposes the direction of steady mean baroclinic transport necessary for parametric instability. For a fixed pulsation of the mean flow not resonant for all wave numbers, jet-like boundary currents, with velocity maxima offshore, are favored for parametric instability.

For time varying mean baroclinic PV, the sensitivity of parametric instability to the wavenumber was more drastic but again the maximum growth rates were similar for all wavenumbers. As shown asymptotically by Pavec and Carton (2004), parametric instability tends to vanish for short waves and time varying baroclinic PV.

A nonlinear Fourier-Chebyshev model of the two-layer quasi-geostrophic equations in a zonally periodic channel was used to assess the finite-amplitude regimes of parametric instability in the case of time varying baroclinic PV. The objective was not a thorough parametric study of all nonlinear regimes, but the identification of the most important ones and their individual study. Three main regimes were found : formation of filaments and turbulent flow by wave breaking, stabilization of the perturbation as finite amplitude meanders, vortex formation and detachment.

Clearly, wave breaking occurs when a layerwise PV amplitude is stronger than the other, and for wide boundary currents (this process has also been noted for pure baroclinic instability). The horizontal velocity shear created by the stronger flow on the opposite layer perturbation results in its breaking and in turbulence ; many wavenumbers are then present in this case, even if long waves remain the largest signal in the perturbation.

Finite wave stabilization is possible when linear growth rates are moderate and for medium-width PV strips (widths comparable to the deformation radius). Then long waves remain dominant even if a secondary (harmonic) wave grows. Due to the weak growth rates, this process is very slow.

Finally, the most important case for exchanges between the coastal zone and the open ocean is the formation and detachment of coherent vortices. This occurs for medium width strip and for larger growth rates. The most unstable wave grows first with its first harmonic until vortex breaking occurs ; then long waves intensify due to the reorganization of the mean flow along the boundary.

This process was studied in more detail : it appears clear that the junction between the vortex and the filament is a maximum of deformation. It is also a saddle

point of the relative flow (the instantaneous velocity minus the phase speed of the most unstable wave). The critical latitude criterion, defined by Capet and Carton (2004) and adapted to the steady part of the mean flow, provides a rough estimate of the latitude of this point.

To retain mathematical tractability, this study reduced the complexity of the ocean : the presence of rough topography or an irregular coastline, the lack of regularity in time variations of oceanic currents, the complexity of oceanic stratification, were not taken into account.

This simplification does not, however, render this study too idealistic. Indeed, previous studies (e.g. Capet and Carton, 2004) have shown that a seamount or a canyon do not drastically modify the instability of a boundary current in a similar framework ; the major effect of topographic anomalies is to trigger perturbations ; downstream of the obstacle, these perturbations acquire the characteristics found in the absence of topographic anomalies (but for the spatial periodicity of vortex formation).

Adding more frequencies to the forcing would render the flow less regular but the present study has shown that subharmonic resonance is by far the most efficient process for parametric instability. Therefore, similar results would still be expected. Adding more layers would certainly bring more realism for oceanographic application, and should be considered in a sequel of this work. Similarly, a change in dynamics from quasi-geostrophic to nonlinear shallow-water equations would be of interest to confirm the applicability of our results to the ocean, though the analytical approach would presumably be lost in this transition.

Acknowledgements

The authors express gratitude to Dr Louis Marié (LPO, IFREMER) who provided the nonlinear code. This study was achieved in partial fulfillment of the requirements for MP's doctoral thesis at the Université de Bretagne Occidentale. MP's doctoral grant was provided by DGA/DSP (R&D Division of the French Ministry of Defense). XC acknowledges support from CNRS/INSU³ under PATOM⁴ research project MARCO⁵. This work is a contribution to the experimental research project SEMANE⁶.

³National Center for Scientific Research/National Institute for the Sciences of Universe

⁴Mesoscale and large-scale ocean and atmosphere dynamics program

⁵Marges continentales

⁶Suivi des Eaux Méditerranéennes en Atlantique Nord Est

Appendix : linear growth rates for the harmonic forcing

For the harmonic forcing of the linear problem we have $2\omega = \sigma_1 - \sigma_2 + 2\epsilon\delta\omega$, and we set $T = \epsilon^2 t$. The linear equation becomes

$$[\partial_t + \epsilon^2 \partial_T][X_a + \epsilon X_b + \epsilon^2 X_c] = [M_0 + \epsilon M_1 \cos(\omega t)][X_a + \epsilon X_b + \epsilon^2 X_c]$$

or, expanded at each order in ϵ ,

$$\partial_t X_a = M_0 X_a$$

$$\partial_t X_b = M_0 X_b + M_1 \cos(\omega t) X_a$$

$$\partial_t X_c + \partial_T X_a = M_0 X_c + M_1 \cos(\omega t) X_b$$

with $X_a = A_1(T)X_{01} \exp(i\sigma_1 t) + A_2(T)X_{02} \exp(i\sigma_2 t)$. Thus, it is straightforward to show that

$$\begin{aligned} X_b = & A_3(T)X_{03} \exp(i[\sigma_1 - \omega]t) + A_4(T)X_{04} \exp(i[\sigma_2 + \omega]t) + \\ & A_5(T)X_{05} \exp(i\sigma_1 t) + A_6(T)X_{06} \exp(i\sigma_2 t) \end{aligned}$$

which inserted in the time evolution equation leads to

$$[i(\sigma_1 - \omega) - M_0] A_3 X_{03} = M_1 X_{01} A_1 / 2, \quad [i(\sigma_2 + \omega) - M_0] A_4 X_{04} = M_1 X_{02} A_2 / 2.$$

The slow-time evolution equation for A_1, A_2 is the secular equation from the evolution equation for X_c

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dT} &= \frac{1}{2} \frac{\langle X_{01}^+, M_1 X_{03} \rangle}{\langle X_{01}^+, X_{01} \rangle} A_1 + \frac{1}{2} \frac{\langle X_{01}^+, M_1 X_{04} \rangle}{\langle X_{01}^+, X_{01} \rangle} \exp(2i\delta\omega T) A_2 \\ \frac{dA_2}{dT} &= \frac{1}{2} \frac{\langle X_{02}^+, M_1 X_{03} \rangle}{\langle X_{02}^+, X_{02} \rangle} \exp(-2i\delta\omega T) A_1 + \frac{1}{2} \frac{\langle X_{02}^+, M_1 X_{04} \rangle}{\langle X_{02}^+, X_{02} \rangle} A_2. \end{aligned}$$

With

$$\alpha_1 = \langle X_{01}^+, M_1 X_{03} \rangle / (2\langle X_{01}^+, X_{01} \rangle), \quad \alpha_2 = \langle X_{01}^+, M_1 X_{04} \rangle / (2\langle X_{01}^+, X_{01} \rangle),$$

$$\alpha_3 = \langle X_{02}^+, M_1 X_{03} \rangle / (2\langle X_{02}^+, X_{02} \rangle), \quad \alpha_4 = \langle X_{02}^+, M_1 X_{04} \rangle / (2\langle X_{02}^+, X_{02} \rangle)$$

the growth rate Σ for the parametric instability of the flow with harmonic forcing is given by

$$\Sigma^2 - \Sigma(\alpha_1 + \alpha_4) + (\delta\omega)^2 + i\delta\omega(\alpha_1 - \alpha_4) + \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3 = 0.$$

References

- Capet X. and X. Carton, 2004. Nonlinear regimes of baroclinic boundary currents. *J. Phys. Oceanogr.*, **34** :1400–1409.
- Carton X. and B. Legras, 1994. The life-cycle of tripoles in two-dimensional incompressible flows. *J. Fluid Mech.*, **267** :53–82.
- Cherubin L., 2000. Descriptive analysis of the hydrology and mixing of the Mediterranean outflow; effects of topography on the stability of the Mediterranean Undercurrents. *Thèse de doctorat de l'Université Aix Marseille*. 342 pp.
- Chérubin L., Carton X. and D.G. Dritschel, 1996. Vortex expulsion by a zonal coastal jet on a transverse canyon. *European Series in Applied and Industrial Mathematics : Proceedings*, SMAI, Paris, **1** :481–501.
- Chérubin L.M., Carton X., Paillet J., Morel Y. and A. Serpette, 2000. Instability of the Mediterranean water undercurrents southwest of Portugal : effects of baroclinicity and of topography. *Oceanologica Acta*, **23** :551–573.
- Kontoyannis H. and D.R. Watts, 1994. Observations on the variability of the Gulf-Stream path between 74°W and 70°W. *J. Phys. Oceanogr.*, **24** :1999–2013.
- Lee T., 1994. Variability of the Gulf-Stream path as observed from satellite infrared images. *PhD dissertation, University of Rhode Island*, 188 pp.
- Pavec M. and X. Carton, 2004. Parametric instability of a two-layer wall jet. *Regular and Chaotic Dynamics*, **9** :499–507.
- Pavec M., Carton X. and G. Swaters, 2005. Baroclinic instability of frontal geostrophic currents over a slope. *J. Phys. Oceanogr.*, **35** :911–918.
- Pedlosky J. and J. Thomson, 2003. Baroclinic instability of time dependent currents. *J. Fluid Mech.*, **490** :189–215.
- Poulin F.J., Flierl G.R. and J. Pedlosky, 2003. Parametric instability in oscillatory shear flows. *J. Fluid Mech.*, **481** :329–353.
- Serra N. and I. Ambar, 2002. Eddy generation in the Mediterranean undercurrent. *Deep-Sea Res.*, **49** :4225–4243.
- Shimada K. and A. Kubokawa, 1997. Nonlinear evolution of linearly unstable barotropic boundary currents. *J. Phys. Oceanogr.*, **27** :1326–1348.

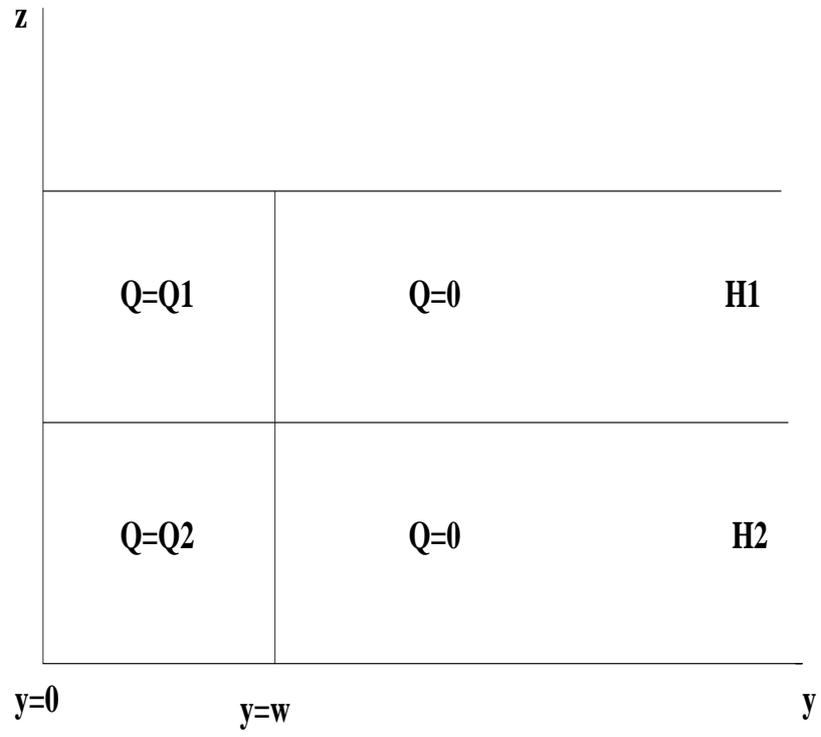
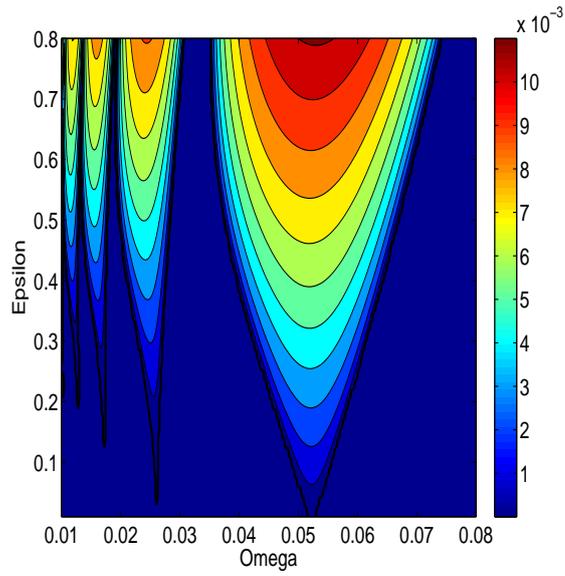
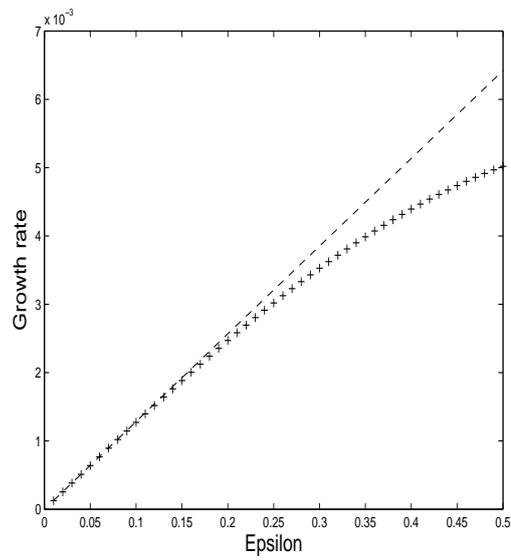


FIG. 1: Vertical-latitude section of PV distribution

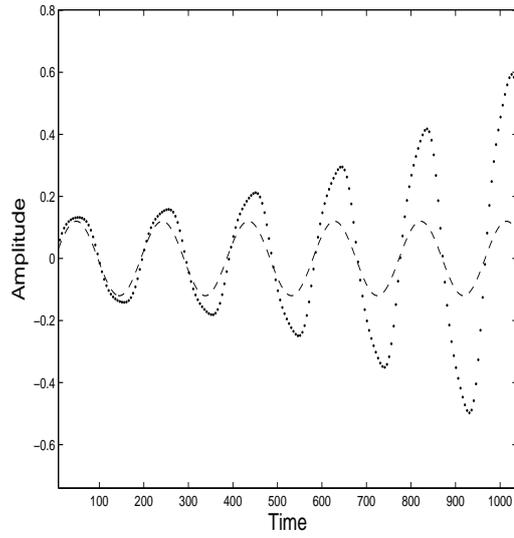


(a)

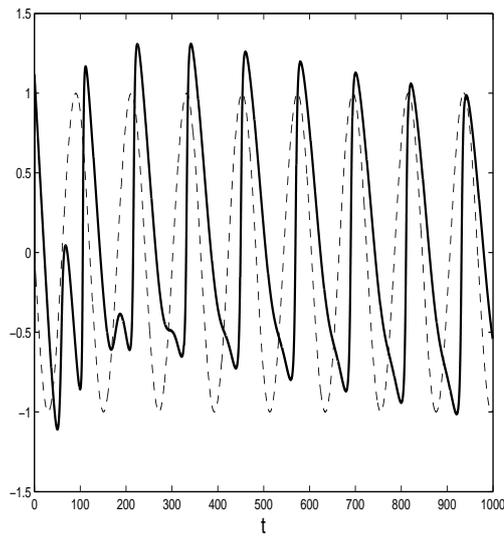


(b)

FIG. 2: Case of time-varying baroclinic transport : (a) growth rates of parametric instability versus ω and ϵ for $k = 1$ and $T_c = 0.026$ (weak forcing case); (b) Comparison of the analytical and numerical growth rates for increasing oscillatory component of the baroclinic transport



(a)



(b)

FIG. 3: (a) position of the upper layer PV front versus time, for an unperturbed oscillating mean flow (dashed lines) and for a perturbed oscillating mean flow (dotted lines), in the reference case, and for subharmonic forcing (case of time-varying baroclinic transport); (b) vertical phase shift of the perturbation (solid line) and forcing (dashed line).

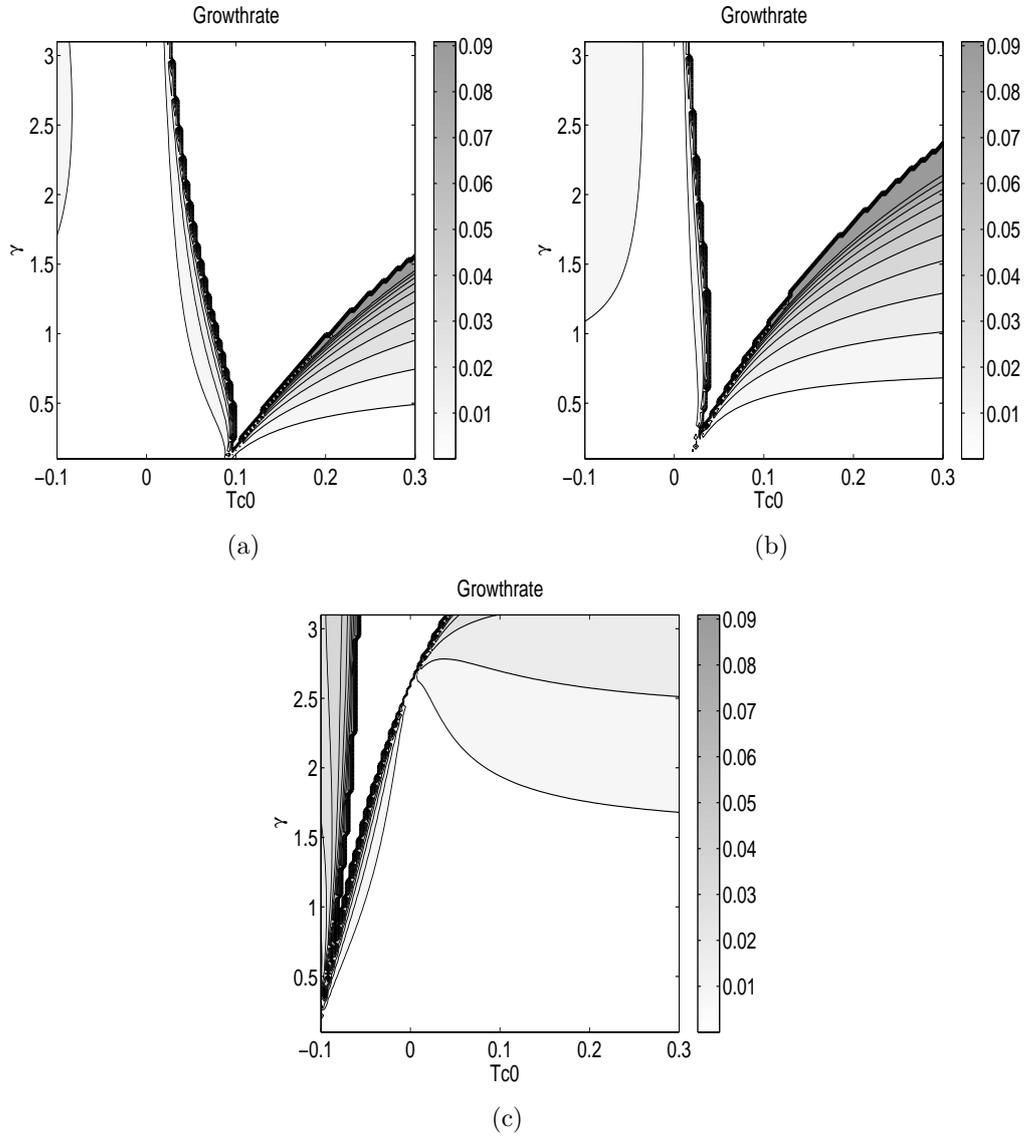
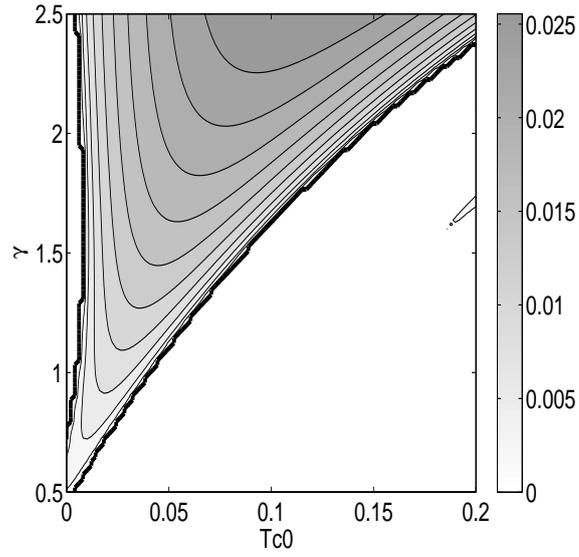
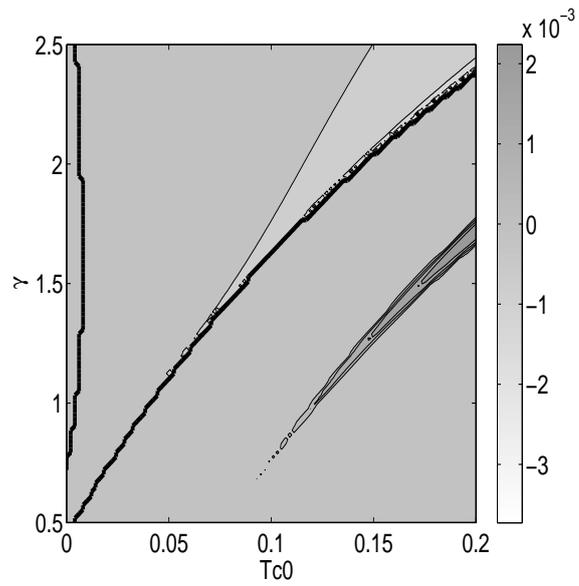


FIG. 4: Growth rates for pure parametric instability in the (T_c^0, γ) plane for $\epsilon = 0.2$, resonant ω and for $k = 0.5, 1.0, 3.0$ (resp. a,b,c; case of time-varying baroclinic transport).



