

N° d'ordre : 1754

THESE  
présentée devant l'UNIVERSITE DE RENNES 1

pour obtenir

le grade de Docteur de l'Université de Rennes 1  
Mention : Mathématiques et Applications  
Ecole doctorale : Mathématiques de l'ouest

par

Valérie Monbet

Equipe d'accueil : Mécanique des structures et géophysique, IFREMER  
Composante universitaire : IRMAR

Sujet

**Statistiques du comportement de systèmes  
dynamiques non linéaires  
Application à la tenue à la mer de navires rapides**

Soutenue le 16 décembre 1996 devant la commission d'examen composée de :

M. Jean Memin	Président
M. Georg Lingren	Rapporteur
M. Jean-Marc Azais	Rapporteur
M. Jean Deshayes	Examineur
M. Marc Prevosto	Examineur
M. Alain Hillion	Examineur

*Thèse financée par l'IFREMER et la Région Bretagne*



# Résumé

Dans cette thèse, nous présentons une méthode destinée à estimer le nombre moyen de franchissements croissants de niveaux des degrés de libertés (et/ou de leurs dérivées premières et secondes) d'une structure évoluant dans un environnement aléatoire tel que la houle. Bien que la méthode développée puisse s'appliquer à divers types de systèmes, notre intérêt se porte plus particulièrement sur l'étude du comportement d'un navire rapide en termes de confort des passagers. La modélisation non linéaire du système et la représentation de la houle sous la forme d'un processus stationnaire gaussien ont permis d'avoir une approche des problèmes tels que la tenue à la mer ou le confort à bord du navire différente des démarches purement hydrodynamiques et déterministes. En particulier, l'analyse statistique permet, en décrivant la surface libre sous forme de processus aléatoires, d'estimer des statistiques du nombre de franchissements de niveaux de l'accélération du navire, dimensionnant pour les problèmes posés.

Nous proposons tout d'abord une synthèse bibliographique dans laquelle nous présentons quelques méthodes parmi les plus utilisées pour approcher, sans simulation, la densité de probabilité jointe de la réponse d'un oscillateur non linéaire évoluant dans un environnement aléatoire. Nous concluons cette synthèse par un tableau qui récapitule les principales conditions d'application de chacune des méthodes décrites ainsi que leurs résultats.

Puis, pour un processus stationnaire mélangeant à trajectoires régulières, nous estimons le nombre moyen de franchissements croissants de niveaux par deux estimateurs non paramétriques (un estimateur empirique et un estimateur adaptatif encore appelé estimateur de projection) à partir d'observations discrétisées et nous les comparons à un estimateur de type régression. L'estimateur de projection est tel que la densité de probabilité jointe du processus et de sa dérivée est approchée par une perturbation polynomiale du produit des densités marginales. Nous majorons le risque quadratique asymptotique de ces deux estimateurs en fonction du nombre de points d'observation, du pas de temps de discrétisation et de la dimension de l'espace de projection pour l'estimateur adaptatif. Dans le cas particulier des processus gaussiens, nous comparons les performances de l'estimateur empirique avec celles de l'estimateur paramétrique.

Enfin nous abordons plus précisément l'étude du comportement d'un navire rapide sur de la houle réelle. Nous montrons comment nous avons construit un modèle non linéaire approché qui décrit les mouvements de la carène, en ajoutant au modèle linéaire calculé des termes non linéaires choisis pour leur sens physique et qui compensent certaines hypothèses formulées pour le calcul linéaire en diffraction-radiation. Puis, nous justifions le choix de la méthode que nous appliquons pour estimer la fréquence des franchissements croissants de niveaux de l'accélération en tangage. Ce choix est étroitement lié au fait que nous étudions les accélérations de la structure et non simplement ses déplacements. Nous comparons finalement différentes estimations du nombre moyen de franchissements de niveaux de l'accélération en tangage du navire pour des échantillons relativement courts. Nous concluons ce travail en proposant une méthodologie assez générale pour traiter les problèmes de systèmes non linéaires soumis à des excitations aléatoires.

**Mots clé :** oscillateur non linéaire stochastique, franchissements de niveaux, estimation non paramétrique, estimation adaptative, vitesse de convergence, navire rapide, confort.

# Abstract

In this thesis, we propose a method to estimate the mean number of level upcrossings for the degrees of freedom (and/or their first and second derivatives) of a structure submitted to random excitation such as wave forces. Although this method could be applied to several types of systems, we are especially interested here in the study of the behaviour of an high speed ship for the comfort of passengers. The non linear modelization of the system and the representation of sea waves as a Gaussian stationary process allows to have a different approach of problems like seakeeping than purely hydrodynamic and deterministic methods. Criteria of comfort may be given by statistics of the number of level upcrossings and a statistical analysis allows, by describing the sea surface with random processes, to estimate statistics of the upcrossing number.

We propose in a first part a bibliography and present several methods among the most frequently applied to approximate, without simulation, the joint probability density function of the response of a non linear oscillator under random excitations. The joint probability density function integrated in the Rice formula gives the expected number of upcrossings. We conclude this synthesis by a table which gives the more important conditions under which each method is available and the obtained results.

Then, for a mixing stationary process with smooth trajectories, we estimate the mean number of upcrossings with two non parametrical estimators (an empirical one and an adaptative one) from discretized observations and we compare these estimators to a regression estimator. The adaptative estimator is construct such that the joint probability density function of the process and its derivative is approximate by a polynomial perturbation of the product of the marginal densities. We evaluate the asymptotic quadratic risk of both estimators with respects to the number of observed points, the discretization time step and the dimension of the projection space for the adaptative estimator. In the particular case of Gaussian processes, the empirical estimator is compared to the parametrical one.

At last we tackle the problem of the behaviour of an high speed ship on real sea waves. We explain how we construct an approximate non linear model for the motions for the hull, by adding to the calculated linear model some non linear terms justified by the diffraction-radiation problem. Then, we justify the choice of the method which is applied to estimate the upcrossing frequency of the pitch acceleration. The accelerations and not only the displacements of the system are studied and this characteristic is really important for the choice of the method. Finally we compare several approximations of the mean number of upcrossings of the pitch acceleration for relatively short samples. We conclude this work by giving a quite general methodology to solve problems of non linear systems submitted to random excitations.

**Key words :** non linear stochastic oscillator, level upcrossings, non parametrical estimation, adaptative estimation, convergence rate, high speed ship, comfort.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Oscillateurs aléatoires</b>	<b>15</b>
2.1	Introduction . . . . .	15
2.2	Equation de Fokker-Planck . . . . .	16
2.2.1	Solution exacte . . . . .	19
2.2.2	Moyennage stochastique . . . . .	23
2.2.3	Path Integral Solution . . . . .	25
2.2.4	Solution numérique . . . . .	26
2.2.5	Système des moments . . . . .	29
2.3	Décomposition spectrale . . . . .	30
2.3.1	Quadratisation stochastique . . . . .	32
2.3.2	Méthode de Wiener . . . . .	35
2.4	Synthèse . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Statistiques des estimateurs de <math>E(N_u)</math></b>	<b>41</b>
3.1	Introduction . . . . .	41
3.1.1	Un problème de régression . . . . .	41
3.1.2	Hypothèses et notations . . . . .	46
3.2	Estimateur empirique . . . . .	48
3.2.1	Biais . . . . .	48
3.2.2	Variance . . . . .	51
3.2.3	Pour un processus gaussien . . . . .	56
3.3	Estimateur paramétrique gaussien . . . . .	61
3.3.1	Observation du couple $(X_t, \dot{X}_t)$ . . . . .	62
3.3.2	Observation du processus $X_t$ . . . . .	64
3.3.3	Comparaison des estimateurs empirique et paramétrique . . . . .	66
3.4	Estimateur de projection . . . . .	67
3.4.1	Description de l'estimateur . . . . .	69
3.4.2	Majoration de l'erreur . . . . .	73
3.4.3	Observation du couple $(X_t, \dot{X}_t)$ . . . . .	82
3.4.4	Pour un processus gaussien . . . . .	85
3.4.5	Inégalité de Jackson dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	86

<b>4 Navire rapide</b>	<b>93</b>
4.1 Introduction . . . . .	93
4.2 Système dynamique . . . . .	95
4.2.1 Oscillateur non linéaire . . . . .	96
4.2.2 Forces de houle . . . . .	102
4.3 Confort . . . . .	103
4.3.1 Définition, modélisation . . . . .	103
4.3.2 Mal de mer . . . . .	105
4.4 Choix d'une méthode . . . . .	107
4.4.1 Système dynamique simplifié . . . . .	108
4.4.2 Méthodes classiques . . . . .	112
4.4.3 Simulation des accélérations . . . . .	114
4.5 Estimation de $E(N_u)$ . . . . .	116
4.5.1 Estimateurs . . . . .	117
4.5.2 Résultats . . . . .	124
4.5.3 Conclusion . . . . .	131
4.6 Méthodologie . . . . .	135
<b>5 Conclusion</b>	<b>141</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>145</b>
<b>A Estimation de lois de probabilité (Matlab)</b>	<b>149</b>
A.1 Introduction . . . . .	149
A.2 Description des fonctions matlab . . . . .	156
A.2.1 Statistiques descriptives . . . . .	156
A.2.2 Estimation non paramétrique de lois . . . . .	159
A.2.3 Approximation paramétrique . . . . .	166
A.2.4 Nombre moyen de franchissements de niveaux . . . . .	190
<b>B Comparaison des fonctions de transfert du tangage</b>	<b>193</b>
<b>C Evolution de la résistance au mal de mer</b>	<b>195</b>

# Notations

$\omega$	pulsation
$\omega_r$	pulsation de rencontre
$\int$	intégrale de $-\infty$ à $+\infty$
$\mathbf{1}_A(\cdot)$	fonction indicatrice de l'ensemble $A$
$\Phi^T$	matrice $\Phi$ transposée
$t$	temps
$\Delta t$	pas de temps de discrétisation
$X_t$	processus à trajectoires régulières
$\dot{X}_t, \ddot{X}_t$	dérivées première et seconde de $X_t$
$N_j$	$j$ ème composante d'un bruit blanc gaussien
$p_X(\cdot)$	densité de probabilité de $X$ (stationnaire)
$p_{t,X}(\cdot)$	densité de probabilité de $X$ au temps $t$
$p(\cdot, \cdot)$	densité de probabilité jointe de $X$ et $\dot{X}$ (stationnaire)
$s$	densité de probabilité inconnue à estimer
$\hat{s}_N$	estimateur de $s$
$P[X \in A]$	probabilité de $X \in A$
$E[\cdot]$	espérance
$E_q[\cdot]$	espérance sous la loi de densité de probabilité $q$
$V[\cdot]$	variance
$Cov[\cdot]$	covariance (d'un vecteur)
$C_{XX}(t)$ ou $C(t)$	fonction de corrélation de $X$
$E(N_u)$	espérance du nombre de franchissements du niveau $u$
$\bar{N}_u$	estimateur empirique de $E(N_u)$





# Chapitre 1

## Introduction

Dans cette thèse, nous nous attachons à développer une méthode permettant de prédire les comportements extrêmes et la fatigue de systèmes dynamiques non linéaires évoluant dans un environnement aléatoire. Les comportements extrêmes comme la fatigue peuvent être caractérisés par les statistiques du nombre de franchissements de niveaux des déplacements de la structure ou de leurs dérivées premières et secondes.

Avant de présenter plus en détails l'application à laquelle nous nous intéressons, il est utile d'expliquer certains de nos choix concernant la modélisation d'un système dynamique aléatoire et de commenter la démarche proposée par la figure 1.1.

### **Représentation déterministe ou aléatoire**

La conception et l'étude des structures mécaniques et de génie civil sont restées pendant longtemps déterministes. La modélisation mathématique correspondante représentait les actions subies par des fonctions usuelles et les réponses à ces actions par les solutions d'équations aux dérivées partielles. Mais il est apparu peu à peu que la représentation déterministe est parfois inadaptée. Par exemple la modélisation de la houle réelle par un processus stochastique reflète davantage la réalité qu'une représentation déterministe. Ainsi une bonne prédiction du comportement de structures soumises à des chargements tels que la houle réelle, le vent, des tremblements de terre, etc... ne peut s'appuyer sur une démarche purement dynamique et déterministe.

L'association de modèles de représentation dynamique et une description sous forme de processus stochastique de l'excitation doit permettre de développer une approche statistique de façon à aborder les problèmes liés au comportement d'un système évoluant dans un environnement aléatoire d'une manière plus réaliste.

Si nous optons pour une approche statistique du problème, le choix entre une représentation dynamique linéaire et non linéaire est déterminant dans l'analyse du comportement du système étudié.

### **Modélisation linéaire ou non linéaire**

En ingénierie, il est courant d'utiliser des systèmes linéaires pour modéliser une structure excitée par des phénomènes aléatoires pour une simplicité de la méthode. En effet, si

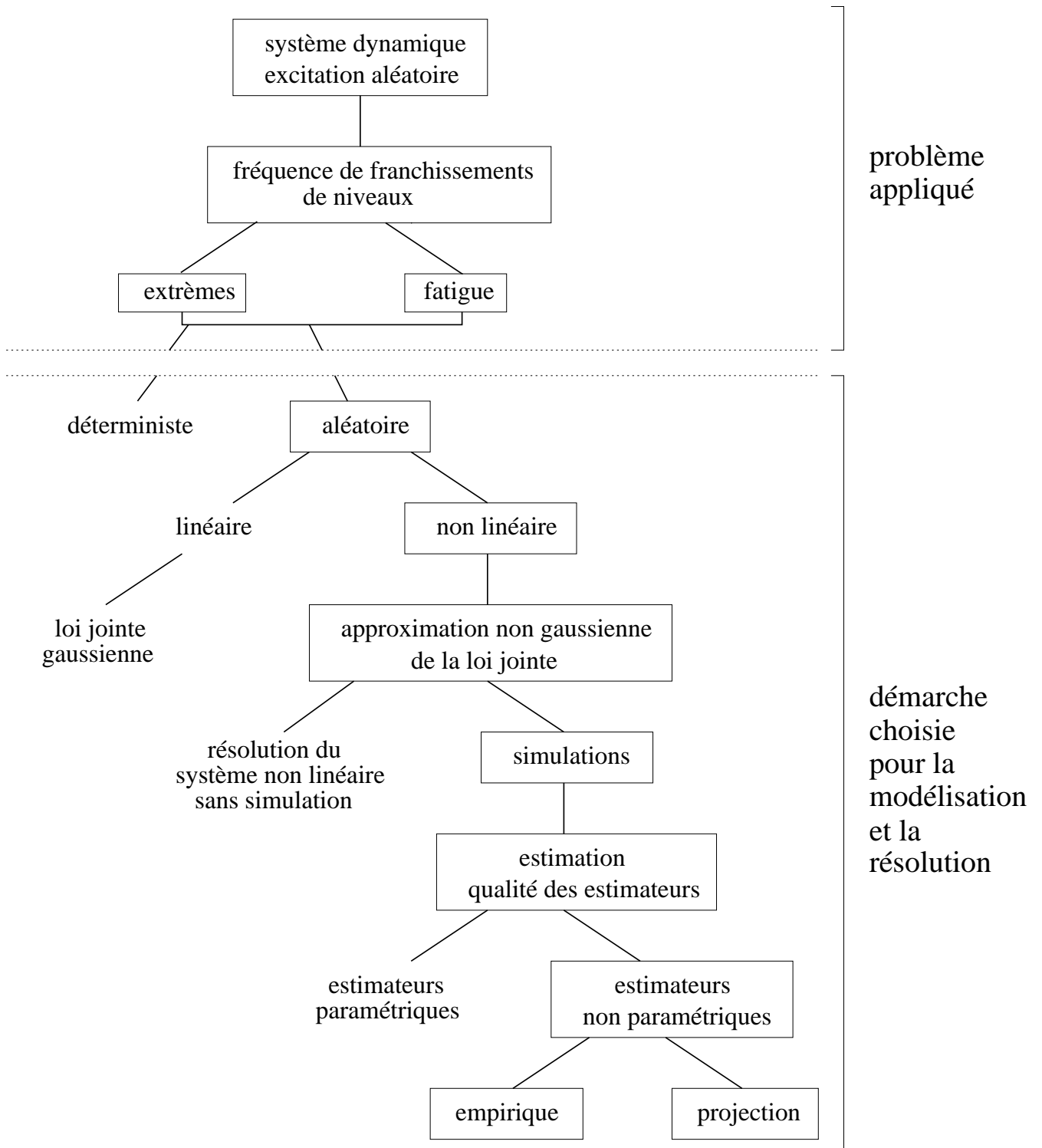


FIG. 1.1 – Alternatives pour l'étude du comportement d'une structure sur de la houle réelle; cadres : démarche adoptée

le processus d'excitation est distribué suivant une loi gaussienne alors, en accord avec la théorie linéaire, le processus réponse suit aussi une loi gaussienne ce qui permet de calculer facilement toutes sortes de statistiques de la réponse. Pourtant, aucun système réel n'est parfaitement linéaire et les non linéarités apparaissent sous diverses formes justifiant selon les cas une approximation linéaire. Par exemple, les forces d'interaction entre une structure et un fluide en mouvement sont souvent fortement non linéaires. Un cas typique est le mouvement de roulis d'un navire sur de la houle. L'amortissement correspondant dépend de la vitesse en roulis  $\dot{\Phi}$  et peut s'exprimer  $a\dot{\Phi} + b\dot{\Phi}|\dot{\Phi}|$  où  $a$  et  $b$  sont des constantes ; le second terme souvent le plus important induit des non linéarités très fortes.

En outre, le plus souvent, l'effet des non linéarités s'amplifie quand l'amplitude des oscillations augmente. De plus si les non linéarités engendrent des harmoniques à des fréquences supérieures aux fréquences de la réponse linéaire, alors le rapport de l'amplitude des composantes non linéaires sur l'amplitude de la réponse linéaire croît quand on étudie des degrés de liberté d'ordres de dérivation élevés (accélération, dérivée troisième...). Ainsi, il est souvent mal adapté de représenter un système non linéaire par un modèle linéaire lorsque l'étude de la structure porte principalement sur ses comportements extrêmes ou sur les degrés de libertés d'ordres élevés.

Un certain nombre de systèmes dynamiques stochastiques doivent donc être modélisés par un oscillateur non linéaire (1.1), le point symbolisant la dérivation temporelle. La notation  $X_t$  signifie que  $X$  est une fonction du temps  $t$ .

$$\ddot{X}_t + g(X_t, \dot{X}_t) = f_t \quad (1.1)$$

Les forces  $f_t$  sont représentées par des processus stochastiques si l'excitation subie est aléatoire. Dans le cas de structures flottantes soumises à de la houle aléatoire, l'excitation est représentée par un filtré linéaire ou non linéaire de processus gaussien stationnaire coloré.

Si la structure est modélisée par un tel modèle non linéaire, la réponse  $X$  du système n'est plus gaussienne et on devra donc déterminer sa loi de probabilité ou une approximation de cette distribution en fonction des caractéristiques du système pour prédire les statistiques de son évolution. Par exemple, la loi jointe de la réponse et de sa dérivée permet de calculer l'espérance du nombre de franchissements croissants de niveaux.

### Approximation de la loi jointe

L'espérance du nombre  $N_u$  de franchissements croissants d'un niveau  $u$ , par unité de temps, se calcule classiquement par la formule de Rice (1.2) pour un processus  $X$  de dérivée temporelle  $\dot{X}$ .

$$E(N_u) = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{+\infty} \dot{x} p_{t, X, \dot{X}}(u, \dot{x}) d\dot{x} dt \quad (1.2)$$

Nous notons  $p_{t, X, \dot{X}}$  la densité de probabilité jointe du couple  $(X_t, \dot{X}_t)$  pour un temps  $t$  fixé. Dans le cas particulier où le processus  $(X_t, \dot{X}_t)$  est stationnaire, sa densité de probabilité est indépendante du temps et la formule de Rice devient (1.3).

$$E(N_u) = \int_0^{+\infty} \dot{x} p_{X, \dot{X}}(u, \dot{x}) d\dot{x} \quad (1.3)$$

Ainsi, une des principales méthodes pour approcher le nombre moyen de franchissements de niveaux consiste à estimer la densité de probabilité jointe de  $(X_t, \dot{X}_t)$  puis à l'intégrer dans la formule de Rice (1.3).

On peut distinguer deux types d'approches pour estimer la loi jointe de la réponse d'un système dynamique non linéaire. La première consiste à simuler ou mesurer des trajectoires de la réponse et à approcher la loi par des estimateurs statistiques. Dans la deuxième approche on ne simule pas de trajectoires et on estime la loi jointe directement en fonction de la forme et des coefficients du modèle et des paramètres de la densité de probabilité de l'excitation.

### **Approximation empirique ou paramétrique**

Il existe une littérature importante sur les méthodes, autres que la simulation, qui permettent d'approcher la densité de probabilité jointe de la réponse d'un oscillateur stationnaire non linéaire (1.1). Au départ, les scientifiques ont développé de telles méthodes pour répondre à des problèmes très particuliers, puis petit à petit, ils ont élaboré des techniques qui s'appliquent sous des hypothèses de plus en plus générales. Pourtant, malgré l'effort important produit ces dernières années pour accéder à un bon niveau de généralité, chaque méthode requière des hypothèses bien précises et il reste quantité de problèmes d'oscillations aléatoires pour lesquels on ne trouve pas de réponse satisfaisante dans la littérature. En particulier ces méthodes sont généralement difficiles, voire impossible, à appliquer lorsque l'on s'intéresse aux accélérations de la structure (a fortiori à des degrés de liberté d'ordres de dérivation plus élevés) et non simplement à ses déplacements. Dans de tels cas, il convient généralement de simuler une trajectoire suffisamment longue de la réponse du système étudié pour estimer par des méthodes statistiques sa densité de probabilité jointe.

Nous verrons que c'est cette approche que nous choisirons et qu'un de nos principaux objectifs consistera à construire de bons estimateurs du nombre moyen de franchissements de niveaux croissants à partir de séries temporelles les plus courtes possibles. Nous avons choisi de travailler avec des réalisations de courte durée, car en pratique, cette contrainte est presque toujours imposée soit par la complexité du système à simuler soit par le temps d'enregistrement limité dans le cas d'une campagne de mesure en laboratoire sur modèles réduits ou en grandeur réelle. Il est alors important d'être capable d'évaluer la qualité des estimateurs utilisés en fonction des caractéristiques de l'échantillon étudié (longueur de l'échantillon, pas de temps de discrétisation).

### **Qualité des estimateurs**

A notre connaissance, la littérature, dans laquelle le problème de la qualité des estimateurs non paramétriques du nombre moyen de franchissements croissants de niveaux est approfondie, est peu fournie et nous n'y avons pas toujours trouvé les réponses que nous cherchions. Aussi, avons nous développé une approche personnelle inspirée, sur certains points, par des techniques utilisées pour estimer les densités de probabilité.

### Estimateur de projection

Nous étudions un estimateur de l'espérance du nombre moyen de franchissements de niveaux appelé ici estimateur de projection.

Le problème statistique peut être posé de la façon suivante. Le processus stochastique considéré  $(X_t, t \in \mathbb{R})$  est une des composantes de la réponse d'une structure, en l'occurrence un navire, excitée par des forces de houle. On peut supposer qu'il est à valeurs réelles, mesurable, stationnaire, mélangeant et que ses trajectoires ont des dérivées continues. On suppose en outre que la loi de ce processus admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue de même que celle du couple de processus  $(X_t, \dot{X}_t)$ . On observe le processus discrétisé  $(X_{k\Delta t}, k = 1, \dots, n)$  pour un pas de temps  $\Delta t$ . La dérivée  $\dot{X}$  est approchée par la différence finie  $X_{k\Delta t}^\Delta = [X_{(k+1)\Delta t} - X_{k\Delta t}]/\Delta t$  si on ne peut pas l'obtenir directement (comme dans le cas de données mesurées par exemple). La procédure utilisée pour construire un estimateur de minimum de contraste  $\widehat{E}(N_u)$  du taux de franchissements de niveaux est inspirée par une idée exposée dans Bercu [4] et par les travaux de Birgé et Massart [6] et le schéma de la figure 1.2 en récapitule les principaux éléments.

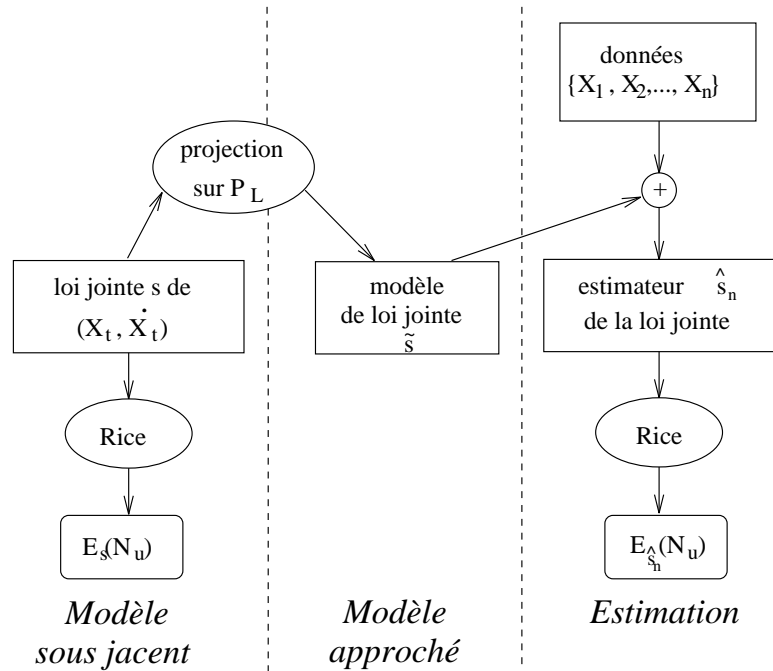


FIG. 1.2 – Estimation de  $E(N_u)$

La densité de probabilité jointe inconnue du couple  $(X_t, \dot{X}_t)$  (resp.  $(X_t, X_t^\Delta)$ ) est projetée sur un espace d'approximation  $P_L$  de dimension  $D(n)$ . Nous avons choisi un espace de polynômes  $\varphi_{i,j}$  pondéré par le produit de deux densités marginales paramétriques  $p_1$  et  $p_2$  aussi proches que possible des vraies densités marginales de  $X_t$  et  $\dot{X}_t$  (resp.  $X_t^\Delta$ ). Nous

approchons donc la vraie densité de probabilité jointe par une perturbation du produit des densités marginales (1.4). Ce choix est motivé par le fait que la dépendance statistique entre ces deux processus est souvent peu importante sous les hypothèses formulées. Or sous l'hypothèse d'indépendance, la densité de probabilité jointe est égale au produit des densités marginales.

$$\tilde{s}(x, \dot{x}) = \sum_{k=0}^L \sum_{i=0}^k d_{i,k-i} \varphi_{i,k-i}(x, \dot{x}) p_1(x) p_2(\dot{x}) \quad (1.4)$$

L'estimateur du minimum de contraste  $\hat{s}_N$  de la densité de probabilité jointe est construit en identifiant les coefficients  $\hat{d}_{i,j}$ . Les  $\hat{d}_{i,j}$  sont ajustés en minimisant une norme quadratique de l'erreur entre les moments empiriques et les moments théoriques correspondant aux polynômes  $\varphi_{i,j}$ . Nous obtenons finalement un estimateur du nombre moyen de franchissements croissants de niveaux en intégrant cette approximation de la densité de probabilité jointe de  $(X_t, \dot{X}_t)$  dans la formule de Rice (1.3).

Nous montrons quand  $(n, \Delta t)$  tend vers  $(+\infty, 0)$  et  $n\Delta t$  tend vers l'infini quand  $n$  tend vers l'infini, que le risque quadratique de l'estimateur du minimum de contraste vérifie l'inéquation (1.5) si la fonction de dépendance  $s'$ , telle que  $p_{X, \dot{X}}(x, \dot{x}) = s'(x, \dot{x}) p_1(x) p_2(\dot{x})$ , appartient à l'espace de Sobolev  $\mathbb{L}^{2,\rho}(I)$  avec  $I$  un compact bien choisi de  $\mathbb{R}^2$  et en notant  $r = \min(\rho_1, \rho_2)$  avec  $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ ,

$$\int \|\widehat{E(N_u)} - E(N_u)\|_2^2 W(u) du \leq C'_1 \Delta t^2 + C'_2 \frac{1}{D^r} + C'_3 \frac{D^2}{n \Delta t} \quad (1.5)$$

où  $W(u)$  est une fonction de poids qui permet de donner plus ou moins d'importance à tel ou tel niveau et de ne considérer que les niveaux compris dans un ensemble compact ce qui est naturel du point de vue physique. Dans le membre de droite de (1.5), le premier terme est dû à l'erreur commise lorsque que le processus dérivée  $\dot{X}$  est approché par le processus de différence finie; il est nul si nous observons directement le processus  $\dot{X}_t$ . Le second terme coïncide avec l'erreur d'approximation de la vraie densité de probabilité jointe par le modèle. Tandis que le troisième correspond à l'erreur aléatoire. La somme des deux premiers termes majore le biais de l'estimateur et le troisième terme représente sa variance. L'erreur quadratique intégrée est donc de l'ordre de  $O(n^{-2r/(3r+4)})$  si  $\Delta t$  est de l'ordre de  $n^{-r/(3r+4)}$  et  $D$  de l'ordre de  $n^{2/(3r+4)}$ .