(a)



(b)

FIG. 5: Growth rates for mixed baroclinic-parametric instability in the (T_c^0, γ) plane for $\epsilon = 0.2$, and $\omega = 0.25$; (b) difference in growth rates between mixed baroclinic- parametric instability and pure parametric instability for the same parameters (case of time-varying baroclinic transport).

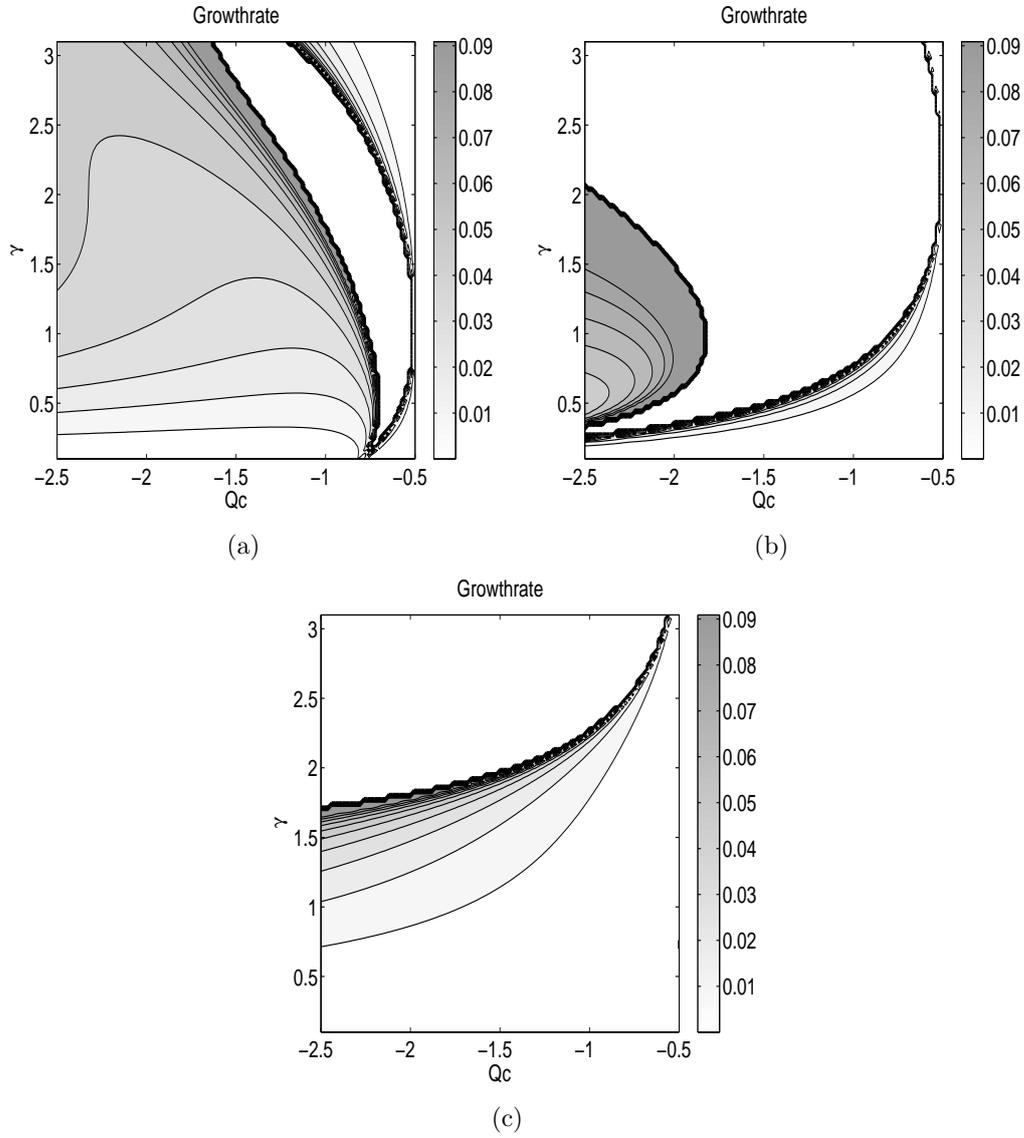
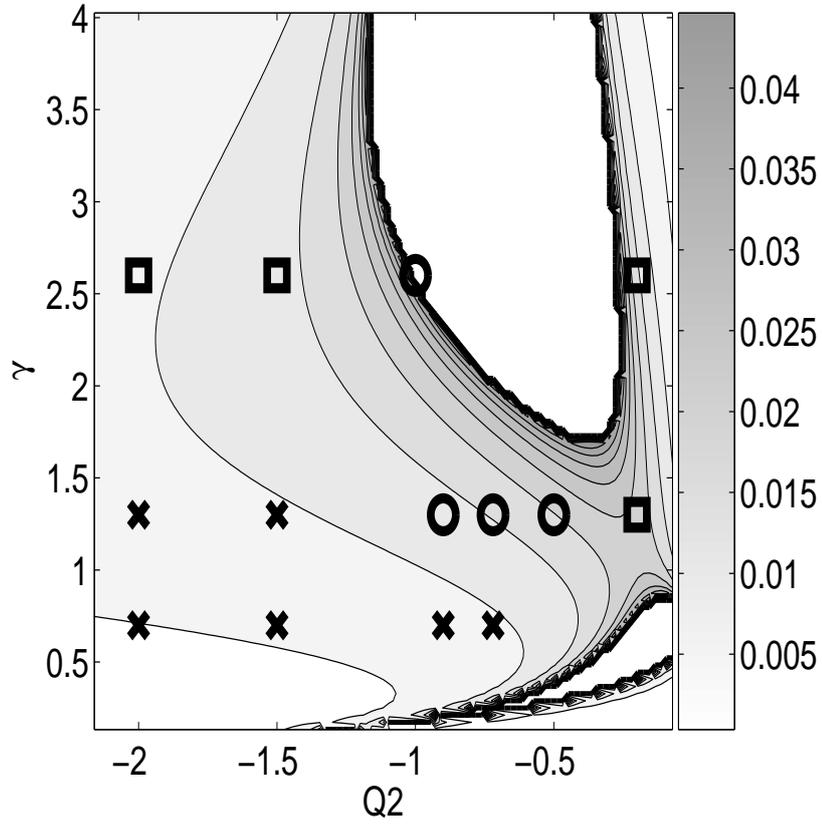
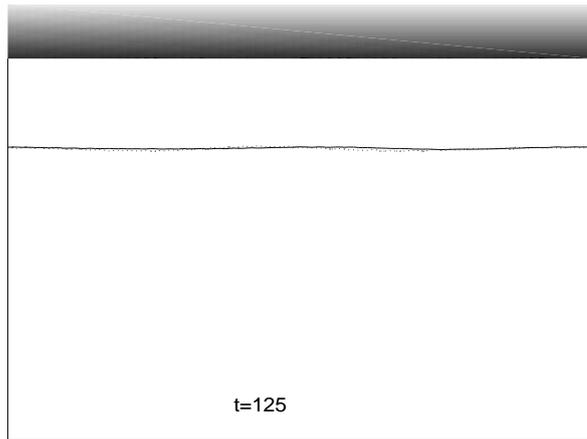


FIG. 6: Growth rates for pure parametric instability in the (Q_c^0, γ) plane for $Q_T = 0.5, T_c = 0.1, \epsilon = 0.2$, and at the resonant pulsation for $k = 0.5, 1.0, 2.0$ (resp. a,b,c; case of time-varying mean baroclinic PV).

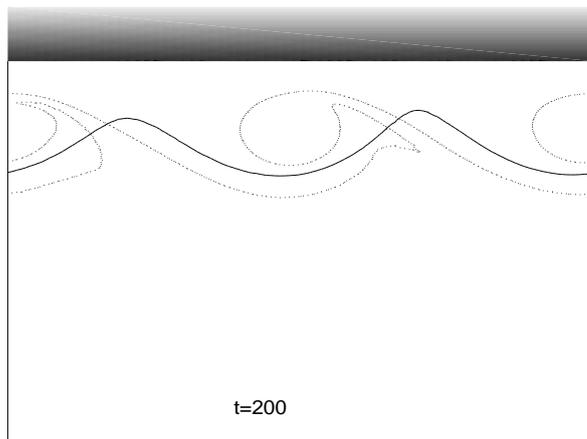


(a)

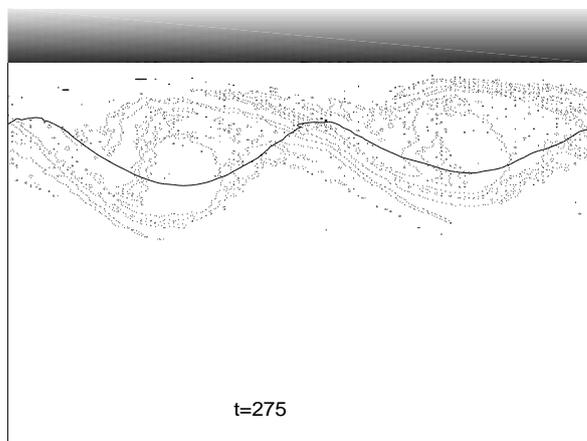
FIG. 7: Growth rates for pure parametric instability in the $(Q2, \gamma)$ plane for $Q_1 = 0.72, w = 0.7363$ (case of time-varying mean baroclinic PV) with superimposed symbols for nonlinear regimes : squares for wave breaking and filament formation, crosses for finite-amplitude meanders and circles for vortex detachment.



(a)

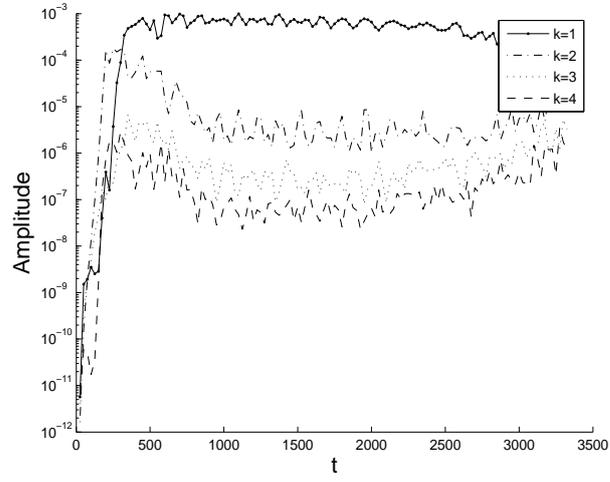


(b)

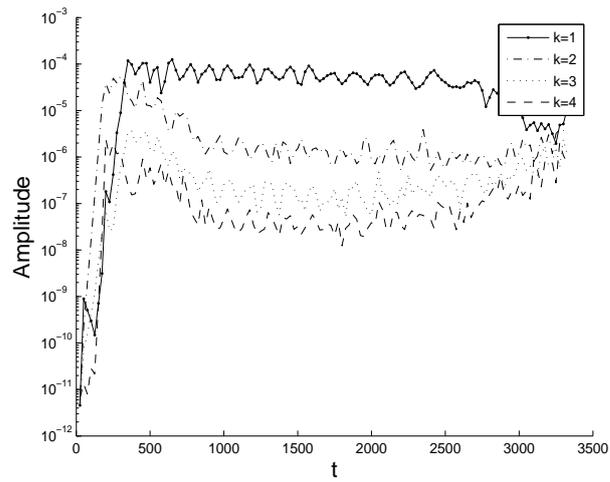


(c)

FIG. 8: Time series of horizontal maps showing the position of the PV fronts for regime 1 (solid line = upper layer, dashed line = lower layer). Times shown are $t = (a,b,c)$.

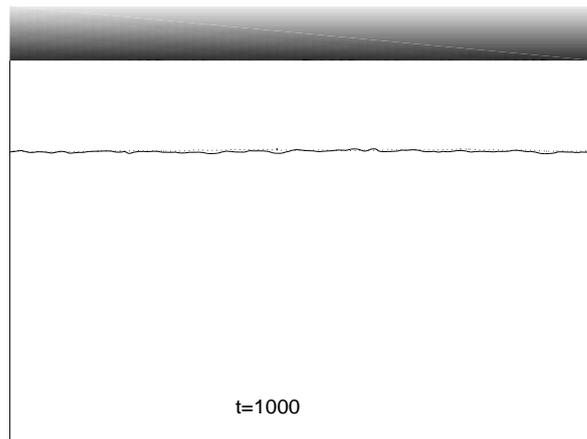


(a)

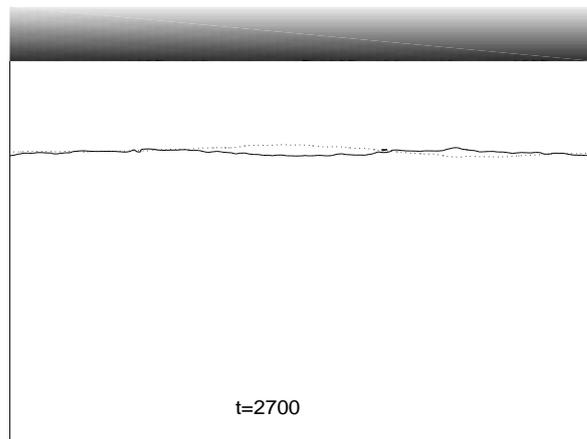


(b)

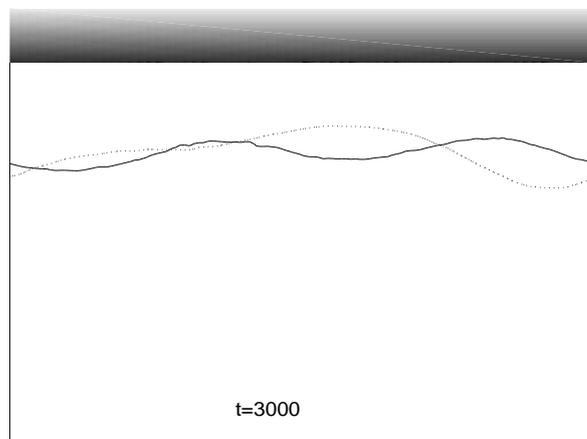
FIG. 9: Barotropic (a) and baroclinic (b) wave spectra for regime 1.



(a)

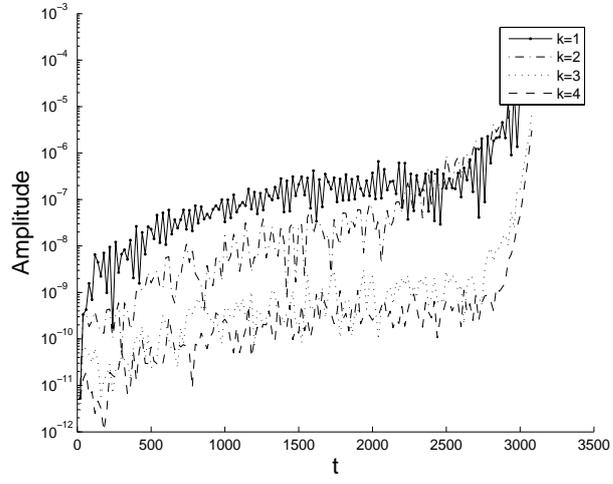


(b)

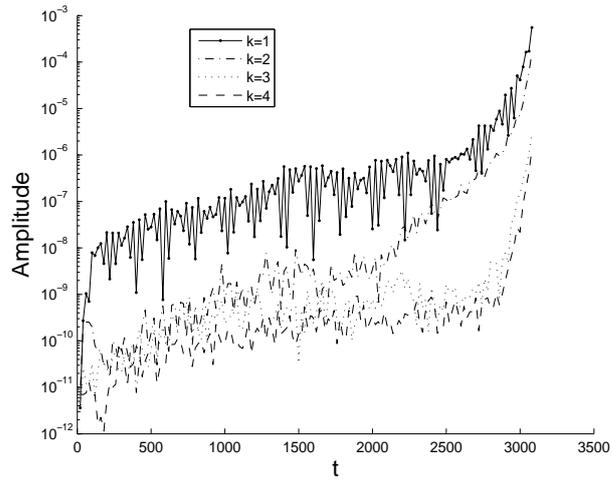


(c)

FIG. 10: Time series of horizontal maps showing the position of the PV fronts for regime 2 (solid line = upper layer, dashed line = lower layer). Times shown are $t = (a,b,c)$.

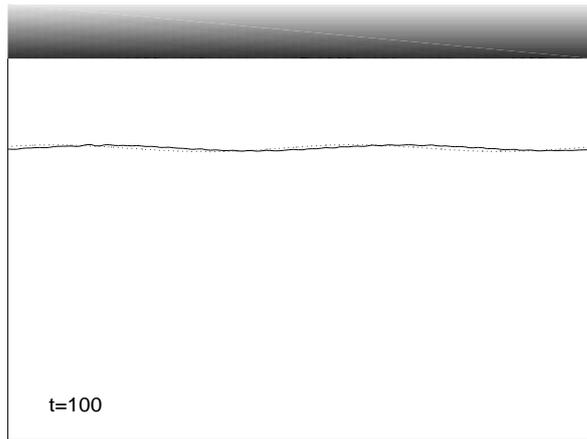


(a)

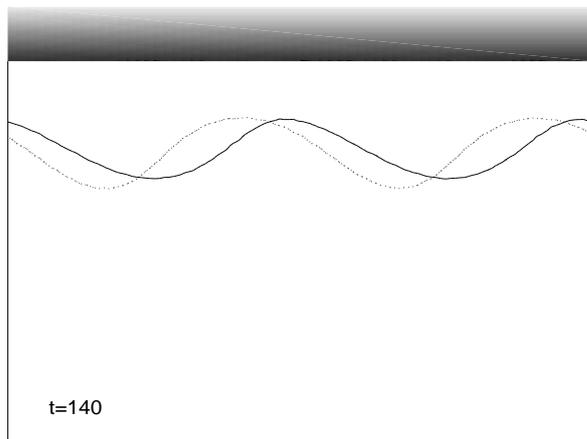


(b)

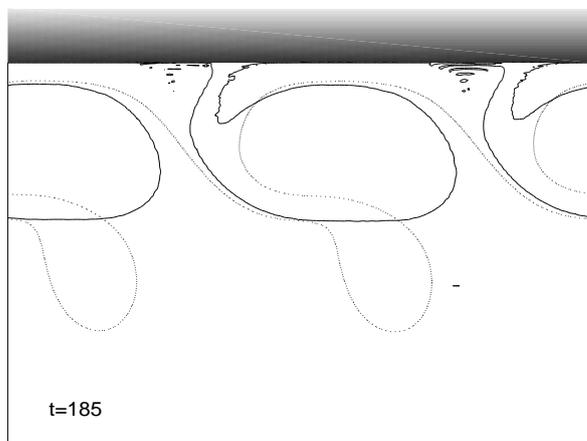
FIG. 11: Barotropic (a) and baroclinic (b) wave spectra for regime 2.



(a)

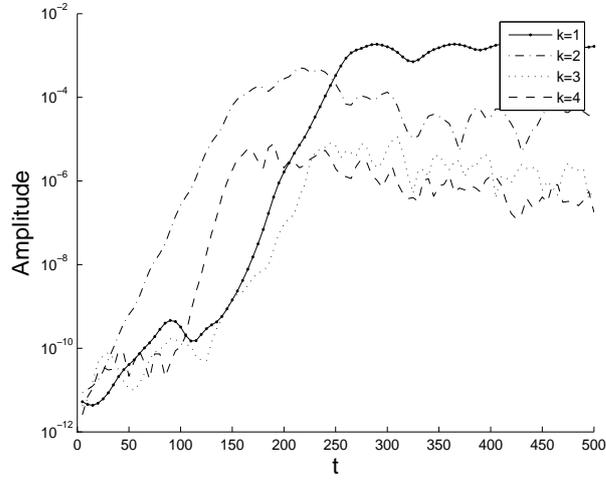


(b)

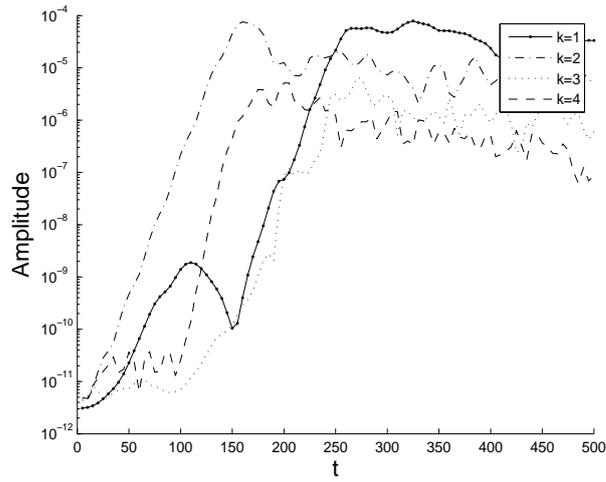


(c)

FIG. 12: Time series of horizontal maps showing the position of the PV fronts for regime 3 (solid line = upper layer, dashed line = lower layer). Times shown are $t = 100, 140, 185$ (a,b,c).

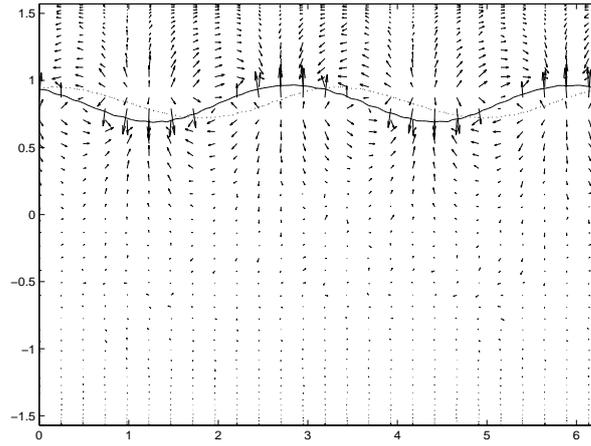


(a)

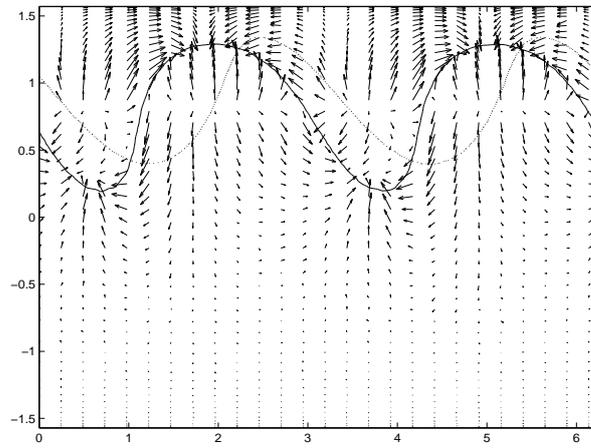


(b)

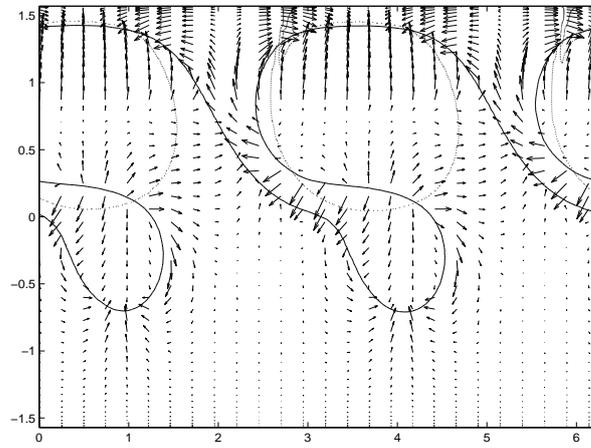
FIG. 13: Barotropic (a) and baroclinic (b) wave spectra for regime 3.



(a)



(b)



(c)

FIG. 14: Time series of deformation vectors (ξ_1, ξ_2) in the upper layer superimposed on the position of the PV fronts for regime 3 (solid line = upper layer PV, dashed line = lower layer PV). Times shown are $t = 100, 140, 185$ (a,b,c).

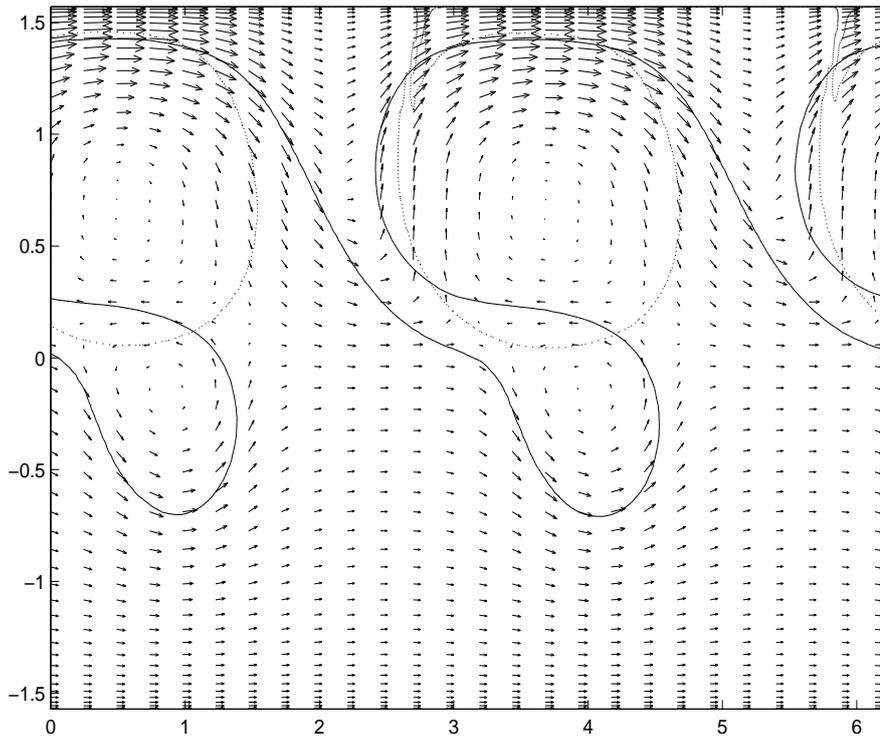


FIG. 15: Relative velocity $(u-c, v)$ in the upper layer superimposed on the position of the PV fronts for regime 3 (solid line = upper layer PV, dashed line = lower layer PV). Time shown is $t = 185$.

3.2 Compléments à l'article

3.2.1 Outils analytiques

Le travail réalisé pour cette étude a permis de mettre en place des outils analytiques et numériques de résolution de systèmes forcés périodiquement. Le formalisme utilisé dans l'article permet un traitement simple du problème et un calcul des taux de croissance, tout en offrant une écriture concise. Les résultats obtenus sont comparés avec succès aux conclusions obtenues précédemment par méthode asymptotique.

Comme les contraintes imposées par la rédaction de l'article ne laissaient pas la place d'expliquer totalement les calculs, une méthode alternative de calcul de stabilité est détaillée dans l'annexe 1 de la thèse.

3.2.2 Code numérique

Pour traiter numériquement le problème qui nous intéressait, il nous fallait disposer d'un code numérique quasi-géostrophique autorisant l'implémentation d'une variation périodique de la vortacité potentielle. Après différents tests, notre choix s'est porté sur un code développé par Louis Marié au Laboratoire de Physique des Océans. Il s'agit d'un code spectral en couches qui réalise l'intégration temporelle de la fonction courant. Ce code n'existait qu'en version bi-périodique (décomposition de tous les champs par transformées de Fourier bi-dimensionnelle), la première partie du travail a donc consisté à le ré-écrire pour un canal périodique. Il était donc nécessaire de trouver une base de fonctions bornées selon laquelle transformer les champs selon la largeur du canal et offrant des formules simples de dérivations et d'intégration. Le choix a été fait d'utiliser des polynômes de Chebyshev, définis ainsi pour tout n :

$$T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$$

Il est possible de montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} C_{2k}^n x^{n-2k} (x^2 - 1)^k$$

Cette écriture polynomiale offre des formulations simples des dérivées et des intégrales des fonctions qui sont comparables en complexité aux opérations équivalentes sur des décompositions de Fourier. L'avantage de cette formulation par rapport aux codes classiques en différences finies est la représentation correcte des conditions au bord. Comme les dérivées sont calculées analytiquement par multiplication de coefficients de polynômes, le calcul s'effectue de la même façon sur les bords et au centre du bassin. Aucun artefact n'étant introduit sur le comportement au bord des champs, ce code est particulièrement bien adapté au problème que nous traitons. En effet, notre courant s'appuie sur le bord du bassin et pourrait donc être influencé par des erreurs numériques au voisinage des bords, erreurs fréquentes dans les modèles aux différences finies et nécessitant des dissipations numériques compliquées pour les limiter. Une fois l'implémentation numérique de ces outils réalisée, plusieurs tests ont été effectués pour valider le modèle. Les résultats des comparaisons entre les taux de croissance analytiques issus de la théorie linéaire et les taux de croissance issus du modèle sont présentés dans l'article.

L'implémentation d'une variation temporelle dans le transport barocline du courant a ensuite été réalisée par simple ajout d'un terme de forçage dans les équations.

4.1 Introduction

4.1.1 Généralités

Dans ce chapitre, nous revenons longuement sur le cas de la mer d'Iroise déjà évoqué dans le premier chapitre. La modélisation numérique des courants sur cette zone présente aujourd'hui des problèmes non résolus. Des travaux en cours montrent la difficulté des modèles numériques à reproduire correctement la structure du front d'Ouessant, tant en position qu'en intensité. Une étude de processus des mécanismes qui se produisent le long de ce front permettra de mieux cerner les paramètres qui influent sur son comportement, et donnera éventuellement des pistes pour corriger les modèles numériques pour qu'ils représentent correctement les processus clés.

Le système complexe de répartition des masses d'eaux et les variabilités qui y sont associées ont déjà été décrits. Ici, nous nous appuyons sur des modèles théoriques pour essayer de déterminer quelles sont les causes des instabilités observées sur des données de SST. Le lien entre le travail qui précède et les instabilités en mer d'Iroise peut être fait assez facilement : la mer d'Iroise présente une structure barocline marquée, le front d'Ouessant, à laquelle se superpose un phénomène périodique, la marée. Cependant, il a été démontré dans le chapitre 2 qu'une variation périodique du courant barotrope sur un écoulement barocline dans la configuration quasi-géostrophique étudiée ne pouvait pas provoquer d'instabilité paramétrique, or ici le forçage de la marée est barotrope. Mais,

comme précisé dans l'étude bibliographique du chapitre 1, le formalisme approprié pour traiter le problème des fronts de densité est le formalisme shallow-water. Il sera montré dans la suite que cette formulation des équations fait apparaître un terme de couplage entre la vitesse et les épaisseurs de couches qui n'est pas présent en quasi-géostrophie. Ce terme est une source de résonance faisant intervenir le courant total et apporte une modification fondamentale aux propriétés d'instabilité du modèle quasi-géostrophique.

Après avoir démontré la possibilité d'existence de l'instabilité paramétrique sur des cas purement théoriques dans les deux chapitres précédents, l'objet de cette dernière partie de la thèse est d'essayer de quantifier sur un cas réel quel peut être l'impact d'un paramètre variable sur l'écoulement.

4.1.2 Grandeurs caractéristiques

Quelques grandeurs caractéristiques de la dynamique en mer d'Iroise sont :

- Les courants de marée peuvent atteindre jusqu'à 8 noeuds dans le Fromveur en période de vives eaux (cartes de navigation du Shom).
- L'amplitude moyenne de l'onde de marée est de 5 mètres (données Shom)
- En été, les températures de surface sont de l'ordre de 18 à 19° dans la zone stratifiée, 15 à 16° dans la zone homogène, et seulement 13° dans certaines zones autour de l'île d'Ouessant (Mariette (1983)). Le ΔT associé au front est donc de 4 à 6 degrés.
- Rayon de Rossby. Une estimation au premier ordre du premier rayon de déformation interne de Rossby repose sur une simplification de l'océan avec une thermocline en un modèle à 2 couches homogènes. Le rayon interne de déformation est alors :

$$R_{int} = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{g' H_1 H_2}{H_1 + H_2}}$$

Pour une profondeur totale de 120 mètres environ, prenons $H_1 = 20m$ pour la

couche chaude de surface et $H_1 = 100m$ pour la couche de fond. La différence de densité est approchée par le gradient de température à travers la thermocline. Ce ΔT atteint environ 7.5 degrés. On a alors :

$$g' = g\Delta\rho/\rho = g\alpha_T\Delta T = 9.81 * 1.79 \cdot 10^{-4}\Delta T$$

Toutes ces données combinées donnent un Rayon interne de l'ordre de 6 km.

4.2 Observations

4.2.1 Présentation des jeux de données

Plusieurs jeux de données de SST issues de mesures satellites sont disponibles pour la zone de la mer d'Iroise. Les mesures de température de l'eau par satellite sont issues de données de rayonnement infra-rouges émis par la surface de la mer. Dès que des nuages viennent s'intercaler entre le satellite et la surface de la mer, la mesure devient impossible. Les phénomènes qui nous intéressent autour du front d'Ouessant sont observés uniquement l'été, donc à une période où le temps est généralement peu nuageux. Le mois de Juillet 2006 par exemple a été relativement beau et l'on peut donc espérer qu'une large part des données recueillies seront exploitables. Cependant, dans les zones frontales, en raison du gradient de température à la surface de l'océan, un phénomène de condensation peut se produire dans l'atmosphère. Cette condensation suffit quelquefois à masquer la surface de l'océan au satellite. Cela a pour conséquence de rendre quasiment inexploitable certaines images où seule la zone frontale est masquée, voir par exemple l'image 4.1. Certains "trous" dans les données sont également imputables à l'algorithme de calcul de la SST à partir des données brutes.

La solution pour "boucher les trous" sur les images satellites est de produire des images analysées. Les points de grille manquants sont alors estimés par différentes techniques : extrapolation des données disponibles pour une échéance précédente, interpolation de données disponibles sur des points environnants, moyenne sur une période de

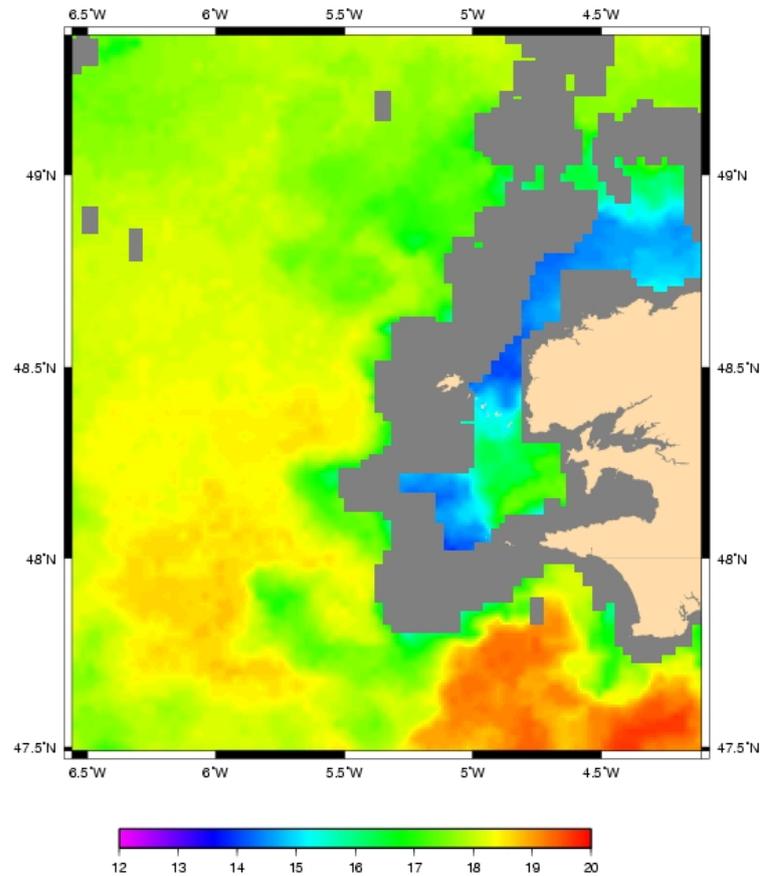


Figure 4.1 — Exemple de trouble des images satellites au niveau du front.

quelques heures à quelques jours... Ces traitements réalisés sur la donnée ont pour effet de dégrader leur résolution spatiale et temporelle. Comme les phénomènes qui nous intéressent ici sont à des échelles de l'ordre de la dizaine de kilomètres, il est nécessaire de travailler sur des données les plus fines possibles et donc ayant subi le moins de transformations possibles. Les données avec la résolution la plus haute sont les données NAR, pour North Atlantic Regional. Leur résolution est de 2 km sur 7 zones du bassin Nord-Atlantique, la zone qui nous intéresse est la zone Gascogne. Ce sont des données brutes, non analysées, donc avec beaucoup de zones non-exploitable. Les produits MSG, pour "Meteosat Second Generation", fournissent des données moyennées sur 24 heures, à une résolution spatiale de 5km. Ce traitement permet de combler certains trous dans la donnée, mais il s'est avéré à l'usage que ces cartes n'apportaient pas plus

d'informations que les données NAR. Toutes ces données sont accessibles librement par le ftp d'IFREMER.