Parallèlement à l'estimateur de projection, nous étudions les statistiques de l'estimateur empirique de l'espérance du nombre de franchissements croissants de niveaux.

### *Estimateur empirique*

L'estimateur empirique est couramment utilisé pour approcher le nombre moyen de franchissements croissants de niveaux. C'est pourquoi il est intéressant d'évaluer précisément son biais et sa variance en fonction du nombre de points d'enregistrement et du pas de temps de discrétisation. Nous montrons que l'erreur quadratique associée à cet estimateur est de l'ordre de  $O(n^{-2/3})$ .

Pour mettre en évidence quelques propriétés de l'estimation empirique, nous approchons les statistiques des estimateurs empiriques et paramétriques dans le cas de processus gaussiens (mesurables, stationnaires, mélangeants, à valeurs réelles et à trajectoires régulières). Pour ces processus, nous montrons des relations d'équivalence à la place des majorations obtenues pour des processus quelconques et on peut en général exprimer analytiquement les quantités qui interviennent. Ceci permet en particulier d'observer précisément l'évolution du biais et de la variance relatifs en fonction du niveau franchi. Par exemple, le biais relatif de l'estimateur paramétrique gaussien ne dépend pas du niveau franchi alors que le biais relatif de l'estimateur empirique croît linéairement avec le niveau.

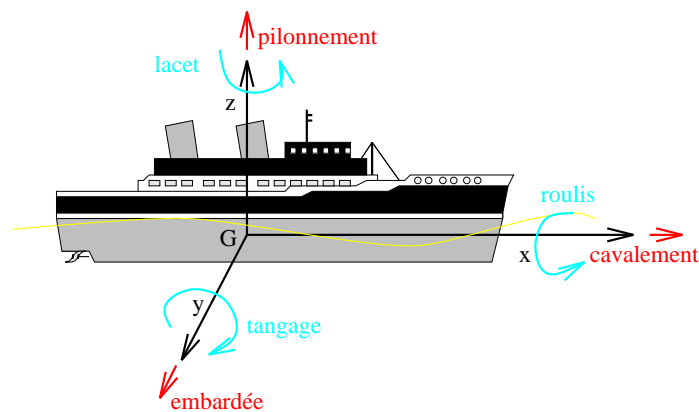


FIG. 1.3 – Mouvements d'un navire

Nous appliquons une partie des résultats concernant les estimateurs du nombre moyen de franchissements de niveaux au problème particulier suivant.

### Application

L'application qui a motivé ces travaux est assez particulière puisqu'il s'agit du confort (mal de mer) des passagers sur un navire rapide, mais on y retrouve les caractéristiques des problèmes structuraux de chargements extrêmes et de fatigue. On peut assimiler la fatigue d'une structure à un endommagement causé par la répétition d'une excitation pendant un temps plus ou moins long. L'amplitude de cette excitation peut être modérée et c'est le caractère répétitif qui est prépondérant dans l'usure. Au contraire dans un comportement extrême c'est l'amplitude de la réponse du système à un moment donné qui est déterminante.

L'inconfort est provoqué d'une part par les accélérations violentes (extrêmes) du navire. D'autre part, les expériences montrent que lorsque l'on soumet un humain pendant un temps trop long à une oscillation basse fréquence de niveau donné, on provoque chez

lui des troubles dus au mal de mer. Les oscillations sont ici caractérisées par les accélérations du navire. Ainsi nous estimons, pour étudier le confort sur le navire, le nombre moyen de franchissements de niveaux de l'accélération en tangage de la carène lorsqu'elle est excitée par de la houle aléatoire.

Le navire rapide est modélisé, si sa vitesse est suffisamment élevée (à partir de 25 noeuds pour le monocoque de 100 m étudié), par un oscillateur fortement non linéaire, d'amortissement et de raideur cubique, excité par des forces de houle du premier et du second ordre. La houle est représentée par un processus gaussien stationnaire à trajectoires régulières. Les accélérations sont des processus non gaussiens à trajectoires régulières que l'on simule pour des états de mer donnés. Nous estimons la fréquence des franchissements croissants de niveaux à partir de courtes séquences de ces séries temporelles. Ces estimations, si nous les calculons pour différentes vitesses du navire permettent d'évaluer, en fonction de l'état de la mer, la vitesse limite à respecter pour que les passagers aient un confort de navigation acceptable.

## Plan de la thèse

La thèse est organisée de la façon suivante.

Le chapitre 2 est une synthèse bibliographique dans laquelle nous présentons les méthodes qui nous semblent être les plus souvent utilisées pour approcher, sans simulation, la densité de probabilité jointe de la réponse d'un oscillateur évoluant dans un environnement aléatoire. Nous concluons ce chapitre, en donnant un tableau qui récapitule les principales conditions d'application de chacune des méthodes décrites ainsi que leurs résultats.

Dans le chapitre 3, nous construisons un estimateur non paramétrique du nombre moyen de franchissements croissants de niveaux pour un processus stationnaire mélangeant à trajectoires régulières et nous le comparons à d'autres estimateurs plus classiques. Nous rappelons en introduction certains résultats [62], [48], [7] concernant le problème de l'estimation d'une fonction de régression pour des processus mélangeants tout en expliquant en quoi il est lié à l'estimation du nombre moyen de franchissements de niveaux. Puis nous approchons les statistiques d'ordre deux (biais et variance) de deux estimateurs du nombre moyen  $E(N_u)$  de franchissements croissants du niveau  $u$  : l'estimateur empirique et un estimateur de projection. Dans le cas particulier des processus gaussiens, nous comparons les performances de l'estimateur empirique avec celles de l'estimateur paramétrique.

Le chapitre 4 concerne l'étude du comportement d'un navire rapide sur de la houle réelle. Dans la première partie, nous montrons comment nous avons construit le modèle non linéaire qui décrit les mouvements de la carène à partir de mesures sur houle régulière et du calcul de diffraction-radiation d'un modèle linéaire. Dans la seconde partie, nous rappelons rapidement quelques caractéristiques du confort sur un navire. Puis, nous justifions le choix de la méthode que nous appliquons pour estimer la fréquence des franchissements croissants de niveaux de l'accélération en tangage. Ce choix est étroitement



lié au fait que nous étudions les accélérations de la structure et non simplement ses déplacements. Enfin dans la dernière partie, nous comparons différentes estimations du nombre moyen de franchissements de niveaux de l'accélération en tangage du navire.

Les chapitres 2 et 3 peuvent être lus indépendamment l'un de l'autre mais le 4ème chapitre fait référence aux chapitres précédents.



# Chapitre 2

## Oscillateurs aléatoires

### 2.1 Introduction

“Vibrations aléatoires” est un des noms que l’on donne à l’étude des systèmes dynamiques soumis à des excitations stochastiques, le but de cette théorie étant d’améliorer et de prévoir la fiabilité des structures, des véhicules ou des équipements qui subissent des chargements aléatoires.

Dans cette théorie, on identifie trois problèmes selon que l’on s’intéresse à la réponse, à l’excitation ou au système dynamique. Le plus souvent, le système et l’excitation sont supposés connus et le problème est de prédire la réponse ou la fiabilité du système. Dans ce cas, les méthodes s’attachent généralement à estimer la densité de probabilité jointe de la réponse du système. C’est ce point qui nous intéresse puisque nous cherchons à déterminer certaines propriétés statistiques des accélérations d’un oscillateur. Le problème inverse qui consiste à identifier l’excitation connaissant la réponse et le système dynamique est appelé problème de mesure. Tandis que l’on parle de problème d’identification lorsque l’on connaît uniquement l’excitation et la réponse.

Les toutes premières investigations dans le domaine des réponses dynamiques à une excitation aléatoire ont été menées par Einstein en 1905 à propos du mouvement brownien. Mais l’étude de la dynamique stochastique comme on l’entend aujourd’hui a vraiment débuté dans les années 50 pour résoudre des problèmes linéaires d’aérospatial. Puis, à partir des années 60, on s’est attaché à modéliser les structures de façon plus réaliste en prenant en compte les comportements non linéaires. On a remarqué par exemple en étudiant les structures flottantes telles que les plates-formes pétrolières, que les caractères non linéaires des forces dues à la houle ne devraient pas être négligés. En effet, les forces du second ordre (quadratiques) induisent des excitations à des fréquences plus basses et plus hautes que les forces du premier ordre. Ces fréquences basses ou hautes peuvent correspondre à des fréquences de résonance de la plate-forme qui avait été “placée” hors des fréquences de houle, les mouvements correspondants qui ne sont pas gaussiens (non linéaires) ont alors une contribution importante pour la réponse. Différentes méthodes non linéaires ont été développées pour prédire le comportement des structures soumises

à des excitations aléatoires, comme les tremblements de terre, le vent ou la houle. Une volonté générale aujourd'hui est de poursuivre dans ce sens pour améliorer et élargir le champ d'application des méthodes non linéaires existantes.

Nous décrivons ci-dessous les méthodes qui nous ont semblé être les plus couramment rencontrées et les plus générales pour estimer la densité de probabilité jointe de la réponse d'un système dynamique stochastique. La littérature étant relativement importante sur ce sujet, nous ne prétendons pas faire une liste exhaustive. D'autre part, nous nous limitons au cas des problèmes stationnaires (c'est à dire les problèmes tels que dont la loi de probabilité de la réponse est indépendante du temps). Nous avons séparé ces méthodes en deux catégories. Dans la première, nous présentons les méthodes basées sur l'équation de Fokker-Planck [10] [12] [33] [41] [36], et dans la deuxième des méthodes utilisant une décomposition spectrale de la réponse [15] [32].

## 2.2 Equation de Fokker-Planck

Quand un système dynamique est non linéaire ou s'il est soumis à des excitations multiplicatives (c'est à dire les coefficients du système dynamique sont aléatoires), on n'a pas toujours de solution mathématique exacte pour la distribution de la réponse. Mais quand on a une telle solution elle est toujours basée sur l'hypothèse que la réponse du système est un processus de Markov ou est liée, dans un certain sens, à un processus de Markov.

### Processus de Markov

Dans les applications de la dynamique stochastique, les processus de Markov sont toujours supposés continus. De tels processus sont des idéalizations mathématiques qui sont justifiées si les accroissements du processus sont indépendants [36]. En fait, physiquement, le processus n'est pas observé de façon continue, mais seulement à des instants discrets. Or une condition suffisante pour avoir un processus de Markov est l'indépendance des accroissements du processus quels que soient les pas de temps  $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots$  même lorsque les observations deviennent continues ( $\Delta_i$  aussi petits que l'on veut). On ne retrouve pas cette condition idéale dans le cas des processus physiques réels. Mais, si les pas de temps sont considérés comme des espaces de temps pendant lesquels  $X$  n'est pas observé alors on peut choisir les  $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots$  de façon à remplir un objectif particulier quitte à perdre un peu d'information sur le processus. Ainsi, pour un processus physique réel, on pourra toujours choisir des pas de temps  $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots$  assez longs pour que les accroissements observés semblent indépendants. Parallèlement pour ne pas perdre trop d'information sur le processus, on montre [36] que  $\Delta t$  ne doit pas être plus grand que le temps de relaxation  $\tau_{rel}$  du système. Ce temps  $\tau_{rel}$  mesure en quelques sortes la "mémoire" du système dynamique sans tenir compte de l'influence de l'excitation : par exemple dans le cas d'un oscillateur,  $\tau_{rel}$  est le temps nécessaire pour que l'amplitude d'une oscillation décroisse d'un facteur  $e^{-1}$  ou augmente d'un facteur  $e$ .

Soit  $X_t = (X_1(t), \dots, X_m(t))$  un processus de Markov vectoriel. Il est entièrement défini par son état initial et par sa densité de probabilité de transition :

$$q(x, t; x_0, t_0) = \frac{\partial^m}{\partial x_1 \dots \partial x_m} P[ \cap_{j=1}^m \{X_j(t) \leq x_j\} | X_{t_0} = x_0 ]$$

La probabilité de transition est en fait la probabilité pour que le processus passe de l'état  $x_0$  à l'instant  $t_0$  à l'état  $x$  à l'instant  $t$ .

Dans la plupart des applications, l'état initial du processus de Markov est connu. La densité de transition caractérise alors à elle seule le processus. Si le processus est stationnaire, sa densité de probabilité est une fonction qui dépend uniquement de  $x$  :

$$p(x) = \lim_{t-t_0 \rightarrow +\infty} q(x, t : x_0, t_0)$$

Physiquement, ceci signifie que, dans le cas stationnaire, l'influence de l'état initial diminue (pour devenir nulle) quand on s'éloigne dans le temps.

L'équation de Fokker-Planck (2.2) est construite à partir de la propriété de Chapman-Kolmogorov des processus de Markov (2.1) [36], [56]

$$q(x_2, t_2; x_1, t_1) = \int q(x_2, t_2 | y, t) q(y, t | x_1, t_1) dy \quad (2.1)$$

La propriété de Chapman-Kolmogorov symbolisée par l'équation (2.1) traduit l'idée que la probabilité de transition entre deux états ne dépend pas du chemin suivi pour passer d'un état à l'autre. L'équation de Fokker-Planck est une équation aux dérivées partielles dont la solution est la densité de probabilité de transition  $q$  de  $X_t$

$$\frac{\partial}{\partial t} q + \frac{\partial}{\partial x_j} (a_j q) - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} (b_{jk} q) + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} (c_{jkl} q) - \dots = 0 \quad (2.2)$$

Dans l'équation (2.2), comme dans la suite, on utilise la convention de la sommation sur les indices répétés : quand un indice est répété dans un même monôme, on sous-entend qu'il y a sommation par rapport à cet indice. Par exemple, dans le cas d'un produit matrice-vecteur on écrit  $a_{ij} v_j$  pour  $\sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$ .

Les moments dérivés  $a_j, b_{jk} \dots$  sont définis par :

$$\begin{aligned} a_j(x, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E[X_j(t + \Delta t) - X_j(t) | X(t) = x] \\ b_{jk}(x, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E\{[X_j(t + \Delta t) - X_j(t)][X_k(t + \Delta t) - X_k(t)] | X(t) = x\} \\ c_{jkl}(x, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E\{[X_j(t + \Delta t) - X_j(t)][X_k(t + \Delta t) - X_k(t)] \\ &\quad [X_l(t + \Delta t) - X_l(t)] | X(t) = x\} \end{aligned}$$

Quand l'équation de Fokker-Planck est appliquée à un problème pratique de dynamique stochastique, les moments dérivés sont déterminés en fonction des coefficients de

l'équation des mouvements. Considérons le cas particulier où le système peut s'écrire sous la forme d'une équation différentielle de Ito (2.3), avec  $B_t$  un processus de Wiener standard : par définition,  $B$  est un processus gaussien centré à accroissements indépendants tels que  $E[(B_t - B_s)^2] = |t - s|$ .

$$dX_t = m(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t \quad (2.3)$$

La fonction  $m(x, t)$  est le vecteur de dérive de  $X$  et  $\sigma(x, t)\sigma(x, t)^T$  son opérateur de diffusion. On a

$$\begin{aligned} a_j(x, t) &= [m_j(X, t)]_{X=x} \\ b_{jk}(x, t) &= [\sigma_{jl}(X, t)\sigma_{kl}(X, t)]_{X=x} \end{aligned}$$

et les autres moments dérivés sont nuls.

Il faut noter ici que dans l'équation de Ito (2.3) le mouvement brownien  $B_t$  est une idéalisation mathématique dont on ne trouve physiquement que des approximations. Or si on remplace  $B_t$  par une approximation linéaire continue  $B_t^{(n)}$ , Wong et Zakai [63] montrent que la solution  $X_t^{(n)}$  de

$$dX_t = m(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t) \cdot dB_t$$

tend vers la solution d'une équation au sens de Stratonovich quand  $B_t^{(n)}$  tend vers  $B_t$

$$dX_t^{(n)} = m(X_t^{(n)}, t)dt + \sigma(X_t^{(n)}, t) \cdot dB_t^{(n)}$$

où le  $\cdot$  symbolise l'intégration de Stratonovich. La solution  $X_t^{(n)}$  tend donc vers la solution de l'équation différentielle au sens de Ito suivante

$$dx_t = \left[ m(x_t, t) + \frac{1}{2}\sigma(x_t, t)\frac{\partial\sigma(x_t, t)}{\partial x_t} \right] dt + \sigma(x_t, t)dB_t \quad (2.4)$$

Dans ce cas, c'est le système (2.4) qui permet de calculer les moments dérivés intervenant dans l'équation de Fokker-Planck.

Pour certains processus de Markov, en particulier les processus de diffusion, l'équation de Fokker-Planck (2.2) se simplifie.

## Processus de diffusion

Une diffusion est un processus de Markov à trajectoires presque sûrement continues. Une condition suffisante pour qu'un processus de Markov soit une diffusion est

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E[||X(t + \Delta t) - X(t)||^{2+\delta} | X_t = x] = 0 \quad \delta > 0$$

Pour ces processus, les moments dérivés d'ordre supérieur à 2 sont donc nuls, et l'équation de Fokker-Planck (2.2) prend une forme simplifiée :

$$\frac{\partial}{\partial t}q + \frac{\partial}{\partial x_j}(a_jq) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}(b_{jk}q) = 0 \quad (2.5)$$

On parle souvent d'équation de Fokker-Planck sans précision supplémentaire pour cette forme simplifiée (2.5). Et on ne sait construire des solutions exactes de la densité  $q$  que pour cette équation simplifiée (2.5). Dans le cas particulier où la diffusion est de plus stationnaire, l'équation de Fokker-Planck prend sa forme réduite

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(a_j q) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}(b_{jk} q) = 0 \quad (2.6)$$

Différents auteurs ont développé des méthodes numériques pour résoudre l'équation de Fokker-Planck simplifiée (2.5) pour des systèmes dynamiques stochastiques afin d'approcher la densité de probabilité jointe de la réponse de structures évoluant dans des environnements aléatoires. Nous décrivons ci-dessous plusieurs de ces méthodes.

### 2.2.1 Solution exacte

L'idée de Lin et Cai [8], [9], [10], [36] pour obtenir une solution exacte de l'équation de Fokker-Planck stationnaire (2.6) est de la séparer en deux parties et d'annuler séparément les deux termes.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [ (a_i^{(1)} p) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (b_{ij} p) ] + \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i^{(2)} p) = 0 \quad (2.7)$$

La première partie est le flux de probabilité dans la direction  $i$  et la seconde le flux de probabilité circulaire qui est stationnaire quand ce terme s'annule. Si la densité de probabilité  $p$  s'exprime en fonction du potentiel  $\Phi$ ,

$$p(x) = C \exp(-\Phi)$$

on peut déduire la solution  $p$  de l'équation (2.7) de la solution  $\Phi$  du système suivant :

$$a_i^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x_j} b_{ij}^{(i)} - b_{ij}^{(i)} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} a_i^{(2)} = a_i^{(2)} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (2.9)$$

avec les  $a_i^{(j)}$  tels que  $a_i = a_i^{(1)} + a_i^{(2)}$  et les  $b_{ij}^{(i)}$  tels que  $b_{ij}^{(i)} = b_{ji}^{(j)} = \frac{1}{2} b_{ji}$ . La décomposition des coefficients  $a_i$  et  $b_{ij}$  est choisie de telle façon que le système admette une solution  $\Phi$  consistante.

### Systemes à un degré de liberté

Considérons le cas des systèmes du second ordre à un degré de liberté excités par des bruits blancs gaussiens  $N_i$  tels que  $E[N_i(t)N_j(t+\tau)] = 2\pi K_{ij}\delta(\tau)$

$$\ddot{X} + h(X, \dot{X}) = f_i(X, \dot{X})N_i(t) \quad (2.10)$$

Pour les systèmes de la forme (2.10), on se ramène à une équation différentielle stochastique à deux degrés de liberté de la forme (2.4) d'après Wong-Zakai et l'équation de Fokker-Planck devient

$$x_2 \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ [-h(x_1, x_2) + \pi K_{ij} f_i(x_1, x_2) \frac{\partial f_j(x_1, x_2)}{\partial x_2}] p \right\} - \pi K_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} [f_i(x_1, x_2) f_j(x_1, x_2) p] = 0$$

Lin et Cai [36] montrent que l'on obtient une solution exacte du système en  $\Phi$  si

$$h(x_1, x_2) = \pi x_2 K_{ij} f_i(x_1, x_2) f_j(x_1, x_2) \left[ \lambda_y \frac{d\Phi_0(\lambda)}{d\lambda} - \frac{\lambda_{yy}}{\lambda_y} \right] - \pi K_{ij} f_i(x_1, x_2) \frac{\partial f_j(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \frac{\lambda_x}{\lambda_y} + \frac{D(x_1)}{\lambda_y} e^{\Phi_0(\lambda)} \quad (2.11)$$

où  $D(x_1)$  est une fonction arbitraire de  $x_1$ ,  $\lambda(x, y)$  est une fonction arbitraire de dérivées secondes continues avec  $x = x_1$  et  $y = x_2^2/2$ . On définit souvent  $\lambda$  comme une fonction de l'énergie totale du système. Le potentiel  $\Phi$  se décompose en  $\Phi = -\ln \lambda_y + \Phi_0(\lambda)$ ,  $\Phi_0(\lambda)$  étant une fonction quelconque. On a noté  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$  et  $\lambda_{yy}$  les dérivées partielles de  $\lambda$  par rapport aux indices respectifs.

Les systèmes qui admettent une fonction  $h$  (2.11) forment une classe dont on donne deux exemples ci-dessous. On peut d'ores et déjà remarquer que par exemple cette classe ne contient pas les systèmes ayant un amortissement cubique de la forme  $b_1 \dot{x} + b_3 \dot{x}^3$ . Pour une telle fonction  $h$ , la solution de l'équation de Fokker-Planck est

$$p(x_1, x_2) = C \lambda_y \exp(-\Phi_0(\lambda)) \quad (2.12)$$

où  $C$  est une constante de normalisation.

Pour mieux comprendre le rôle des différentes équations ci-dessus, on donne deux exemples [65].

*exemple 1* : On considère un système non linéaire soumis à une excitation blanche gaussienne additive :

$$\ddot{X} + h(\Lambda) \dot{X} + f(X) = N(t)$$

où  $N(t)$  est un bruit blanc gaussien de densité spectrale  $K$ ,  $f(X)$  est une force non linéaire,  $h$  est une fonction arbitraire et  $\Lambda$  est l'énergie totale du système définie par

$$\Lambda = \frac{1}{2} \dot{X}^2 + \int_0^X f(u) du$$

Et son équation de Fokker-Planck s'écrit

$$x_2 \frac{\partial p(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \{ -(h(\lambda)x_2 + f(x_1))p(x_1, x_2) \} - \pi K \frac{\partial^2 p(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = 0$$



L'équation (2.8) qui annule le flux de probabilité devient dans ce cas particulier

$$-2h(\lambda)x_2 + 2\pi K \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0$$

et a pour solution

$$\Phi = \frac{1}{\pi K} \int_0^{\lambda(x_1, x_2)} h(u) du + g_1(x_1)$$

Pour satisfaire l'équation (2.9) la fonction  $g_1$  doit être constante. Ainsi, on montre que la solution de l'équation de Fokker-Planck associée au système est

$$p(x_1, x_2) = C_1 \exp\left(-\frac{1}{\pi K} \int_0^{\lambda(x_1, x_2)} h(u) du\right)$$

*exemple 2* : On remarque d'après la forme de  $h$  (2.11) et de la densité de probabilité correspondante (2.12) que des systèmes dynamiques différents peuvent avoir la même solution stationnaire. Par exemple, si  $\Phi_0$  est une fonction arbitraire, et que  $\Lambda$  s'exprime

$$\Lambda = \frac{1}{2} \dot{X}^2 + \int_0^X g(u) du$$

la réponse  $(X_t, \dot{X}_t)$  du système suivant

$$\ddot{X} + \pi K \dot{\Phi}_0(\Lambda) \dot{X} + g(X) = N(t)$$

admet la même densité de probabilité jointe que celle du système

$$\begin{aligned} \ddot{X} + \pi K \dot{\Phi}_0(\Lambda) \dot{X} f(X, \dot{X}) - \pi K f(X, \dot{X}) \frac{\partial}{\partial \dot{X}} f(X, \dot{X}) + g(X) \\ + D(X) \exp[\Phi_0(\Lambda)] = f(X, \dot{X}) N(t) \end{aligned}$$

pour des fonctions quelconques  $f$  et  $D$ .

### Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Les résultats obtenus pour les oscillateurs à un degré de liberté se généralisent aux systèmes du second ordre à plusieurs degrés de liberté de la forme

$$\ddot{Z}_i + h_i(Z, \dot{Z}) = g_{ij}(Z, \dot{Z}) N_j(t) \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m \quad (2.13)$$

On pose  $X_{2i-1} = Z_i$  et  $X_{2i} = \dot{Z}_i$  et on définit une fonction arbitraire  $\lambda = \lambda(x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}, y_1, \dots, y_n)$  différentiable par rapport aux  $x_1, \dots, x_{2n-1}$  et deux fois différentiable par rapport aux  $y_1, \dots, y_n$  avec  $y_i = x_{2i}^2/2$ . On impose de plus que  $\lambda$  dépende linéairement des  $y_i$  :

$$\lambda_{y_i} = G(x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

On obtient alors, en découpant de façon adéquate les coefficients de l'équation de Fokker-Planck, une solution exacte de cette équation si

$$h_i = b_{2i,2j}^{(2i)} x_{2j} G \Phi'_o(\lambda) - \frac{\partial b_{2i,2j}^{(2i)}}{\partial x_{2j}} + \pi K_{ls} \frac{\partial g_{il}^{(2i)}}{\partial x_{2j}} + \frac{\lambda_{x_{2i-1}}}{G} \quad (2.14)$$

et dans ce cas, la densité de probabilité jointe de la réponse du système (2.13) s'écrit

$$p(x) = CG(x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}) e^{-\Phi_0(\lambda)}$$

On note d'après l'équation (2.15), que si dans le système différentiel, les bruits blancs d'excitation sont additifs, les fonctions  $h_i$  se simplifient :

$$h_i = b_{2i,2j}^{(2i)} x_{2j} G \Phi'_0(\lambda) + \frac{\lambda_{x_{2i-1}}}{G} \quad (2.15)$$

D'autre part, on remarque que si  $\Phi_0(\lambda)$  est linéaire en  $\lambda$ , c'est à dire l'amortissement s'écrit  $x_{2j} G(x_1, x_3, \dots, x_{2n-1})$ , la densité de probabilité prend la forme

$$p(x) = CG(x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}) e^{-(x_2^2/2 + x_4^2/2 + \dots) + s(x_1, x_3, \dots)}$$

avec  $s$  une fonction de  $x_1, x_3, \dots$ . Les densités de probabilité marginales des composantes paires  $X_2, X_4, \dots$  ie des "vitesses"  $\dot{Z}_i$  sont donc des densités gaussiennes.

On trouve des exemples pour les oscillateurs à plusieurs degrés de liberté dans [36].

### Système équivalent

Pour les systèmes que l'on ne peut pas résoudre de façon exacte parce qu'il ne se mettent pas sous la forme requise (2.11) ou (2.15), des solutions approchées sont obtenues en substituant au système original un système dont on connaît la solution exacte et qui est proche du système de départ sous un "bon" critère statistique. Le critère choisi est que l'énergie moyenne dissipée reste la même pour le système original et pour le système substitué. Ainsi, si le système original, n'appartenant pas à la classe des systèmes dont on sait trouver la solution exacte, s'écrit

$$\ddot{X} + H(X, \dot{X}) = g_i(X, \dot{X}) N_i(t)$$

on cherche à le remplacer par une équation de la forme

$$\ddot{X} + h(X, \dot{X}) = g_i(X, \dot{X}) N_i(t)$$

avec la fonction  $h$  telle que l'on sache calculer la solution exacte du nouveau système et qui satisfait

$$\Delta_M = E \left\{ [H(X_1, X_2) - h(X_1, X_2)] \frac{\partial M(X_1, X_2)}{\partial X_2} \right\} = 0$$

avec  $X_1 = X$  et  $X_2 = \dot{X}$ . On obtient un ensemble de contraintes en choisissant des poids  $M$ , par exemple des polynômes.

Cette méthode de la solution exacte est un outil extrêmement performant pour les oscillateurs stationnaires non linéaires pourvus qu'ils soient excités par des bruits blancs indépendants, que les non linéarités qui interviennent aient une forme particulière et que la dimension du vecteur d'état reste faible (jusqu'à 3 degrés de liberté). En effet pour de tels oscillateurs, cette méthode permet d'obtenir la densité de probabilité jointe exacte de la réponse. De plus, pour les oscillateurs dont les non linéarités diffèrent de la forme imposée, on peut encore approcher la densité de probabilité jointe de la réponse en construisant un système équivalent qui admet une solution exacte.