4.2.2 Analyse des instabilités du front

Les résultats présentés dans cette partie sont obtenus à partir des images NAR Gascogne. Nous avons extrait les données SST dans la zone de la mer d'Iroise pour les mois de Juin à Septembre des années 2003, 2005 et 2006. Toutes les images présentées dans cette section utilisent la même échelle de couleur. Il est donc possible de comparer visuellement les températures d'une image à l'autre.

Instabilités

L'objectif de l'examen des images satellites est d'identifier un ou plusieurs régimes d'instabilité le long du front et de déterminer les longueurs d'ondes associées. Peu d'images offrent une donnée facilement exploitable parmi le jeu d'observations dont nous disposons. Une série de trois images relativement claires est disponible pour la période du 14-15 Juillet 2006. Les vues sont présentées sur la figure 4.2. La figure du haut à droite montre une autre représentation de ces résultats, avec une projection différente et un code couleur faisant mieux ressortir les contours du front. Toutes les longueurs d'ondes calculées par la suite le sont à partir d'images de ce type.

Ces 3 vues à quelques heures d'intervalles montrent de larges méandres le long du front. En exploitant ces images avec le logiciel Matlab, nous avons pu déterminer approximativement la taille de ces méandres. Nous considérons que la mesure de la distance entre deux crêtes de méandres donne une approximation de la longueur d'onde de l'instabilité. A partir des 3 méandres les plus nets, les 3 longueurs calculées sont : 40 km, 31.8 km et 34.6 km.

La figure 4.3 présente une vue prise une semaine plus tard, le 20 Juillet 2006. On observe sur cette image une filamentation plus importante sur des échelles de distance

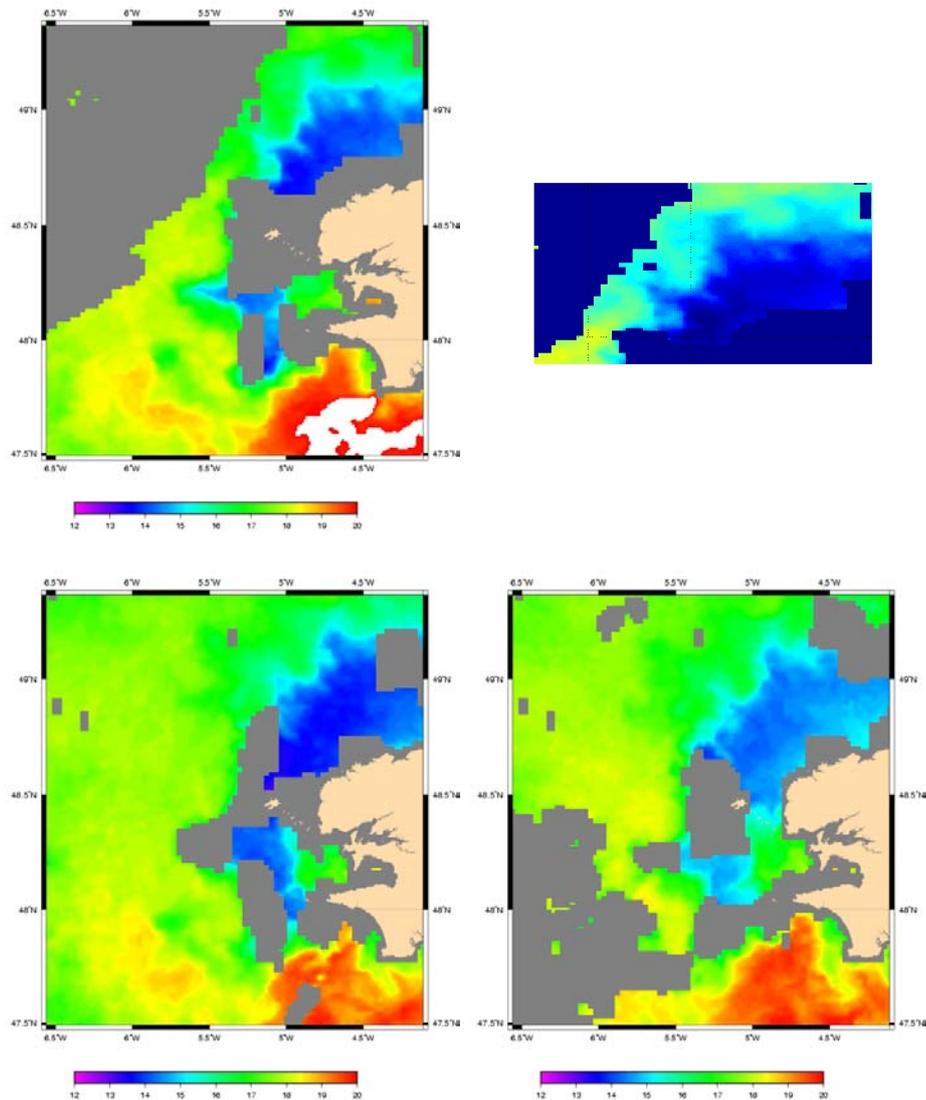


Figure 4.2 — En haut : SST mesurée en Mer d'Iroise le 14 Juillet 2006 à 12h et zoom sur la zone Nord avec une représentation faisant ressortir les méandres. En bas, évolution le 14 Juillet à 20h, et le 15 Juillet à 02h.

plus courtes.

Là encore, il est possible d'estimer la longueur d'onde de l'instabilité en mesurant la distance entre deux méandres à partir de la figure de droite. Sur les quatre excroissances les plus nettes le long du front, l'on obtient pour valeurs approchées : 18.8 km, 14.6 km, 21.2 km et 20 km. Le calcul confirme l'impression visuelle d'une longueur d'onde plus courte qu'une semaine auparavant. Cependant le manque de données exploitables entre ces deux événements ne permet pas de déterminer s'il y a continuité temporelle

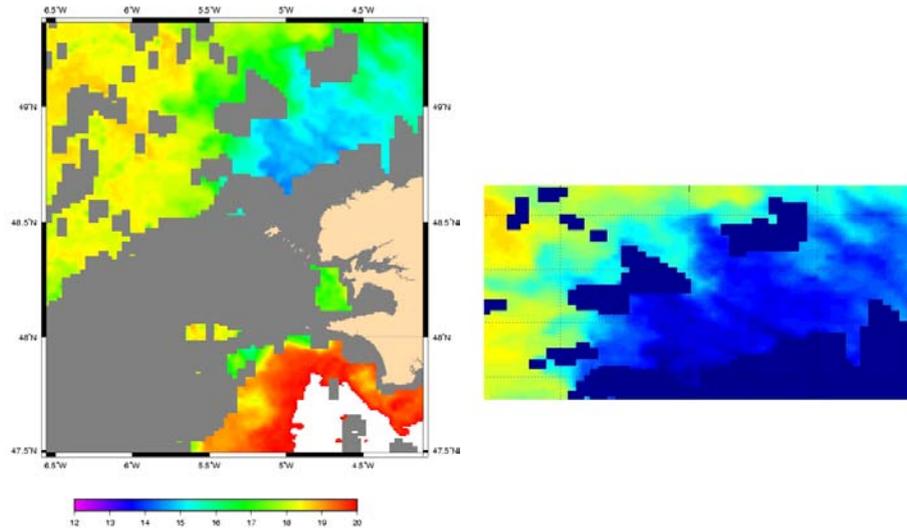


Figure 4.3 — SST mesurée en Mer d'Iroise le 20 Juillet 2006 et zoom sur la partie nord.

entre ces méandres et s'il s'agit d'un raidissement non-linéaire des mêmes méandres ou si nous observons ici un autre type d'instabilité.

Ces tout premiers résultats permettent tout de même de constater que l'instabilité observée le long du front subit une certaine variabilité temporelle à l'échelle de quelques jours. Le coefficient de marée le 14 Juillet était de 93, alors qu'il était repassé à 50 le 20 Juillet. L'instabilité la plus longue était donc observée en période de grande marée alors qu'un régime différent semblait exister pour la période de morte-eaux suivante.

Exploitions maintenant les données du mois de juin 2003. D'après les observations du 15 Juin, on mesure à nouveau des filamentations de courtes longueurs d'ondes : 19.2 km, 15.2 km et 18.3 km. Or, cette situation se produit en période de grande marée. L'idée d'une corrélation entre l'amplitude de la marée et la nature de l'instabilité ne semble donc plus tenir. Sur l'ensemble des images satellites exploitables, il est beaucoup plus fréquent de mesurer des instabilités dont la longueur d'onde est de l'ordre de 20 km. On peut donc imaginer que plusieurs régimes d'instabilité se superposent, l'instabilité dominante ayant une longueur d'onde d'environ 20 km.

Un régime légèrement différent est régulièrement observé sur la partie ouest du

front. On y voit de 3 à 4 larges méandres (voir figure 4.4 pour un exemple). Leur longueur d'onde estimée est de l'ordre de 40 km. L'aspect de cette partie du front est assez variable puisque la zone homogène est généralement divisée en deux, avec une séparation au large du goulet de Brest. La dynamique du front est par conséquent plus complexe dans cette zone en raison de sa discontinuité.

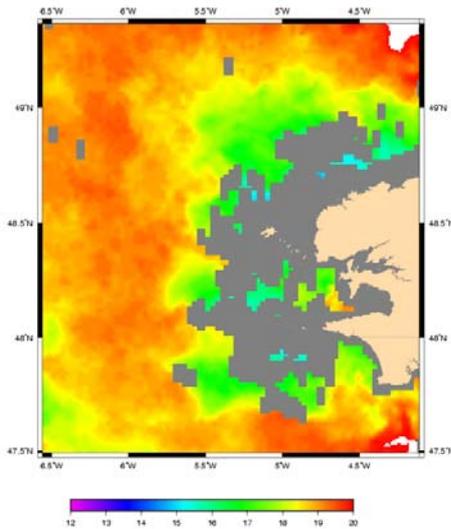


Figure 4.4 — SST mesurée en Mer d'Irlande le 12 Juillet 2003.

Conséquences de l'instabilité

Les instabilités dont nous avons pu mesurer la longueur d'onde dans le paragraphe précédent se manifestent sous la forme de filaments le long du front. Ces filaments sont susceptibles de se détacher et ainsi de former de petites structures circulaires expulsées du front. On peut observer ce phénomène sur la partie ouest du front sur la figure 4.5, il se produit également dans la partie nord où les filaments s'allongent jusqu'à provoquer un détachement de fluide.

Cependant, trop peu d'images successives sont disponibles pour déterminer précisément l'évolution de ces structures. Mais aucune des vues dont nous disposons ne présente ce genre de structures au milieu de la zone stratifiée. Il semble donc que ces petits "tourbillons" aient une existence relativement courte et disparaissent rapidement

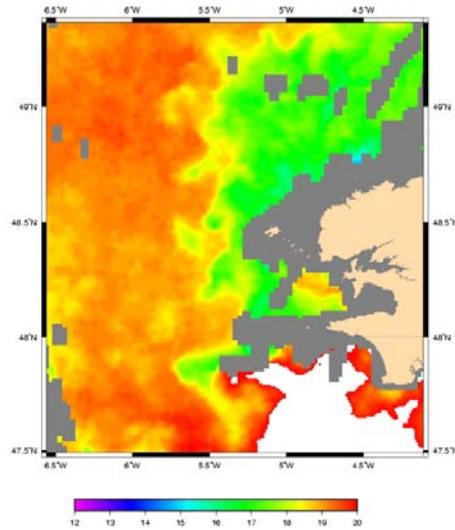


Figure 4.5 — SST mesurée en Mer d'Iroise le 24 Juillet 2006.

après leur expulsion.

Globalement, d'après toutes les images que nous avons pu analyser, la position du front est relativement stable, et les intrusions d'eau homogène en zone stratifiée ou inversement sont assez limitées. Pourtant, des filaments ou des méandres quasi-permanents existent. Il s'agit plutôt de filaments allongés dans la partie nord du front, la longueur d'onde associée est de l'ordre de 20 km généralement. Sur l'ouest du front, l'on observe régulièrement de larges méandres, les longueurs d'ondes associées sont alors plutôt de l'ordre de 40 km.

Ces observations ne donnent pas d'argument décisif en faveur de l'existence ou non de l'instabilité paramétrique. Mais elle est à étudier autant que d'autres mécanismes d'instabilité classiques pour expliquer les phénomènes observés.

4.3 Les outils de l'étude

4.3.1 Configuration

Présentation

Les phénomènes que nous souhaitons étudier sont les instabilités qui se développent autour du front d'Ouessant. La configuration décrite dans le chapitre 1 avec une zone homogène sur la verticale près de la côte et 2 zones de densités différentes au large serait la plus appropriée pour cette étude, mais une telle configuration serait beaucoup plus complexe à mettre en œuvre. Le problème que nous allons étudier doit être considéré comme une première approche d'un problème plus complexe. Nous choisissons de considérer que le front sépare deux zones homogènes de densités différentes. C'est en réalité ce qui se passe si l'on regarde séparément les parties inférieure ou supérieure du front.

Pour des raisons de codage numérique, le choix a été fait de travailler dans un canal zonal périodique, l'écoulement de base n'a pas de variation selon x . La marée sera représentée par un courant barotrope périodique parallèle au front. Cette représentation s'approche de la situation rencontrée dans la partie nord du front d'Ouessant. Le profil des hauteurs de couches est choisie en $\tanh(y)$. La largeur du front est contrôlée par un paramètre σ .

La différence de densité entre les couches est prise de manière à correspondre approximativement au saut de densité observé en Mer d'Iroise entre la zone stratifiée et la zone homogène en surface. En prenant un ΔT de $4^\circ C$, la formule déjà utilisée dans le paragraphe 4.1.2 donne un $\Delta\rho/\rho$ d'environ $7 \cdot 10^{-4}$. Le cas de référence traité par la suite utilisera un σ de 5 km . Le canal utilisé mesure 100 km de long sur 50 km de large.

Profils analytiques de vitesses et de hauteurs de couches

L'on souhaite obtenir un état initial géostrophiquement ajusté. On commence par se fixer un profil pour la couche de fond :

$$h_2 = h_{20} + \frac{1}{2}\Delta h \tanh\left(\frac{y}{\sigma}\right) \quad (4.1)$$

Le modèle autorise une surface libre, donc h_1 ne peut pas se déduire directement de h_2 . Les vitesses initiales vont être obtenues en calculant l'équilibre géostrophique dans les couches 1 et 2. Le flot est parallèle à l'axe des x .

$$u_1 = -\frac{1}{f} \frac{\partial P_1}{\partial y} = -\frac{g}{f} \frac{\partial}{\partial y} (h_1 + h_2) \quad (4.2)$$

$$u_2 = -\frac{1}{f} \frac{\partial P_2}{\partial y} = -\frac{g}{f} \frac{\partial}{\partial y} \left(h_1 + h_2 + \frac{\Delta\rho}{\rho} h_2 \right) \quad (4.3)$$

On note $\Delta u = u_1 - u_2$. On choisit de considérer en écoulement symétrique dans les deux couches, donc tel que $u_1 = -u_2$, ce qui revient à prendre $u_1 = 0.5\Delta u$.

De (4.11) il vient :

$$\Delta u = \frac{g'}{f} \frac{\partial h_2}{\partial y} = \frac{g'}{f} \frac{\Delta h}{2\sigma} \left(1 - \tanh^2\left(\frac{y}{\sigma}\right) \right)$$

On en déduit donc les valeurs de u_1 et u_2 sachant que $u_1 = 0.5\Delta u$ et $u_2 = -0.5\Delta u$. Ces profils de vitesse sont représentés sur la figure 4.6.

La hauteur de la couche 1 est ensuite calculée par intégration selon y de l'expression de u_1 .

$$h_1 = h_{10} - \frac{1}{1 - \Delta\rho/2\rho} \frac{\Delta h}{h} \tanh\left(\frac{y}{\sigma}\right) \quad (4.4)$$

Les deux constantes h_{10} et h_{20} sont prises égales à 50m, ce qui fait une hauteur d'eau totale moyenne de 100m.

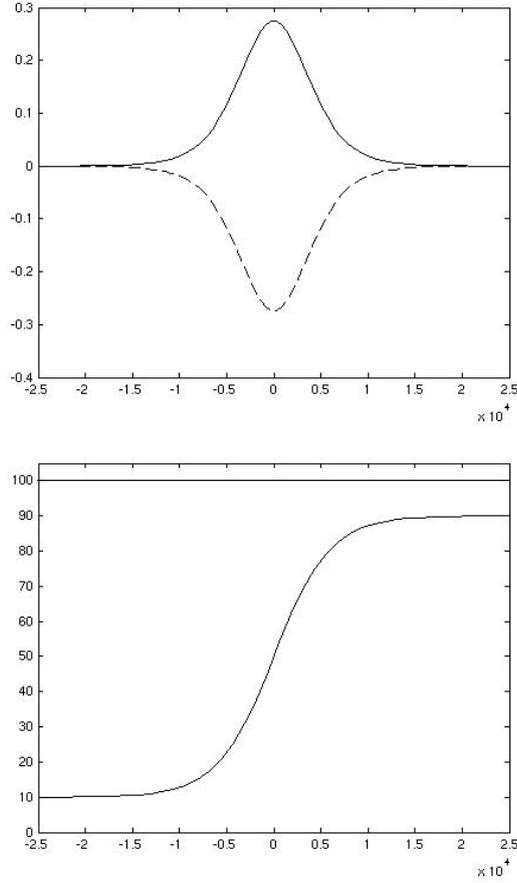


Figure 4.6 — En haut : profils de vitesse, en trait plein pour la couche 1, en pointillés pour la couche 2. En bas : épaisseurs des couches

4.3.2 Calcul analytique de l'instabilité barocline linéaire du front stationnaire

Les équations les plus appropriées pour traiter le problème du front de densité qui nous intéresse sont les équations shallow-water écrites en couches homogènes :

$$\begin{aligned}
 \partial_t u_j + (\vec{u}_j \cdot \vec{\nabla} u_j) - f v_j &= -\partial_x P_j \\
 \partial_t v_j + (\vec{u}_j \cdot \vec{\nabla} v_j) + f u_j &= -\partial_y P_j \\
 \partial_t h_j + \vec{u}_j \cdot \vec{\nabla} h_j + h_j \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_j &= 0
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

où j est l'indice de couches, (u, v) le vecteur vitesse horizontal, P la pression, h la hauteur des couches et f le paramètre de Coriolis.