## 2.2.2 Moyennage stochastique

Il y a environ 10 ans, la méthode de moyennage stochastique (mieux connue sous la mot de "stochastic averaging") introduite par Stratonovich [61] s'est révélée être un bon outil pour approcher la solution de systèmes vibratoires à amortissement faible soumis à des excitations à bande large. Cette technique a été essentiellement appliquée aux oscillateurs à un degré de liberté, au moins dans les premières années. Dans la méthode de moyennage stochastique [47] [49], l'idée est de se ramener à l'approximation markovienne d'une enveloppe de la réponse du système ; l'enveloppe la plus couramment employée étant l'énergie totale de l'oscillateur. En utilisant cette approximation, on estime la densité de probabilité jointe du mouvement et de la vitesse du système en fonction de la densité de probabilité de l'enveloppe qui est généralement plus facile à obtenir.

Afin de décrire la méthode de moyennage stochastique (voir [47] pour plus de détails), considérons l'oscillateur à un degré de liberté suivant

$$\ddot{x} + \epsilon^2 h(x, \dot{x}) + \omega_0^2 x = \epsilon z(t) \quad (2.16)$$

avec  $\epsilon$  petit devant 1. On note  $\omega_0$  la fréquence de résonance du système. L'excitation  $z(t)$  est un processus à bande large de densité spectrale

$$S(\omega, t) = |A(t, \omega)|^2 \bar{S}(\omega)$$

Si  $z(t)$  est stationnaire,  $S(\omega, t) = S(\omega)$  est indépendant du temps.

On exprime le processus réponse  $(x, \dot{x})$  en fonction d'une paire  $(a, \varphi)$  de processus variant lentement en fonction du temps quand  $\epsilon$  est petit, avec  $a$  l'amplitude du processus enveloppe et  $\varphi$  sa phase.

$$\begin{cases} x(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \\ \dot{x}(t) = -a(t) \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi(t)) \end{cases}$$

Ainsi, d'après l'équation (2.16),  $a$  et  $\varphi$  sont solutions du système suivant

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{\epsilon^2}{\omega_0} h(a \cos \Phi, -a \omega_0 \sin \Phi) \sin \Phi - \frac{\epsilon z(t)}{\omega_0} \sin \Phi \\ \dot{\varphi} = \frac{\epsilon^2}{a \omega_0} h(a \cos \Phi, -a \omega_0 \sin \Phi) \cos \Phi - \frac{\epsilon z(t)}{a \omega_0} \cos \Phi \end{cases}$$

avec  $\Phi = \omega_0 t + \varphi(t)$ . Par le théorème limite de Stratonovich [61], on montre [47] que quand  $\epsilon$  tend vers 0, le couple  $(a, \varphi)$  tend vers le processus de Markov défini par l'équation de Ito :

$$\begin{cases} da = \left( \frac{-\epsilon^2}{\omega_0} F(a) + \frac{\pi S(\omega_0, t)}{2a\omega_0^2} \right) dt - \frac{[\pi S(\omega_0, t)]^{1/2}}{\omega_0} dW_1(t) \\ d\varphi = \frac{-\epsilon^2}{a\omega_0} G(a) dt - \frac{[\pi S(\omega_0, t)]^{1/2}}{a\omega_0} dW_2(t) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} F(a) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(a \cos \Phi, -a\omega_0 \sin \Phi) \sin \Phi d\Phi \\ G(a) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(a \cos \Phi, -a\omega_0 \sin \Phi) \cos \Phi d\Phi \end{cases}$$

et  $W_1(t)$  et  $W_2(t)$  sont des processus de Wiener indépendants. La densité de probabilité jointe  $p(a, \varphi, t | a_0, \varphi_0, t_0)$  de  $(a, \varphi)$  est ainsi solution d'une équation de Fokker-Planck. En remarquant que les processus  $a$  et  $\varphi$  sont découplés, on obtient que la densité de probabilité  $p(a, t | a_0, t_0)$  de  $a$  est gouvernée par l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \left\{ \frac{\epsilon^2 F(a)}{\omega_0} - \frac{\pi S(\omega_0, t)}{2a\omega_0^2} \right\} p \right] + \frac{\pi S(\omega_0, t)}{2\omega_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial a^2} \quad (2.17)$$

Dans le cas stationnaire,

$$\lim_{t-t_0 \rightarrow +\infty} p(a, t | a_0, t_0) = w(a) \text{ et } \lim_{t-t_0 \rightarrow +\infty} p(a, \varphi, t | a_0, \varphi_0, t_0) = w(a, \varphi)$$

Ces densités de probabilité stationnaires vérifient les équations de Fokker-Planck réduites obtenues en posant  $\partial p / \partial t = 0$  et on a

$$w(a, \varphi) = \frac{1}{2\pi} w(a)$$

Par la transformation de  $(a, \varphi)$  vers  $(x, \dot{x})$ , on déduit de l'équation réduite de Fokker-Planck pour  $a$  que la densité de probabilité jointe stationnaire de  $(x, \dot{x})$  est telle que

$$p(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi\omega_0 a} w(a)$$

avec

$$w(a) = Ca \exp \left\{ -\frac{2\epsilon^2\omega_0}{\pi S(\omega_0)} \int_0^a F(\zeta) d\zeta \right\}$$

où  $C$  est une constante de normalisation.

Dans le cas particulier où  $\epsilon^2 h(x, \dot{x}) = 2\zeta\omega_0\dot{x} + \epsilon^2 q(x)$ , on vérifie [47] que l'on est en accord avec la solution exacte déterminée par la première méthode (cf § 2.2.1).

On a décrit ici la méthode de moyennage stochastique dans le cas assez restreint des oscillateurs à un degré de liberté et à amortissement faible. On remarque que malgré la contrainte d'amortissement faible, on peut introduire toutes sortes de non linéarités dans les termes d'amortissement et de raideur ce qui n'était pas le cas dans la méthode de la solution exacte. Le moyennage stochastique donne aussi de bons résultats quand les

excitations sont multiplicatives et permet de traiter certains problèmes non stationnaires. D'autre part, de nombreux auteurs ont continué à travailler pour améliorer cette méthode et ont développé diverses extensions pour la rendre valide dans les cas d'oscillateurs à plusieurs degrés de liberté [60], d'amortissements plus important [60], avec des excitations gaussiennes colorées [49] ...

### 2.2.3 Path Integral Solution

La méthode de la Path Integral Solution (PIS) [41], [46] approche la densité de probabilité jointe d'un processus vectoriel de Markov  $X$  satisfaisant une équation différentielle stochastique de Ito de la forme

$$\dot{X}_i(t) = m_i[X(t)] + q_{ij}[X(t)]W_j(t) \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.18)$$

où  $m_i$  et  $q_{ij}$  sont des fonctions réelles et les  $W_i$  sont des bruits blancs gaussiens stationnaires centrés tels que  $E[W_i(t)W_j(t + \tau)] = \delta_{ij}\delta(\tau)$ .

La PIS est une solution formelle de l'équation de Fokker-Planck basée sur l'idée que le processus de markov est localement proche d'un mouvement brownien. Ceci permet de bien approcher la densité de probabilité de transition du processus de Markov sur un intervalle de temps très court. On utilise ensuite la propriété de Chapman-Kolmogorov (2.1) pour construire la solution globale.

La densité de probabilité de transition jointe  $p(x, t, x', t')$  est solution de l'équation de Fokker-Planck associée à (2.18). Notons  $p(x)$  la densité de probabilité de la solution stationnaire du système (2.18). Pour obtenir une PIS adaptée au système considéré, il faut restreindre la forme de la matrice  $Q$  de coefficients  $q_{ij}$  en imposant

$$q_{ij} \equiv 0 \quad \forall i = 1, \dots, r; \quad j = 1, \dots, m \quad (r < n)$$

et qu'il existe au moins un  $j$  tel que  $q_{ij} \neq 0$  pour chaque  $i = r + 1, \dots, n$ .

On montre alors [41] que pour des petites valeurs de  $\tau$ , la densité de transition de  $X$  est approchée par l'expression suivante

$$p(x, t + \tau | x', t') = \prod_{i=1}^r \frac{\delta(x_i - x'_i - m_i(x')\tau)}{(2\pi\tau)^{(n-r)/2} \sqrt{|\tilde{G}(x')|}} \quad (2.19)$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau} \sum_{i=r+1}^n \sum_{j=r+1}^n [x_i - x'_i - m_i(x')\tau][\tilde{G}(x')]_{i-r, j-r}^{-1} [x_j - x'_j - m_j(x')\tau] \right\}$$

On remarque que la forme ci-dessus est la densité d'un processus vectoriel gaussien de matrice de covariance  $\tau\tilde{G}(x')$  et de moyenne  $x' + m(x')\tau$ . Connaissant la densité de probabilité de transition pour un pas de temps petit, on peut appliquer la propriété de Chapman-Kolmogorov (2.1) qui permet d'exprimer la probabilité de transition entre deux instants  $t'$

et  $t$  en fonction des probabilités de transition entre des instants intermédiaires. En notant  $\tau = (t - t')/N$ ,  $t_j = t' + j\tau$  avec  $t_N = t$ ,  $x^{(N)} = x$  et  $x^{(0)} = x'$ , on a alors

$$p(x, t|x', t') = \int \dots \int_{\mathbb{R}^{(N-1)}} \prod_{j=1}^N p(x^{(j)}, t_j|x^{(j-1)}, t_{j-1}) dx^{(1)} \dots dx^{(N-1)} \quad (2.20)$$

En combinant les équations (2.19) et (2.20) on obtient une solution formelle de l'équation de Fokker-Planck.

Les applications numériques de cette méthode [41], qui est encore en cours de développement, montrent qu'elle permet d'obtenir de bonnes approximations de la densité de probabilité de transition de la réponse non stationnaire même pour des systèmes assez complexes. En revanche, les temps de calcul sont relativement longs et cette méthode ne s'applique qu'à des problèmes de faible dimension (oscillateurs à un degré de liberté).

## 2.2.4 Solution numérique

Différents auteurs [55], [28], [33], [22] approchent la solution de l'équation de Fokker-Planck simplifiée par des méthodes d'éléments finis, qui sont le plus souvent des méthodes de Galerkin avec des polynômes d'Hermite. Nous reprenons ci-dessous la description que fait Langtangen [33] d'une de ces méthodes d'éléments finis. Sa démarche est classique.

Soit  $X_t$  un processus de Markov stationnaire de  $\mathbb{R}^d$ , solution de l'équation différentielle de Ito suivante

$$dX_t = m(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \quad (2.21)$$

où  $B_t$  est un processus de Wiener. On note  $p(x)$  la densité de probabilité de la solution stationnaire de (2.21). La densité  $p(x)$  est solution de l'équation de Fokker-Planck réduite (2.22) associée à (2.21).

$$\frac{\partial m_r(x)p(x)}{\partial x_r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_{rs}(x)p(x)}{\partial x_r \partial x_s} = 0 \quad x \in \Omega \quad (2.22)$$

où  $C_{rs} = \sigma_{rq}\sigma_{sq}$  et  $\Omega$  est le domaine de définition de  $X$ . La densité vérifie bien sûr la contrainte

$$\int_{\Omega} p(x)dx = 1 \quad (2.23)$$

On s'attache donc à résoudre l'équation (2.22) sous la contrainte (2.23). L'unicité de la solution (en supposant son existence) est donnée par Caughey [12].

Pour appliquer les méthodes de différences finies ou d'éléments finis, il faut ajouter au problème des conditions aux limites. La plus naturelle est

$$p(x) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega$$

puisque cette condition est nécessaire pour que la contrainte (2.23) soit vérifiée.  $\partial\Omega$  est la frontière du domaine (ici infini). D'autre part, l'intégration de (2.22) implique une condition pour la conservation de la probabilité :

$$\int_{\partial\Omega} \left[ m_r p - \frac{1}{2} \frac{\partial C_{rs} p}{\partial x_s} \right] \chi_r ds = 0 \quad (2.24)$$

Ici,  $\chi_r$  représente la  $r$ ième composante du vecteur normal extérieur à la frontière  $\partial\Omega$  du domaine  $\Omega$ . Sur la base de l'équation (2.24), on pose une seconde condition limite :

$$\left[ m_r p - \frac{1}{2} \frac{\partial C_{rs} p}{\partial x_s} \right] \chi_r = 0 \quad (2.25)$$

Le problème se formule donc de la façon suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial m_r(x)p(x)}{\partial x_r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_{rs}(x)p(x)}{\partial x_r \partial x_s} = 0 & \forall x \in \Omega \\ \int_{\Omega} p(x) dx = 1 \\ p(x) = 0 & \forall x \in \partial\Omega \\ \left[ m_r(x)p(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial C_{rs}(x)p(x)}{\partial x_s} \right] \chi_r(x) = 0 & \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

où  $\Omega$  est un domaine infini.

Posons

$$V = \{v \in H^1(\Omega); \int_{\Omega} v dx = 1\}$$

et définissons la forme linéaire non symétrique

$$L(p, \phi) = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_r} \left[ m_r p - \frac{1}{2} \frac{\partial C_{rs} p}{\partial x_s} \right] dx$$

Le problème à résoudre se traduit alors par une inégalité variationnelle : *trouver*  $p \in V$  *telle que*

$$L(p, v - p) \geq 0, \quad \forall v \in V \quad (2.26)$$

Une intégration par parties montre que la solution du problème (2.22) et (2.23) sous la condition limite (2.25) est aussi une solution du problème variationnel (2.26). De plus, en remplaçant  $v - p$  par  $p - v$  dans (2.26) on remarque que l'on peut remplacer l'inéquation (2.26) par une égalité. On écrit alors une version discrète de (2.26) en imposant que la fonction inconnue appartienne à un espace de dimension finie. On construit

$$p(x) \sim p^h(x) = H_j(x)p_j$$

où les  $H_j(x)$  sont des éléments finis standards et les  $p_j$  des constantes à déterminer. On introduit une version discrète de la contrainte intégrale :

$$c^T \mathbf{p} = 1$$

où les vecteurs  $p$  et  $c$  ont pour coefficients respectifs les  $p_i$  et les

$$c_i = \int_{\Omega} H_i(x) dx$$

On peut alors écrire une formulation variationnelle discrète du problème : *trouver*  $p^h \in V^h$  *telle que*

$$L(p^h, v^h - p^h) = 0, \quad \forall v^h \in V^h \quad (2.27)$$

avec

$$V^h = \{v = H_j(x)v_j, \quad v_j \in R, \quad H_j \in H^1(\Omega), \quad j = 1, \dots, n; \quad c_j v_j = 1\}$$

Soit  $U$  l'ensemble

$$U = \{q \in R^n; \quad c^T q = 0\}$$

On construit alors  $\forall v^h \in V^h$ ,

$$v^h - p^h = q_i H_i(x), \quad q \in U$$

Avec ces notations, l'équation (2.27) est remplacée par le système algébrique suivant pour  $\mathbf{p}$

$$\begin{aligned} q^T K \mathbf{p} &= 0, \quad \forall q \in U \\ c^T \mathbf{p} &= 1 \end{aligned}$$

où  $K$  est une matrice définie en fonction de la méthode que l'on choisit : par exemple Langtangen [33] travaille avec la méthode de Burbnov-Galerkin. Dans ce cas, les coefficients  $K_{ij}$  sont définis par

$$K_{ij} = L(H_i, H_j)$$

On peut ensuite résoudre le problème algébrique avec contrainte par la méthode des multiplicateurs de Lagrange après avoir légèrement transformé le système car l'équation de Fokker-Planck induit une matrice  $K$  non symétrique.

La méthode présentée ci-dessus donne de bons résultats pour des problèmes non linéaires de faible dimension ( $d \leq 3$ ), pour les dimensions plus grandes l'une des principales difficultés est que la vitesse de convergence est lente. Cette méthode a été testée [33] sur divers exemples et on obtient de bonnes approximations même pour des problèmes fortement non linéaires. Certains auteurs comme Soize [55] ont développé des méthodes d'éléments finis permettant de résoudre des problèmes de plus grande dimension (vecteur d'état jusqu'à 20 composantes). L'idée pour accélérer la vitesse de convergence est d'écrire le système comme la somme d'un système linéaire, proche du système non linéaire, et de termes non linéaires qui correspondent au reste et sont donc généralement faibles par rapport à la partie linéaire. Le problème apparaît alors comme la perturbation d'un système linéaire et la méthode d'éléments finis converge plus rapidement.



## 2.2.5 Système des moments

La méthode, appelée ici “système des moments” est présentée par exemple dans le livre de Soong [56] et l'article de Wu [64]. Elle consiste à construire à partir de l'équation de Fokker-Planck un système algébrique infini pour les moments simples et croisés du processus de Markov considéré. Supposons que le processus de Markov stationnaire  $X$  soit défini par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = m(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \quad (2.28)$$

où  $B_t$  est un processus de Wiener standard. On note  $p(x)$  la densité de probabilité de la solution stationnaire de (2.28). La densité  $p(x)$  est solution de l'équation de Fokker-Planck réduite (2.29) associée à (2.28).

$$\frac{\partial m_r p}{\partial x_r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_{rs} p}{\partial x_r \partial x_s} = 0 \quad (2.29)$$

où  $C_{rs} = \sigma_{rq}\sigma_{sq}$ . En multipliant l'équation de Fokker-Planck (2.29) par une fonction régulière  $q(x)$  quelconque, puis en intégrant par parties, on obtient

$$\int \left[ \frac{\partial q(x)}{\partial x_r} m_r(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q(x)}{\partial x_r \partial x_s} C_{rs}(x) \right] p(x) dx = 0 \quad (2.30)$$

avec  $p$  la densité de probabilité de la solution stationnaire de (2.28). Maintenant, si les fonctions  $m_r$ ,  $C_{rs}$  sont polynomiales et si l'on choisit successivement comme fonction  $q$  les éléments d'une base de monômes de degrés croissants, on construit à partir de l'équation (2.30) un système algébrique non linéaire infini dont les inconnues sont les moments simples et croisés instantanés du processus  $X_t$ . Si les fonctions  $m_r$ ,  $C_{rs}$  ne sont pas polynomiales mais sont suffisamment régulières, on les approche par leur développement en série de Taylor.

Par exemple dans le cas d'un oscillateur en régime stationnaire,

$$\ddot{X} + h(X, \dot{X}) = f(X, \dot{X})W_t$$

le système différentiel de Ito s'écrit en posant  $X_1 = X$  et  $X_2 = \dot{X}$

$$\begin{cases} dX_1 = X_2 dt \\ dX_2 = -h(X_1, X_2) dt + f(X_1, X_2) dB_t \end{cases}$$

et on obtient le système algébrique :

$$lE[X^{l-1}\dot{X}^{k+1}] + kE[X^l\dot{X}^{k-1}h(X, \dot{X})] + \frac{lk}{2}E[X^{l-1}\dot{X}^{k+1}f(X, \dot{X})] = 0 \quad \forall k, l > 0$$

Mais on ne sait généralement pas résoudre un système algébrique infini. Pour pallier à ce problème, Wu et Lin [64] transforment le système des moments en un système algébrique non linéaire pour les cumulants. Ils utilisent les relations non linéaires classiques qui relient les moments au cumulants d'ordre inférieur ou égal. Puis ils tronquent

le nouveau système en annulant les cumulants à partir d'un certain ordre. Cette idée est inspirée des processus gaussiens pour lesquels les cumulants d'ordre supérieurs ou égal à trois sont nuls. Pour un processus non gaussien, on suppose que les premiers cumulants contiennent suffisamment d'information pour décrire la loi de probabilité du processus. On approche alors la densité de probabilité du processus stationnaire par un développement de Gram-Charlier (cf équation (2.35), § 2.3.1) par exemple.

On remarque, que lorsque la dimension du processus de Markov  $X$  augmente ou lorsque l'on veut garder des cumulants d'ordres assez élevés, le système algébrique non linéaire prend rapidement des dimensions importantes ce qui rend son écriture laborieuse! Spencer, Bergman et Wojtkiewicz [59] ont développé une méthode dans laquelle ils génèrent le système algébrique non linéaire par un logiciel de calcul formel. Ceci leur permet de résoudre des systèmes en gardant jusqu'à une dizaine de cumulants. Ils obtiennent ainsi de bonnes approximations de la densité de probabilité du processus même pour des problèmes non linéaires ou à excitation gaussienne colorée.

Cette méthode du système des moments est particulièrement intéressante quand on cherche à estimer une statistique de la réponse d'un oscillateur stochastique telle que le nombre moyen de franchissements d'un niveau  $u$ . En effet en choisissant bien la suite de fonctions  $q$ , on peut construire de la même façon un système algébrique dans lequel une des inconnues est précisément ce nombre moyen de franchissements de niveau.

## 2.3 Décomposition spectrale

Parmi les structures soumises à des chargements aléatoires, les structures excitées par la houle ou le vent intéressent particulièrement les industriels; notamment les industries pétrolières pour leurs plates-formes.

Mais les forces dues à la houle, pour citer un exemple, ne sont pas des bruits blancs contrairement à ce dont on a besoin pour appliquer les méthodes liées à l'équation de Fokker-Planck. Les forces de houle sont des fonctions plus ou moins simples de l'élévation de la surface libre. Or toute personne ayant un jour observé un plan d'eau un peu agité conçoit qu'il serait inopportun de le représenter par un bruit blanc (fig. 2.1, processus très irrégulier, non dérivable). Les processus de houle dans un état de mer stabilisé sont généralement bien modélisés par des processus stationnaires gaussiens colorés (fig. 2.2).

Malgré tout, des travaux de Spanos [57] montrent que l'on peut approcher les processus de houle par la réponse de filtres autoregressifs (AR), moyenne mobile (MA) ou ARMA dont les entrées sont des bruits blancs gaussiens. Ceci permet en particulier d'écrire le système dynamique sous la forme d'une équation différentielle stochastique de Ito en ajoutant à l'oscillateur initial le système d'équations différentielles qui transforme le bruit blanc en processus de houle. En théorie, cette approche nous donne donc accès aux différentes méthodes liées à l'équation de Fokker-Planck. Hélas, le plus souvent, la dimension du

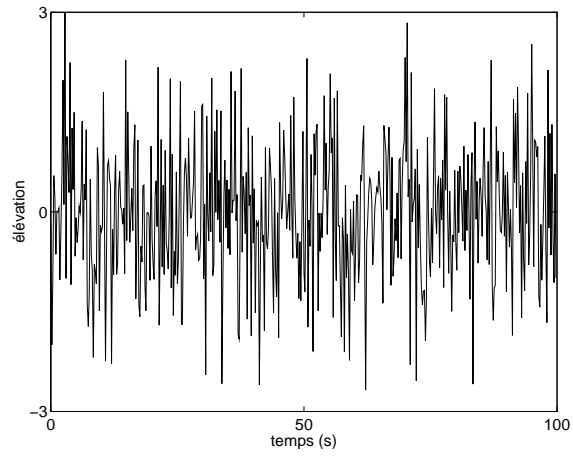


FIG. 2.1 – Bruit blanc gaussien centré réduit

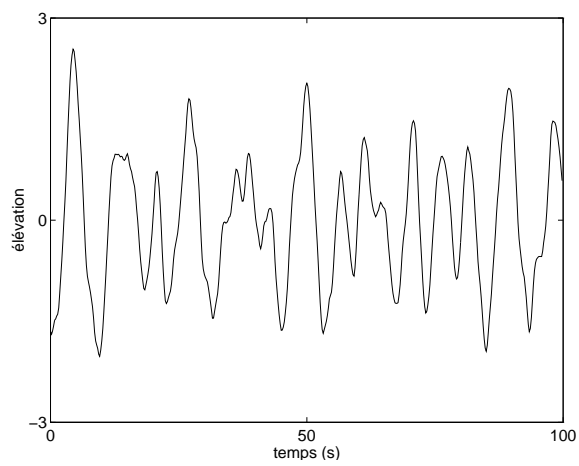


FIG. 2.2 – Processus gaussien stationnaire centré réduit

système devient trop importante et on sort du domaine d'application de ces méthodes. D'autre part dans certains cas le transfert entre la houle et les forces de houle est trop compliqué pour que l'on puisse se ramener à un système différentiel de Ito.

Pour de tels systèmes, il convient d'appliquer des méthodes telles que la linéarisation ou la quadratisation stochastique de façon à conserver une représentation de l'excitation sous forme de bruit coloré.

La méthode de linéarisation stochastique est un outil polyvalent pour déterminer les statistiques de la réponse d'oscillateurs non linéaires soumis à des excitations aléatoires non blanches. Cette méthode a été d'abord utilisée par Caughey (1963) pour estimer la réponse stationnaire d'un système à un degré de liberté. Plus tard, d'autres l'ont généralisée pour traiter des problèmes à plusieurs degrés de liberté et avec des excitations non stationnaires.

Mais dans certains cas, la linéarisation stochastique manque de précision. En effet, le spectre de la réponse obtenu par linéarisation recouvre uniquement les fréquences pour lesquels le spectre de l'excitation est non nul. Pourtant, il est bien connu que pour les systèmes non linéaires, le spectre de la réponse peut avoir des contributions significatives hors de la bande de fréquences de l'excitation. Ainsi, certaines statistiques liées aux valeurs extrêmes par exemple, peuvent être largement sous estimées par la méthode de linéarisation.

C'est pourquoi différents auteurs, inspirés par les méthodes linéaires, ont eu l'idée de traiter ce type de problèmes dans le domaine fréquentiel. Les deux méthodes que l'on présente ci-dessous estiment des statistiques de la réponse de systèmes dynamiques soumis à des forces du type forces dues à la houle ou au vent et approchent la densité de probabilité jointe de la réponse.

### 2.3.1 Quadratisation stochastique

Les méthodes basées sur les séries de Volterra [50] telles que la méthode de quadratisation de Spanos et Donley [15] approchent la densité de probabilité jointe de la réponse de systèmes non linéaires soumis à des excitations non blanches. Ces méthodes s'attachent à donner une représentation fréquentielle de la réponse pour des systèmes dynamiques dont les non linéarités sont quadratiques. Dans le cas de non linéarités différentes, ce qui est souvent le cas en mécanique, on remplace le système initial par un système quadratique équivalent (d'où le nom de la méthode). De la représentation fréquentielle on déduit des statistiques telles que les moments de la réponse. La densité de probabilité jointe est alors approchée par un développement de Gram-Charlier [25].

On présente ci-dessous la méthode de quadratisation de Donley et Spanos [15].

Considérons un oscillateur non linéaire à un degré de liberté excité par une force gaussienne  $f(t)$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + g(x, \dot{x}) = f(t) \quad (2.31)$$

On note  $x$  le déplacement,  $m$  la masse du système,  $c$  son amortissement linéaire,  $k$  sa

raideur linéaire et  $g$  une force non linéaire. La force  $f$  est un filtré de bruit blanc décrit par

$$f(t) = \mu_f + \int h_f(t)w(t - \tau)d\tau$$

où  $w(t)$  est un bruit blanc gaussien tel que  $E[w(t)w(t - \tau)] = 2\pi\delta(\tau)$  et  $\mu_f$  la moyenne de la force. Et la densité spectrale de l'excitation est définie par

$$S_{ff}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int E[f(t)f(t - \tau)]e^{-i\omega\tau} d\tau$$

d'où on a

$$S_{ff}(\omega) = \mu_f^2\delta(\omega) + |H_f(\omega)|^2$$

avec  $H_f(\omega)$  la fonction de transfert du filtre entre  $w$  et  $f$ .

$$H_f(\omega) = \int h_f(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau$$

En général la fonction  $g$  n'est pas symétrique par rapport à  $x$  et  $\dot{x}$ , donc la solution de l'équation (2.31) n'est pas centrée et on décompose la solution stationnaire sous la forme d'une somme de la moyenne de  $x$  et d'un processus stationnaire centré  $\hat{x}$  :

$$x(t) = \mu_x + \hat{x}(t)$$

Ainsi, on peut réécrire le système

$$m\ddot{\hat{x}} + c\dot{\hat{x}} + k(\hat{x} + \mu_x) + g(\hat{x} + \mu_x, \dot{\hat{x}}) = \mu_f + \int h_f(t)w(t - \tau)d\tau$$

On en déduit que

$$\mu_x = \frac{\mu_f - E(g(\mu_x + \hat{x}, \dot{\hat{x}}))}{k}$$

Puis on approche la réponse  $\hat{x}$  en résolvant un système quadratique équivalent de la forme

$$m\ddot{\hat{x}} + c\dot{\hat{x}} + k\hat{x} + \alpha_1\hat{x} + \alpha_2\dot{\hat{x}} + \alpha_3(\hat{x}^2 - E[\hat{x}^2]) + \alpha_4(\dot{\hat{x}}^2 - E[\dot{\hat{x}}^2]) + \alpha_5\hat{x}\dot{\hat{x}} = f(t) - \mu_f \quad (2.32)$$

où les  $\alpha_i$  sont les coefficients de quadratisation.