Les équations (4.9) sont linéarisées autour de l'écoulement moyen décrit

précédemment. Cet écoulement est noté U_j dans la suite, les hauteurs de couches correspondantes sont notées H_j . U_j et H_j sont invariants selon y .

$$\begin{aligned} \partial_t u'_j + U_j \partial_x u'_j + v'_j \frac{dU_j}{dy} - f_0 v'_j &= -\partial_x p'_j \\ \partial_t v'_j + U_j \partial_x v'_j + f_0 u'_j &= -\partial_y p'_j \\ \partial_t h'_j + U_j \partial_x h'_j + v'_j \frac{dH_j}{dy} + H_j (\partial_x u'_j + \partial_y v'_j) &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

En introduisant une perturbation de la forme :

$$(u'_j, v'_j, p'_j, h'_j) = (u'_{j0}, v'_{j0}, p'_{j0}, h'_{j0}) e^{ik(x-ct)}$$

et en faisant la substitution $v'_{j0} = ikw'_{j0}$ on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} (U_j - c)u'_{j0} + \left(\frac{dU_j}{dy} - f_0 \right) w'_{j0} &= -p'_{j0} \\ k^2(U_j - c)w'_{j0} - f_0 u'_{j0} &= \frac{dp'_{j0}}{dy} \\ (U_j - c)h'_{j0} + \frac{dH_j}{dy} + H_j \left(u'_{j0} + \frac{dw'_{j0}}{dy} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Les relations $p'_{10} = g\eta'_{10}$, $p'_{20} = g\eta'_{10} + g'\eta'_{20}$ d'une part et $h'_{10} = \eta'_{10} - \eta'_{20}$, $h'_{20} = \eta'_{20}$ d'autre part permettent d'écrire le système en fonction des seules variables u'_{j0} , w'_{j0} et η'_{j0} . Le principe utilisé dans les deux précédents chapitres pour déterminer la stabilité des états stationnaires était de poser le système sous une forme matricielle $\partial_t X = MX$, et de déterminer la stabilité de ses solutions par le calcul des valeurs propres de la matrice M . Dans le cas présent, le vecteur X contiendrait les 6 variables apparaissant dans la linéarisation : $u'_{1,2}$, $w'_{1,2}$ et $p'_{1,2}$. Le système (4.8) ne permet pas d'arriver directement à une écriture de ce type en raison des opérateurs de dérivation qui interviennent dans les équations. La technique pour se ramener à un système matriciel classique est de discrétiser ce système selon y . Le vecteur X des inconnues contiendra alors $6N$ éléments : $u'_1[1]$, $u'_1[2]$, ... $u'_1[N]$, $v'_1[1]$, ... Cette discrétisation doit également prendre en compte des conditions au bord. La figure 4.7 indique la numérotation utilisée pour les variables.

Les dérivées sont discrétisées par des schémas centrés d'ordre 2. L'écriture du



Figure 4.7 — Numérotation des variables utilisées pour la discrétisation du problème

système pour les points intérieurs (tels que $1 < i < N$) est donnée par :

$$\begin{aligned}
 & (U_1(k) - c)u'_{10}(k) + \left(\frac{U_1(k+1) - U_1(k-1)}{2\Delta y} - f_0 \right) w'_{10}(k) + g\eta'_{10} = 0 \\
 & k^2(U_1(k) - c)w'_{10}(k) - f_0 u'_{10}(k) - g \frac{\eta'_{10}(k+1) - \eta'_{10}(k-1)}{2\Delta y} = 0 \\
 & (U_1(k) - c)(\eta'_{10}(k) - \eta'_{20}(k)) + \frac{H_1(k+1) - H_1(k-1)}{2\Delta y} w'_{10}(k) + H_1(k) \left(u'_{10}(k) + \frac{w'_{10}(k+1) - w'_{10}(k-1)}{2\Delta y} \right) = 0 \\
 & (U_2(k) - c)u'_{20}(k) + \left(\frac{U_2(k+1) - U_2(k-1)}{2\Delta y} - f_0 \right) w'_{20}(k) + g\eta'_{10}(k) + g'\eta'_{20}(k) = 0 \\
 & k^2(U_2(k) - c)w'_{20}(k) - f_0 u'_{20}(k) - g \frac{\eta'_{10}(k+1) - \eta'_{10}(k-1)}{2\Delta y} - g' \frac{\eta'_{20}(k+1) - \eta'_{20}(k-1)}{2\Delta y} = 0 \\
 & (U_2(k) - c)\eta'_{20}(k) + \frac{H_2(k+1) - H_2(k-1)}{2\Delta y} w'_{20}(k) + H_2(k) \left(u'_{20}(k) + \frac{w'_{20}(k+1) - w'_{20}(k-1)}{2\Delta y} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

La seule condition au bord que l'on impose sur la perturbation de l'écoulement est que la vitesse selon y soit nulle sur les bords. Cela se traduit dans les équations par $w' = 0$ en $y = -l/2$ et $y = l/2$. Les conditions aux limites vont intervenir dans l'écriture de la matrice pour l'écriture des dérivées de p' et w' . Détaillons l'écriture des dérivées sur le point $i = 1$ (le point $i = N$ est traité de manière symétrique) :

- Le terme $\frac{dw'}{dy}[1]$ s'écrit simplement $\frac{w'[3/2] - w'[1/2]}{\Delta y} = \frac{w'[3/2]}{\Delta y}$ du fait de la condition au bord.
- pour la dérivée du terme de pression, il faut connaître la valeur de $p[1/2]$. Cette valeur va être déduite de la première ligne du système (4.8). Ecrite sur le bord, cette équation devient :

$$(U_j[1/2] - c)u'_{j0}[1/2] = -p'_{j0}[1/2]$$

On en déduit donc la valeur à utiliser pour la dérivée de la pression en fonction de la vitesse. Comme aucune contrainte au bord n'est fixée pour u' , on détermine la valeur de $u'[1/2]$ par interpolation linéaire.

Ces opérations conduisent à une écriture du système sous la forme $AX = cBX$. La répartition des éléments non nuls dans les matrices A et B est donnée sur la figure 4.8.

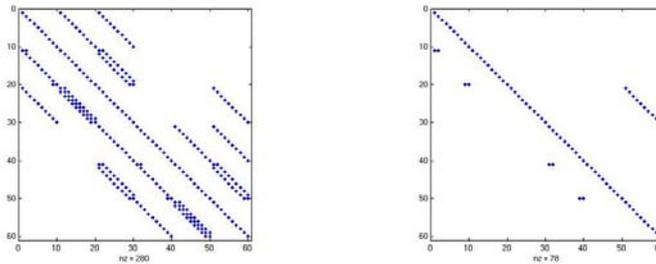


Figure 4.8 — Position des éléments non nuls dans les matrices A (à gauche) et B (à droite)

Il est simple de montrer que la matrice B est inversible, la stabilité du système sera donc donnée par le calcul des valeurs propres de $B^{-1}A$. Ce calcul de valeurs et modes propres est effectué par la fonction *eig* du logiciel Matlab. Il s'avère que les résultats, tant en taux de croissance que sur la forme des modes propres sont très dépendants de l'écriture des conditions au bords et de la valeur du Δy . Imposer d'autres conditions au bord, $u' = 0$ par exemple, conduit à des résultats très différents. La valeur de Δy doit au moins échantillonner correctement la largeur du jet pour donner des valeurs correctes de taux de croissance. Cette condition remplie, augmenter Δy n'influe pas énormément sur la valeur du taux de croissance, mais influe sur les profils des modes propres, qui sont très bruités si la résolution est insuffisante. Une résolution de $N = 80$ est généralement utilisée.

4.3.3 Modèle numérique shallow-water non linéaire

Le modèle numérique utilisé ici est MICOM (Miami Isopycnal Coordinate Model). C'est une représentation de l'océan en couches de densités homogènes. Pour une description des fondements du code MICOM, le lecteur pourra se reporter notamment aux articles de Bleck et Boudra (1981, 1986). Ce modèle résout les équations shallow-water pour un océan à N couches, en permettant aux couches d'intersecter la surface libre

ou le fond de l'océan. Nous utiliserons le modèle simplement dans sa configuration 2 couches.

Le code MICOM est basé sur une discrétisation en différences finies. Les modes barotropes et baroclines sont résolus séparément pour des raisons de coût de calcul. Les contraintes CFL sont en effet très différentes entre les deux modes, puisque le mode barotrope doit résoudre les ondes de gravité dont la vitesse s'exprime par $c = \sqrt{gH}$, ce qui donne environ $30m.s^{-1}$ pour un océan d'une profondeur de 100m. Le courant barocline que nous allons considérer dans la suite aura des vitesses de l'ordre de $20cm.s^{-1}$. Une technique de "splitting" est utilisée pour faire évoluer les calculs barotropes et baroclines séparément. Le couplage entre les deux modes est effectué tous les pas de temps baroclines.

4.4 Résultats stationnaires

4.4.1 Cas de référence

Le cas de référence considéré pour se rapprocher des conditions réalistes représente un courant de largeur 5km avec un $\Delta\rho/\rho$ de 0.7 ‰, qui correspond environ à une différence de température de 4°C de part et d'autre du front. Cette configuration correspond à des vitesses baroclines de l'ordre de $20cm.s^{-1}$, tout à fait compatibles avec des mesures effectuées sur le front d'Ouessant (Mariette, 1983). Après implémentation de ces paramètres dans les modèles analytique et numérique, il s'avère que cette configuration est instable. Le taux de croissance issu du calcul numérique est estimé par une analyse de Fourier sur la vorticité potentielle de l'écoulement. L'écart mesuré entre la valeur obtenue numériquement et la valeur issue du calcul analytique est de l'ordre de 30%. Les modes propres issus du calcul analytique sont représentés sur la figure 4.9.

L'allure de ces modes propres montre une instabilité localisée au centre du bassin, donc au niveau du front. L'instabilité issue de ce calcul est donc bien liée à la présence

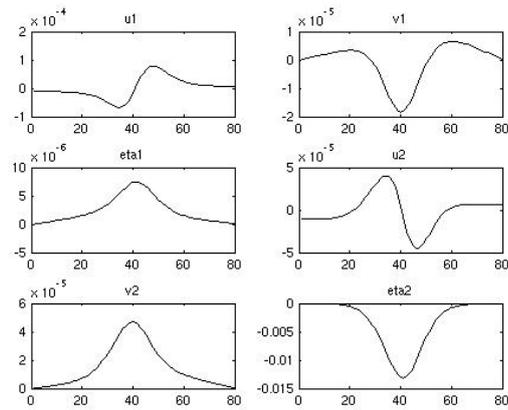


Figure 4.9 — Premier mode instable d’après l’étude analytique pour les 6 variables du problème.

du front et pas à une erreur numérique. En particulier, les modes sont réguliers aux bords, où le codage simple de la condition à la limite était susceptible d’induire une erreur. Malgré l’erreur de 30% observée sur les taux de croissance, les résultats analytiques restent valides, cela sera confirmé par d’autres expériences dans le paragraphe suivant.

Les résultats issus du modèle numérique sont présentés sur les figures 4.10, 4.11 et 4.12. La figure 4.10 montre les sorties issues d’une simulation réalisée dans un bassin de 100 *km* de large dans lequel les frontières sont suffisamment éloignées du front pour ne pas influencer sur l’évolution des perturbations à long terme. La plupart des autres simulations étant réalisées pour déterminer les taux de croissance des modes principaux pendant la phase de croissance linéaire, un bassin de 50 *km* de large était suffisant.

La déstabilisation se traduit par l’apparition de méandres le long du front dans chaque couche, qui s’allongent progressivement. Cet allongement se termine par le détachement d’une structure circulaire. Cette éjection de fluide se produit sur tous les méandres, et la taille des structures formée est comparable le long du front. On constate qu’ils ont tendance à s’élargir et à s’estomper rapidement. Le front devient alors très irrégulier et les trois méandres initiaux ne sont plus clairement identifiables.

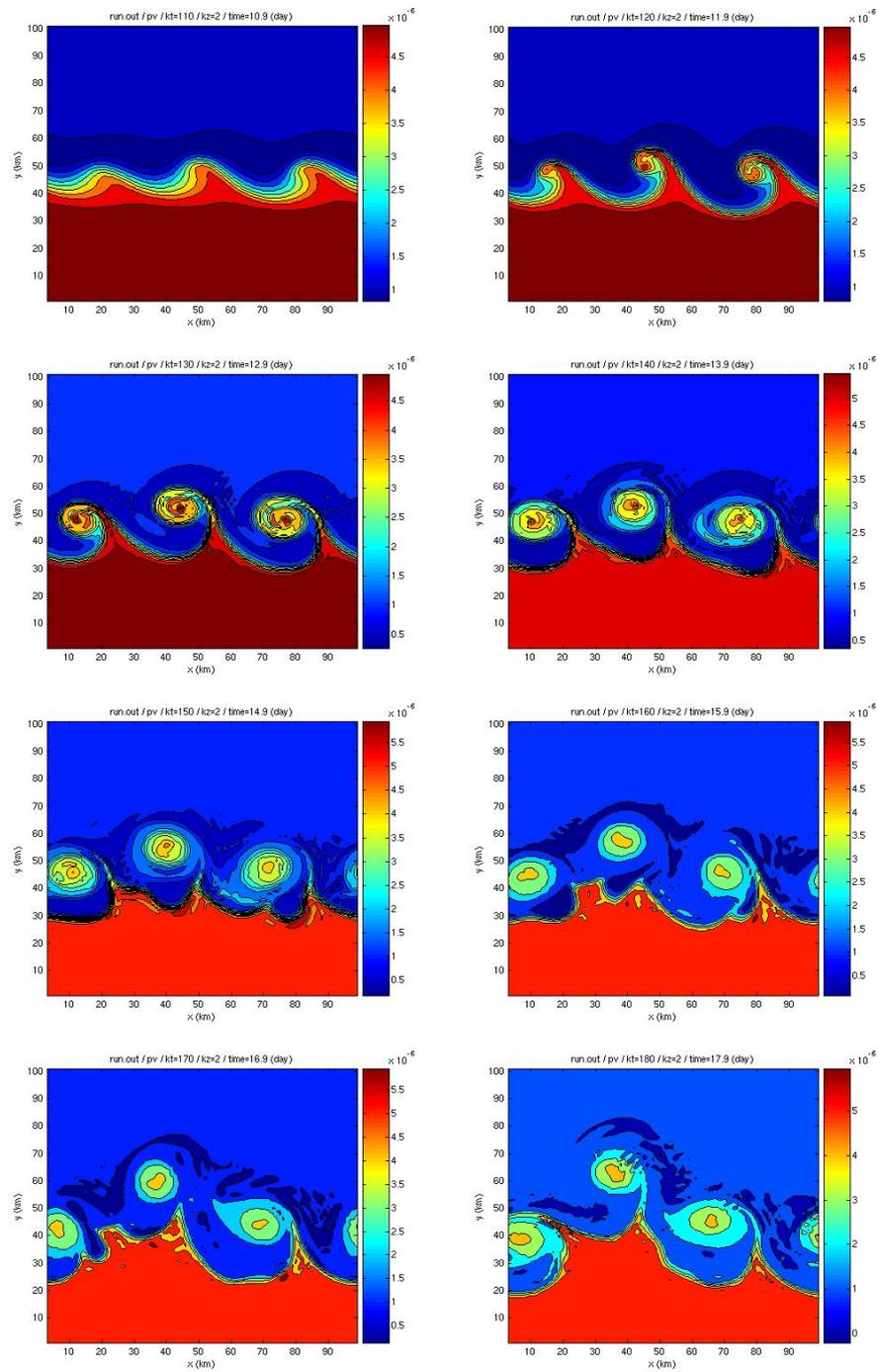


Figure 4.10 — Evolution de la vorticité potentielle dans la couche de fond après le déclenchement de l'instabilité pour le cas de référence.

Ces premiers résultats permettent également de déterminer une longueur d'onde approximative de l'instabilité observée. La longueur totale du bassin étant de 100 km et le mode le plus instable conduisant à l'apparition de 3 méandres sur cette longueur,

on en déduit que la longueur d'onde correspondante est de l'ordre de 30km. L'analyse spectrale des résultats est présentée sur la figure 4.11. On constate que le mode 3 et le mode 2 sont quasiment équivalents lors de la phase de croissance linéaire, mais que le mode 3 est légèrement dominant, ce qui confirme les observations précédentes. L'irrégularité dans la forme des méandres au départ est causée par la compétition entre les deux modes. On voit également que le mode 1 devient dominant quand les effets non-linéaires deviennent importants, ce qui explique l'écrasement des 3 méandres à la fin de la simulation.

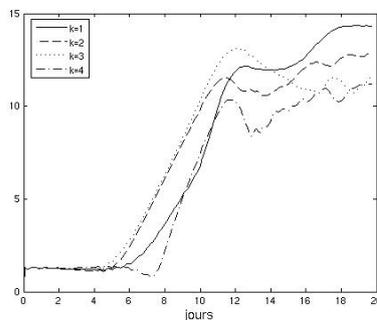


Figure 4.11 — Analyse spectrale de la vorticité potentielle pour le cas de référence

La figure 4.12 représente l'anomalie de vorticité potentielle au moment de la formation des tourbillons. La dissymétrie observée entre les couches écarte la possibilité d'instabilité barotrope, on est donc en présence d'une instabilité barocline.

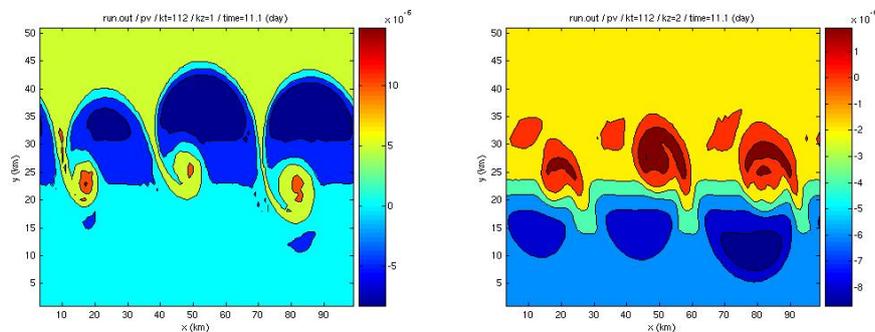


Figure 4.12 — Anomalie de vorticité potentielle en couche 1 (à gauche) et 2 (à droite) après le déclenchement de l'instabilité pour le cas de référence

4.4.2 Etude de sensibilité

Certains résultats en terme de nature de l'instabilité et de longueurs d'ondes ressortent du cas de référence traité dans la section précédente. Différentes simulations ont été réalisées autour de ce cas pivot pour tester la sensibilité de ces résultats aux paramètres. Les paramètres sur lesquels nous allons jouer sont la largeur du front et le saut de densité de part et d'autre du front. Ces deux paramètres ont un impact sur la vitesse de l'écoulement. Des simulations sont d'abord effectuées pour des valeurs de la largeur du front allant de 2 km à 18 km par pas de 2 km . Les vitesses géostrophiques étant proportionnelles à la dérivée des hauteurs de couches, élargir le jet sans modifier le Δ_h a pour effet de faire diminuer les vitesses. Les simulations et les calculs montrent que toutes ces configurations sont instables, les taux de croissance issus des calculs analytique linéaires et numérique (MICOM) sont présentés sur la figure 4.13. L'erreur entre les taux de croissance obtenus par les deux méthodes diminue en même temps que les taux de croissance. Elle devient inférieure à 10% quand la largeur du jet dépasse 16km, les vitesses de l'écoulement sont alors de l'ordre de 2 à 3 cm.s^{-1} . L'instabilité devient donc relativement faible quand le front "s'aplatit".

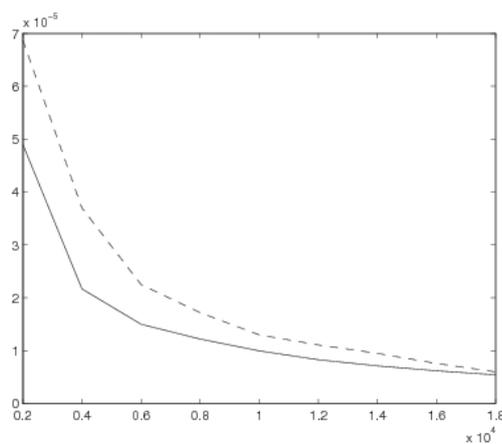


Figure 4.13 — Taux de croissance analytique (trait plein) et taux de croissance numérique (pointillés) en fonction de la largeur du jet.