On a utilisé pour écrire ce système une propriété importante des processus stationnaires,

$$E[\hat{x}^k \dot{\hat{x}}] = 0, \quad \forall k \geq 0 \quad (2.33)$$

Soit  $X = (X_t)_t$  un processus stationnaire, on a par stationnarité quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{dE(X_t^n)}{dt} = 0$$

or

$$\frac{dE(X_t^n)}{dt} = E\left[\frac{dX_t^n}{dt}\right] = nE[X_t^{n-1}\dot{X}_t]$$

On montre ainsi la propriété (2.33) par récurrence.

Les  $\alpha_i$  sont identifiés de façon à minimiser l'erreur en moyenne quadratique entre le système initial et le système équivalent. Ceci revient à construire un système algébrique linéaire d'inconnues  $\alpha_i$  qui dépend des moments simples et croisés de la réponse et de la fonction  $g(\hat{x}, \dot{\hat{x}})$ .

Posons  $c_{eq} = c + \alpha_1$ ,  $k_{eq} = k + \alpha_2$ ,  $\lambda = 1$  et supposons en accord avec la méthode de Volterra que la solution peut se décomposer sous la forme d'une série infinie (2.34), qui sera tronquée dans la pratique :

$$\hat{x}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j \hat{x}^{(j)}(t) \quad (2.34)$$

Les termes d'indices inférieur ou égal à deux représentent les effets quadratiques et on néglige les termes d'ordres supérieurs. En intégrant cette somme dans l'équation (2.32) où on a préalablement multiplié le terme de droite (force) par  $\lambda$  et en regroupant les termes en même puissance de  $\lambda$  on obtient

$$\begin{cases} m\ddot{\hat{x}}^{(1)} + c_{eq}\dot{\hat{x}}^{(1)} + k_{eq}\hat{x}^{(1)} = \hat{f}^{(1)}(t) \\ m\ddot{\hat{x}}^{(2)} + c_{eq}\dot{\hat{x}}^{(2)} + k_{eq}\hat{x}^{(2)} = \hat{f}^{(0)} + \hat{f}^{(2)}(t) \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{f}^{(0)} &= -\alpha_3 E[\hat{x}^{(1)2}] - \alpha_4 E[\dot{\hat{x}}^{(1)2}] \\ \hat{f}^{(1)}(t) &= f(t) - \mu_f \\ \hat{f}^{(2)}(t) &= -\alpha_3 \hat{x}^{(1)2} - \alpha_4 \dot{\hat{x}}^{(1)2} - \alpha_5 \hat{x}^{(1)} \dot{\hat{x}}^{(1)} \\ \hat{f}(t) &= \hat{f}^{(0)} + \hat{f}^{(1)}(t) + \hat{f}^{(2)}(t) \end{aligned}$$

L'équation non linéaire (2.32) est donc maintenant remplacée par un système de deux équations linéaires dépendant l'une de l'autre. D'après la théorie de Volterra, on a

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &= \hat{f}^{(0)} + \int h_f^{(1)}(\tau_1) w(t - \tau_1) d\tau_1 + \iint h_f^{(2)}(\tau_1, \tau_2) w(t - \tau_1) w(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ \hat{x}(t) &= \hat{x}^{(0)} + \int h_x^{(1)}(\tau_1) w(t - \tau_1) d\tau_1 + \iint h_x^{(2)}(\tau_1, \tau_2) w(t - \tau_1) w(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

où les noyaux d'ordre un et deux,  $h^{(1)}$  et  $h^{(2)}$ , s'expriment en fonction du spectre de force, des coefficients linéaires  $m$ ,  $c$  et  $k$  du système initial et des  $\alpha_i$ . On calcule alors les premiers moments simples et croisés de la réponse  $(\hat{x}, \dot{\hat{x}})$  en fonction des noyaux du premier et du second ordre (2.36) et on approche sa densité de probabilité jointe (2.35) par un développement de Gram-Charlier d'ordre trois [25].

$$p(\hat{x}, \dot{\hat{x}}) = \left[ 1 - \frac{1}{6} \mu_{\hat{x}^3} \frac{\partial^3}{\partial \hat{x}^3} - \frac{1}{6} \mu_{\dot{\hat{x}}^3} \frac{\partial^3}{\partial \dot{\hat{x}}^3} - \frac{1}{2} \mu_{\hat{x}\dot{\hat{x}}^2} \frac{\partial^3}{\partial \hat{x} \partial \dot{\hat{x}}^2} \right] \phi(\hat{x}) \phi(\dot{\hat{x}}) \quad (2.35)$$

où  $\phi(\hat{x})$  et  $\phi(\hat{\dot{x}})$  sont des densités gaussiennes centrées de variances respectives  $\mu_{\hat{x}^2}$  et  $\mu_{\hat{\dot{x}}^2}$ . Les différents moments qui interviennent dans la relation (2.35) sont calculés par des relations du type

$$\mu_{\hat{x}^2} = \int |H_{\hat{x}}^{(1)}(\omega)|^2 d\omega + 2 \iint |H_{\hat{x}}^{(2)}(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2 \quad (2.36)$$

En pratique, la méthode de quadratisation stochastique est implémentée par un schéma itératif. On choisit des valeurs initiales pour les  $\alpha_i$  (par exemple 0 si on ne peut pas trouver mieux). Puis on calcule les différentes fonctions de transfert dans un ordre adéquat. On utilise l'approximation de  $p(\hat{x}, \hat{\dot{x}})$  pour calculer l'espérance de la fonction  $g(\hat{x}, \hat{\dot{x}})$  et on résout le système algébrique en  $\alpha_i$ . On obtient ainsi un nouveau vecteur de coefficients  $\alpha_i$  et on répète l'opération jusqu'à ce qu'on ait convergence.

On trouve des détails sur cette méthode et des exemples dans le livre de Donley et Spanos [15].

La quadratisation stochastique approche donc la densité de probabilité jointe du déplacement et de la vitesse d'un oscillateur non linéaire à un degré de liberté soumis à des forces du type forces de houle ou de vent, le plus souvent un processus gaussien stationnaire coloré. Cette méthode est performante lorsque que les non linéarités sont quadratiques ou sont proches d'un polynôme du second degré. Naturellement rien n'empêche de développer une méthode similaire pour des non linéarités de degrés supérieurs si ce n'est les difficultés numériques. Quek, Li et Koh [44] ont construit une méthode de systèmes cubiques équivalents pour estimer les moments d'ordre deux à quatre du déplacement d'un oscillateur (en l'occurrence une plate-forme ancrée) soumis à des forces non linéaires.

### 2.3.2 Méthode de Wiener

La méthode de Wiener-Volterra développée par Langley et McWilliam [32] est basée sur l'idée que la réponse d'un oscillateur stochastique non linéaire excité par des forces de houle du premier et du second ordre peut être représentée par une série de Wiener-Volterra [50]. D'après les auteur de l'article [32] la méthode de Wiener est mathématiquement plus rigoureuse que les autres méthodes qui approchent la réponse par des séries de Volterra (linéarisation stochastique, quadratisation stochastique...), mais elle amène à des équations pour le noyau de Wiener de la réponse souvent difficiles à résoudre.

Toujours d'après McWilliam [32], on peut montrer que sous certaines conditions, la méthode de quadratisation [15] et la méthode Wiener sont mathématiquement identiques. En particulier, ces deux méthodes sont basées sur des représentations sous forme de séries du second ordre de la force et de la réponse, elles construisent des équations similaires pour le mouvement à l'ordre un et deux et, les coefficients qui interviennent dans les équations du mouvement sont calculés statistiquement. On observe d'ailleurs à travers les exemples [32] que les résultats induits par ces deux méthodes sont extrêmement proches. En particulier, elles donnent toutes les deux de bonnes estimations de la densité de probabilité du

mouvement quand les termes du premier et du second ordre dominant, de même qu'elles donnent toutes les deux des estimations moins bonnes lorsque la réponse est dominée par les termes d'ordre supérieurs à deux.

La particularité de la méthode de Langley et McWilliam [32] par rapport à la quadratisation statistique [15] est que la densité de probabilité jointe des mouvements du premier et du second ordre est approchée par une perturbation du produit des densités marginales [30] et non plus par un développement de Gram-Charlier.

Reprenons la démarche proposée dans [30]. Une densité de probabilité bivariée  $p$  s'écrit en notant  $M(\theta_1, \theta_2)$  la fonction caractéristique

$$p(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint e^{\log M(\theta_1, \theta_2)} e^{-i\theta_1 z_1} e^{-i\theta_2 z_2} d\theta_1 d\theta_2 \quad (2.37)$$

or, par définition, le logarithme de la fonction caractéristique se développe en fonction des cumulants

$$\log M(\theta_1, \theta_2) = \sum_{j=1}^2 i\theta_j K_1[z_j] + \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2!} (i\theta_j)(i\theta_k) K_2[z_j z_k] + \dots \quad (2.38)$$

où les cumulants joints sont définis par

$$K_n[z_j z_k \dots z_m] = \frac{1}{i^n} \left( \frac{\partial^n}{\partial \theta_j \partial \theta_k \dots \partial \theta_m} \log M(\theta_1, \theta_2) \right)_{\theta_1=\theta_2=0}$$

L'équation (2.38) peut donc aussi se mettre sous la forme

$$\log M(\theta_1, \theta_2) = \log M(\theta_1) + \log M(\theta_2) + \epsilon(\theta_1, \theta_2)$$

où  $M(\theta_1)$  et  $M(\theta_2)$  sont les fonctions caractéristiques marginales définies par

$$\log M(\theta_j) = i\theta_j K_1[z_j] + \frac{1}{2!} (i\theta_j)^2 K_2[z_j] + \dots \quad j = 1, 2$$

Le terme  $\epsilon$  prend en compte la dépendance statistique entre  $z_1$  et  $z_2$  :

$$\epsilon(\theta_1, \theta_2) = \sum_{N=2}^{\infty} \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{p!(N-p)!} K_N[z_1^p z_2^{N-p}] (i\theta_1)^p (i\theta_2)^{N-p} \quad (2.39)$$

Ainsi on développe la densité de probabilité jointe (2.37)

$$p(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint M(\theta_1) M(\theta_2) \left( 1 + \epsilon + \frac{1}{2!} \epsilon^2 + \dots \right) e^{-i\theta_1 z_1} e^{-i\theta_2 z_2} d\theta_1 d\theta_2$$

Maintenant, l'équation (2.39) implique que

$$\epsilon(\theta_1, \theta_2) + \frac{1}{2!} \epsilon(\theta_1, \theta_2)^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} (i\theta_1)^n (i\theta_2)^m \quad (2.40)$$



où les coefficients  $A_{nm}$  sont obtenus en identifiant les termes en puissance de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  dans l'équation (2.40). D'où la densité de probabilité jointe se développe

$$p(z_1, z_2) = p(z_1)p(z_2) + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \iint M(\theta_1)M(\theta_2)e^{-i\theta_1 z_1} e^{-i\theta_2 z_2} d\theta_1 d\theta_2$$

Cette dernière formulation se simplifie en remarquant que pour les densités marginales

$$\frac{\partial^n p(z)}{\partial z^n} = \frac{1}{2\pi} \int M(\theta)(-i\theta)^n e^{-i\theta z} d\theta$$

On obtient finalement

$$p(z_1, z_2) = p(z_1)p(z_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} (-1)^{n+m} \frac{\partial^n p(z_1)}{\partial z_1^n} \frac{\partial^m p(z_2)}{\partial z_2^m}$$

où les  $A_{nm}$  sont des coefficients qui dépendent des cumulants.

Mc William et Langley [31] utilisent cette décomposition de la densité de probabilité bivariée pour estimer, par exemple, la densité de probabilité jointe du déplacement  $X$  et de la vitesse  $\dot{X}$ . Une transformation de la densité de probabilité de la réponse au premier et au second ordre donne une estimation de la densité de probabilité dans  $\mathbb{R}$  du déplacement, et la vitesse est supposée gaussienne.

Dans [30], [32] les auteurs utilisent la méthode de Wiener pour prédire les valeurs extrêmes de la réponse d'une structure soumise à de la houle sous des hypothèses de stationnarité et en particulier pour estimer le nombre moyen de franchissements de niveaux élevés du mouvement.

## 2.4 Synthèse

Le tableau ci-dessous récapitule les conditions sous lesquelles on peut utiliser les méthodes présentées dans ce chapitre et indique quel type de résultat on en obtient. Nous notons “jpdf” (joint probability density function) pour la densité de probabilité jointe de la réponse du système étudié et “ddl” pour degré(s) de liberté. En parlant de la réponse on sous-entend généralement le vecteur d’état du système lorsque ce dernier est écrit sous la forme d’une équation différentielle de Ito. Par exemple pour un oscillateur à un degré de liberté excité par un bruit blanc, la réponse est le vecteur composé du déplacement  $X$  et de la vitesse  $\dot{X}$ .

méthode	excitation	système	non linéarités	résultat	remarques
<b>Solution exacte</b> (cf § 2.2.1)	bruit blanc gaussien	2nd ordre jusqu'à 3 ddl	sous une forme imposée	jpdf stationnaire exacte	solution approchée pour d'autres non linéarités
<b>Moyennage stochastique</b> (cf § 2.2.2)	filtré linéaire de bruit blanc gaussien	2nd ordre, 1 ddl	amortissement non linéaire faible, forme quelconque	approximation de la jpdf stationnaire	approximation de la jpdf du processus énergie, existe une généralisation à des amortissements plus importants
<b>PISM</b> (cf § 2.2.3)	bruit blanc gaussien	2nd ordre, 1 ddl	quelconques	jpdf stationnaire ou non, non analytique	temps de calcul important
<b>Solution numérique, éléments finis</b> (cf § 2.2.4)	bruit blanc gaussien	équation différentielle de Ito, jusqu'à 20 ddl	quelconques	jpdf stationnaire, non analytique	temps de calcul important
<b>Quadratisation</b> (cf § 2.3.1)	filtré de bruit blanc : forces de houle, de vent	2nd ordre, 1 ddl	quelconques, proches d'un polymôme de degré faible (2 ou 3)	approximation de la jpdf de $(X, \dot{X})$ , développement de Gram-Charlier	réponses au 1er et 2nd ordre dominantes
<b>Wiener</b> (cf § 2.3.2)	filtré de bruit blanc : forces de houle, de vent	2nd ordre, 1 ddl	quelconques, proches d'un polymôme de degré faible (2 ou 3)	approximation de la pdf du déplacement, perturbation du produit des marginales	réponses au 1er et 2nd ordre dominantes



# Chapitre 3

## Statistiques des estimateurs de $E(N_u)$

### 3.1 Introduction

Soit un processus  $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$  stationnaire mélangeant centré à trajectoires régulières défini sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . On s'intéresse à l'estimation de l'espérance  $E(N_u)$  du nombre de franchissements croissants, par unité de temps, du niveau  $u$  par le processus  $X$ , pour un niveau  $u$  fixé.

Il est généralement difficile, voire impossible d'observer la trajectoire d'un processus à temps continu. Par conséquent, il est important d'être en mesure d'estimer  $E(N_u)$  à partir d'observations discrétisées et de préciser l'erreur d'estimation en fonction du nombre  $N$  d'observations mais aussi du pas de discrétisation  $\Delta t$ .

Le nombre moyen de franchissements croissants d'un niveau  $u$  par un processus se calcule classiquement par la formule de Rice donnée par (3.1) pour un processus stationnaire si on note  $p(\cdot, \cdot)$  la densité de probabilité jointe instantannée du processus et de sa dérivée (voir [45] pour la forme intégrale et [21] pour la limite).

$$E(N_u) = \int_0^{+\infty} yp(u, y)dy = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} P[X_t < u \cap X_{t+\Delta t} > u] \quad (3.1)$$

La forme intégrale dans l'équation (3.1) exprime la probabilité que le processus  $X$  soit égal à  $u$  alors que sa dérivée  $Y = \dot{X}$  est positive. La formule traduit donc bien l'idée d'un nombre moyen de franchissements croissants (fig. 3.1).

#### 3.1.1 Un problème de régression

On peut assimiler d'une certaine façon le problème de l'estimation du nombre moyen  $E(N_u)$  de franchissements du niveau  $u$  à un problème de régression. Un problème de régression est le plus souvent posé de la façon suivante. On considère le processus  $Z = (X, Y, W)$  stationnaire où  $W$  est centré conditionnellement à  $X$ . On observe l'échantillon  $Z_i = (X_i, Y_i)$  pour  $i = 1, \dots, n$  où les  $Z_i$  sont identiquement distribués. Et on cherche à estimer la fonction  $s$  telle que

$$Y_i = s(X_i) + W_i, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

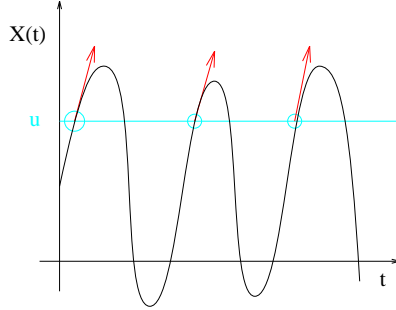


FIG. 3.1 – Franchissements croissants du niveau  $u$

ou plus généralement

$$\Phi(Y_i) = s(X_i) + W_i, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

pour une fonction  $\Phi$  borélienne. La relation (3.2) implique aussi

$$s(x) = E[\Phi(Y)|X = x]$$

On a ainsi sous forme intégrale, avec  $p_{X,Y}$  la densité de probabilité jointe de  $(X, Y)$  et  $p_X$  celle de  $X$ ,

$$\begin{aligned} s(x) &= \int \Phi(y)p(y|X = x)dy \\ &= \int \Phi(y)\frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)}dy \end{aligned}$$

d'où

$$\int \Phi(y)p(x, y)dy = p_X(x)E[\Phi(Y)|X = x]$$

La formule de Rice (3.1) qui donne le nombre moyen  $E(N_u)$  de franchissements du niveau  $u$  se met donc sous la forme

$$E(N_u) = E[\dot{X} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(\dot{X})|X = u]p_X(u)} \quad (3.3)$$

avec  $\mathbf{1}_A$  la fonction indicatrice de l'ensemble  $A$ . Ainsi, estimer le nombre moyen  $E(N_u)$  revient à estimer une fonction de régression définie par

$$s(u) = E[\Phi(\dot{X})|X = u]$$

avec  $\Phi(y) = y\mathbf{1}_{[0, +\infty[}(y)$  et une densité de probabilité marginale. Nous verrons plus loin que c'est l'estimation de la fonction de régression qui nous intéresse ici car nous estimerons paramétriquement la densité marginale. En outre, l'estimation paramétrique et non paramétrique des fonctions de densités de probabilité marginales est déjà bien connue (voir par exemple [5], [6]).

Dans certains cas particuliers (variables aléatoires identiquement distribuées par exemple), il est possible d'étudier simultanément les problèmes de l'estimation d'une fonction de régression et de l'estimation d'une densité de probabilité. En effet, dans les deux cas, on cherche à approcher une fonction d'une seule variable à partir d'échantillons. Pourtant le problème de l'estimation d'une fonction de régression est assez différent car on y estime la dépendance entre deux groupes de mesures. Ainsi, il est en général important de discerner les deux problèmes. En particulier, dans le cas qui nous intéresse nous ne pouvons pas assimiler l'estimation de la fonction de régression avec celle d'une densité de probabilité.

Il convient donc ici de rappeler quelques résultats propres à l'estimation de fonctions de régression pour des couples de processus stationnaires mélangeants. A notre connaissance les résultats les plus récents concernant l'estimation de fonctions de regression pour les processus mélangeant sont dus à Viennet [62], qui donne un contrôle en probabilité de la vitesse de convergence d'estimateurs de minimum de contraste pour des fonctions de régression dans un cadre absolument régulier (ie processus  $\beta$ -mélangeants - cf § 3.1.2 et eq. (3.9)). Elle étend à des processus mélangeants, les résultats de Birgé et Massart [6] sur les performances des estimateurs du minimum de contraste sur des cribles (espace d'approximation) pour des observations indépendantes.

L'idée directrice de leur travaux, qui vient au départ de Grenander (1981), consiste à projeter la fonction  $s$  inconnue sur un crible  $S_m$  (par exemple un espace de polynômes) de dimension  $D_m$  puis à minimiser un contraste fonction du projeté de  $s$ .

Le problème posé par Viennet est le suivant. Les observations sont  $n$  couples  $Z_i = (X_i, Y_i)$  tels que

$$Y_i = s(X_i) + W_i, \quad s \in \mathbb{L}^2(\mu)$$

où  $\mu$  est la distribution de  $X_1$ . Les  $W_i$  sont supposés indépendants identiquement distribués et centrés.  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(W_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont indépendants. On suppose de plus que  $X$  est un processus strictement stationnaire avec une suite  $(\beta_k)_{k \geq 0}$  de coefficients de  $\beta$ -mélange tels que  $\sum_{k \geq 0} \beta_k < \infty$ . Viennet montre alors que dès que  $D_{m(n)} = o(n^{1/2})$  l'estimateur aux moindres carrés  $\hat{s}_{m(n)}$  sur  $S_{m(n)}$  qui réalise le  $\min_{t \in S_{m(n)}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [Y_i - t(X_i)]^2$  satisfait

$$d^2(\hat{s}_{m(n)}, s) = O_P[ d^2(s, s_{m(n)}) + n^{-1} D_{m(n)} ] \quad (3.4)$$

Elle traduit ainsi l'idée que l'erreur totale se décompose entre une erreur d'approximation purement déterministe qui correspond au biais de l'estimateur et une erreur aléatoire qui dépend du nombre de points d'observation mais aussi de la dimension de l'espace d'approximation choisi. Si  $s$  est une fonction régulière telle que son module de continuité (3.64) vérifie

$$\sup_{t > 0} t^{-\rho} \omega_r(s, t)_2 < +\infty$$

où  $r$  défini par  $r = [\rho] + 1$ . Avec  $\rho > 1/2$  et en choisissant  $D_{m(n)}$  de l'ordre de  $n^{1/(2\rho+1)}$  elle obtient

$$d^2(\hat{s}_{m(n)}, s) = O_P[ n^{-\frac{2\rho}{(2\rho+1)}} ]$$

On peut vérifier que si la fonction  $s$  appartient à l'espace de Sobolev  $\mathbb{L}^{p,r}(A)$ , pour un compact  $A$ , l'ordre du risque quadratique est le même.

Avant Viennet, Roussas [48] avait donné des résultats de convergence presque sûre pour des estimateurs à noyau de fonctions de régression avec des processus  $\alpha$ -mélangeants. Si  $Z_j = (X_j, Y_j), j = 1, \dots, n$  et  $X$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , pour un noyau  $K$ , il définit l'estimateur à noyau  $\hat{r}_n$  de  $r(x) = E[\Phi(Y)|X = x]$  par

$$\begin{aligned}\hat{r}_n(x) &= R_n(x)/\hat{f}_n(x) \\ \hat{f}_n(x) &= \frac{1}{nh^d} \sum_{j=1}^n K\left(\frac{x - X_j}{h}\right) \\ R_n(x) &= \frac{1}{nh^d} \sum_{j=1}^n \Phi(Y_j)K\left(\frac{x - X_j}{h}\right)\end{aligned}$$

où le noyau  $K$  est une densité de probabilité symétrique bornée et telle que

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \|u\|^d K(u) = 0$$

et

$$\|u\|^2 K(u) \in L^1(\mathbb{R}^d)$$

Roussas montre que, sous des hypothèses sur les coefficients de mélange et sur la régularité de la fonction de régression  $r$  à approcher, l'estimateur à noyau  $\hat{r}_n$  vérifie

$$\sup[\psi_n |\hat{r}_n(x) - r(x)|; x \in J] \rightarrow 0 \text{ presque sûrement}$$

où  $J$  est un compact et  $\psi_n$  un facteur de normalisation positif qui dépend du paramètre  $h$  et des coefficients d' $\alpha$ -mélange.

Sköld [54] donne des résultats pour des estimateurs à noyau du nombre moyen de franchissements de niveaux. Il considère des processus  $(X_t, \dot{X}_t)$  asymptotiquement décorrélés, c'est-à-dire tels qu'il existe une fonction  $a(\tau)$  qui tend vers 0 quand  $\tau$  tend vers l'infini et qui vérifie pour  $\tau > 0$  et pour des fonctions  $G_i \in L^2$ ,

$$|Cov(G_1(X_\tau, \dot{X}_\tau), G_2(X_0, \dot{X}_0))| \leq a(\tau)(E[G_1^2(X_0, \dot{X}_0)]E[G_2^2(X_0, \dot{X}_0)])^{1/2}$$

Pour un échantillon  $(X_{k\Delta t}, \dot{X}_{k\Delta t})_{k=1, \dots, n}$ , il approche le nombre moyen de franchissements d'un niveau  $u$  par l'estimateur à noyau suivant

$$\widehat{E(N_u)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \dot{X}_{k\Delta t} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(\dot{X}_{k\Delta t}) K\left(\frac{X_{k\Delta t} - u}{h}\right)$$

avec un noyau  $K$  du second ordre défini comme celui de Roussas [48].

Il montre que si  $\sum_{k=1}^{\infty} a(k\Delta t) < \infty$  et  $\int \int \dot{x}_1 \dot{x}_2 p_{X_0, \dot{X}_0, X_\tau, \dot{X}_\tau}(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) dx_1 dx_2$  est uniformément bornée pour  $\tau > \Delta t$  alors le risque quadratique asymptotique intégré  $AMISE$  est tel que

$$AMISE(\widehat{E(N_u)}) = \frac{h^4 \sigma_K^4}{4} \int \left( \frac{d^2 E(N_u)}{du^2} \right)^2 du + \frac{1}{nh} E[\dot{x}^2 \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(\dot{x})] \int K^2(x) dx$$



avec  $\sigma_K^2 = \int x^2 K(x) dx$ . La vitesse de convergence du risque quadratique intégré pour des couples asymptotiquement décorrélés est du même ordre que si les couples  $(X_{k\Delta t}, \dot{X}_{k\Delta t})$  étaient indépendants, en  $O(n^{-2/5})$  [53]. L'estimateur proposé par Sköld présente donc les mêmes propriétés asymptotiques que les estimateurs à noyau d'une densité de probabilité univariée.

Enfin, Bosq [7] étudie la vitesse de convergence de l'estimateur à noyau d'une fonction de régression pour des processus  $d$ -dimensionnels à temps continu sous une hypothèse d' $\alpha$ -mélange. Il suppose que l'on observe le processus  $Z_t = (X_t, Y_t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  mesurable dans  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  sur  $[0, T]$  et que les  $Z_t$  ont une densité commune  $f(x, y)$ .

$$r(x) = E[Y_t | X_t = x], \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Bosq considère l'estimateur à noyau de  $r$  :

$$\hat{r}_T(x) = \int_0^T Y_t K\left(\frac{x - X_t}{h}\right) dt \Big/ \int_0^T K\left(\frac{x - X_t}{h}\right) dt, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

où le noyau  $K$  vérifie les mêmes conditions que dans Roussas [48]. Sous des hypothèses d' $\alpha$ -mélange sur le processus  $Z_t$  et de régularité sur la densité de probabilité  $f$ , on montre que, dès que  $h = \gamma T^{-1/(d+4)}$  où  $\gamma$  est une constante, on a

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} T^{4/(d+4)} E[(\hat{r}_T(x) - r(x))^2] \leq C$$

avec  $C$  une constante qui dépend du noyau  $K$ , des dérivées partielles d'ordre 2 de  $f$ , de la densité marginale de  $X_t$  et de  $r$ .

### *Notre contribution*

Nous donnons des vitesses de convergence en norme  $\mathbb{L}^2$  de deux estimateurs non paramétriques du nombre moyen de franchissements de niveau lorsque les observations  $(X_i, \dot{X}_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont stationnaires, discrétisées avec un pas de temps constant  $\Delta t$ , mélangées et statistiquement dépendantes.

Nous considérons en premier lieu l'estimateur empirique  $\overline{N}_u$ . Cet estimateur est facile à calculer il est donc intéressant de connaître ses propriétés statistiques d'autant plus que nous montrons que sa vitesse de convergence en norme quadratique est bonne.

$$\|\overline{N}_u - E(N_u)\|_2^2 \sim C_1 \Delta t^2 + C_2 \frac{1}{n \Delta t}$$

Dans le cas idéal d'un processus gaussien, nous détaillons l'expression du biais et de la variance de l'estimateur empirique de  $E(N_u)$  et nous le comparons à l'estimateur paramétrique correspondant.