Même si une erreur est toujours présente sur l'estimation des taux de croissance

par la méthode analytique, il ressort de tous les tests réalisés un accord qualitatif sur la stabilité des systèmes : si le taux de croissance issu du calcul analytique de stabilité linéaire est non nul, une instabilité se développe dans le code numérique MICOM. Et les erreurs restent bornées à 30% pour les cas étudiés. Cela tend à prouver la validité du modèle analytique linéaire et nous incite à l'utiliser pour la suite des tests de sensibilité, le temps nécessaire au calcul et à l'interprétation des résultats étant bien plus court qu'avec MICOM. Des calculs sont faits pour des différences de densité de 0.3 ‰ à 1.3 ‰. A nouveau, toutes ces configurations sont instables, les taux de croissance obtenus vont de $9 \cdot 10^{-6}$ à $2.2 \cdot 10^{-5}$ (voir figure 4.14. Le saut de densité n'est donc pas un élément déterminant dans la stabilité du système. Si sa variation influe sur le taux de croissance, elle ne modifie pas en profondeur les propriétés du système.

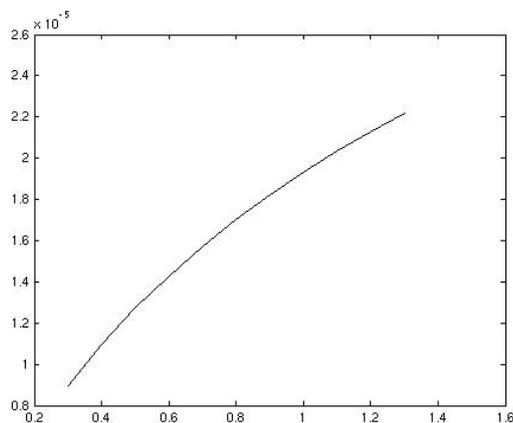


Figure 4.14 — Taux de croissance de l'instabilité en fonction de $\Delta\rho$

Enfin, l'influence de $\Delta\rho$ et σ est estimée à vitesse constante. On se fixe une vitesse barocline au milieu de jet de 0.2 m.s^{-1} . Les deux paramètres restants σ et $\delta\rho$ sont alors liés. La figure 4.15 montre les taux de croissance obtenus en faisant varier la largeur du front puis en faisant varier le saut de densité. Ces résultats confirment que l'élément dominant dans la détermination du taux de croissance est la largeur du front :

- En faisant augmenter σ , on force $\Delta\rho$ à diminuer pour conserver la vitesse constante. Augmenter σ fait augmenter le taux de croissance alors que diminuer

$\Delta\rho$ le fait diminuer. Au final, on observe une augmentation du taux de croissance, la largeur du front a donc plus d'impact ici.

- De même en faisant augmenter $\Delta\rho$ (et par conséquent diminuer σ), le résultat est une diminution du taux de croissance.

Le paramètre influant le plus sur le taux de croissance dans la gamme de paramètres réalistes que nous envisageons est la largeur du front. Dans les simulations numériques qui suivent, seul la variation de ce paramètre a été étudiée.

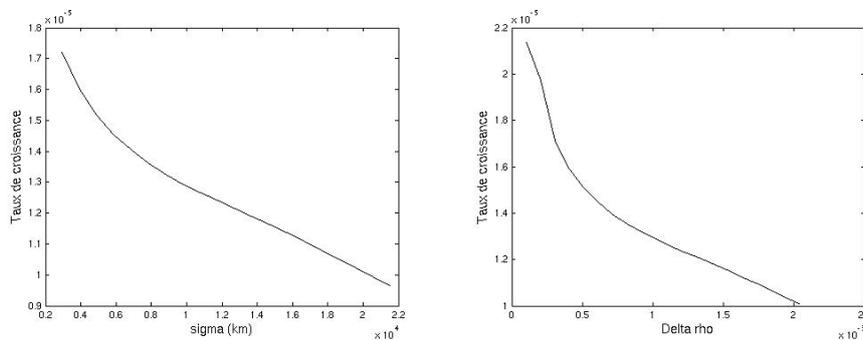


Figure 4.15 — Taux de croissance de l'instabilité pour une vitesse barocline fixée de 0.2 m.s^{-1} . Pour une variation de σ à gauche et pour une variation de $\Delta\rho$ à droite.

Qualitativement, les effets de l'instabilité sont assez proches entre les différentes expériences. La longueur d'onde du mode dominant varie selon la raideur du front et a tendance à s'allonger quand la largeur du front augmente. La figure 4.16 montre la vorticité potentielle pendant la déstabilisation du front de 12 km de large. Comme les taux de croissance de l'instabilité sont faibles comparés à ceux du cas de référence, l'instabilité se développe plus lentement. Il faut près de 20 jours de simulation pour obtenir les résultats présentés. On observe que les méandres sont plus espacés et plus dissymétriques que sur le cas de référence.

La figure 4.17 illustre la déstabilisation d'un front de 2 km de large. Cet état s'est développé après quatre jours de simulations. Les méandres sont nettement plus réguliers que dans les deux autres cas présentés et évoluent tous de manière similaire. L'analyse des taux de croissance des premiers modes du système présentée sur la figure 4.18

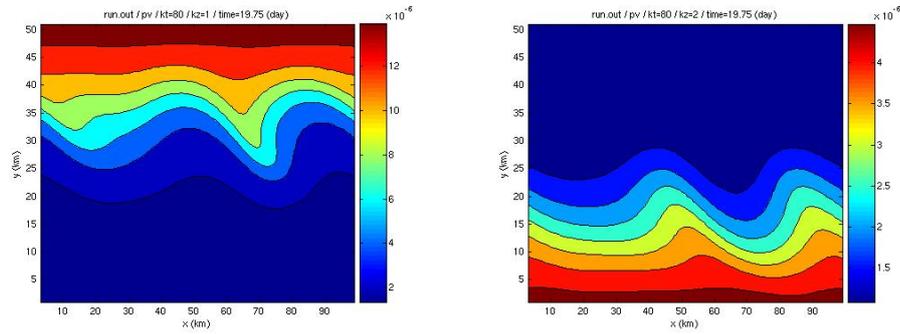


Figure 4.16 — Vorticité potentielle dans les deux couches pour un front de 12 km de large.

confirme que le raidissement du front fait ressortir le mode 3, qui devient prédominant. Le mode 2 domine dans l'exemple du courant le plus large, alors que les modes 2 et 3 sont pratiquement équivalents lors de la phase de croissance linéaire pour l'exemple intermédiaire qui correspond à notre cas de référence. La forte prédominance du mode 3 explique la plus grande régularité des méandres observée sur l'exemple du front de 2 km de large.

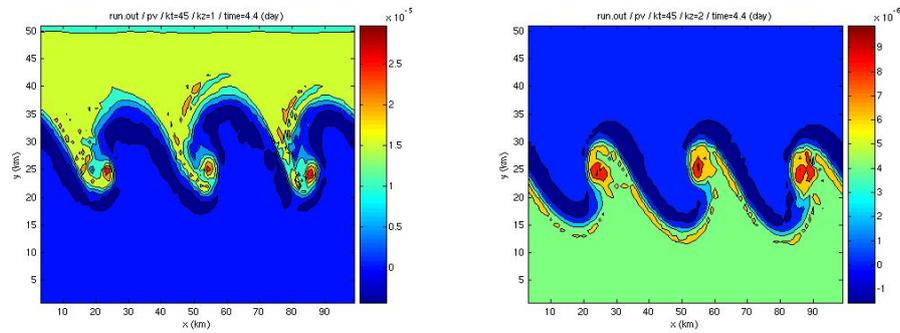


Figure 4.17 — Vorticité potentielle dans les deux couches pour un front de 2 km de large.

4.4.3 Interprétations

Il s'avère d'après les résultats des deux paragraphes précédents que le cas auquel nous souhaitons nous intéresser est instable dans sa forme stationnaire et que ce résultat est assez robuste en se déplaçant dans l'espace des paramètres de part et d'autre de

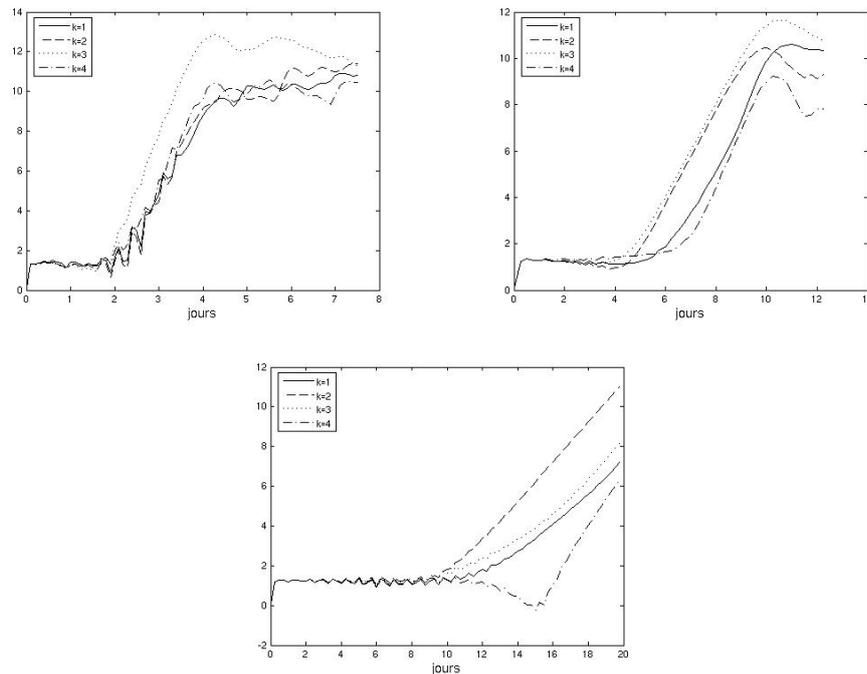


Figure 4.18 — Croissance des 4 premiers modes de la vorticité potentielle de l'écoulement pour le courant de 2 km de large (en haut à gauche), pour le courant de 6 km de large (en haut à droite) et pour le courant de 12 km de large (en bas).

notre cas pivot. Les simulations numériques font ressortir deux modes prédominants, de longueur d'onde 30 km et 50 km. Ces valeurs sont compatibles avec les longueurs d'ondes des instabilités observées le long du front d'Ouessant : des longueurs d'onde allant de 20 à 40 km y sont généralement observées. Les résultats numériques montrent également un allongement de la longueur d'onde de l'instabilité lorsque le front est moins marqué. Ce phénomène est observé au moment où le front d'Ouessant se met en place au printemps et est alors moins marqué qu'en plein été (Mariette, communication personnelle). Le code numérique montre des méandres s'allongeant progressivement et laissant finalement s'échapper une structure circulaire. Ces observations sont également compatibles avec les phénomènes décrits à partir des images satellites au début de ce chapitre. Le fait que le raidissement du front raccourcisse la longueur d'onde du mode le plus instable prouve que cette instabilité est liée à la présence du front et n'est pas un mode purement vortical. On est donc en présence d'instabilité frontale. Ce résultat rejoint les conclusions de l'étude de Shi et Roed (1999) qui s'intéressaient à un front de

densité présentant des similarités avec notre cas de référence. Ils mettaient en évidence une instabilité de longueur d'onde de 15 à 20 *km* qui était identifiée comme frontale par des considérations énergétiques.

La première conclusion à tirer de cette étude est donc qu'un front entre deux masses d'eau de densités différentes et présentant des grandeurs caractéristiques comparables à celles rencontrées sur le front d'Ouessant est **barocliniquement instable**. Une telle structure développe donc une instabilité en dehors de tout forçage extérieur, et notamment en l'absence d'un forçage périodique par le courant barotrope. Mais si l'instabilité frontale joue un rôle important sur le front d'Ouessant, le modèle simple utilisé pour cette étude ne reproduit pas totalement la dynamique observée sur les données. On peut identifier au moins deux mécanismes susceptibles de venir modifier les propriétés d'instabilités le long du front. Premièrement, la structure en densité de la zone réelle est plus complexe que celle utilisée, le gradient de densité s'inverse au fond où la zone homogène est plus chaude que la zone stratifiée. Il existe donc un second front au fond qui peut interagir avec le front de surface. Deuxièmement, le courant de marée barotrope peut jouer un rôle sur le système étudié par un mécanisme d'instabilité paramétrique. Cette possibilité est démontrée dans la section suivante.

Mais ce forçage paramétrique par la marée ne pourra pas être directement ramené aux cas qui ont été traités dans les chapitres 2 et 3 où un courant barocliniquement stable était déstabilisé par une variation périodique d'un des composants de l'écoulement. Ici, nous allons évaluer dans quelle mesure l'instabilité paramétrique peut se superposer à l'instabilité barocline pour éventuellement amplifier le phénomène.

4.5 Instabilité paramétrique

4.5.1 Etude linéaire

Revenons ici au paragraphe 4.3.2 où une écriture matricielle du problème linéaire stationnaire est proposée, des matrices A et B sont définies telles que :

$$\partial_t BX = AX$$

Le problème de l'instabilité paramétrique est traité en ajoutant un courant barotrope périodique spatialement uniforme à l'écoulement de base. Ainsi, dans chaque couche, U_j doit être remplacé par :

$$U_j + \varepsilon \cos(\omega t)$$

Les résultats linéaires sont valables seulement pour $\varepsilon \ll 1$, mais il n'y a pas de limite à la valeur de ε dans le code numérique. Pour se rapprocher d'un cas réaliste où ce courant représente la marée barotrope, il sera d'ailleurs nécessaire d'utiliser un forçage périodique très supérieur en amplitude à la vitesse de l'écoulement stationnaire.

D'après les résultats des chapitres précédents, avec une écriture du problème sous forme matricielle, une condition nécessaire d'instabilité paramétrique est la non commutativité des matrices M_0 (correspondant à l'état stationnaire, $M_0 = B^{-1}A$ avec nos notations) et M_1 (contenant les termes dépendant de t). Le terme de courant U_j n'intervient dans les équations que *via* les termes d'advection issus des dérivées temporelles, on en déduit que la matrice M_1 est égale à B . Le problème de la commutativité de M_0 et M_1 revient donc à celui de la commutativité de A et B . La forme non symétrique de B (voir paragraphe 4.3.2) empêche cette commutativité et donc permet de conclure à l'existence possible de l'instabilité paramétrique forcée par le courant barotrope.

Le terme provoquant la dissymétrie de B provient de l'équation de continuité où

apparaît le terme $\partial_t h'_j + U_j \partial_x h'_j$. Les simplifications réalisées dans la dérivation des équations quasi-géostrophiques rendent ce terme négligeable, ce qui explique que cette possibilité d'instabilité paramétrique n'existait pas en quasi-géostrophie (voir conclusion du chapitre 2). Physiquement, ce terme s'interprète comme un couplage entre la vitesse de l'écoulement et l'épaisseur des couches. L'instabilité paramétrique issue de ce terme est donc directement associée à la présence d'un front de densité.

4.5.2 Résultats non-linéaires

Les figures de taux de croissance de l'instabilité sur les quelques cas que nous avons étudiés montrent que la croissance ne se développe pas immédiatement au début de la simulation. Le temps après lequel se déclenche l'instabilité est proportionnel à la vitesse du courant barocline, ce temps de latence avant le déclenchement de l'instabilité est le temps nécessaire à l'ajustement des perturbations dans une configuration qui permet leur croissance. Cette période pendant laquelle aucun mode ne croît permet d'identifier une fréquence propre des modes principaux. La théorie de l'instabilité paramétrique prédit que le système peut être déstabilisé pour un forçage égal à deux fois la fréquence propre du système, nous aurons ainsi une estimation du forçage à utiliser pour faire résonner paramétriquement le système.

La figure 4.19 montre l'évolution temporelle des modes dominants de la vorticité potentielle sur le cas de référence au début de la simulation. On mesure sur les oscillations une période de l'ordre de 14 heures. Cela signifie que le mode le plus instable paramétriquement sera excité par un forçage de période 7 heures. On remarque également qu'un forçage de marée réaliste à 12 heures correspond tout à fait à l'ordre de grandeur requis pour l'apparition de l'instabilité paramétrique, dont le 2e mode serait alors excité.

Trois séries de tests sont réalisées pour différentes amplitudes de forçage. La première utilise un courant barotrope de 2 cm.s^{-1} (très faible devant le courant ba-

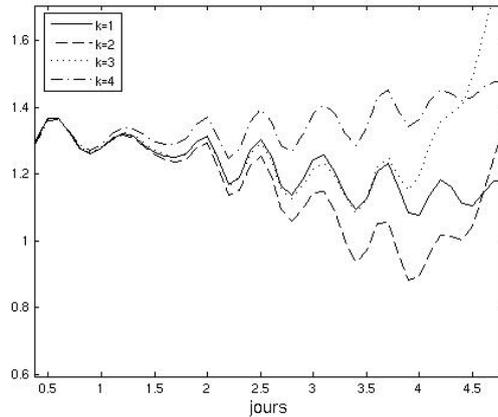


Figure 4.19 — Evolution temporelle des amplitudes des coefficients des 4 modes dominants de la transformée de Fourier de la vorticité potentielle de l'écoulement avant le déclenchement de l'instabilité frontale pour le cas de référence.

rocline), la seconde un courant de 20 cm.s^{-1} (comparable au courant barocline), la dernière un courant de 2 m.s^{-1} (largement supérieur au courant barocline). Un balayage des périodes de forçage est effectué pour des valeurs allant de $1h$   $30h$ avec un pas de $1h$.

La première constatation à l'étude des résultats est qu'il n'y a pas de modification significative du taux de croissance de l'instabilité par ajout d'un forçage barotrope, et ce quels que soient la fréquence et l'amplitude de ce forçage, même si des variations de l'ordre de $\pm 10\%$ sont observées sur l'ensemble des simulations. Ces résultats ne sont pas interprétables en raison de l'imprécision de la mesure du taux de croissance. Cela signifie que le taux de croissance de l'instabilité paramétrique est trop faible pour venir modifier sensiblement celui de l'instabilité barocline. La croissance des modes principaux n'est pas modifiée pour les simulations avec des courants barotropes d'amplitudes 2 cm.s^{-1} et 20 cm.s^{-1} . La figure 4.20 présente les modes obtenus pour quelques fréquences de forçage avec un courant barotrope de 2 m.s^{-1} . On observe une allure différente selon les fréquences : les modes des systèmes forcés à $6h$ et $12h$ sont réguliers alors que sur les autres figures, on observe une croissance "en escalier" plus ou moins marquée. L'autre modification par rapport au cas stationnaire et aux autres cas oscillants est

une inversion dans l'ordre des modes dominants, le mode 2 est maintenant toujours dominant. Le mode 2 est également celui qui montre le moins de croissance en escalier. La théorie prévoyait une résonance pour un forçage de période $7h$ ou $14h$, la plage de période sur laquelle l'instabilité paramétrique se fait sentir est assez large et semble plutôt centrée sur la période $9h$. L'amplitude du forçage barotrope étant très forte maintenant, les effets induits sont fortement non-linéaires et le diagramme classique des langues d'instabilité de l'équation de Mathieu n'est plus valable, l'observation d'une zone d'instabilité décentrée par rapport à la fréquence théorique est cohérente avec des langues d'instabilité déformée en raison d'effets non linéaires.

La théorie prévoit également une augmentation du taux de croissance de l'instabilité paramétrique avec l'amplitude du forçage, il est donc cohérent de retrouver une signature de cette instabilité dès lors que l'on augmente suffisamment la vitesse barotrope.

Toutes les caractéristiques de l'instabilité paramétrique ressortent donc de ces résultats :

- Sélection en fréquence
- Croissance en marches d'escaliers
- Taux de croissance plus élevé avec une plus forte amplitude du forçage.

La figure 4.21 montre l'évolution de la vorticité potentielle dans la couche de fond pour un forçage de période $7h$. Les instants montrés sont les mêmes que sur la figure 4.10 qui représentait l'état stationnaire. Ces résultats ne montrent pas de différence fondamentale avec les résultats du cas stationnaire, mis à part le fait que l'instabilité se déclenche plus tôt. L'évolution des tourbillons est comparable dans les deux cas, ils semblent tout de même rester plus cohérents dans le cas forcé.

En conclusion, même si l'instabilité barocline reste très largement prédominante, nous avons montré l'existence de l'instabilité paramétrique forcée par une variation périodique du courant barotrope sur notre écoulement frontal. Ses effets restent très

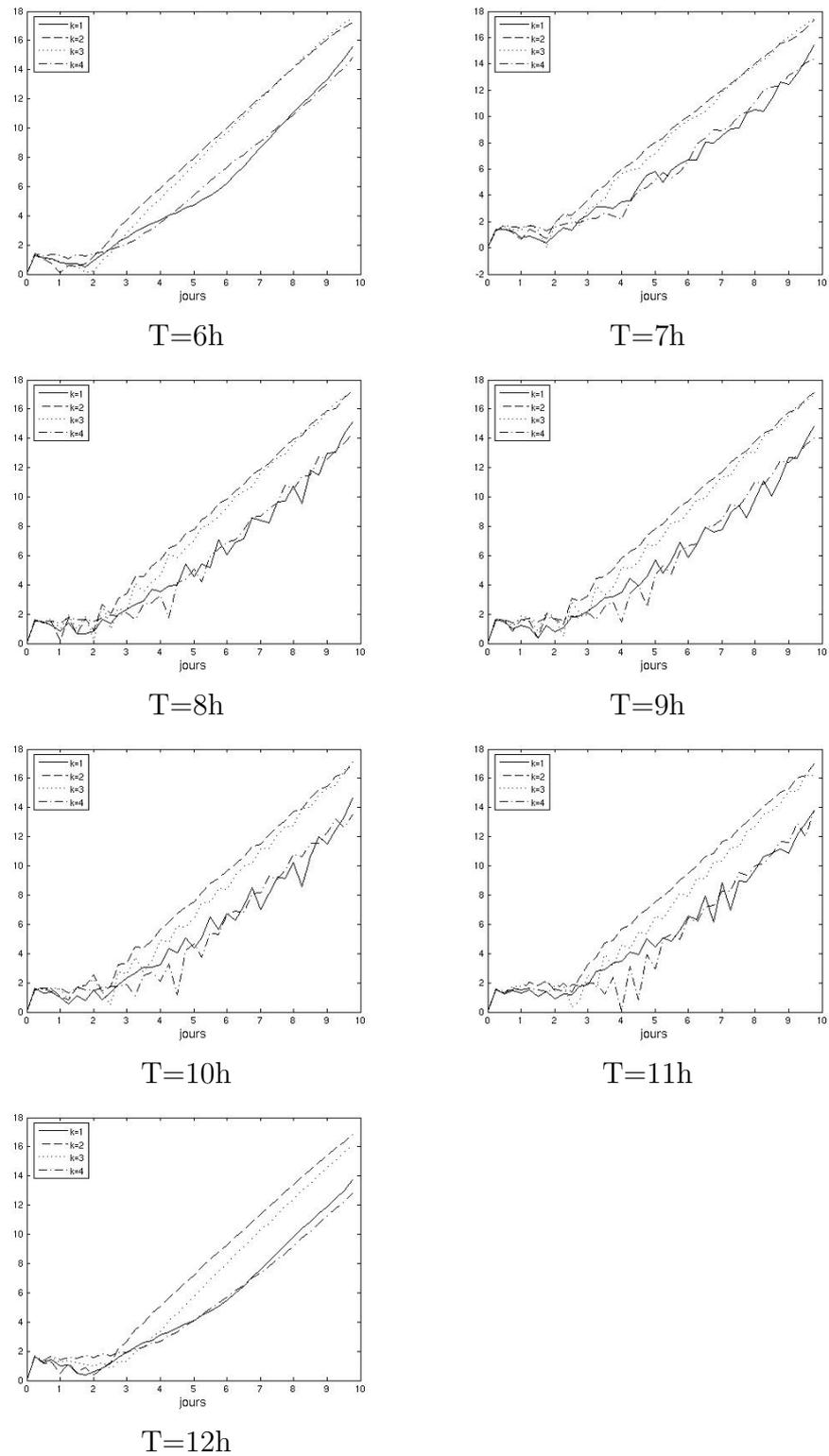


Figure 4.20 — Taux de croissance des 4 premiers modes pour différentes périodes T de forçage, avec un courant barotrope de $2m.s^{-1}$.

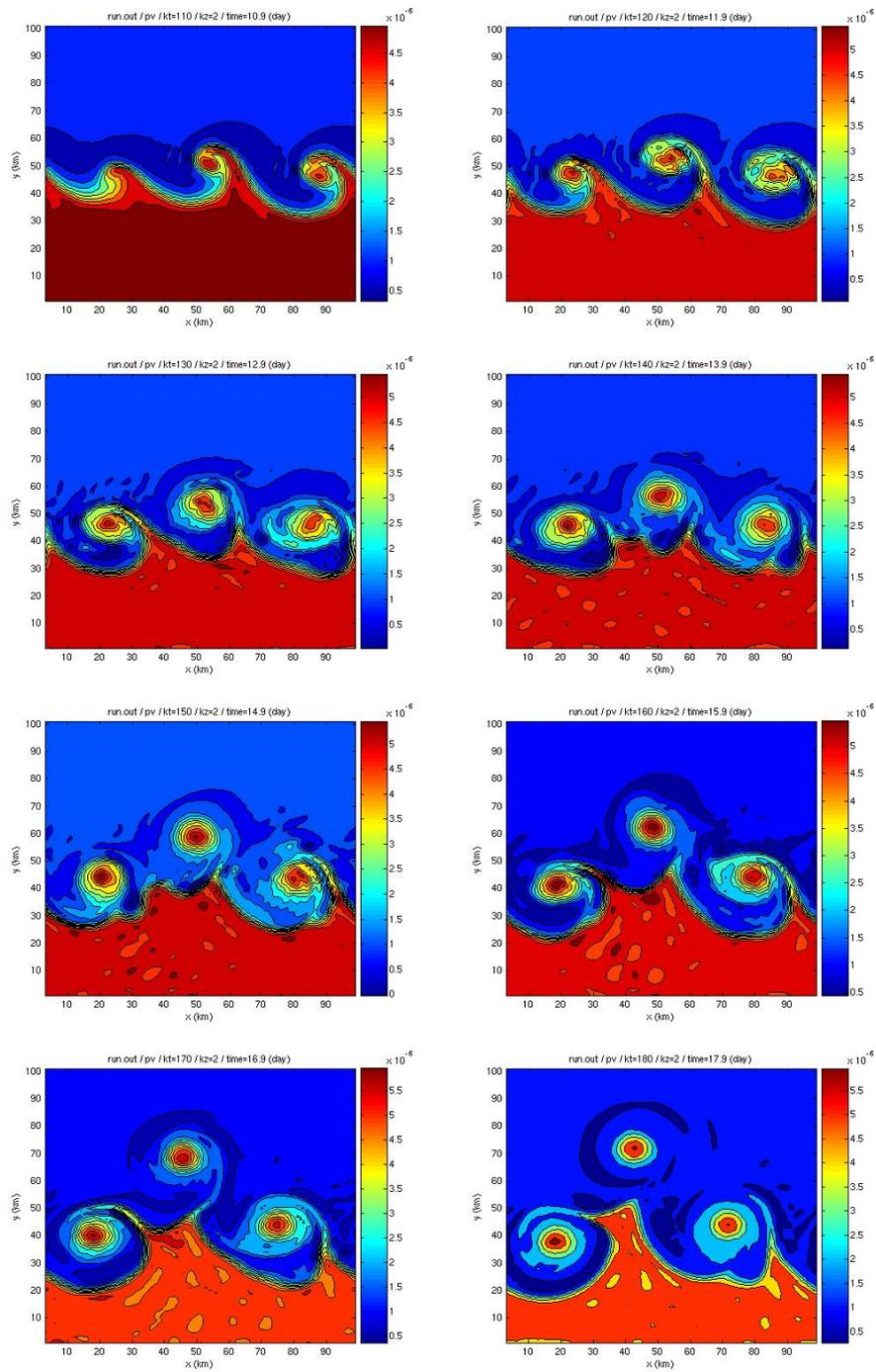


Figure 4.21 — Evolution de la vorticité potentielle dans la couche de fond avec un forçage barotrope de période $7h$ et d'amplitude $2 m.s^{-1}$.

limités sur la configuration que nous avons choisi d'étudier, en raison de l'importance de l'instabilité barocline frontale. Mais cela ne présage en rien de son existence et de son efficacité sur d'autres cas réels.

4.5.3 Conclusions

Nous avons montré dans ce chapitre que contrairement à ce qui se produit dans un modèle quasi-géostrophique, une variation périodique du courant barotrope peut causer l'instabilité paramétrique d'un écoulement barocline dans un modèle shallow-water. L'objectif du chapitre était de quantifier les effets de ce mécanisme d'instabilité paramétrique par rapport à d'autres mécanismes sur un écoulement réel, en l'occurrence le front d'Ouessant. Les données de SST font ressortir des instabilités régulières le long du front, qui se manifestent par l'apparition de méandres d'une longueur d'onde de 20 à 30 *km*. Ces images de SST ne permettent pas de déterminer si la marée joue un rôle dans le développement de cette instabilité, car même si une certaine variabilité est observée sur le comportement du front, elle ne semble pas corrélée au cycle vives-eaux/mortes-eaux. Le manque de données exploitables limite également l'interprétation de cette variabilité.

Un modèle simplifié est utilisé pour représenter le front d'Ouessant en utilisant le formalisme shallow-water. Les calculs analytiques linéaires et numériques avec le code MICOM montrent que la configuration réaliste que nous souhaitons étudier est instable barocliniquement, et donc indépendamment d'un forçage par la marée. La longueur d'onde du mode dominant est d'environ 30 *km*, et l'instabilité se traduit par la formation de méandres qui évoluent en petits tourbillons. Les résultats des études précédentes montraient une instabilité paramétrique capable de déstabiliser des courants stables. Sa possibilité ayant été démontrée, son effet ne pourra se faire sentir que par une modification de l'instabilité barocline. Les calculs numériques montrent que cet effet est relativement limité même si toutes les caractéristiques de l'instabilité paramétrique sont présentes dans le système. Le taux de croissance associé à l'instabilité paramétrique provoquée par la marée barotrope est trop faible pour concurrencer significativement l'instabilité barocline.

Les phénomènes issus du modèle numérique sont comparables qualitativement et

quantitativement aux observations. L'instabilité barocline apparaît donc comme un phénomène dominant dans le développement des instabilités du front d'Ouessant. Cependant, notre modèle ne permet pas d'expliquer totalement la variabilité associée au front. D'autres mécanismes ne sont pas pris en compte dans cette étude, notamment la structure thermique du front inversée au fond, ou encore l'effet des marées internes. Une étude dans un cadre plus complexe serait nécessaire pour aller plus loin dans la compréhension des phénomènes observés.

Conclusion

CETTE thèse s'est attachée à étudier les phénomènes d'instabilités associés aux courants baroclines et aux fronts dans l'océan. Les deux mécanismes principaux envisagés tout au long de la thèse sont l'instabilité barocline et l'instabilité paramétrique. L'instabilité barocline est liée à la présence d'un gradient de vorticité potentielle dans l'écoulement. De par leur configuration, tous les écoulements étudiés sont sujets à cette instabilité barocline. Deux manifestations différentes de ce mécanisme ont été abordées dans la thèse. (1) l'instabilité barocline "classique" dans les deux premiers cas étudiés ; elle est le résultat d'une interaction entre deux modes vorticaux, liés à la présence d'un gradient de vorticité potentielle ou d'une pente topographique. (2) l'instabilité barocline frontale, résultat de l'interaction entre un mode vortical et un mode de gravité, lié par exemple à la présence d'un front de densité.

L'autre mécanisme largement abordé dans cette thèse est celui de l'instabilité paramétrique, liée à une variation périodique de l'un des paramètres de l'écoulement. Dans les cas étudiés, ce paramètre était la vitesse du courant, le transport barocline ou la vorticité potentielle de l'écoulement. L'instabilité paramétrique est mise en évidence sur différents écoulements idéalisés et semble ainsi devoir apparaître dans un grand nombre de situations océaniques (conclusion déjà avancée par Poulin et al (2003)). Ses principales caractéristiques sont :

- Une sélection en fréquence, c'est-à-dire que le système est instable pour un spectre discret de fréquences d'oscillation. Les fréquences provoquant l'instabilité sont définies par :

$$f = \frac{2\sigma}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

où σ est la fréquence propre du système. L'instabilité paramétrique est donc une résonance entre un forçage périodique et un mode propre d'un système physique.

- Une amplification du taux de croissance avec l'amplification de la composante oscillante
- Une croissance “par paliers” à la période du forçage.

Il est également montré que l'instabilité paramétrique est d'autant plus puissante que le système est proche de sa courbe de marginalité.

Le principal résultat à retenir des premières études théoriques (quasi-géostrophique et frontale géostrophique) est qu'un courant stationnaire stable peut être déstabilisé par une oscillation de l'un de ses paramètres à une fréquence appropriée. Cependant, ce phénomène n'est pas systématique et pour que l'instabilité paramétrique se déclenche effectivement, il est nécessaire qu'un couplage entre le paramètre oscillant et le mode excité apparaisse dans les équations. Cela est mis en évidence sur l'exemple du courant barotrope dont l'oscillation n'affecte pas l'écoulement dans un modèle quasi-géostrophique mais qui peut être source d'instabilité paramétrique dans le modèle shallow-water. L'étude sur le modèle frontal géostrophique montre comment un courant frontal de fond associé à une pente topographique peut être instable et comment une oscillation de ce courant peut provoquer une instabilité paramétrique. L'étude quasi-géostrophique montre que la variation périodique du transport dans un courant côtier peut être source d'instabilité paramétrique. Cette instabilité présente des similarités avec l'instabilité barocline puisqu'un régime de détachement de tourbillon existe et le critère de Capet et Carton (2002) sur la distance critique de détachement de ces tourbillons est retrouvé. Le dernier chapitre enfin montre qu'une résonance paramétrique est possible entre un forçage barotrope et un écoulement barocline dans un modèle shallow-water.

Portée de l'étude théorique

Ce travail de thèse s'est inscrit dans le prolongement de deux articles, Poulin et al (2003) et Pedlosky et Thomson (2003). Des résultats concernant l'instabilité paramétrique ainsi que des techniques analytiques et numériques y étaient présentées. Le travail présenté dans les chapitres 2 et 3 de la thèse s'est appuyé en partie sur les résultats de ces deux études. L'apport de cette thèse par rapport à ces travaux a été dans un premier temps de les transposer sur des écoulements plus complexes. Les deux éléments majeurs apportés ont été d'une part l'ajout d'un trait de côte, et d'autre part le traitement d'un courant présentant simultanément un cisaillement horizontal et vertical. Ces deux éléments permettent d'étendre les résultats théoriques de l'instabilité paramétrique obtenus jusqu'alors vers une application à des écoulements réalistes, et notamment à des courants côtiers, même si cette extension est partielle.

Cependant, les modèles théoriques utilisés dans ces 2 premiers chapitres ainsi que dans les études antérieures sur l'instabilité paramétrique ne sont pas toujours représentatifs de la complexité des courants océaniques. Ces modèles, qu'il s'agisse du quasi-géostrophique ou du frontal géostrophique présentent l'intérêt de se focaliser sur la dynamique lente en filtrant les ondes de gravité. Cette dynamique lente est associée aux modes vorticaux existant en raison de l'existence d'un cisaillement vertical de vitesse ou d'une pente topographique dans le cas des courants de pente. Il a été montré que ces mécanismes jouent un rôle fondamental dans la déstabilisation de certains courants, notamment le sous-courant méditerranéen (Serra (2004)). Mais le dernier chapitre de la thèse montre que d'autres écoulements ne peuvent être traités avec des modèles géostrophiques et prouve donc la nécessité de mener des études d'instabilités dans des modèles shallow-water, malgré les difficultés mathématiques accrues. L'exemple traité du front d'Ouessant met en jeu deux mécanismes non pris en compte par les modèles quasi-géostrophiques. Le front de densité tout d'abord, auquel est associé un mode de gravité filtré en quasi-géostrophie, et la marée, phénomène barotrope "rapide", lui aussi filtré. La possibilité d'interaction entre ces modes et les modes lents était connue (mécanisme d'instabilité frontale géostrophique), nous avons dans ce der-

nier chapitre apporté la preuve qu'une interaction de type paramétrique est également possible.

Impact sur des écoulements réels

Dans le premier chapitre, trois exemples d'écoulements côtiers ainsi que leurs variabilités sont décrits. Un seul de ces écoulements est traité dans la thèse, le front d'Ouessant. Il est montré que l'instabilité paramétrique est bien présente sur cet exemple, où la marée joue le rôle du forçage périodique. Cependant, cette configuration est dominée par l'instabilité barocline frontale due à la présence du front de gravité. Si l'instabilité paramétrique peut se développer dans divers courants océaniques, ce dernier résultat met en lumière le fait que cette instabilité peut n'avoir qu'un impact minime sur l'écoulement considéré. Les résultats théoriques de cette thèse indiquent qu'une instabilité paramétrique peut exister pour les deux autres courants cités dans le chapitre introductif (le sous-courant méditerranéen et le courant des Aiguilles). Cependant, il n'est pas possible de prédire sans une étude plus approfondie quelle sera l'amplitude et donc l'impact du phénomène par rapport à d'autres mécanismes. De plus, ces deux écoulements évoluent sur une topographie irrégulière dont les effets sur le courant ne peuvent pas être négligés. Compte tenu de la complexité de ces deux courants, des modèles spécifiques devront être utilisés pour traiter chacun des problèmes. Le sous-courant méditerranéen offre la particularité de s'écouler à mi-pente en raison de l'équilibre qui s'installe en fonction des densités des masses d'eau en présence. Le modèle d'un courant de fond utilisé dans la première étude présentée dans le chapitre 2 ne semble donc pas capable de représenter tous les mécanismes associés. Une configuration plus complexe doit être utilisée : on peut proposer l'utilisation d'un modèle quasi-géostrophique ou frontal géostrophique à trois couches dans laquelle le courant serait représenté dans la couche du milieu. Le courant des Aiguilles est encore différent puisqu'il est intensifié en surface. Alors que l'instabilité paramétrique était envisagée comme conséquence d'un forçage continu dans le cas de la mer d'Iroise (courant de

marée) et dans le cas du sous-courant méditerranéen (variabilité de la vitesse), la description du courant esquissée dans le premier chapitre peut laisser penser qu'un mécanisme légèrement différent existe pour le courant des Aiguilles, où le forçage de l'instabilité paramétrique pourrait être discret. En effet, deux mécanismes associés à ce courant, les "Natal pulses" et l'écoulement intermittent dans le canal du Mozambique provoquent des perturbations ponctuelles sur l'écoulement. La déstabilisation du courant des Aiguilles par des événements ponctuels réguliers doit encore être étudiée. Là encore, en raison des périodes de variabilité du courant, un modèle frontal géostrophique de courant de surface pourrait être utilisé.