Le second estimateur que nous étudions est un estimateur du minimum de contraste construit de la façon suivante. Nous approchons la densité de probabilité jointe du couple

$(X_t, \dot{X}_t)$  par une perturbation du produit des densités marginales. Ceci revient à écrire la densité jointe sous la forme  $p(x, \dot{x}) = s'(x, \dot{x})p_X(x)p_{\dot{X}}(\dot{x})$ . Nous choisissons pour les fonctions  $p_X$  et  $p_{\dot{X}}$  des densités paramétriques aussi proches que possible des vraies densités marginales (inconnues). Nous projettons alors la fonction  $s'$  sur un espace de polynômes de dimension  $D(n)$ . Nous estimons  $E(N_u)$  en intégrant l'estimateur de  $p$  dans la formule de Rice (3.1) et nous montrons que si  $s'$  appartient à l'espace de Sobolev  $L^{2,\rho}(I)$  avec  $I$  un compact bien choisi de  $\mathbb{R}^2$

$$\int \|\widehat{E(N_u)} - E(N_u)\|_2^2 W(u) du \leq C'_1 \Delta t^2 + C'_2 \frac{D}{n \Delta t} + C'_3 \frac{1}{D^r} \quad (3.5)$$

où les constantes  $C'_1$  à  $C'_3$  dépendent des propriétés de mélange du processus tandis que  $r = \min(\rho_1, \rho_2)$  caractérise la régularité de la fonction  $s'$ . Et  $W$  est une fonction de poids bornée.

### 3.1.2 Hypothèses et notations

On suppose que  $(X_t, t \in \mathbb{R})$  est un processus stationnaire centré mélangeant [19] à valeurs réelles et à trajectoires régulières, de dérivée première  $(\dot{X}_t, t \in \mathbb{R})$  et de dérivée seconde  $(\ddot{X}_t, t \in \mathbb{R})$ . On note  $p(x, y)$  ou  $p_{X, \dot{X}}(x, y)$  la densité de probabilité jointe du couple  $(X_t, \dot{X}_t)$ . La matrice de covariance  $C$  du processus  $X$  est supposée intégrable sur  $[0, +\infty[$  et deux fois différentiable.

Soit une suite d'observations discrétisées  $(X_{k\Delta t}, k = 1, \dots, N)$  de  $X$ . Le pas de discrétisation  $\Delta t$  est choisi constant. Pour cette suite, on construit la différence finie  $X^\Delta$  de  $X$  telle que

$$X_{k\Delta t}^\Delta = \frac{X_{(k+1)\Delta t} - X_{k\Delta t}}{\Delta t}, \quad k = 1, \dots, N - 1 \quad (3.6)$$

On notera parfois  $X_k$  pour  $X_{k\Delta t}$  s'il n'y pas d'ambiguïté.

$N$  et  $\Delta t$  sont tels que quand  $N$  tend vers  $+\infty$ ,  $\Delta t$  tend vers 0 et  $N\Delta t$  tend vers  $+\infty$ .

On note  $E_p(\cdot)$  l'espérance sous la loi de densité  $p$ ,  $V(\cdot)$  la variance et  $\mathbf{1}_A$  la fonction indicatrice de l'ensemble  $A$ .  $\mathbf{1}_A(x)$  vaut 1 si  $x$  est dans  $A$  et 0 ailleurs.

Pour une matrice  $\Phi$ , on note  $\Phi^T$  la matrice transposée.

Si  $X$  est de plus un processus gaussien, on note  $\sigma$ ,  $\dot{\sigma}$  et  $\sigma_\Delta$  les écart-types respectifs de  $X$ ,  $\dot{X}$  et  $X^\Delta$ .

Pour les doubles indices  $k = (k_1, k_2)$  et  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ , on note

$$|k| = k_1 + k_2, \quad k^\alpha = k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2}, \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1 k_2}$$

Si le signe intégral  $\int$  est utilisé sans spécification de bornes il symbolise l'intégration de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

### Propriétés de mélange

On définit (voir [19]) les coefficients de  $\psi$ -mélange par

$$\psi(t) = \sup_{A \times B \in \mathcal{F}_0 \times \mathcal{G}_t} \left| 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)P(B)} \right| \quad (3.7)$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et avec les tribus  $\mathcal{F}_0$  et  $\mathcal{G}_t$  telles que

$$\mathcal{F}_0 = \sigma(X_i, i \leq 0) \text{ et } \mathcal{G}_t = \sigma(X_i, i \geq t)$$

Les coefficients d' $\alpha$ -mélange (ou de mélange fort) sont définis par

$$\alpha(t) = \sup_{A \times B \in \mathcal{F}_0 \times \mathcal{G}_t} |P(A \cap B) - P(A)P(B)| \quad (3.8)$$

et les coefficients de  $\beta$ -mélange par

$$\beta(t) = \sup \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |P(A_i \cap B_j) - P(A_i)P(B_j)| \right\} \quad (3.9)$$

Le supremum de (3.9) est pris sur toutes les partitions  $(A_i), (B_j)$  de  $\Omega$  telles que  $A_i \in \mathcal{F}_0$  et  $B_j \in \mathcal{G}_t$ .

**Définition 3.1** *Si  $c$  est une suite de coefficients de mélange associé à un processus  $X$ , on dit que le processus est  $c$ -mélangeant lorsque*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) = 0$$

Les processus mélangeants sont en fait des processus faiblement dépendants au sens où la dépendance statistique entre  $X_s$  et  $X_t$  décroît quand  $|t - s|$  croît. Chaque suite de coefficients de mélange traduit une dépendance plus ou moins forte. En particulier, on a

$$2\alpha(t) \leq \beta(t) \leq \frac{1}{2}\psi(t)$$

Parmi toutes les définitions de mélange, c'est le  $\alpha$ -mélange qui est le plus souvent utilisé car on peut évaluer les coefficients pour certains processus.

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires mesurables respectivement par rapport aux tribus  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , on peut majorer la covariance de  $(X, Y)$  par les coefficients de mélange (voir théorème 3, p. 9, dans le livre de Doukhan [?]). On note  $\|X\|_p = (E|X|^p)^{1/p}$  pour  $1 \leq p < +\infty$ .

**Théorème 3.1** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires mesurables respectivement par rapport aux tribus  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , on a

- (i)  $|Cov(X, Y)| \leq \alpha^{1/r}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \|\mathcal{X}\|_{\sqrt{}} \|\mathcal{Y}\|_{\Pi}, \quad \forall p, q, r \geq 1$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ .  
(ii)  $|Cov(X, Y)| \leq \psi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \|\mathcal{X}\|_{\infty} \|\mathcal{Y}\|_{\infty}$ .

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. On étudie tout d'abord la vitesse de convergence de l'estimateur empirique du nombre moyen de franchissements de niveaux pour un processus de loi régulière quelconque. Dans le cas idéal du processus gaussien, on peut exprimer analytiquement les vitesses de convergence de l'estimateur empirique et de l'estimateur paramétrique, ce qui permet de les comparer dans la section 3. Enfin dans la section 4, on étudie un estimateur du minimum de contraste appelé aussi estimateur de projection.

## 3.2 Estimateur empirique

Pour construire un estimateur empirique du nombre moyen de franchissements croissants d'un niveau  $u$  pour le processus  $X$  défini ci-dessus, il est naturel d'utiliser la formule de Madsen [21] suivante :

$$E(N_u) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} P[X_t < u \cap X_{t+\Delta t} > u] \quad (3.10)$$

En effet, cette formule a l'avantage de n'introduire que le processus  $X$  lui même contrairement à la formule de Rice (3.1) [45] dans laquelle on intègre la densité de probabilité jointe de  $X$  et de sa dérivée temporelle  $\dot{X}$ .

L'estimateur empirique  $\overline{N}_u$  du nombre moyen  $E(N_u)$ , construit à partir d'une suite d'observations discrétisées de  $X$  s'écrit naturellement :

$$\overline{N}_u = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=1}^N \mathbf{1}_{]-\infty, u] \times ]u, +\infty[}(X_k, X_{k+1})$$

Etudions les statistiques asymptotiques d'ordre deux de cet estimateur empirique.

### 3.2.1 Biais

On pose, pour simplifier les notations,

$$\hat{p} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{1}_{]-\infty, u] \times ]u, +\infty[}(X_k, X_{k+1}) \quad (3.11)$$

$$p_u = p_u(\Delta t) = P[X_t < u \cap X_{t+\Delta t} > u] \quad (3.12)$$

on a alors

$$\overline{N}_u = \frac{1}{\Delta t} \hat{p}$$

et  $\hat{p}$  est un estimateur empirique de  $p_u$ . Avec ces notations, le biais  $b(\overline{N}_u)$  de l'estimateur  $\overline{N}_u$  de  $E(N_u)$  se décompose comme suit.

$$b(\overline{N}_u) = \frac{1}{\Delta t} [E(\hat{p}) - p_u] + \frac{1}{\Delta t} p_u - E(N_u)$$

Le 1er terme s'annule car l'estimateur  $\hat{p}$  de  $p_u$  est sans biais :

$$\begin{aligned} E(\hat{p}) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(\mathbf{1}_{]-\infty, u] \times ]u, +\infty[}(X_k, X_{k+1})) \\ &= E(\mathbf{1}_{]-\infty, u] \times ]u, +\infty[}(X_0, X_1)) \\ &= p_u \end{aligned}$$

Le biais de l'estimateur empirique  $\overline{N}_u$  s'écrit donc sous la forme

$$b(\overline{N}_u) = \frac{1}{\Delta t} p_u - E(N_u)$$

Et on a la proposition suivante.

**Proposition 3.1** *Sous les hypothèses (i) et (ii),*

(i) *la densité jointe  $p(x, \dot{x})$  de  $(X, \dot{X})$  est dérivable en  $x$*

(ii)  $0 < \left| \int_0^{+\infty} \dot{x}^2 \frac{\partial}{\partial u} p(u, \dot{x}) d\dot{x} \right| < +\infty$

*le biais de l'estimateur empirique de  $E(N_u)$  s'écrit quand  $\Delta t$  tend vers 0,*

$$b(\overline{N}_u) \sim \frac{-\Delta t}{2} \int_0^{+\infty} \dot{x}^2 \frac{\partial}{\partial u} p(u, \dot{x}) d\dot{x} \quad (3.13)$$

*En particulier si  $p(x, \dot{x}) = p_X(x) p_{\dot{X}}(\dot{x})$  et si la densité  $p_{\dot{X}}$  est symétrique, le biais devient*

$$b(\overline{N}_u) \sim \frac{-\Delta t}{4} \frac{dp_X(u)}{du} \sigma_{\dot{X}}^2 \quad (3.14)$$

On note que le biais de l'estimateur empirique  $\overline{N}_u$  de  $E(N_u)$  ne dépend que des caractéristiques instantanées du processus. Ainsi quelles que soient les propriétés de mélange, le biais reste le même.

Afin de mettre en évidence l'évolution du biais de l'estimateur  $\overline{N}_u$  en fonction du niveau franchi, on exprime un biais relatif à partir de l'équation (3.14). On rappelle que sous l'hypothèse d'indépendance du processus et de sa dérivée, la formule de Rice devient :

$$E(N_u) = p_X(u) \int_0^{+\infty} \dot{x} p_{\dot{X}}(\dot{x}) d\dot{x}$$

Le biais relatif de l'estimateur empirique s'écrit donc

$$\begin{aligned} \frac{b(\overline{N}_u)}{E(N_u)} &\sim \frac{-\Delta t}{4} \frac{1}{p_X(u)} \frac{dp_X(u)}{du} \frac{\sigma_{\dot{X}}^2}{\int_0^{+\infty} \dot{x}p(\dot{x})d\dot{x}} \\ &\sim \frac{-\Delta t}{4} \frac{d \log p_X(u)}{du} \frac{\sigma_{\dot{X}}^2}{\int_0^{+\infty} \dot{x}p(\dot{x})d\dot{x}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Interprétons l'expression (3.15). Le terme  $\sigma_{\dot{X}}^2 / \int_0^{+\infty} \dot{x}p(\dot{x})d\dot{x}$  est une constante qui dépend uniquement des propriétés statistiques de la dérivée  $\dot{X}$ . On suppose que la densité de probabilité  $p_X$  de  $X$  est une fonction régulière de  $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ . Ainsi quand le niveau  $u$  croît, la densité  $p_X(u)$  tend vers 0 et son logarithme décroît rapidement vers  $-\infty$ . Dans le cas d'une densité de probabilité log concave et pour un  $u$  assez grand, la dérivée  $\frac{d \log p_X(u)}{du}$  sera négative et décroissante. On en conclut que lorsque le niveau  $u$  tend vers des valeurs extrêmes, le biais relatif a tendance à devenir positif et à augmenter de plus en plus vite quand le niveau  $u$  croît.

◇ preuve de la proposition 3.1

En utilisant un développement similaire à celui de Hagen [21], le nombre moyen  $p_u/\Delta t$  s'écrit comme suit, quand  $\Delta t$  tend vers 0 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} P(X_t < u, X_{t+\Delta t} > u) &\sim \frac{1}{\Delta t} [P(\dot{X}_t > 0, X_t + \dot{X}_t \Delta t > u) - P(\dot{X}_t > 0, X_t > u)] \\ &\sim \frac{d}{d\theta} P(\dot{X}_t > 0, X_t + \dot{X}_t \theta > u)|_{\theta=0} + \frac{\Delta t}{2} \frac{d^2}{d\theta^2} P(\dot{X}_t > 0, X_t + \dot{X}_t \theta > u)|_{\theta=0} \\ &\sim E(N_u) + \frac{\Delta t}{2} \frac{d^2}{d\theta^2} P(\dot{X}_t > 0, X_t + \dot{X}_t \theta > u)|_{\theta=0} \end{aligned} \quad (6)$$

Sous les hypothèses (i) et (ii) de la proposition, on peut écrire le dernier terme sous une forme intégrale,

$$P(\dot{X}_t > 0, X_t + \dot{X}_t \theta > u) = \int_0^{+\infty} \int_{u-\theta\dot{x}}^{+\infty} p(x, \dot{x}) dx d\dot{x}$$

En dérivant une première fois par rapport à  $\theta$  cette intégrale, on obtient

$$\frac{d}{d\theta} P(\dot{X}_t > 0, X_t + \dot{X}_t \theta > u)|_{\theta=0} = \frac{d}{d\theta} \int_0^{+\infty} \dot{x}p(u - \theta\dot{x}, \dot{x}) d\dot{x}$$

Puis, en dérivant au second ordre et en choisissant le point  $\theta = 0$ , on écrit

$$\frac{d^2}{d\theta^2} P(\dot{X}_t > 0, X_t + \dot{X}_t \theta > u)|_{\theta=0} = - \int_0^{+\infty} \dot{x}^2 \frac{\partial p(u, \dot{x})}{\partial u} d\dot{x}$$

On retrouve ainsi la formule (3.13) de la proposition.

Si on suppose maintenant que pour un instant  $t$  fixé, les variables aléatoires  $X_t$  et  $\dot{X}_t$  sont statistiquement indépendantes, leur densité de probabilité jointe  $p$  est alors égale

au produit  $p_X p_{\dot{X}}$  des densités de probabilité marginales. On obtient l'équation (3.14) en remplaçant la densité de probabilité jointe  $p$  dans l'équation (3.13) par le produit des densités marginales :

$$b(\overline{N_u}) \sim \frac{-\Delta t}{2} \int_0^{+\infty} \dot{x}^2 p_{\dot{X}}(\dot{x}) d\dot{x} \frac{dp_X(u)}{du}$$

On remarque alors que sous l'hypothèse de symétrie de la densité de probabilité  $p_{\dot{X}}$ ,  $\int_0^{+\infty} \dot{x}^2 p_{\dot{X}}(\dot{x}) d\dot{x} = \sigma^2/2$  et on en déduit la formule (3.14).  $\diamond$

En étendant les développements (3.16) à l'ordre  $K$ , on généralise la proposition 3.1 et on obtient la proposition suivante.

**Proposition 3.2** *Si les hypothèses (i), (ii) et (iii) sont vérifiées*

(i) *la densité jointe  $p(x, \dot{x})$  de  $(X, \dot{X})$  est  $K$  fois dérivable en  $x$*

(ii)  $\exists K$  *tel que  $\forall k \in \{1, \dots, K-1\}$ ,  $\int_0^{+\infty} \dot{x}^{k+1} \frac{\partial^k}{\partial u^k} p(u, \dot{x}) d\dot{x} = 0$*

(iii)  $0 < \left| \int_0^{+\infty} \dot{x}^{K+1} \frac{\partial^K}{\partial u^K} p(u, \dot{x}) d\dot{x} \right| < +\infty$

*alors le biais de l'estimateur empirique de  $E(N_u)$  s'écrit pour  $\Delta t$  petit*

$$b(\overline{N_u}) \sim \frac{(-1)^K \Delta t^K}{(K+1)!} \int_0^{+\infty} \dot{x}^{K+1} \frac{\partial^K}{\partial u^K} p(u, \dot{x}) d\dot{x} \quad (3.17)$$

Les hypothèses (i) et (iii) garantissent l'existence des dérivées et des intégrales qui interviennent dans la proposition, tandis que l'hypothèse (ii) donne un sens à la proposition : en effet, il serait inutile de développer l'expression du biais à un ordre  $K$  en  $\Delta t$  s'il existait un terme non nul d'ordre inférieur à  $K$  car ce dernier serait alors prépondérant.

Intéressons nous maintenant à la variance de l'estimateur.

### 3.2.2 Variance

La proposition 3.3 permet de majorer la variance de l'estimateur empirique  $\overline{N_u}$  du nombre moyen de franchissements du niveau  $u$ .

**Proposition 3.3** *Supposons, qu'il existe un temps  $t_0 > 0$  tel que,*

(i)  $g_t = p_{X_0, \dot{X}_0, X_t, \dot{X}_t} - p_{X_0, \dot{X}_0} p_{X_t, \dot{X}_t}$  *existe pour tout  $t \geq t_0$*

(ii)  $0 < \left| \int_{t_0}^{+\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \dot{x}_1 \dot{x}_2 p_{X_0, \dot{X}_0, X_t, \dot{X}_t}(u, \dot{x}_1, u, \dot{x}_2) d\dot{x}_1 d\dot{x}_2 - E(N_u)^2 \right\} dt \right| < +\infty$

*alors quand  $(N, \Delta t) \rightarrow (+\infty, 0)$  et  $N\Delta t \rightarrow +\infty$ , on a*

$$V(\overline{N_u}) \leq \frac{2}{N\Delta t} t_0 E[\dot{X}_t^2 \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(\dot{X}_t) | X_t = u] \quad (3.18)$$

$$+ \int_{t_0}^{+\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \dot{x}_1 \dot{x}_2 p_{X_0, \dot{X}_0, X_t, \dot{X}_t}(u, \dot{x}_1, u, \dot{x}_2) d\dot{x}_1 d\dot{x}_2 - E(N_u)^2 \right\} dt]$$

L'hypothèse (ii) de cette proposition garantit la décroissance de la variance quand  $N\Delta t$  tend vers l'infini. Pour mieux comprendre le sens de cette expression on remarque que

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \dot{x}_1 \dot{x}_2 p_{X_0, \dot{X}_0, X_t, \dot{X}_t}(u, \dot{x}_1, u, \dot{x}_2) d\dot{x}_1 d\dot{x}_2 \\ &= \frac{d^2}{d\theta_1 d\theta_2} P[X_0 = u, X_0 + \theta_1 \dot{X}_0 > 0, X_t = u, X_t + \theta_2 \dot{X}_t > 0] \end{aligned}$$

Ce terme exprime la probabilité pour la trajectoire du processus  $X$  de franchir en croissant le niveau  $u$  au temps 0 et au temps  $t$  ou, le processus étant stationnaire, aux temps  $\tau$  et  $t + \tau$  (fig. 3.2). On peut interpréter, de la même façon, le terme  $E(N_u)^2$  comme la probabilité pour  $X$  de franchir  $u$  en croissant aux temps 0 et  $t$  mais en supposant cette fois que les variables aléatoires  $X_0$  et  $X_t$  sont statistiquement indépendantes. En effet, sous l'hypothèse d'indépendance,

$$P[X_0 = u, \dot{X}_0 \geq 0, X_t = u, \dot{X}_t \geq 0] = P[X_0 = u, \dot{X}_0 \geq 0]P[X_t = u, \dot{X}_t \geq 0]$$

or on a par la propriété de stationnarité du processus

$$\begin{aligned} E(N_u)^2 &= \left( \frac{d}{d\theta} P[X_0 = u, X_0 + \theta \dot{X}_0] \right)^2 \\ &= \frac{d^2}{d\theta_1 d\theta_2} P[X_0 = u, X_0 + \theta_1 \dot{X}_0 > 0]P[X_t = u, X_t + \theta_2 \dot{X}_t > 0] \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \dot{x}_1 \dot{x}_2 p_{X_0, \dot{X}_0, X_t, \dot{X}_t}(u, \dot{x}_1, u, \dot{x}_2) d\dot{x}_1 d\dot{x}_2 - E(N_u)^2 \\ &= \frac{d^2}{d\theta_1 d\theta_2} \left\{ P[X_0 = u, X_0 + \theta_1 \dot{X}_0 > 0, X_t = u, X_t + \theta_2 \dot{X}_t > 0] \right. \\ & \quad \left. - P[X_0 = u, X_0 + \theta_1 \dot{X}_0 > 0]P[X_t = u, X_t + \theta_2 \dot{X}_t > 0] \right\} \end{aligned}$$

On peut donc interpréter l'expression  $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \dot{x}_1 \dot{x}_2 p_{X_0, \dot{X}_0, X_t, \dot{X}_t}(u, \dot{x}_1, u, \dot{x}_2) d\dot{x}_1 d\dot{x}_2 - E(N_u)^2$  comme un coefficient de mélange spécifique aux franchissements de niveaux. L'hypothèse de la proposition traduit alors le fait que le processus est mélangeant dans ce sens particulier c'est à dire que si  $t$  croît le fait de franchir le niveau  $u$  au temps 0 a de moins en moins d'influence sur le franchissement éventuel du même niveau au temps  $t$ .

◇ preuve de la proposition 3.3

En utilisant les notations (3.11) et (3.12) introduites plus haut, on a pour la variance de l'estimateur empirique  $\overline{N}_u$  de  $E(N_u)$  :

$$V(\overline{N}_u) = E[(\overline{N}_u - E(\overline{N}_u))^2] = E\left[\left(\frac{1}{\Delta t}(\hat{p} - p_u)\right)^2\right] = \frac{1}{\Delta t^2} V(\hat{p}) \quad (3.19)$$



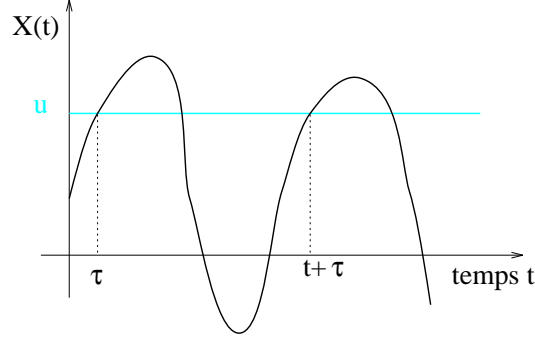


FIG. 3.2 – Franchir  $u$  aux temps  $\tau$  et  $\tau + t$

On a noté  $V(\hat{p})$  la variance de  $\hat{p}$ .  $\hat{p}$  étant un estimateur sans biais, la variance de  $\overline{N}_u$  peut s'écrire sous la forme suivante.

$$\begin{aligned}
V(\overline{N}_u) &= E[\overline{N}_u^2] - E(N_u)^2 \\
&= \frac{1}{N^2 \Delta t^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} (E[\mathbf{1}_{]-\infty, u] \times ]u, +\infty[}(X_{i\Delta t}, X_{(i+1)\Delta t}) \mathbf{1}_{]-\infty, u] \times ]u, +\infty[}(X_{j\Delta t}, X_{(j+1)\Delta t})] - p_u^2) \\
&= \frac{1}{N^2 \Delta t^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} (P[X_{i\Delta t} < u, X_{(i+1)\Delta t} > u, X_{j\Delta t} < u, X_{(j+1)\Delta t} > u] - p_u^2)
\end{aligned}$$

Par un développement similaire à celui du biais (3.16), on montre que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta t^2} P[X_0 < u, X_{\Delta t} > u, X_t < u, X_{t+\Delta t} > u] \\
&= \frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} P[\dot{X}_0 > 0, X_0 + \dot{X}_0 \theta_1 > u, \dot{X}_t > 0, X_t + \dot{X}_t \theta_2 > u]_{\theta_1=0, \theta_2=0} + O(\Delta t) \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \dot{x}_1 \dot{x}_2 p_{X_0, \dot{X}_0, X_t, \dot{X}_t}(u, \dot{x}_1, u, \dot{x}_2) d\dot{x}_1 d\dot{x}_2 + O(\Delta t) \\
&= Cov(\dot{X}_0 \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(\dot{X}_0) \delta_u(X_0), \dot{X}_t \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(\dot{X}_t) \delta_u(X_t)) + O(\Delta t)
\end{aligned}$$

La figure 3.3 montre le comportement des équivalents

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \dot{x}_1 \dot{x}_2 p_{X_0, \dot{X}_0, X_t, \dot{X}_t}(u, \dot{x}_1, u, \dot{x}_2) d\dot{x}_1 d\dot{x}_2 - E(N_u)^2$$

lorsque le temps  $t$  varie pour un niveau  $u = -2\sigma$  fixé pour un processus modélisant l'accélération en tangage d'un navire rapide. Pour d'autres niveaux franchis  $u$  ou pour d'autres processus (par exemple gaussien), le comportement de ces termes serait similaire. On peut donc considérer qu'il y a une certaine uniformité en temps des équivalents pour les temps  $t \geq t_0 > 0$ . La variance de l'estimateur empirique du nombre moyen de franchissements de niveaux peut ainsi se mettre sous la forme

$$V(\overline{N}_u) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0, |i-j|\Delta t < t_0}^{N-1} Cov(\dot{X}_i \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(\dot{X}_i) \delta_u(X_i), \dot{X}_j \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(\dot{X}_j) \delta_u(X_j))$$

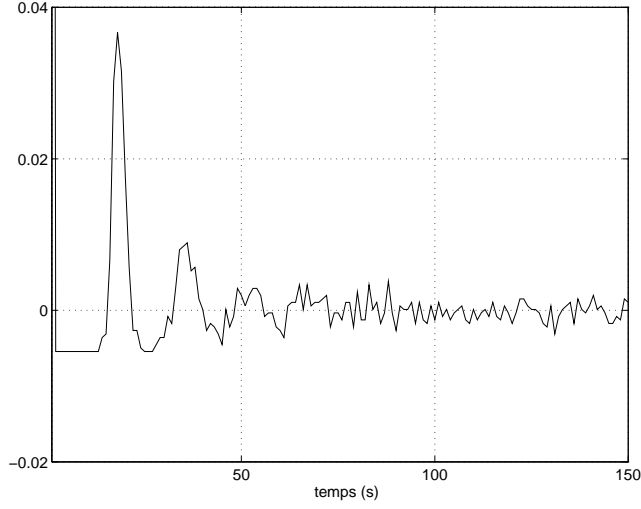


FIG. 3.3 – Approximation des équivalents  $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \dot{x}_1 \dot{x}_2 p_{X_0, \dot{X}_0, X_t, \dot{X}_t}(u, \dot{x}_1, u, \dot{x}_2) d\dot{x}_1 d\dot{x}_2 - E(N_u)^2$  quand  $t$  varie

$$+ \frac{2}{N} \sum_{k=1, k\Delta t \geq t_0}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \dot{x}_1 \dot{x}_2 p_{X_0, \dot{X}_0, X_t, \dot{X}_t}(u, \dot{x}_1, u, \dot{x}_2) d\dot{x}_1 d\dot{x}_2 - E(N_u) + O\left(\frac{\Delta t}{N^2}\right)$$

Majorons maintenant le premier terme de droite, noté  $T_1$ , pour lequel on somme sur les indices tels que  $|i - j|\Delta t < t_0$ .

$$T_1 \leq \frac{1}{N^2} E[\dot{X}_0^2 \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(\dot{X}_0) | X_0 = u] \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0, |i-j|\Delta t < t_0}^{N-1} 1$$

Et en appliquant la formule d'intégration numérique, on a donc

$$\begin{aligned} T_1 &\leq \frac{1}{N\Delta t} E[\dot{X}_0^2 \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(\dot{X}_0) | X_0 = u] \frac{1}{N\Delta t} \int_0^{N\Delta t} \int_{t-t_0}^{t+t_0} ds dt \\ &\leq \frac{2t_0}{N\Delta t} E[\dot{X}_0^2 \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(\dot{X}_0) | X_0 = u] \end{aligned}$$

En appliquant la formule d'intégration au second terme  $T_2$ , on obtient

$$T_2 \leq \frac{2}{N\Delta t} \int_{t_0}^{N\Delta t} \left\{ \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \dot{x}_1 \dot{x}_2 p_{X_0, \dot{X}_0, X_t, \dot{X}_t}(u, \dot{x}_1, u, \dot{x}_2) d\dot{x}_1 d\dot{x}_2 - E(N_u)^2 \right\} dt$$

Finalement la variance de l'estimateur empirique est majorée comme suit :

$$\begin{aligned} V(\overline{N_u}) &\leq \frac{2}{N\Delta t} [t_0 E[\dot{X}_0^2 \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(\dot{X}_0) | X = u] \\ &+ \int_{t_0}^{+\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \dot{x}_1 \dot{x}_2 p_{X_0, \dot{X}_0, X_t, \dot{X}_t}(u, \dot{x}_1, u, \dot{x}_2) d\dot{x}_1 d\dot{x}_2 - E(N_u)^2 \right\} dt] \end{aligned}$$

On a ainsi montré la proposition.  $\diamond$

On a vu que l'hypothèse (ii) de la proposition 3.3 traduit une propriété de mélange peu classique. En se ramenant à des définitions plus usuelles, on montre un corollaire pour les processus  $\psi$ -mélangeants.

**Corollaire 3.1** *Si le processus  $X$  est  $\psi$ -mélangeant, la variance de l'estimateur empirique de l'espérance du nombre de franchissements de niveau est majorée pour  $\Delta t$  assez petit.*

$$V(\overline{N}_u) \leq \frac{2t_0}{N\Delta t} [E[\dot{X}_0^2 \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(\dot{X}_0) | X = u] + (EN_u)^2 \int_0^{N\Delta t} \psi(t) dt] \quad (3.20)$$

$\diamond$  preuve du corollaire 3.1

D'après la définition du terme  $T_2$  dans la preuve de la proposition 3.3,

$$T_2 = \frac{2}{N\Delta t^2} \sum_{k=2, k\Delta t > t_0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) \mathbf{Cov}(\mathbf{1}_{]-\infty, u] \times ]u, +\infty[}(X_0, X_{\Delta t}), \mathbf{1}_{]-\infty, u] \times ]u, +\infty[}(X_{k\Delta t}, X_{(k+1)\Delta t})) \quad (3.21)$$

On applique la propriété (ii) du théorème 3.1, aux processus  $\mathbf{1}_{]-\infty, u] \times ]u, +\infty[}(X_0, X_{\Delta t})$  et  $\mathbf{1}_{]-\infty, u] \times ]u, +\infty[}(X_{k\Delta t}, X_{(k+1)\Delta t})$  en remarquant que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{1}_{]-\infty, u] \times ]u, +\infty[}(X_0, X_{\Delta t})\|_1 &= \|\mathbf{1}_{]-\infty, u] \times ]u, +\infty[}(X_{k\Delta t}, X_{(k+1)\Delta t})\|_1 \\ &= E|\mathbf{1}_{]-\infty, u] \times ]u, +\infty[}(X_0, X_{\Delta t})| \\ &= P[X_0 < u, X_{\Delta t} > u] = p_u \end{aligned}$$

On majore ainsi  $T_2$  par :

$$T_2 \leq \frac{2}{N\Delta t^2} \sum_{k=2, k\Delta t > t_0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) \psi(k\Delta t) p_u^2$$

Avec  $p_u = \Delta t E(N_u)$ , on a

$$\begin{aligned} T_2 &\leq \frac{2}{N} \sum_{k=2, k\Delta t > t_0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) \psi(k\Delta t) (EN_u)^2 \\ &\leq \frac{2}{N\Delta t} (EN_u)^2 \int_0^{+\infty} \psi(t) dt \end{aligned} \quad (3.22)$$

On obtient la deuxième ligne de l'équation (3.22) par la décroissance de la fonction  $\psi(t)$ . On en déduit que

$$V(\overline{N}_u) \leq \frac{2}{N\Delta t} [t_0 E[\dot{X}_0^2 \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(\dot{X}_0) | X = u] + (EN_u)^2 \int_0^{N\Delta t} \psi(t) dt] \quad (3.23)$$

Ce qui termine la preuve du corollaire.  $\diamond$

Pour les processus gaussiens, il est possible de détailler davantage les expressions du biais et de la variance de l'estimateur empirique.

### 3.2.3 Pour un processus gaussien

Soit  $X$  un processus gaussien centré, à valeurs réelles, stationnaire, mélangeant, à trajectoires régulières et de fonction de corrélation  $C$ . On montre la proposition 3.4 pour le biais et la variance de l'estimateur empirique  $\overline{N}_u$  de l'espérance  $E(N_u)$  du nombre moyen de franchissements du niveau  $u$ .

**Proposition 3.4** *Considérons un processus gaussien centré, tel que  $0 < \int_0^{+\infty} |C(t)|dt < +\infty$ . Alors, si  $(N, \Delta t) \rightarrow +\infty$  et  $N\Delta t \rightarrow +\infty$ , le biais de l'estimateur empirique  $\overline{N}_u$  de  $E(N_u)$  est donné par*

$$b(\overline{N}_u) \sim \frac{\Delta t \sqrt{2\pi} u \dot{\sigma}}{4 \sigma \sigma} E(N_u) \text{ si } u \neq 0, \quad \frac{-\Delta t^2 \dot{\sigma}^2}{3 \sigma^2} E(N_0) \text{ si } u = 0 \quad (3.24)$$

et on majore sa variance par

$$V(\overline{N}_u) \leq \frac{1}{N\Delta t} [\sqrt{2\pi} \dot{\sigma} t_0 E(N_u) + 2u^2 E(N_u)^2 \int_0^{+\infty} |C(t)|dt] \quad (3.25)$$

avec  $t_0 > 0$ .

◇ preuve de la proposition 3.4

Pour trouver un équivalent pour le biais (3.24), il suffit d'appliquer la proposition 3.2 avec  $K = 1$  si  $u \neq 0$  et  $K = 2$  quand  $u$  est nul.

On détermine ci-dessous un majorant de la variance dans le cas particulier d'un processus gaussien de variance 1, mais la généralisation à un processus gaussien de variance quelconque est triviale.

Comme dans la démonstration de la proposition 3.3, nous scindons la variance en deux termes, le premier pour les indices tels que  $|i - j|\Delta t < t_0$  et le second pour les autres. On obtient pour le premier terme d'après la proposition 3.3 et d'après la définition de la densité de probabilité jointe du processus gaussien et de sa dérivée :

$$T_1 \leq \sqrt{2\pi} \frac{\dot{\sigma} t_0}{N\Delta t} E(N_u)$$

Le lemme 3.1 permet de majorer le second terme  $T_2$  de la variance.

**Lemme 3.1** *Pour un processus gaussien  $X$  et pour un paramètre  $\eta$  assez petit on a, pour tout  $k$  tel que  $k\Delta t \geq t_0$ ,*

$$\begin{aligned} & P[X_0 < u, X_{\Delta t} > u, X_{k\Delta t} < u, X_{(k+1)\Delta t} > u] - p_u^2 \\ & \leq \frac{1}{4} \{P[u - \eta < X_0 \leq u, u - \eta < X_{k\Delta t} \leq u] - P[u - \eta < X_0 \leq u]^2\} \end{aligned}$$

On a d'après le lemme 3.1 que nous démontrons plus bas

$$T_2 \leq \frac{1}{4N\Delta t^2} \sum_{k=-N+1, |k\Delta t| \geq t_0}^{N+1} P[u - \eta < X_0 \leq u, u - \eta < X_{k\Delta t} \leq u] - P[u - \eta < X_0 \leq u]^2$$

Pour un paramètre  $\eta$  suffisamment petit, on peut écrire

$$P[u - \eta < X_0 \leq u] = \int_{u-\eta}^u p_X(x) dx \sim \eta p_X(u) \quad (3.26)$$

et de même

$$P[u - \eta < X_0 \leq u, u - \eta < X_{k\Delta t} \leq u] = \int_{u-\eta}^u \int_{u-\eta}^u p_{X_0, X_{k\Delta t}}(x, y) dx dy \sim \eta^2 p_{X_0, X_{k\Delta t}}(u, u)$$

On en déduit

$$P[u - \eta < X_0 \leq u, u - \eta < X_{k\Delta t} \leq u] - P[u - \eta < X_0 \leq u]^2 \sim \eta^2 [p_{X_0, X_{k\Delta t}}(u, u) - p_X(u)^2]$$

Par définition de la densité de probabilité gaussienne, on obtient ainsi

$$\begin{aligned} & P[u - \eta < X_0 \leq u, u - \eta < X_{k\Delta t} \leq u] - P[u - \eta < X_0 \leq u]^2 \\ &= \eta^2 \left[ \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - C^2(k\Delta t)}} \exp\left(\frac{-u^2(1 - C(k\Delta t))}{1 - C^2(k\Delta t)}\right) - p_X(u)^2 \right] + O(\eta^3) \\ &= \eta^2 \left[ \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - C^2(k\Delta t)}} e^{-u^2/(1+C(k\Delta t))} - \frac{1}{2\pi} e^{-u^2} \right] + O(\eta^3) \end{aligned}$$

En factorisant  $e^{-u^2}/2\pi$ , l'équation précédente devient

$$\begin{aligned} & P[u - \eta < X_0 \leq u, u - \eta < X_{k\Delta t} \leq u] - P[u - \eta < X_0 \leq u]^2 \\ &= \eta^2 \frac{e^{-u^2}}{2\pi} \left( \frac{e^{u^2 C(k\Delta t)/(1+C(k\Delta t))}}{\sqrt{1 - C^2(k\Delta t)}} - 1 \right) + O(\eta^3) \end{aligned}$$

On écrit alors le développement de Taylor de l'exponentielle et de la racine carrée par rapport à  $C(k\Delta t)$  pour obtenir

$$\begin{aligned} & P[u - \eta < X_0 \leq u, u - \eta < X_{k\Delta t} \leq u] - P[u - \eta < X_0 \leq u]^2 \\ &= \eta^2 \frac{e^{-u^2}}{2\pi} u^2 \frac{C(k\Delta t)}{1 + C(k\Delta t)} + O(\eta^3) \\ &= u^2 \eta^2 p(u)^2 \frac{C(k\Delta t)}{1 + C(k\Delta t)} + O(\eta^3) \end{aligned}$$

Enfin, par la relation (3.26),

$$|P[u - \eta < X_0 \leq u, u - \eta < X_{k\Delta t} \leq u] - P[u - \eta < X_0 \leq u]^2| \leq u^2 P[u - \eta < X_0 \leq u]^2 |C(k\Delta t)|$$

D'après le lemme et la relation ci-dessus, on a donc

$$T_2 \leq \frac{u^2 p_u^2}{4N\Delta t^2} \sum_{k=-N+1, |k\Delta t| \geq t_0}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) |C(k\Delta t)|$$

Finalement en remarquant que sous l'hypothèse de stationnarité du processus  $X$ ,

$$\begin{aligned} P(u - \eta < X_0 \leq u) &= P(u - \eta < X_0 \leq u, \dot{X}_0 < 0) + P(u - \eta < X_0 \leq u, \dot{X}_0 \geq 0) \\ &= 2\Delta t E(N_u) + O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

et par la formule d'intégration numérique (3.27) pour  $\Delta t$  assez petit on obtient

$$\begin{aligned} T_2 &\leq 2u^2 \frac{1}{N\Delta t} E(N_u)^2 \int_0^{N\Delta t} |C(t)| dt \leq 2u^2 \frac{1}{N\Delta t} E(N_u)^2 \int_0^{+\infty} |C(t)| dt \\ &\quad \frac{1}{\Delta t} \int_0^{N\Delta t} f(t) dt = \sum_{k=0}^N f(k\Delta t) + O(\Delta t) \end{aligned} \quad (3.27)$$

On obtient donc un majorant de la variance de l'estimateur empirique de l'espérance du nombre de franchissements de niveaux pour les processus gaussiens.  $\diamond$

$\diamond$  preuve du lemme 3.1

Pour montrer ce lemme on compare, pour un paramètre  $\eta$  et pour  $\Delta t$  assez petits, le terme

$$P_1 = P(X_0 < u, X_{\Delta t} > u, X_{k\Delta t} < u, X_{(k+1)\Delta t} > u) - p_u^2$$

avec le terme

$$P_2 = P(u - \eta < X_0 \leq u, u - \eta < X_{k\Delta t} \leq u) - P(u - \eta < X_0 \leq u)^2$$

On notera souvent  $A$  l'intervalle  $]u - \eta, u]$ . On remarque pour commencer que

$$P(X_0 \in A) = P(X_0 \in A, \dot{X}_0 \geq 0) + P(X_0 \in A, \dot{X}_0 < 0)$$

Or pour un processus stationnaire la probabilité de franchir un niveau  $u$  en croissant est égale à la probabilité de franchir un niveau  $u$  en décroissant. On a donc

$$P(X_0 \in A) = \frac{1}{2} P(X_0 \in A, \dot{X} \geq 0) = \frac{1}{2} p_u$$

On a par ailleurs l'égalité suivante

$$P(X_0 \in A, \dot{X}_0 > 0, X_{k\Delta t} \in A, \dot{X}_{k\Delta t} < 0) = P(X_0 \in A, \dot{X}_0 < 0, X_{k\Delta t} \in A, \dot{X}_{k\Delta t} > 0) \quad (3.28)$$

En effet, par définition de la densité de probabilité gaussienne du quadruplet  $(X_0, \dot{X}_0, X_t, \dot{X}_t)$ , on a si  $t > t_0$

$$p_t(u, \dot{x}_1, u, \dot{x}_2) = p_{-t}(u, -\dot{x}_1, u, -\dot{x}_2) \quad (3.29)$$

et par stationnarité

$$P(X_0 \in A, \dot{X}_0 < 0, X_t \in A, \dot{X}_t > 0) = P(X_{-t} \in A, \dot{X}_{-t} < 0, X_0 \in A, \dot{X}_0 > 0)$$

On a donc

$$P(X_0 \in A, \dot{X}_0 < 0, X_t \in A, \dot{X}_t > 0) = \int_{-\infty}^0 \int_0^{+\infty} \dot{x}_1 \dot{x}_2 p_{-t}(u, \dot{x}_1, u, \dot{x}_2) d\dot{x}_1 d\dot{x}_2$$

Finalement, en opérant le changement de variable  $\dot{x}_1 = -\dot{x}_1$  et  $\dot{x}_2 = -\dot{x}_2$  puis en appliquant l'égalité (3.29), on obtient

$$\begin{aligned}
P(X_0 \in A, \dot{X}_0 < 0, X_t \in A, \dot{X}_t > 0) &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^0 \dot{x}_1 \dot{x}_2 p_{-t}(u, -\dot{x}_1, u, -\dot{x}_2) d\dot{x}_1 d\dot{x}_2 \\
&= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^0 \dot{x}_1 \dot{x}_2 p_t(u, \dot{x}_1, u, \dot{x}_2) d\dot{x}_1 d\dot{x}_2 \\
&= P(X_0 \in A, \dot{X}_0 > 0, X_t \in A, \dot{X}_t < 0)
\end{aligned}$$

Par stationnarité, on a aussi que la probabilité de franchir le niveau  $u$  en croissant aux

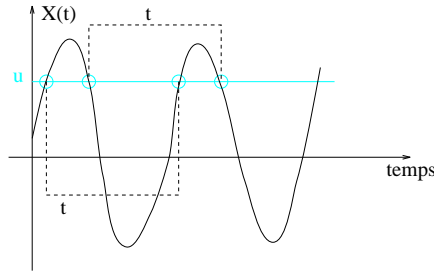


FIG. 3.4 – Franchissements croissants et décroissants espacés d'un temps  $t$

instants 0 et  $t$  est égale à la probabilité de franchir ce niveau aux instants 0 et  $t$  en décroissant (cf fig. 3.4).

$$P(X_0 \in A, \dot{X}_0 > 0, X_{k\Delta t} \in A, \dot{X}_{k\Delta t} > 0) = P(X_0 \in A, \dot{X}_0 < 0, X_{k\Delta t} \in A, \dot{X}_{k\Delta t} < 0)$$

Maintenant, en écrivant,

$$\begin{aligned}
&P(X_0 \in A, X_{k\Delta t} \in A) \\
&= P(X_0 \in A, \dot{X}_0 > 0, X_{k\Delta t} \in A, \dot{X}_{k\Delta t} > 0) + P(X_0 \in A, \dot{X}_0 > 0, X_{k\Delta t} \in A, \dot{X}_{k\Delta t} < 0) \\
&+ P(X_0 \in A, \dot{X}_0 < 0, X_{k\Delta t} \in A, \dot{X}_{k\Delta t} > 0) + P(X_0 \in A, \dot{X}_0 < 0, X_{k\Delta t} \in A, \dot{X}_{k\Delta t} < 0)
\end{aligned}$$

on a donc

$$\begin{aligned}
P(X_0 \in A, X_{k\Delta t} \in A) &= 2 \left[ P(X_0 \in A, \dot{X}_0 > 0, X_{k\Delta t} \in A, \dot{X}_{k\Delta t} > 0) \right. \\
&\quad \left. + P(X_0 \in A, \dot{X}_0 > 0, X_{k\Delta t} \in A, \dot{X}_{k\Delta t} < 0) \right]
\end{aligned}$$

On a intuitivement la relation ci-dessous qui formalise le fait que la probabilité d'avoir deux franchissements du même niveau dans des sens opposés est supérieure ou égale à la probabilité de franchir deux fois le niveau  $u$  dans le même sens. En effet lorsque l'écart de temps  $t$  est faible, la probabilité de franchir un niveau donné dans un sens puis dans

l'autre a tendance à être plus importante que la probabilité de franchir le niveau deux fois dans le même sens. Quand  $t$  croît, ces deux probabilités deviennent équivalentes.

$$P(X_0 \in A, \dot{X}_0 > 0, X_{k\Delta t} \in A, \dot{X}_{k\Delta t} < 0) \geq P(X_0 \in A, \dot{X}_0 > 0, X_{k\Delta t} \in A, \dot{X}_{k\Delta t} > 0)$$

On obtient ainsi

$$P(X_0 \in A, X_{k\Delta t} \in A) \geq 4P(X_0 \in A, \dot{X}_0 > 0, X_{k\Delta t} \in A, \dot{X}_{k\Delta t} > 0)$$

D'autre part, on a par définition de l'ensemble  $A$ ,

$$P(X_0 \in A, \dot{X}_0 > 0) = P(u - \eta < X_0 \leq u, \dot{X}_0 > 0)$$

si le pas de temps  $\Delta t$  est assez petit on peut donc approcher  $P(X_0 \in A, \dot{X}_0 > 0)$  par

$$\begin{aligned} P(u - \eta < X_0 \leq u, \frac{X_{\Delta t} - X_0}{\Delta t} > 0) &\sim P(u - \eta < X_0 \leq u, X_{\Delta t} > X_0) \\ &\leq P(X_0 < u, X_{\Delta t} > u) \end{aligned}$$

On montre qu'il existe deux constantes  $\eta$  et  $\eta'$  telles que pour un  $\Delta t$  assez petit on peut approcher  $P(X_0 < u, X_{\Delta t} > u)$  par

$$\begin{aligned} P(u - \eta < X_0 < u, 0 \leq X_{\Delta t} - X_0 < \eta') &\sim P(u - \eta < X_0 < u, 0 \leq \dot{X}_0 < \frac{\eta'}{\Delta t}) \\ &\leq P(X_0 \in A, \dot{X}_0 > 0) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$P(X_0 \in A, \dot{X}_0 > 0) \sim P(X_0 < u, X_{\Delta t} > u)$$

et on obtient ainsi pour  $\Delta t$  assez petit,

$$\begin{aligned} P(X_0 \in A, X_{k\Delta t} \in A) - P(X_0 \in A)^2 &\geq 4 [P(X_0 < u, X_{\Delta t} > u, X_{k\Delta t} < u, X_{(k+1)\Delta t} > u) \\ &\quad - P(X_0 < u, X_{\Delta t} > u)^2] \end{aligned}$$

On a ainsi montré le lemme.  $\diamond$

On s'intéresse maintenant au biais et à la variance relatifs. D'après l'équation (3.24), le biais relatif s'écrit pour  $u \neq 0$

$$\frac{b(\overline{N}_u)}{E(N_u)} = \frac{-\Delta t}{4} \sqrt{2\pi} \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \frac{u}{\sigma} + O(\Delta t^2) \quad (3.30)$$

Le biais relatif est une fonction linéaire décroissante du niveau normalisé  $u/\sigma$ , la valeur absolue du biais augmente donc avec celle de  $u/\sigma$  ce qui confirme les remarques intuitives faites plus haut pour des processus quelconques. Le biais dépend des statistiques du processus observé par l'intermédiaire du terme  $\dot{\sigma}/\sigma$ .



On n'obtient pas de relation d'équivalence pour la variance relative mais seulement une majoration.

$$\frac{V(\overline{N_u})}{E(N_u)^2} \leq \frac{1}{N\Delta t} [\sqrt{8\pi^3}\sigma e^{u^2/2\sigma^2} + 2u^2 \int_0^{+\infty} |C(t)|dt]$$

Si on considère que le majorant a une évolution proche de celle de la variance, cette relation indique comme précédemment que la variance relative a tendance à croître rapidement quand  $u$  tend vers des valeurs extrêmes.

Dans la partie suivante, on approche le biais et la variance de l'estimateur paramétrique gaussien du nombre moyen de franchissements croissants de niveaux. On pourra alors comparer les performances de l'estimateur empirique avec celles de l'estimateur paramétrique dans le cas particulier des processus gaussiens.

### 3.3 Estimateur paramétrique gaussien

On suppose dans cette section que  $X$  est un processus stationnaire gaussien, centré, à trajectoires régulières. Dans ce cas, les variables aléatoires  $X_t$  et  $\dot{X}_t$  sont statistiquement indépendantes et leur densité de probabilité jointe s'écrit pour un instant  $t$  fixé

$$p(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma\dot{\sigma}} e^{-x^2/2\sigma^2} e^{-\dot{x}^2/2\dot{\sigma}^2}$$

En effet, dans le cas général (non stationnaire), la densité de probabilité jointe d'un couple de processus gaussiens centrés  $Z = (X, Y)$  s'écrit

$$p(Z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Lambda)}} e^{-Z^T\Lambda^{-1}Z}$$

où la matrice de covariance  $\Lambda$  est définie par

$$\Lambda = \begin{pmatrix} E[X^2] & E[XY] \\ E[XY] & E[Y^2] \end{pmatrix}$$

Dans le cas du couple  $(X, \dot{X})$  pour un processus  $X$  stationnaire, le terme extradiagonal de  $\Lambda$  s'écrit  $E[X\dot{X}]$  et s'annule par la propriété (2.33). Ainsi quel que soit l'instant  $t$  la formule de Rice [45] devient

$$E(N_u) = \frac{1}{2\pi} \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} e^{-u^2/2\sigma^2}$$

En notant  $f$  la densité spectrale de puissance de  $X_t$ , on suppose que  $\int_0^{+\infty} (1+\nu^4)f(\nu)^2 d\nu$  est finie. Cette hypothèse implique que les quantités  $\int_0^{+\infty} C_{XX}^2(t)dt$ ,  $\int_0^{+\infty} C_{X\dot{X}}^2(t)dt$  et  $\int_0^{+\infty} C_{\dot{X}\dot{X}}^2(t)dt$  sont elles aussi finies.

Pour étudier l'estimateur paramétrique gaussien de  $E(N_u)$ , on va distinguer deux cas de figures. Dans le premier on observe à la fois le processus et sa dérivée  $(X_{k\Delta t}, \dot{X}_{k\Delta t})_{k=1,\dots,N}$ . On rencontre cette situation par exemple lorsque la trajectoire "observée" est une simulation. Dans le deuxième cas on suppose que l'on observe uniquement le processus  $(X_{k\Delta t})_{k=1,\dots,N}$ . Sous cette hypothèse, la dérivée inconnue est approchée par la différence finie  $(X_{k\Delta t}^\Delta)_{k=1,\dots,N}$  de  $(X_{k\Delta t})_{k=1,\dots,N}$  au premier ordre.

### 3.3.1 Observation du couple $(X_t, \dot{X}_t)$

Lorsque l'on observe le couple  $(X_{k\Delta t}, \dot{X}_{k\Delta t})_{k=1,\dots,N}$ , l'estimateur paramétrique du nombre moyen de franchissements du niveau  $u$  s'écrit naturellement

$$\widetilde{E(N_u)} = \frac{1}{2\pi} \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}} e^{-u^2/2\hat{\sigma}^2} \quad (3.31)$$

et nous montrons la proposition 3.5 pour son risque quadratique.

**Proposition 3.5** *S'il existe  $\sigma_0$  tel que  $\sigma \geq \sigma_0 > 0$  alors*

$$E \left[ (\widetilde{E(N_u)} - E(N_u))^2 \right] \leq \frac{1}{N\Delta t} \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{e^{-1}}{u^2 \hat{\sigma}^2} \int_0^{+\infty} C_{\dot{X}\dot{X}}^2(t) dt + K_u^2 \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \int_0^{+\infty} C_{XX}^2(t) dt \right) \quad (3.32)$$

en notant  $K_u = \frac{(5+\sqrt{17})^2 - 2(5+\sqrt{17})}{4u^2} e^{-(5+\sqrt{17})/4}$ .

◇ preuve de la proposition 3.5

Nous montrons tout d'abord quelles sont les vitesses de convergence des variances des estimateurs empiriques  $\hat{\sigma}^2 = 1/N \sum_{i=1}^N X_{i\Delta t}^2$  et  $\hat{\dot{\sigma}}^2 = 1/N \sum_{i=1}^N \dot{X}_{i\Delta t}^2$  de  $\sigma^2$  et  $\dot{\sigma}^2$ . Soit  $V_N(\hat{\sigma}^2)$  la variance de  $\hat{\sigma}^2$ , on a

$$\begin{aligned} V_N(\sigma^2) &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E[X_{i\Delta t}^2 X_{j\Delta t}^2] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) C_{X^2 X^2}(k\Delta t) \end{aligned}$$

On utilise alors la relation  $C_{Z^2 Y^2}(t) = 2C_{ZY}^2(t)$  et la formule d'intégration numérique (3.27). On obtient ainsi

$$V_N(\hat{\sigma}^2) \leq \frac{4}{N\Delta t} \int_0^{+\infty} C_{XX}^2(t) dt$$

De même, on montre que

$$V_N(\hat{\dot{\sigma}}^2) \leq \frac{4}{N\Delta t} \int_0^{+\infty} C_{\dot{X}\dot{X}}^2(t) dt$$

Nous remarquons d'autre part que les estimateurs empiriques des variances  $\sigma^2$  et  $\hat{\sigma}^2$  sont sans biais.

Le risque quadratique de l'estimateur est majoré :

$$E[(\widetilde{E(N_u)} - E(N_u))^2] \leq \frac{1}{2\pi^2} \left( E \left[ \left( \frac{\hat{\sigma} - \dot{\sigma}}{\hat{\sigma}} e^{-u^2/2\hat{\sigma}^2} \right)^2 \right] + \dot{\sigma}^2 E \left[ \left( \frac{e^{-u^2/2\hat{\sigma}^2}}{\hat{\sigma}} - \frac{e^{-u^2/2\sigma^2}}{\sigma} \right)^2 \right] \right)$$

La fonction  $\frac{e^{-u^2/2\hat{\sigma}^2}}{\hat{\sigma}}$  peut être majorée par  $1/|u|e^{-1/2}$  pour tout  $u$ . Ainsi le premier terme de droite est majoré de la façon suivante :

$$E \left[ \left( \frac{\hat{\sigma} - \dot{\sigma}}{\hat{\sigma}} e^{-u^2/2\hat{\sigma}^2} \right)^2 \right] \leq \frac{e^{-1}}{u^2} |E[(\hat{\sigma} - \dot{\sigma})^2]| \quad (3.33)$$

Notons maintenant  $g_u$  est la fonction définie par

$$g_u(\sigma) = \frac{e^{-u^2/2\sigma^2}}{\sigma}$$

La fonction  $g_u$  étant Lipschitzienne sur  $[\sigma_0, +\infty[$ ,  $\sigma_0 > 0$ , on a pour tout niveau  $u$

$$|g_u(\hat{\sigma}) - g_u(\sigma)| \leq \left\| \frac{\partial g_u}{\partial \sigma} \right\|_{\infty} |\hat{\sigma} - \sigma|$$

En remarquant que  $K_u = \left\| \frac{\partial g_u}{\partial \sigma} \right\|_{\infty} = \frac{(5+\sqrt{17})^2 - 25 + \sqrt{17}}{4u^2} e^{-(5+\sqrt{17})/4}$ , on montre que le second terme de droite est majoré par

$$E \left[ \left( \frac{e^{-u^2/2\hat{\sigma}^2}}{\hat{\sigma}} - \frac{e^{-u^2/2\sigma^2}}{\sigma} \right)^2 \right] \leq K_u^2 E[(\hat{\sigma} - \sigma)^2] \quad (3.34)$$

Finalement, on a donc

$$E[(\widetilde{E(N_u)} - E(N_u))^2] \leq \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{e^{-1}}{u^2} E[(\hat{\sigma} - \dot{\sigma})^2] + K_u^2 \dot{\sigma}^2 E[(\hat{\sigma} - \sigma)^2] \right)$$

Nous remarquons alors que

$$E[(\hat{\sigma} - \sigma)^2] = E\left[\left(\frac{\hat{\sigma}^2 - \sigma^2}{\hat{\sigma} + \sigma}\right)^2\right] \leq \frac{1}{\sigma^2} E[(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)^2] \quad (3.35)$$

et nous en déduisons que

$$E[(\widetilde{E(N_u)} - E(N_u))^2] \leq \frac{4}{N\Delta t} \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{e^{-1}}{u^2 \dot{\sigma}^2} \int_0^{N\Delta t} C_{\dot{X}\dot{X}}^2(t) dt + K_u^2 \frac{\dot{\sigma}^2}{\sigma^2} \int_0^{N\Delta t} C_{XX}^2(t) dt \right)$$

Nous avons ainsi démontré la proposition 3.5.  $\diamond$

### 3.3.2 Observation du processus $X_t$

Dans le cadre de simulations on peut généralement obtenir à la fois les points  $(X_{k\Delta t})$  et les points  $(\dot{X}_{k\Delta t})$ . En revanche quand les données sont mesurées, on ne dispose souvent que de la trajectoire discrétisée  $(X_{k\Delta t})_{k=1,\dots,N}$ . On approche alors le processus dérivée  $\dot{X}$  par la différence finie  $X^\Delta$  (3.6) et on pose pour le couple  $(X, X^\Delta)$

$$E_u^\Delta = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_\Delta}{\sigma} e^{-u^2/2\sigma^2}$$

Ce nombre est une approximation du nombre moyen de franchissements du niveau  $u$  pour le processus  $X$ . Il n'est pas construit en appliquant la formule de Rice au couple  $(X_t, X_t^\Delta)$ . En effet, rien ne permet d'affirmer que les variables de ce couple sont statistiquement indépendantes. On n'obtiendrait donc pas exactement cette forme par la formule de Rice. Toutefois, cette approximation convient très bien à l'estimation de l'espérance du nombre de franchissements de niveaux et amène à considérer l'estimateur du nombre moyen  $E(N_u)$  de franchissements du niveau  $u$  suivant :

$$\widetilde{E}_u = \frac{1}{2\pi} \frac{\hat{\sigma}_\Delta}{\hat{\sigma}} e^{-u^2/2\hat{\sigma}^2}$$

avec  $\hat{\sigma}$  et  $\hat{\sigma}_\Delta$  les écart-types empiriques de  $X$  et  $X^\Delta$ . Pour cet estimateur, on va montrer la proposition 3.6.