Perspectives

Dans de cette thèse, nous avons évalué l'impact d'une variation temporelle continue d'une variable d'un écoulement sur la stabilité de cet écoulement. Comme évoqué dans le paragraphe précédent, une première extension serait d'étudier une configuration où le forçage serait discret. Cette étude pourrait être réalisée numériquement avec une source ponctuelle qui fournirait un inflow périodique mais non sinusoïdal. Une telle configuration est également adaptée à des études en laboratoire.

Dans le dernier chapitre, l'effet de l'instabilité paramétrique est comparé à l'effet de l'instabilité barocline. La suite de l'étude devra poursuivre de telles comparaisons entre différents types d'instabilités, notamment avec des résultats plus précis en termes de taux de croissance. L'étape suivante serait d'étudier des mécanismes de couplage entre différents mécanismes. Nous avons envisagé sur l'exemple du front d'Ouessant l'instabilité paramétrique comme venant s'ajouter à l'instabilité barocline. Il est probable que des interactions plus complexes existent compte tenu de la forte non-linéarité des mécanismes mis en jeu. Un couplage à étudier en particulier serait celui existant entre un mécanisme d'instabilité paramétrique et l'effet d'un accident topographique. Cela pourrait être réalisé par exemple sur notre étude quasi-géostrophique en bandes de vorticité potentielle uniforme, en étudiant l'impact d'un canyon, ce qui serait cohérent avec

une configuration s'approchant du sous-courant méditerranéen. Un couplage entre un phénomène périodique et la forme de la côte peut également être envisagé ; par exemple un front de densité côtier peut être superposé à un fort courant de marée au voisinage d'un cap prononcé. Si la limite du front est suffisamment proche de ce cap, le courant de marée pourra déplacer une partie du front alternativement de part et d'autre du cap, ce qui peut provoquer l'apparition de fortes perturbations sur le front ou même le détachement de fluide.

Enfin, une comparaison plus complète de tels travaux théoriques avec la réalité nécessitera la conjonction de mesures *in-situ* fournissant la structure des écoulements et leur variabilité temporelle, avec des données synoptiques (par exemple mesure satellite des courants de surface) permettant d'identifier les caractéristiques des instabilités sur ces courants (longueur d'onde et vitesse de phase des méandres ou taille des tourbillons ou des méandres détachés). Notre chapitre 4 est un effort préliminaire en ce sens.

Annexe 1

Dans cette annexe, une methode d'analyse de stabilité pour un système de la forme suivante est présenté :

$$\partial_t X = (M_0 + \varepsilon M_1 \cos(\Omega t)) X$$

où M_0 et M_1 sont des matrices 2x2 réelles ou complexes.

Le problème traité dans le chapitre 3 peut s'écrire sous la forme d'un système de ce type. Les composantes de X sont les positions des deux interfaces de vorticité potentielle dans deux couches différentes. Cette méthode alternative à celle développée dans l'article ne permet pas d'accéder aux taux de croissance de l'instabilité, mais permet de mieux comprendre le mécanisme de résonance à l'origine de l'instabilité paramétrique.

On introduit pour commencer une faible perturbation sinusoïdale sur l'état initial. Les déviations d'interface s'écrivent donc sous la forme :

$$\eta = \eta_0 e^{ik(x-ct)} + c.c.$$

$$\eta = \tilde{\eta} + \tilde{\eta}^*$$

et on écrit un système matriciel pour les $\tilde{\eta}$:

$$\delta_t \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_t \\ \tilde{\eta}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_t \\ \tilde{\eta}_c \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

Les termes a , b , c , et d de la matrice se décomposent en :

$$a = a_0 + \varepsilon \tilde{a}_1 = a_0 + \varepsilon a_1 \cos(\Omega t_0)$$

$$b = b_0 + \varepsilon \tilde{b}_1 = b_0 + \varepsilon b_1 \cos(\Omega t_0)$$

$$c = c_0 + \varepsilon \tilde{c}_1 = c_0 + \varepsilon c_1 \cos(\Omega t_0)$$

$$d = d_0 + \varepsilon \tilde{d}_1 = d_0 + \varepsilon d_1 \cos(\Omega t_0)$$

Développement en échelle de temps et calculs

Dans un premier temps une échelle de temps long : $T = \varepsilon t_0$ est définie, et les variables sont décomposées sur cette échelle :

$$\tilde{\eta} = \eta^0 + \varepsilon \eta^1 + o(\varepsilon^2)$$

Ce système est ré-écrit sous la forme d'une équation du second ordre :

$$\partial_{tt}^2 \tilde{\eta}_t = \left(a + d + \frac{\partial_t b}{b} \right) \partial_t \tilde{\eta}_t + \left(\partial_t a + bc - ad - \frac{\partial_t b}{b} a \right) \tilde{\eta}_t \quad (4.10)$$

Ordre 0

En ne retenant que les termes d'ordre 0, il vient une équation à coefficients constants dont le comportement des solutions définit la stabilité du système stationnaire :

$$\partial_{t_0 t_0}^2 \eta_t^0 - (a_0 + d_0) \partial_{t_0} \eta_t^0 - (b_0 c_0 - a_0 d_0) \eta_t^0 = L(\eta_t^0) = 0 \quad (4.11)$$

Le but est de trouver des conditions sous lesquelles un forçage en Ω dans la matrice va pouvoir déstabiliser un état stable sans ce forçage. Il est donc nécessaire que les solutions de l'équation ci-dessus ne croissent pas, c'est à dire que $\Delta = (a_0 + d_0)^2 - 4(a_0 d_0 - b_0 c_0)$ soit négatif. On peut alors écrire les solutions de cette équation sous la forme :

$$\eta_t^0 = A_0(T)e^{i\omega_1 t_0} + B_0(T)e^{i\omega_2 t_0} \quad (4.12)$$

ordre 1

A l'ordre 1, le système peut s'écrire :

$$\begin{aligned} L(\eta_{t_0}^1) = \\ -2\partial_{t_0}\partial_T\eta_t^0 + \left(\tilde{a}_1 + \tilde{d}_1 + \frac{\partial_{t_0}\tilde{b}_1}{b} \right) \partial_{t_0}\eta_t^0 + \left(\partial_{t_0}\tilde{a}_1 + b_0\tilde{c}_1 + \tilde{b}_1c_0 - a_0\tilde{d}_1 - \tilde{a}_1d_0 - \frac{\partial_{t_0}\tilde{b}_1}{b}a_0 \right) \eta_0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

On remarque que

$$\frac{\partial_{t_0}\tilde{b}_1}{b} = \frac{-\varepsilon\Omega b_1 \sin(\Omega t_0)}{b_0 + \varepsilon b_1 \cos(\Omega t_0)} = \frac{-\varepsilon\Omega b_1 \sin(\Omega t_0)}{b_0} \left(1 - \varepsilon \frac{b_1}{b_0} \cos(\Omega t_0) + o(\varepsilon^2) \right)$$

à l'ordre 1, seul $\frac{\partial_{t_0}\tilde{b}_1}{b_0} = -\Omega \frac{b_1}{b_0} \sin(\Omega t)$ apparaît.

Le principe du raisonnement est le suivant :

Le développement à l'ordre 1 fait apparaître à gauche l'opérateur linéaire L dont les valeurs propres sont les fonctions $\exp(i\omega_1 t)$ et $\exp(i\omega_2 t)$. Le membre de droite de ce même développement fait apparaître des termes oscillant en ω_1 et ω_2 qui vont résonner sur le temps rapide avec les termes de gauche. Pour étudier le comportement de l'équation sur le temps long, il est donc nécessaire d'imposer à ces termes résonnants d'être nuls. On va ainsi obtenir une équation d'amplitude pour les coefficients A_0 et B_0 .

Dans l'équation (5), les termes en $\sin(\Omega t)$ sont $\partial_{t_0}b_1/b_0$, $\partial_{t_0}a_1$ et $a_0\partial_{t_0}b_1/b_0$, tous les autres sont en $\cos(\Omega t)$.

Il y a possibilité de résonnance si :

$$\pm\Omega + \omega_1 = \omega_1 \quad \text{ou} \quad \omega_2$$

$$\pm\Omega + \omega_2 = \omega_1 \text{ ou } \omega_2$$

Intéressons-nous au cas où $\Omega = \omega_2 - \omega_1$ (le cas $\Omega = \omega_1 - \omega_2$ est symétrique).

termes en ω_1 \longrightarrow ω_1 ou $-\Omega + \omega_2$

on a :

$$2i\omega_2\partial_T A_0 = \left(\frac{a_1 + d_1}{2}(i\omega_2) - \frac{\partial_{t_0} b_1}{2b_0}\omega_2 \right) B_0 + \left(\frac{b_0 c_1 + b_1 c_0 - a_0 d_1 - a_1 d_0}{2} - \frac{1}{2i} \left(\partial_t a_1 - a_0 \frac{\partial_{t_0} b_1}{b_0} \right) \right) B_0 \quad (4.14)$$

termes en ω_2 \longrightarrow ω_2 ou $\Omega + \omega_1$

on a :

$$2i\omega_1\partial_T B_0 = \left(\frac{a_1 + a_1}{2}(i\omega_1) + \frac{\partial_{t_0} b_1}{2b_0}\omega_1 \right) A_0 + \left(\frac{b_0 c_1 + b_1 c_0 - a_0 d_1 - a_1 d_0}{2} + \frac{1}{2i} \left(\partial_t a_1 - a_0 \frac{\partial_{t_0} b_1}{b_0} \right) \right) A_0 \quad (4.15)$$

Cela nous donne un système 2x2 pour l'évolution de A_0 et B_0 sur le temps long. La stabilité de ce système sera assurée si le déterminant de la matrice est positif. Seuls les termes extra-diagonaux sont non nuls dans cette matrice, son déterminant se réduit donc à :

$$-\frac{1}{4\omega_1\omega_2} \left(\left(\frac{a_1 + d_1}{2}(i\omega_1) + \frac{\partial_{t_0} b_1}{2b_0}\omega_1 \right) + \left(\frac{b_0 c_1 + b_1 c_0 - a_0 d_1 - a_1 d_0}{2} + \frac{1}{2i} \left(\partial_t a_1 - a_0 \frac{\partial_{t_0} b_1}{b_0} \right) \right) \right) \left(\left(\frac{a_1 + d_1}{2}(i\omega_2) - \frac{\partial_{t_0} b_1}{2b_0}\omega_2 \right) B_0 + \left(\frac{b_0 c_1 + b_1 c_0 - a_0 d_1 - a_1 d_0}{2} - \frac{1}{2i} \left(\partial_t a_1 - a_0 \frac{\partial_{t_0} b_1}{b_0} \right) \right) \right) \quad (4.16)$$

Le système sera stable si ce produit est négatif

Bibliographie

- [1] I. AMBAR, L. ARMI, A. BOWER et T. FERREIRA, *Some aspects of time variability of the mediterranean water off south portugal*, Deep-Sea Res. I, vol. 46, pp. 1109–1136, 1999.
- [2] I. AMBAR et M. HOWE, *Observations of the mediterranean outflow, the deep circulation in the vicinity of the gulf of cadix*, Deep-Sea Res. II, vol. 26, pp. 555–568, 1979.
- [3] R. BLECK et B. BOUDRA, *Initial testing of a numerical ocean circulation model using a hybrid (quasi-isopycnic) vertical coordinate*, J. Phys. Oceanogr., vol. 11, pp. 755–770, 1981.
- [4] R. BLECK et B. BOUDRA, *Wind-driven spin-up eddy-resolving ocean model formulated in isopycnic and isobaric coordinates*, J. Geophys. Res., vol. 91, pp. 7611–7621, 1986.
- [5] E. BOSS, N. PALDOR et T. L., *Stability of a potential geostrophic front : from quasi-geostrophy to shallow-water*, J. Fluid Mech., vol. 315, pp. 65–84, 1996.
- [6] E. BOSS, N. PALDOR et L. THOMPSON, *Stability of a potential vorticity front : from quasi-geostrophy to shallow-water*, J. Fluid Mech., vol. 315, pp. 65–84, 1996.
- [7] X. CAPET et X. CARTON, *Nonlinear regimes of baroclinic boundary currents*, J. Phys. Oceanogr., 2002.
- [8] X. CAPET, L. CHERUBIN et Y. MOREL, *Influence of the transport on the instability of a boundary current*, J. Phys. Oceanogr., 2002.

-
- [9] J. CHARNEY, *On the scale of atmospheric motions*, Geophys. public., vol. 7, 1954.
- [10] L. CHERUBIN, X. CARTON et D. DRITSCHER, *Vortex expulsion by a zonal coastal jet on a transverse canyon*, Proc. of the 2nd int. work. on vortex flows, ESAIM, Paris, vol. 315, pp. 481–501, 1996.
- [11] L. CHERUBIN, N. SERRA et I. AMBAR, *Low frequency variability of the mediterranean undercurrent downstream of portimao canyon*, J. Geophys. Res., vol. 108, pp. 3058–3072, 2002.
- [12] L. CHERUBIN, N. SERRA et I. AMBAR, *Baroclinic instability of boundary currents over a bottom slope in a quasi-geostrophic model*, J. Fluid Mech., 2005.
- [13] E. D’ASARO, *Generation of submesoscale vortices : a new mechanism*, J. Geophys. Res., vol. 93, pp. 6685–6693, 1988.
- [14] M. D’ORGEVILLE et B. HUA, *Equatorial inertial parametric instability of zonally symmetric oscillating shear flows*, J. Fluid Mech., vol. 481, pp. 329–353, 2003.
- [15] R. W. GRIFFITHS, *Gravity currents in rotating systems*, Annu. Rev. Fluid Mech., vol. 18, pp. 59–89, 1986.
- [16] R. GRIMSHAW et Z. YI, *Evolution of a potential vorticity front over a topographic slope*, J. Phys. Oceanogr., vol. 91, pp. 1240–1255, 1991.
- [17] M. IKEDA, *Linear instability of a current flowing along a bottom slope using a three-layer model*, J. Phys. Oceanogr., vol. 13, pp. 208–223, 1983.
- [18] A. KUBOKAWA, *Instability and nonlinear evolution of a density-driven coastal current with a surface front in a two-layer ocean*, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., vol. 40, pp. 195–223, 1987.
- [19] K. KUMAR et L. TUCKERMAN, *Parametric instability of the interface between two fluids*, J. Fluid Mech., vol. 279, pp. 49–68, 1994.
- [20] J. LEFEVRE et J. GRAL, *On the relationship of noctiluca swarming off the western coast of brittany with hydrological feature and plankton characteristics of the environment*, Journ. of exp. Mar. Biol. and Eco., vol. 4, pp. 187–306, 1970.

- [21] A. LEMAGUERESSE, *La structure thermique sur le plateau continental, dans le secteur Ouest Bretagne, son évolution annuelle et quelques aspects de sa variabilité dans une zone frontale*, Thèse de doctorat, Université de Bretagne occidentale, 1974.
- [22] S. LENTZ et K. HELFRICH, *Buoyant gravity currents along a sloping bottom in a rotating fluid*, J. Fluid Mech., vol. 464, pp. 251–278, 2002.
- [23] J. LUTJEHARMS, *The Agulhas current*, Springer, 2006.
- [24] V. MARIETTE, *Effets des échanges atmosphériques sur la structure thermique marine, application à des zones du large et à une zone côtière*, Thèse de doctorat, Université de Bretagne occidentale, 1983.
- [25] V. MARIETTE et B. LE CANN, *Simulation of the formation of ushant thermal front*, Continental Shelf Research, vol. 4, pp. 637–660, 1983.
- [26] S. MEACHAM et J. STEPHENS, *Instabilities of gravity currents along a slope*, J. Phys. Oceanogr., vol. 31, pp. 30–53, 2000.
- [27] L. MYSAK, *On the stability of the california undercurrent off vancouver island*, J. Phys. Oceanogr., vol. 7, pp. 904–917, 1977.
- [28] L. MYSAK, E. JOHNSON et W. HSIEM, *Baroclinic and barotropic instabilities of coastal currents*, J. Phys. Oceanogr., vol. 11, pp. 209–230, 1981.
- [29] D. NOF, *Lenses generated by intermittents currents*, Deep-Sea Res. II, vol. 38, no. 3, pp. 325–345, 1991.
- [30] D. NOF, N. PALDOR et S. VAN GORDER, *The reddy maker*, Deep-Sea Res. II, vol. 49, pp. 1531–1549, 2002.
- [31] J. OCHOA et N. BRAY, *Water mass exchange in the gulf of cadiz*, Deep-Sea Res. II, vol. 38, 1991.
- [32] N. PALDOR et M. GHIL, *Shortwave instabilities of coastal currents*, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., vol. 58, pp. 225–241, 1991.

- [33] N. PALDOR et M. GHIL, *Linear instability of a zonal jet on an f -plane*, J. Phys. Oceanogr., vol. 27, pp. 2361–2369, 1997.
- [34] J. PEDLOSKY et J. THOMSON, *Baroclinic instability of time-dependent currents*, J. Fluid Mech., vol. 490, pp. 189–215, 2003.
- [35] N. PHILLIPS, *Energy transformations and meridional circulations associated with simple baroclinic waves in a two level quasi-geostrophic model*, Tellus, vol. 6, pp. 273–286, 1954.
- [36] T. PICHEVIN et D. NOF, *The eddy canon*, Deep-Sea Res. II, vol. 43, no. 9, pp. 1475–1207, 1996.
- [37] T. PICHEVIN et D. NOF, *The momentum imbalance paradox*, Tellus, vol. 49, pp. 198–319, 1996.
- [38] F. POULIN, G. FLIERL et P. J., *Parametric instability in oscillatory shear flows*, J. Fluid Mech., vol. 481, pp. 329–353, 2003.
- [39] M. RESZKA et G. SWATERS, *Numerical investigation of baroclinic instability in the gaspé current using a frontal geostrophic model*, J. Geophys. Res., vol. 104, pp. 25,685–25,696, 1999.
- [40] M. RESZKA et G. SWATERS, *Dynamics of bottom trapped currents with application to the strait of georgia*, Canad. Appl. Math. Quart., vol. 9, pp. 127–157, 2001.
- [41] J. RHO, H. CHOI, H. SHIN et I. PARK, *A study on mathieu-type instability of conventional spar platform in regular waves*, Int. Journ. of offshore and petr. eng., vol. 15, pp. 104–108, 2005.
- [42] U. SEND, *Vorticity and instability during flow reversal on the continental shelf*, J. Phys. Oceanogr., vol. 19, pp. 1620–1633, 1989.
- [43] N. SERRA, *Dynamics of mediteranean water eddies*, Thèse de doctorat, University of Lisbon, 2004.
- [44] X. SHI et L. ROED, *Frontal instabilities in a two-layer, primitive equation ocean model*, J. Phys. Oceanogr., vol. 29, pp. 948–968, 1999.

-
- [45] K. SHIMADA et A. KUBOKAWA, *Nonlinear evolution of linearly unstable barotropic boundary currents*, J. Phys. Oceanogr., vol. 27, pp. 1326–1348, 1997.
- [46] J. SIMPSON, *The shelf sea fronts : implications of their existence and behavior*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, vol. 302, pp. 531–546, 1981.
- [47] G. SWATERS et G. FLIERL, *Dynamics of ventilated coherent cold eddies on a sloping bottom.*, J. Fluid Mech., vol. 223, pp. 565–588, 1991.
- [48] P. YECKO et S. MEACHAM, *Buoyancy-driven rotating boundary currents*, Ann. New-York ac. of Sciences, vol. 848, pp. 114–120, 1998.