**Proposition 3.6** *L'estimateur paramétrique du nombre moyen de franchissements de niveaux vérifie la relation suivante lorsque  $(N, \Delta t) \rightarrow (\infty, 0)$ .*

$$E[(\widetilde{E}_u - E(N_u))^2] \leq \frac{\Delta t^4}{8^2} \frac{\ddot{\sigma}^4}{4\pi^2 \sigma^2 \dot{\sigma}^2} e^{-u^2/\sigma^2} \quad (3.36)$$

$$+ \frac{4}{N\Delta t} \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{e^{-1}}{u^2 \dot{\sigma}^2} \int_0^{+\infty} C_{\dot{X}\dot{X}}^2(t) dt + K_u^2 \frac{\dot{\sigma}^2}{\sigma^2} \int_0^{+\infty} C_{XX}^2(t) dt \right)$$

où  $K_u$  est défini comme dans la proposition 3.5. Le premier terme de droite représente le carré du biais de l'estimateur, tandis que le second terme correspond à sa variance. Les paramètres  $\sigma$ ,  $\dot{\sigma}$  et  $\ddot{\sigma}$  sont les écart-types respectifs de  $X_t$ ,  $\dot{X}_t$  et  $\ddot{X}_t$ .

On remarque que l'ordre de convergence de la variance de l'estimateur paramétrique est le même que l'on observe le couple  $(X, \dot{X})$  ou uniquement le processus  $X$ . En revanche, dans le second cas le fait d'approcher la dérivée  $\dot{X}$  par une différence finie engendre un biais en  $\Delta t^2$ . Il est intéressant de noter que le biais relatif de cet estimateur s'exprime

$$\frac{b(\widetilde{E}_u)}{E(N_u)} = \frac{\Delta t^2}{8} \frac{\ddot{\sigma}^2}{\dot{\sigma}^2} + O(\Delta t^3)$$

et il ne dépend pas du niveau  $u$  franchi. Il s'exprime uniquement en fonction du pas de temps d'observation et des propriétés statistiques du processus.

◇ preuve de la proposition 3.6

On veut déterminer la convergence quadratique de  $\widetilde{E}_u$  vers  $E(N_u)$  quand  $N \rightarrow +\infty$  et  $\Delta t \rightarrow 0$ . On décompose la différence  $\widetilde{E}_u - E(N_u)$  comme suit.

$$\widetilde{E}_u - E(N_u) = \widetilde{E}_u - E_u^\Delta + E_u^\Delta - E(N_u)$$

et on approche dans un premier temps la quantité  $E_u^\Delta - E(N_u)$  qui est déterministe et constitue le biais de l'estimateur. on peut montrer comme pour la proposition 3.5 que la partie  $\widetilde{E}_u - E_u^\Delta$  est d'espérance nulle. Puis on estime l'espérance du carré du terme  $\widetilde{E}_u - E_u^\Delta$  qui correspond à une erreur aléatoire.

a) Erreur déterministe

Nous nous intéressons tout d'abord au terme déterministe  $E_u^\Delta - E(N_u)$  :

$$E_u^\Delta - E(N_u) = \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-u^2/2\sigma^2} (\sigma_\Delta - \dot{\sigma})$$

$X^\Delta$  étant centré,

$$\sigma_\Delta^2 = E \left[ \left( \frac{X_{t+\Delta t} - X_t}{\Delta t} \right)^2 \right]$$

et par la formule des accroissements finis pour la première ligne et avec  $E[\dot{X}_t \ddot{X}_t] = 0$  pour la seconde, on a

$$\begin{aligned} \sigma_\Delta^2 &= E \left[ \left( \dot{X}_t + \frac{\Delta t}{2} \ddot{X}_t + O(\Delta t^2) \right)^2 \right] \\ &= E \dot{X}_t^2 + \frac{\Delta t^2}{4} E \ddot{X}_t^2 + O(\Delta t^3) \end{aligned}$$

d'où par le développement en série de  $\sqrt{1+x^2}$  autour de 0

$$\sigma_\Delta = \dot{\sigma} + \frac{\Delta t^2}{8} \frac{\ddot{\sigma}^2}{\dot{\sigma}} + O(\Delta t^3)$$

on obtient ainsi

$$\begin{aligned} |E_u^\Delta - E(N_u)| &= \frac{\Delta t^2}{8} \frac{\ddot{\sigma}^2}{2\pi\sigma\dot{\sigma}} e^{-u^2/2\sigma^2} + O(\Delta t^3) \\ &= \frac{\Delta t^2}{8} \frac{\ddot{\sigma}^2}{\dot{\sigma}^2} E(N_u) + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (3.37)$$

b) Erreur aléatoire

Nous procédons comme pour montrer la proposition 3.5. La première étape consiste donc à donner les vitesses de convergence des estimateurs empiriques  $\hat{\sigma}^2$  et  $\hat{\sigma}_\Delta^2$  des variances  $\sigma^2$  et  $\sigma_\Delta^2$ .

$$\begin{aligned} V_N(\hat{\sigma}^2) &= \frac{1}{N} E X_1^4 + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) E X_1^2 X_{1+k}^2 - \sigma^4 \\ V_N(\hat{\sigma}_\Delta^2) &= \frac{1}{N} E X_1^{\Delta 4} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) E X_1^{\Delta 2} X_{1+k}^{\Delta 2} - \sigma_\Delta^4 \end{aligned}$$

Par des formules d'accroissements finis telles que (3.38)

$$\begin{aligned} E [X_1^{\Delta 2} X_{1+k}^{\Delta 2}] &= E \left[ (\dot{X}_1 + \Delta t \ddot{X}_1 + O(\Delta t^2))^2 (\dot{X}_{1+k} + \Delta t \ddot{X}_{1+k} + O(\Delta t^2))^2 \right] \quad (3.38) \\ &= E \left[ \dot{X}_1^2 \dot{X}_{1+k}^2 \right] + 2\Delta t^2 E \left[ \dot{X}_1^2 \ddot{X}_{1+k}^2 \right] + O(\Delta t^3) \end{aligned}$$

et par la formule d'intégration numérique (3.27), on peut développer les variances  $V_N(\hat{\sigma}^2)$  et  $V_N(\hat{\sigma}_\Delta^2)$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} V_N(\hat{\sigma}^2) &= \frac{4}{N\Delta t} \int_0^\infty C_{XX}^2(t) dt + O\left(\frac{1}{N}\right) \\ V_N(\hat{\sigma}_\Delta^2) &= \frac{4}{N\Delta t} \int_0^\infty C_{\dot{X}\dot{X}}^2(t) dt + O\left(\frac{1}{N}\right) \end{aligned}$$

Nous montrons alors comme précédemment que

$$E[(\widetilde{E}_u - E_u^\Delta)^2] \leq \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{e^{-1}}{u^2} E[(\hat{\sigma}_\Delta - \sigma_\Delta)^2] + K_u^2 \dot{\sigma}^2 E[(\hat{\sigma} - \sigma)^2] \right)$$

Nous écrivons une relation similaire à l'équation (3.35) pour  $\sigma_\Delta$  :

$$E[(\hat{\sigma}_\Delta - \sigma_\Delta)^2] = E\left[\left(\frac{\hat{\sigma}_\Delta^2 - \sigma_\Delta^2}{\hat{\sigma}_\Delta + \sigma_\Delta}\right)^2\right] \leq \frac{1}{\sigma_\Delta^2} E[(\hat{\sigma}_\Delta^2 - \sigma_\Delta^2)^2] \quad (3.39)$$

or

$$\frac{1}{\sigma_\Delta^2} = \frac{1}{\dot{\sigma}^2 + \Delta t^2/4\ddot{\sigma}^2 + O(\Delta t^3)} = \frac{1}{\dot{\sigma}^2} \left(1 - \frac{\Delta t^2}{4} \ddot{\sigma}\right) + O(\Delta t^3)$$

et nous en déduisons que

$$E[(\widetilde{E}_u - E_u^\Delta)^2] \leq \frac{4}{N\Delta t} \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{e^{-1}}{u^2 \dot{\sigma}^2} \int_0^{N\Delta t} C_{\dot{X}\dot{X}}^2(t) dt + K_u^2 \frac{\dot{\sigma}^2}{\sigma^2} \int_0^{N\Delta t} C_{XX}^2(t) dt \right)$$

Nous avons ainsi montré la proposition.  $\diamond$

### 3.3.3 Comparaison des estimateurs empirique et paramétrique

Dans le cas particulier des processus gaussiens, on peut comparer l'estimateur empirique à l'estimateur paramétrique par les propositions 3.4 et 3.6.

Il est immédiat que le biais de l'estimateur paramétrique qui est négligeable ou en  $O(\Delta t^2)$  suivant que l'on observe le couple  $(X_t, \dot{X}_t)$  ou uniquement le processus  $X_t$  est meilleur que celui de l'estimateur empirique (en  $O(\Delta t)$ ). Il suffit de comparer les biais relatifs :

$$\frac{b(\overline{N}_u)}{E(N_u)} = \frac{-\Delta t \sqrt{2\pi} \dot{\sigma} u}{4 \sigma \sigma} + O(\Delta t^2)$$

$$\frac{b[\widetilde{E}_u]}{E(N_u)} \sim \frac{\Delta t^2 \ddot{\sigma}^2}{8 \dot{\sigma}^2} + O(\Delta t^3) \quad (3.40)$$

Le biais relatif de l'estimateur empirique dépend linéairement du niveau normalisé  $u/\sigma$  et devient donc important pour les grandes valeurs de  $u$ , tandis que celui de l'estimateur paramétrique est constant.

Les variances sont toutes les deux en  $O(1/N\Delta t)$ . D'après la majoration des variances relatives, on a que la variance de l'estimateur empirique a une croissance proche de  $e^{u^2}$ , La variance de l'estimateur paramétrique croît moins vite : le terme  $K_u^2$  est de l'ordre de  $1/u^2$ , la variance croît donc au maximum en  $\frac{e^{u^2/\sigma^2}}{u^2}$  quand  $u$  croît. On remarque que la borne de la la variance de l'estimateur gaussien est infinie en  $u = 0$ , ce qui n'est pas réaliste.

$$\frac{V(\overline{N}_u)}{E(N_u)^2} \leq \frac{1}{N\Delta t} [\sqrt{2\pi^3}\sigma e^{u^2/2\sigma^2} + 2u^2 \int_0^{+\infty} |C(t)| dt]$$

$$\frac{V(\widetilde{E}_u)}{E(N_u)^2} \leq \frac{1}{N\Delta t} (C_1 \frac{e^{u^2/\sigma^2}}{u^2} + C_2 \frac{e^{u^2/\sigma^2}}{u^4})$$

On compare ces variances (fig. 3.5) dans le cas particulier d'un processus gaussien centré réduit. On approche sa fonction de corrélation par une fonction du type  $C(t) = \cos(\omega t) \exp(-at^2)$  avec  $a = 0.1$  et  $\omega = 1$ . La figure 3.5 ne donne qu'une tendance relative pour les deux variances, mais elle permet de remarquer que l'estimateur paramétrique est bien meilleur que l'estimateur empirique quel que soit le niveau franchi.

La figure 3.6, sur laquelle on a tracé les coefficients de variation des deux estimateurs en fonction du niveau normalisé, met en évidence le comportement respectif des 2 estimateurs quand le niveau  $u$  franchi devient grand (jusqu'à 6 écart-types) et confirme la remarque concernant l'évolution des variances relatives en fonction du niveau  $u$ .

### 3.4 Estimateur de projection

Nous étudions maintenant un estimateur de minimum de contraste du nombre moyen  $E(N_u)$  de franchissements du niveau  $u$  pour un processus stationnaire, mélangeant, à valeurs réelles, de trajectoires deux fois continument dérivables et de loi régulière inconnue.

Comme dans l'étude de l'estimateur paramétrique gaussien du nombre moyen de franchissements croissants de niveaux (cf § 3.3) nous distinguons deux cas. Le premier dans lequel nous ne disposons que de l'observation du processus  $X$ . Et le deuxième dans lequel nous supposons que nous observons à la fois le processus  $X$  lui-même et sa dérivée  $\dot{X}$ . Dans le premier cas, la dérivée  $\dot{X}$  de  $X$  est approchée par une différence finie du premier ordre (3.6). Nous étudions pour commencer le cas dans lequel nous avons supposé que nous observons uniquement le processus  $X$ . Sous ces hypothèses, nous construisons l'estimateur du nombre moyen de franchissements croissants de niveaux, puis nous décrivons

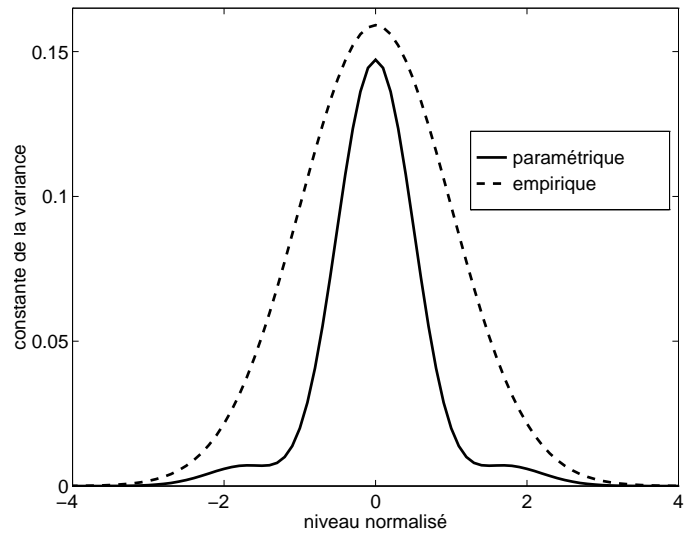


FIG. 3.5 – Comparaison des variances des estimateurs de  $E(N_u)$

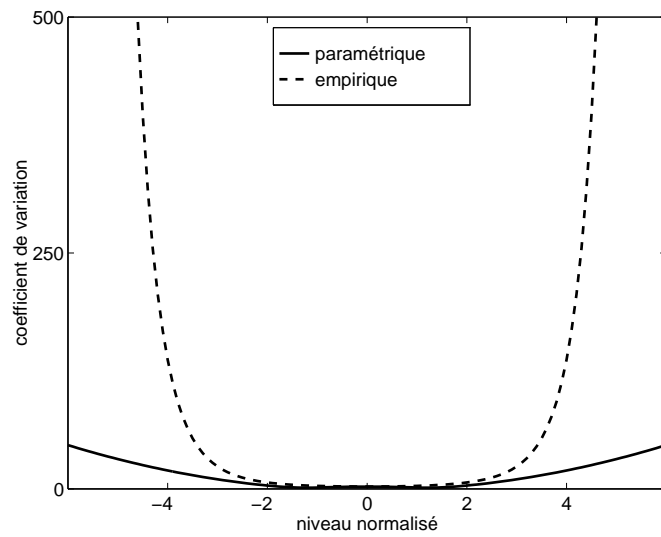


FIG. 3.6 – Coefficient de variation  $V(\widehat{E(N_u)})/E(N_u)^2$



ses propriétés statistiques. Nous verrons ensuite que le fait de disposer d'une observation du couple  $(X, \dot{X})$  réduit l'erreur sur l'estimateur du nombre moyen de franchissements de niveaux. Les preuves sont sensiblement les mêmes dans les deux cas.

Cette section est organisée de la façon suivante. Dans la première partie, nous décrivons l'estimateur de projection du nombre moyen  $E(N_u)$  de franchissements croissants du niveau  $u$  puis, la seconde partie est consacrée à la majoration de l'erreur quadratique intégrée entre l'estimateur et  $E(N_u)$  dans le cas où seul le processus est observé. Dans la troisième partie, nous donnons des résultats analogues pour la situation dans laquelle nous disposons de séries temporelles du processus et de sa dérivée. Enfin, dans la dernière partie, nous proposons une preuve du théorème de Jackson dans  $\mathbb{R}^2$  qui majore, en norme  $\mathbb{L}^p$ , l'écart entre une fonction régulière et un polynôme par une quantité qui dépend du degré du polynôme et d'un paramètre de régularité de la fonction.

### 3.4.1 Description de l'estimateur

La figure 3.7 schématise la démarche suivie pour construire l'estimateur de projection. La vraie densité de probabilité inconnue  $s$  du couple  $(X_t, \dot{X}_t)$  est projetée sur un espace de polynômes  $P_L$ . On note  $\tilde{s}$  le modèle de loi jointe ainsi obtenu et les coefficients de ce modèle approché sont ajustés à l'aide des observations  $(X_i)_{i=1, \dots, N}$  pour construire l'estimateur de projection  $\hat{s}_N$  de la loi jointe. Finalement, la formule de Rice permet de calculer une estimation  $E_{\hat{s}_N}(N_u)$  du nombre moyen  $E_s(N_u)$  de franchissements du niveau  $u$ .

On suppose que les couples  $(X_t, \dot{X}_t)$  ont même loi et que leur densité de probabilité notée  $s$  peut se mettre sous la forme

$$s(x, \dot{x}) = s'(x, \dot{x}) p_1(x) p_2(\dot{x}) \quad (3.41)$$

Les fonctions  $p_1$  et  $p_2$  sont des densités de probabilité fixées. Dans le cas général elles ne sont pas égales aux densités marginales de  $(X_t, \dot{X}_t)$ . On verra plus loin comment choisir  $p_1$  et  $p_2$ . Le choix de la forme (3.41) pour la densité  $s$  ne réduit pas la généralité car quelle que soit la densité  $p$ , on peut écrire  $p(x, \dot{x}) = \frac{p(x, \dot{x})}{p_1(x)p_2(\dot{x})} p_1(x) p_2(\dot{x})$ .

On suppose d'autre part que, pour tout  $\Delta t$  fixé, les couples  $(X_t, X_t^\Delta)$  sont identiquement distribués, de densité de probabilité  $s_\Delta$ , avec

$$s_\Delta(x, \dot{x}) = s'_\Delta(x, \dot{x}) p_1(x) p_2(\dot{x}) \quad (3.42)$$

On note ici encore  $p_2$  pour la deuxième densité marginale comme dans le modèle où l'on observe aussi la dérivée du processus bien que ces deux densités marginales ne soient pas obligatoirement égales.

Notons  $\mathbb{P}_L$  l'espace des polynômes de  $\mathbb{R}^2$  de degré inférieur ou égal à  $L$  et  $D = D(L) = \frac{(L+1)(L+2)}{2}$  la dimension de cet espace. Pour  $L$  fixé, on pose

$$\tilde{s}(x, \dot{x}) = \sum_{k=0}^L \sum_{i=0}^k d_{i, k-i} \varphi_{i, k-i}(x, \dot{x}) p_1(x) p_2(\dot{x}) \quad \text{si } (x, \dot{x}) \in I \quad (3.43)$$

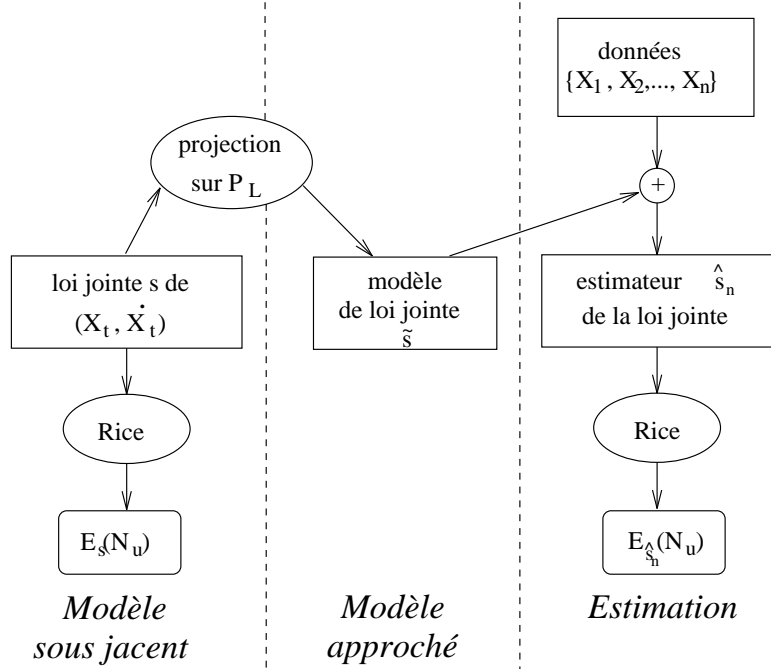


FIG. 3.7 – Estimation de  $E(N_u)$

$$= p_1(x)p_2(\dot{x}) \text{ ailleurs}$$

Les fonctions  $\varphi_{i,k-i}$  sont des polynômes de  $\mathbb{R}^2$  de degrés respectifs  $(i, k-i)$  qui sont définis uniquement sur le compact  $I$  et qui forment une base de  $\mathbb{P}_L(I)$ . Quitte à faire un abus de notation, on pose

$$\varphi_{i,k-i}(x, \dot{x}) = \varphi_{i,k-i}(x, \dot{x}) \mathbf{1}_I(x, \dot{x}) \quad (3.44)$$

Il arrivera souvent dans la suite que l'on omette d'écrire la fonction indicatrice  $\mathbf{1}_I(\cdot, \cdot)$  particulièrement dans les cas où ce que l'on énonce est vrai aussi sur  $\mathbb{R}^2$  tout entier, mais on sous-entendra toujours qu'elle est écrite.

L'ensemble  $I$  est un compact assez large de  $\mathbb{R}^2$  de la forme  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  qui restreint la fonction  $\tilde{s}$  de façon à pouvoir utiliser un théorème de Jackson pour majorer l'erreur d'approximation entre  $s_\Delta$  et  $\tilde{s}$  sur  $I$ . La restriction à un compact se justifie physiquement dans la mesure où, en pratique, quelle que soit la longueur finie de la série temporelle étudiée la probabilité d'atteindre des valeurs infinies est extrêmement faible. Le lemme 3.3 indique comment choisir le compact  $I$ .

Les coefficients  $d_{ij}$  sont tels que

$$E_t[\varphi_{i,j}(X, X^\Delta)] = E_{s_\Delta}[\varphi_{i,j}(X, X^\Delta)] \text{ pour } 0 \leq i + j \leq L$$

La fonction  $\tilde{s}'(x, \dot{x}) \mathbf{1}_I(\cdot, \cdot) = \sum_{k=0}^L \sum_{i=0}^k d_{i,k-i} \varphi_{i,k-i}(x, \dot{x}) \mathbf{1}_I(\cdot, \cdot)$  est donc la projection de  $s'_\Delta$  sur l'espace  $\mathbb{P}_L(I)$  pour le produit scalaire défini par

$$\langle a, b \rangle = \iint_I a(x, \dot{x}) b(x, \dot{x}) p_1(x) p_2(\dot{x}) dx d\dot{x} \quad (3.45)$$

On considère une suite d'observations discrétisées  $(X_{k\Delta t})_{k=1,\dots,N}$  de  $X$ . Le pas de discrétisation  $\Delta t$  est constant. On cherche alors un estimateur  $\hat{s}_N$  de la densité de probabilité jointe  $s$  de  $(X_t, \dot{X}_t)$  sous la forme

$$\begin{aligned}\hat{s}_N(x, \dot{x}) &= \sum_{k=0}^{L(N)} \sum_{i=0}^k \hat{d}_{i,k-i} \varphi_{i,k-i}(x, \dot{x}) p_1(x) p_2(\dot{x}) \quad \text{si } (x, \dot{x}) \in I \\ &= p_1(x) p_2(\dot{x}) \quad \text{ailleurs}\end{aligned}\quad (3.46)$$

Les coefficients  $\hat{d}_{ij}$  vérifient la contrainte

$$E_{\hat{s}_N}[\varphi_{i,j}(X, X^\Delta)] = \hat{m}_{ij} \quad \text{pour } 0 \leq i + j \leq L(N)$$

avec  $\hat{m}_{ij}$  les moments empiriques correspondant à  $E[\varphi_{i,j}(X, X^\Delta)]$ . Et  $L$  est une fonction croissante du nombre de points d'observation  $N$ . Intuitivement, on comprend que plus la suite des observations est longue et plus on pourra utiliser des moments empiriques d'ordres élevés pour construire l'estimateur  $\hat{s}_N$ . On notera dans la suite le plus souvent  $L$  pour  $L(N)$ . On remarque aussi que, les moments empiriques étant des estimateurs sans biais (ie  $E(\hat{m}_{ij}) = E_{s_\Delta}[\varphi_{i,j}(X, X^\Delta)]$ ), on a  $E(\hat{d}_{ij}) = d_{ij}$ .

D'autre part, c'est ici qu'intervient le choix des lois  $p_1$  et  $p_2$ . En effet, pour satisfaire le mieux possible les contraintes  $E_{\hat{s}_N}[\varphi_{i,j}(X, X^\Delta)] = \hat{m}_{ij}$  sur les coefficients  $\hat{d}_{ij}$ , on a intérêt à choisir pour  $p_1$  (resp.  $p_2$ ) une loi paramétrique qui s'ajuste bien sur l'échantillon  $(X_{k\Delta t})_{k=1,\dots,N}$  (resp.  $(X_{k\Delta t}^\Delta)_{k=1,\dots,N}$ ). Il faut aussi que les densités  $p_1$  et  $p_2$  soient telles que leurs moments existent jusqu'à l'ordre  $L$  et en particulier que  $|\int_0^{+\infty} \dot{x}^k p_2(\dot{x}) d\dot{x}| < +\infty$  pour tout  $k \leq L + 1$ . Ici, on continuera à considérer  $p_1$  et  $p_2$  comme des densités paramétriques préalablement choisies et le problème de leur identification ne sera pas abordé ici (de même que la vitesse de cette estimation qui est de l'ordre de  $\sqrt{N}$  si les densités sont suffisamment régulières).

Pour les différentes densités de probabilité jointes ci-dessus, la formule de Rice (3.1) donne le nombre moyen de franchissements croissants d'un niveau  $u$ . Par exemple,

$$\begin{aligned}E_s(N_u) &= p_1(u) \left( \int_0^{b_2} \dot{x} s'(u, \dot{x}) p_2(\dot{x}) d\dot{x} + \int_{b_2}^{+\infty} p_2(\dot{x}) d\dot{x} \right) \\ E_{\hat{s}}(N_u) &= \sum_{k=0}^L \sum_{i=0}^k \hat{d}_{i,k-i} \int_0^{+\infty} y \varphi_{i,k-i}(u, \dot{x}) p_2(\dot{x}) d\dot{x} p_1(u) + p_1(u) \int_{b_2}^{+\infty} p_2(\dot{x}) d\dot{x} p_1(u)\end{aligned}\quad (3.47)$$

Ici on estime  $E_s(N_u)$  en projetant la loi jointe  $s_\Delta$  de  $X_t$  et  $X_t^\Delta$  sur une base de polynômes pondérée par le produit  $p_1(u)p_2(\dot{x})$ . Ceci revient à perturber le nombre moyen  $E_{p_1 p_2}(N_u)$  de franchissements sous l'hypothèse d'indépendance de la variable aléatoire  $X_t^\Delta$  par rapport à  $X_t$  pour tout instant  $t$  fixé. Par conséquent, si la dépendance statistique entre les variables  $X_t$  et  $X_t^\Delta$  n'est pas trop forte, on devrait de construire un bon estimateur de  $E_s(N_u)$  en ajoutant seulement un petit nombre de termes de perturbation à  $E_{p_1 p_2}(N_u)$ .

Pour simplifier l'écriture, on suppose qu'on se restreint désormais au compact  $I$ .

Revenons un instant sur la formule (3.47) afin d'expliquer pourquoi nous n'imposons pas de condition d'orthonormalité sur les polynômes  $\varphi_{ij}$ .

L'intérêt de projeter sur une base de polynômes orthonormés est de réduire la variance de l'estimateur.

Considérons d'abord un exemple classique. On suppose que l'on estime une fonction  $f$  sur un compact de  $\mathbb{R}$  en la projetant sur une base de polynômes orthonormaux  $\psi_k$ . Les coefficients sont estimés en minimisant un contraste.

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=1}^K \hat{a}_k \psi_k(x)$$

Pour calculer la variance intégrée de l'estimateur  $\hat{f}$  de  $f$  on écrit

$$\int E[(\hat{f}(x) - f(x))^2] dx = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K E[(\hat{a}_k - a_k)(\hat{a}_l - a_l)] \int \psi_k(x) \psi_l(x) dx = \sum_{k=1}^K E[(\hat{a}_k - a_k)^2]$$

La variance de  $\hat{f}$  est donc de l'ordre de  $K$  quand la base de polynômes est orthonormée. Si la base de polynômes n'était pas orthogonale, la variance serait de l'ordre de  $K^2$ .

Revenons maintenant au cas de l'estimateur du nombre moyen de franchissements de niveaux. En pratique, nous projetons la fonction  $E(N_u)$  sur une base de polynômes pondérée par  $p_1$ . L'équation (3.47) s'écrit encore

$$E_{\hat{s}}(N_u) = \sum_{k=1}^D d_k \pi_k(u) p_1(u)$$

avec

$$\pi_k(u) = \int_0^{+\infty} \dot{x} \varphi_k(u, \dot{x}) p_2(\dot{x}) d\dot{x} \quad (3.48)$$

On remarque que  $\pi_k$  est indépendant de  $\dot{x}$  et forme un polynôme en  $u$ . On a

$$\begin{aligned} \int V[E_{\hat{s}_N}(N_u)^2] &= \int E \left[ \sum_{k=1}^D (\hat{d}_k - d_k) \int_0^{+\infty} \dot{x} \varphi_k(u, \dot{x}) p_2(\dot{x}) d\dot{x} p_1(u) \right]^2 du \\ &= \sum_{k=1}^D \sum_{l=1}^D E[(\hat{d}_k - d_k)(\hat{d}_l - d_l)] \int \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \dot{x} z \varphi_k(u, \dot{x}) \varphi_l(u, z) p_2(\dot{x}) p_2(z) p_1(u)^2 d\dot{x} dz du \\ &= \sum_{k=1}^D \sum_{l=1}^D E[(\hat{d}_k - d_k)(\hat{d}_l - d_l)] \int \pi_k(u) \pi_l(u) p_1(u)^2 du \\ &= O(D^2) \end{aligned}$$

Ainsi si on veut réduire la variance il faut construire une base de polynômes  $\varphi_{ij}$  telle que les  $\pi_k$  vérifient

$$\int \pi_k(u) \pi_l(u) p_1(u)^2 du = 0 \text{ si } k \neq l, = 1 \text{ sinon}$$

Or les polynômes  $\pi_k$  sont au nombre de  $D = 1/2(L+1)(L+2)$  et de degré inférieur ou égal à  $L$ . Il est donc impossible qu'ils vérifient la condition ci-dessus pour tous les  $k, l = 1, \dots, D$  et on ne pourra pas réduire l'ordre de la variance en construisant une base de polynômes orthonormée.

On majore, dans la partie suivante, le risque quadratique entre l'estimateur de projection et l'espérance de franchissements de niveaux en fonction du nombre de points d'observation, du pas de temps de discrétisation et de la dimension de l'espace de projection.

On rappelle que la formule de Rice s'écrit aussi

$$E(N_u) = E[\dot{X} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(\dot{X}) | X = u] p_X(u)}$$

Ainsi, si on a fixé la densité de probabilité marginale  $p_X = p_1$ , estimer la fonction de dépendance  $\int_0^{+\infty} \dot{x} s'(u, \dot{x}) p_2(\dot{x}) d\dot{x}$  revient à estimer la fonction de régression  $E[\dot{X} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(\dot{X}) | X = u]$ . Le problème est donc analogue à celui de Viennet [62] que l'on a exposé en introduction (§ 3.1) et l'erreur que nous calculons, entre la valeur exacte de  $E(N_u)$  et l'estimateur, est comparable à la distance que Viennet majore aux erreurs liées à la discrétisation près.

### 3.4.2 Majoration de l'erreur

Nous allons préciser les propriétés statistiques de l'estimateur  $E_{\hat{s}_N}(N_u)$  associé à  $\hat{s}_N$  en évaluant l'erreur quadratique intégrée (3.49).

$$\mathcal{E}_N^2 = \int E[ (E_s(N_u) - E_{\hat{s}_N}(N_u))^2 ] W(u) du \quad (3.49)$$

La fonction  $W(\cdot)$  est un poids. Un choix simple pour  $W$  est une fonction indicatrice telle que l'on ne tienne compte que des niveaux inclus dans un compact. Mais on pourra aussi choisir une fonction qui donne par exemple un poids plus important aux niveaux élevés pour étudier des comportements extrêmes. D'autre part, le poids  $W$  sera nul en dehors du compact  $I$  introduit précédemment.

L'erreur quadratique (3.49) se décompose naturellement en trois termes et elle est donc majorée comme (3.50).

$$E[ (E_s(N_u) - E_{\hat{s}_N}(N_u))^2 ] \leq 3 [ (E_s(N_u) - E_{s_\Delta}(N_u))^2 + (E_{s_\Delta}(N_u) - E_{\bar{s}}(N_u))^2 + (E_{\bar{s}}(N_u) - E_{\hat{s}_N}(N_u))^2 ] \quad (3.50)$$

Le premier terme de droite dans l'inégalité (3.50) correspond à l'erreur induite quand on remplace la dérivée  $\dot{X}$  par la différence finie  $X^\Delta$ , il dépend uniquement de  $\Delta t$ . Le second terme est l'erreur de la projection de la fonction  $s'$  sur l'espace  $\mathbb{P}_L$ , on l'appelle généralement erreur d'approximation. Cette erreur dépend de la dimension  $D(L) = \frac{1}{2}(L+1)(L+2)$  de l'espace  $\mathbb{P}_L$ . La somme des 2 premiers termes, qui est purement déterministe, donne une majoration du biais de l'estimateur  $E_{\hat{s}_N}(N_u)$  de  $E(N_u)$ . Le dernier terme est l'erreur aléatoire qui s'exprime en fonction de  $N, L$  et  $\Delta t$ ; il correspond à la variance  $V(E_{\hat{s}_N}(N_u))$  de  $E_{\hat{s}_N}(N_u)$ . Nous allons évaluer (ou majorer) successivement ces trois erreurs.

• **Erreur de différentiation**

L'erreur de différentiation constitue une partie du biais de l'estimateur du nombre moyen de franchissements croissants de niveaux. Elle est due à l'approximation de la dérivée  $\dot{X}$  par la différence finie au premier ordre de  $X_{k\Delta t}$ . Elle est donc nulle lorsque l'on dispose d'une observation de la dérivée. Dans le cas où l'on approche la dérivée par une différence finie, on a le lemme 3.2.

**Lemme 3.2** *Soit  $X$  un processus stationnaire dont les trajectoires sont deux fois dérivables. On suppose que sa loi de probabilité admet une densité  $p_1$  par rapport à la mesure de Lebesgue. On a alors quand  $\Delta t$  tend vers 0*

$$E_s(N_u) - E_{s_\Delta}(N_u) \sim \frac{\Delta t}{2} E[\ddot{X}_t | X_t = u, \dot{X}_t \geq 0] \quad (3.51)$$

L'erreur de différentiation dépend donc linéairement du pas de temps de discrétisation et elle varie avec le niveau franchi comme  $E[\ddot{X}_t | X_t = u, \dot{X}_t \geq 0]$ . La dépendance en  $\Delta t$  traduit le fait que l'approximation de la dérivée par la différence finie est d'autant meilleure que le pas de temps est faible.

◇ preuve du lemme 3.2

Par des développements similaires à celui du biais de l'estimateur empirique par exemple (cf § 3.2), on a

$$\begin{aligned} E_{s_\Delta}(N_u) &= \frac{d}{d\theta} P( X_t^\Delta > 0 \cap X_t + \theta X_t^\Delta > u ) |_{\theta=0} \\ &\sim \frac{d}{d\theta} P( \dot{X}_t + \frac{\Delta t}{2} \ddot{X}_t > 0 \cap X_t + \theta(\dot{X}_t + \frac{\Delta t}{2} \ddot{X}_t) > u ) |_{\theta=0} \\ &\sim \frac{d}{d\theta} \int \int_{-\frac{\Delta t}{2}\ddot{x}}^{+\infty} \int_{u-\theta(y+\frac{\Delta t}{2}\ddot{x})}^{+\infty} p_{X,\dot{X},\ddot{X}}(x, \dot{x}, \ddot{x}) dx d\dot{x} d\ddot{x} |_{\theta=0} \\ &\sim \int \int_{-\frac{\Delta t}{2}\ddot{x}}^{+\infty} (\dot{x} + \frac{\Delta t}{2}\ddot{x}) p_{X,\dot{X},\ddot{X}}(u - \theta(\dot{x} + \frac{\Delta t}{2}\ddot{x}), \dot{x}, \ddot{x}) d\dot{x} d\ddot{x} |_{\theta=0} \\ &\sim \int \int_{-\frac{\Delta t}{2}\ddot{x}}^{+\infty} \dot{x} p_{X,\dot{X},\ddot{X}}(u, \dot{x}, \ddot{x}) d\dot{x} d\ddot{x} + \frac{\Delta t}{2} \int \int_{-\frac{\Delta t}{2}\ddot{x}}^{+\infty} \frac{\Delta t}{2} \ddot{x} p_{X,\dot{X},\ddot{X}}(u, \dot{x}, \ddot{x}) dx d\dot{x} d\ddot{x} \end{aligned}$$

On a alors pour le premier terme  $T_1 = \int \int_{-\frac{\Delta t}{2}\ddot{x}}^{+\infty} \dot{x} p_{X,\dot{X},\ddot{X}}(u, \dot{x}, \ddot{x}) d\dot{x} d\ddot{x}$

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_0^{+\infty} \dot{x} p(u, \dot{x}) d\dot{x} + \int \int_{-\frac{\Delta t}{2}\ddot{x}}^{+\infty} \dot{x} p_{X,\dot{X},\ddot{X}}(u, \dot{x}, \ddot{x}) d\dot{x} d\ddot{x} \\ &= E(N_u) + \int \int_{-\frac{\Delta t}{2}\ddot{x}}^{+\infty} \dot{x} p_{X,\dot{X},\ddot{X}}(u, \dot{x}, \ddot{x}) d\dot{x} d\ddot{x} \end{aligned}$$

en opérant le changement de variables  $(\dot{x}, \ddot{x}) \rightarrow (a\ddot{x}, \ddot{x})$ , on écrit

$$\int \int_{-\frac{\Delta t}{2}\ddot{x}}^{+\infty} \dot{x} p_{X,\dot{X},\ddot{X}}(u, \dot{x}, \ddot{x}) d\dot{x} d\ddot{x} = \int \int_{-\frac{\Delta t}{2}\ddot{x}}^{+\infty} a\ddot{x}^2 p_{X,\dot{X},\ddot{X}}(u, a\ddot{x}, \ddot{x}) da d\ddot{x}$$

ainsi, pour  $\tau \in ]0, 1[$ , on a par une formule de la moyenne

$$\int \int_{-\frac{\Delta t}{2}\ddot{x}}^{+\infty} \dot{x} p_{X, \dot{X}, \ddot{X}}(u, \dot{x}, \ddot{x}) d\dot{x} d\ddot{x} \sim -\frac{\Delta t^2}{4} \tau \int \ddot{x}^2 p_{X, \dot{X}, \ddot{X}}(u, -\frac{\Delta t}{2} \tau \ddot{x}, \ddot{x}) d\ddot{x}$$

On développe le second terme  $T_2 = \frac{\Delta t}{2} \int \int_{-\frac{\Delta t}{2}\ddot{x}}^{+\infty} \frac{\Delta t}{2} \ddot{x} p_{X, \dot{X}, \ddot{X}}(u, \dot{x}, \ddot{x}) d\dot{x} d\ddot{x}$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{\Delta t}{2} \int \int_0^{+\infty} \ddot{x} p_{X, \dot{X}, \ddot{X}}(u, \dot{x}, \ddot{x}) d\dot{x} d\ddot{x} + O(\Delta t^2) \\ &\sim \frac{\Delta t}{2} E[\ddot{X}_t | X_t = u, \dot{X}_t \geq 0] \end{aligned}$$

On obtient donc finalement

$$E_{s_\Delta}(N_u) \sim E(N_u) + \frac{\Delta t}{2} E[\ddot{X}_t | X_t = u, \dot{X}_t \geq 0]$$

On retrouve ainsi le lemme.  $\diamond$

### • Erreur d'approximation

L'erreur d'approximation est la seconde partie du biais. Elle est due à la projection de la densité de probabilité jointe sur un espace de polynômes. Par définition, l'erreur d'approximation s'écrit

$$(E_{s_\Delta}(N_u) - E_{\tilde{s}}(N_u))^2 = p_1(u)^2 \left[ \int_0^{+\infty} \dot{x} (s'_\Delta(u, \dot{x}) - \tilde{s}'(u, \dot{x})) p_2(\dot{x}) d\dot{x} \right]^2$$

On note  $\|\cdot\|$  la norme associée au produit scalaire (3.45).

**Lemme 3.3** *On suppose que le poids  $W$  est borné et que la fonction de dépendance  $s'_\Delta$  vérifie les conditions (i) à (iii).*

(i)  $s'_\Delta \in \mathbb{L}^{p, \rho}(I)$  pour tout compact  $I$  avec  $1 \leq |\rho| \leq L$  et  $1 \leq p < +\infty$

(ii)  $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} E_{p_1 p_2}[(s'_\Delta(X, X^\Delta) - 1)^2 \mathbf{1}_{[-\infty, -\nu] \cup [\nu, +\infty]^2}(X, X^\Delta)] = 0$

(iii)  $\iint_{\mathbb{R}^2} s'_\Delta{}^2(x, \dot{x}) p_1(x) p_2(\dot{x}) dx d\dot{x} < +\infty$ .

On a alors

$$\int (E_{s_\Delta}(N_u) - E_{\tilde{s}}(N_u))^2 W(u) du \leq \dot{\sigma}^2 \|D^\rho s'_\Delta\|_{p, I}^2 \frac{C_2(L)}{L^{2 \min(\rho_1, \rho_2)}} \quad (3.52)$$

avec  $C_2(L)$  constante si  $\max(\rho_1, \rho_2) > 1$  et proportionnelle à  $\log(L)^2$  sinon.  $C_2$  dépend de  $\rho$ , des densités marginales  $p_1$  et  $p_2$ , du poids  $W$  et du compact  $I$ .

On a noté lors de la description de l'estimateur (cf § 3.4.1) que l'on réduisait l'erreur d'approximation en projetant la fonction inconnue  $s_\Delta$  sur une base de polynômes pondérée par le produit des densités marginales  $p_1$  et  $p_2$ , et que cette erreur est d'autant plus

faible que l'on se rapproche de l'indépendance statistique entre les variables  $X_t$  et  $X_t^\Delta$ . En effet, on remarque que si les variables aléatoires  $X_t$  et  $X_t^\Delta$  sont faiblement dépendantes, la densité de probabilité jointe  $s_\Delta$  sera proche du produit  $p_1 p_2$  des densités marginales, la fonction  $s'_\Delta$  sera donc proche de la constante 1 et la norme  $\|D^\rho s'_\Delta\|$  de sa dérivée sera proche de 0. Ainsi la constante qui est en facteur de  $\frac{1}{L^{2 \min(\rho_1, \rho_2)}}$  dans la majoration de l'erreur d'approximation est d'autant plus faible que  $X_t$  et  $X_t^\Delta$  sont faiblement dépendantes.

Pour majorer l'erreur d'approximation, on démontre une inégalité (3.53) de Jackson dans  $\mathbb{R}^2$  (cf § 3.4.5) avec  $s'_\Delta$  dans l'espace de Sobolev  $\mathbb{L}^{p, \rho}(I)$ ,  $p > 1$  où  $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  est un compact de  $\mathbb{R}^2$ .

**Théorème 3.2** *Soient  $1 \leq p < +\infty$ ,  $1 \leq |\rho| \leq |m|$ ,  $\rho \in \mathbb{N}^2$ , alors il existe une constante  $C = C(I)$  telle que pour toute fonction  $f \in \mathbb{L}^{p, \rho}(I)$  il existe un polynôme  $P_f$  de degré inférieur ou égal à  $m$  tel que*

$$\|f - P_f\|_p \leq C \sum_{|\alpha|=L, \alpha \in \mathbb{N}^{*2}} \omega_\rho(f, \alpha^{-1})_{p, I} \quad (3.53)$$

Le module de régularité  $\omega_\rho(f, t)$  est défini par l'équation (3.64).

La preuve du théorème 3.2 est donnée dans la section 3.4.5.

◇ preuve du lemme 3.3

L'erreur d'approximation s'écrit

$$E_{s_\Delta}(N_u) - E_{\tilde{s}}(N_u) = p_1(u) \int_0^{+\infty} \dot{x} (s'_\Delta(u, \dot{x}) - \tilde{s}'(u, \dot{x})) p_2(\dot{x}) d\dot{x}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz on obtient la majoration

$$(E_{s_\Delta}(N_u) - E_{\tilde{s}}(N_u))^2 \leq p_1(u)^2 \int \dot{x}^2 p_2(\dot{x}) d\dot{x} \int (s'_\Delta(u, \dot{x}) - \tilde{s}'(u, \dot{x}))^2 p_2(\dot{x}) d\dot{x}$$

En considérant l'erreur intégrée, on a donc

$$\begin{aligned} & \int (E_{s_\Delta}(N_u) - E_{\tilde{s}}(N_u))^2 W(u) du \leq \dot{\sigma}^2 \sup_u |p_1(u) W(u)| \\ & \times \left[ \iint_I (s'_\Delta(x, \dot{x}) - \tilde{s}'(x, \dot{x}))^2 p_1(x) p_2(\dot{x}) dx d\dot{x} + \iint_{I^c} (s'_\Delta(x, \dot{x}) - 1)^2 p_1(x) p_2(\dot{x}) dx d\dot{x} \right] \end{aligned}$$

Pour majorer le terme  $\|s'_\Delta - \tilde{s}'\|_I^2 = \iint_I (s'_\Delta(x, \dot{x}) - \tilde{s}'(x, \dot{x}))^2 p_1(x) p_2(\dot{x}) dx d\dot{x}$ , on applique le théorème 3.2 puis la propriété (iii) de la proposition 3.13. On obtient

$$\|s'_\Delta - \tilde{s}'\|_I \leq C' \|D^\rho s'_\Delta\|_{p, I} \sum_{|\alpha|=L, \alpha \in \mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{\alpha^\rho} \quad (3.54)$$



Pour les doubles indices  $\rho = (\rho_1, \rho_2)$  et  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  on note  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$  et  $\alpha^\rho = \alpha_1^{\rho_1} \alpha_2^{\rho_2}$ . Or, on peut vérifier que

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=L, \alpha \in \mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{\alpha^\rho} &= \sum_{\alpha_1=1}^{L-1} \frac{1}{\alpha_1^{\rho_1} (L - \alpha_1)^{\rho_2}} \\ &\leq 2 \sum_{\alpha_1=1}^{L/2} \frac{1}{\alpha_1^{\max(\rho_1, \rho_2)}} \frac{1}{(L - \alpha_1)^{\min(\rho_1, \rho_2)}} \\ &\leq 2 \frac{1}{(L/2)^{\min(\rho_1, \rho_2)}} \sum_{\alpha_1=1}^{L/2} \frac{1}{\alpha_1^{\max(\rho_1, \rho_2)}} \end{aligned}$$

Maintenant, si  $\max(\rho_1, \rho_2) > 1$ , la série  $\sum_{\alpha_1=1}^{L/2} \frac{1}{\alpha_1^{\max(\rho_1, \rho_2)}}$  est convergente et elle est donc majorée par une constante. Et si  $\max(\rho_1, \rho_2) = 1$ , cette somme est de l'ordre de  $\log(L/2)$ .

D'après l'hypothèse (ii), il existe pour tout  $L$  un  $\nu_0$  tel que  $I^c \subset ]-\infty, -\nu_0[ \cup ]\nu_0, +\infty[)^2$  et on peut écrire d'après la limite

$$\iint (s'_\Delta(u, \dot{x}) - 1)^2 p_1(x) p_2(\dot{x}) dx d\dot{x} \leq C_1 \|D^\rho s'_\Delta\|_{p,I}^2 \frac{1}{L^{2 \min(\rho_1, \rho_2)}}$$

on montre ainsi que

$$\begin{aligned} \iint (s'_\Delta(u, \dot{x}) - \tilde{s}'(u, \dot{x}))^2 p_1(x) p_2(\dot{x}) dx d\dot{x} &\leq (C_1 + C') \|D^\rho s'_\Delta\|_{p,I}^2 \frac{1}{L^{2 \min(\rho_1, \rho_2)}} \\ &\leq C \|D^\rho s'_\Delta\|_{p,I}^2 \frac{1}{L^{2 \min(\rho_1, \rho_2)}} \quad \text{si } |\rho| > 2 \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où  $\rho = (1, 1)$ , on a

$$\iint (s'_\Delta(u, \dot{x}) - \tilde{s}'(u, \dot{x}))^2 p_1(x) p_2(\dot{x}) dx d\dot{x} \leq C \|D^\rho s'_\Delta\|_{p,I}^2 \frac{\log(L)^2}{L^2}$$

On a ainsi démontré le lemme 3.3.  $\diamond$

## • Variance

On estime dans ce paragraphe la variance de l'estimateur du nombre moyen de franchissements croissants de niveaux.

On note  $\Phi$  le vecteur dont les composantes sont les polynômes  $\varphi_{ij}$  de la base orthogonale de  $\mathbb{P}_L(I)$  sur laquelle on projette la densité de probabilité jointe  $s_\Delta$ . Et on pose

$$A_{i,k-i} = p_1(u) \int_0^{+\infty} \dot{x} \varphi_{i,k-i}(u, \dot{x}) 1_I(u, \dot{x}) p_2(\dot{x}) d\dot{x} = p_1(u) \pi_{i,k-i}(u)$$

On note aussi  $\hat{d}$  le vecteur des  $\hat{d}_{ij}$  ordonné sur le modèle du vecteur  $\Phi$  et  $\hat{m}$  le vecteur des moments empiriques correspondant à  $\Phi$ . On pose  $B = E_{p_1 p_2}(\Phi \Phi^T)^{-1}$ . On a ainsi  $\hat{d} = B \hat{m}$ .

Il est important de remarquer que l'on sait calculer les constantes  $A_{i,k-i}$  et la matrice  $B$  dès que l'on connaît les densités  $p_1$  et  $p_2$ . D'autre part, la matrice  $B$  est égale à la matrice identité si les polynômes  $\Phi$  forment une base orthonormée.

On montre alors le lemme suivant.

**Lemme 3.4** *On suppose que le processus  $X$  est tel que*

$$\int_0^{+\infty} |E[X_0^{i_0} \dot{X}_0^{j_0} X_t^i \dot{X}_t^j] - E[X_0^{i_0} \dot{X}_0^{j_0}]E[X_t^i \dot{X}_t^j]| dt < +\infty, \quad \forall i_0, j_0, i, j \in \{0, \dots, L\}$$

Quand  $\Delta t$  tend vers 0, on a pour la variance  $V(E_{\hat{s}_N}(N_u))$  en notant  $D = 1/2 (L+1)(L+2)$

$$V(E_{\hat{s}_N}(N_u)) \leq \frac{D^2}{N\Delta t} C(u) \quad (3.55)$$

où  $C(u) = 2 \max_{i_0, j_0} \{A_{i_0} (BHB^T)_{i_0 j_0} A_{j_0}\}$  et  $H$  s'exprime :

$$H_{i_0 j_0} = \int_0^{+\infty} C_{\varphi_{i_0} \varphi_{j_0}}(t) dt$$

La variance de l'estimateur de projection du nombre moyen de franchissements de croissants de niveaux dépend à la fois du nombre  $N$  de points d'observation, du pas de temps de discrétisation  $\Delta t$  et de la dimension  $D$  de l'espace de projection. D'autre part, d'après la définition de  $C(u)$  la variance est majorée par le produit du carré d'un polynôme en  $u$  de degré inférieur ou égal à  $L$  et de la densité de probabilité marginale  $p_1$  au carré. En effet le terme  $BHB^T$  ne dépend que des moments du processus  $(X_t, \dot{X}_t)$  il est donc constant par rapport à  $u$ . Et les  $A_i$  s'écrivent sur le compact  $I$

$$A_{i,k-i} = p_1(u) \pi_{i,k-i}(u)$$

où  $\pi_{i,k-i}$  est un polynôme en  $u$  de degré inférieur ou égal à  $L$ . On retrouve donc une forme analogue à celle du majorant de la variance de l'estimateur paramétrique gaussien (cf page ??) qui est fonction d'un polynôme de degré 4 multiplié par le carré de l'espérance du nombre de franchissement, elle même étant proportionnelle à la densité marginale gaussienne de  $X_t$  :

$$\frac{V^\Delta}{E(N_u)^2} \sim \frac{1}{N\Delta t} P_4\left(\frac{u}{\sigma}\right)$$

où  $P_4$  est un polynôme de degré 4.

En outre, le majorant de la variance est fonction des propriétés de mélange du processus étudié à travers la fonction de corrélation  $C_{\varphi_{i_0} \varphi_{j_0}}$ .

D'après le théorème 3.1 qui donne des majorations de la covariance de deux variables aléatoires par les coefficients de mélange [19], on obtient des majorations de la constante  $C(u) = 2 \max_{i_0, j_0} \{A_{i_0} (BHB^T)_{i_0 j_0} A_{j_0}\}$ . Ces majorations associées aux propriétés de mélange du processus garantissent, sous les bonnes hypothèses, l'existence et la convergence des intégrales qui interviennent dans le lemme 3.4. On en déduit d'autre part le corollaire 3.2.

**Corollaire 3.2** On note  $\|\cdot\|_p = (E|\cdot|^p)^{1/p}$ .

Si le processus  $X$  est  $\alpha$ -mélangeant et tel que  $\|X_0^L\|_{\pi_0} < +\infty$  et  $\|\dot{X}_0^L\|_{\kappa_0} < +\infty$ , alors

$$V(E_{\hat{s}_N}(N_u)) \leq C \frac{D^2}{N\Delta t} \int_0^{N\Delta t} \alpha(t)^{1/\rho} dt$$

avec  $C = 2 \max_{i_0, j_0} \{A_{i_0}(BHB^T)_{i_0 j_0} A_{j_0}\}$ ,  $H_{i_0 j_0} = \|\varphi_{i_0}(X_0, \dot{X}_0)\|_{\pi} \|\varphi_{j_0}(X_0, \dot{X}_0)\|_{\kappa}$ ,  $\rho \geq 1$ ,  $1 \leq \pi \leq \pi_0$ ,  $1 \leq \kappa \leq \kappa_0$  et  $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\rho} = 1$ .

On remarque de même que si le processus  $X$  est  $\psi$ -mélangeant et tel que  $\|X_0^L\|_1 < +\infty$  et  $\|\dot{X}_0^L\|_1 < +\infty$  alors

$$V(E_{\hat{s}_N}(N_u)) \leq C \frac{D^2}{N\Delta t} \int_0^{N\Delta t} \psi(t) dt$$

avec  $C = 2 \max_{i_0, j_0} \{A_{i_0}(BHB^T)_{i_0 j_0} A_{j_0}\}$  et  $H_{i_0 j_0} = \|\varphi_{i_0}(X_0, \dot{X}_0)\|_1 \|\varphi_{j_0}(X_0, \dot{X}_0)\|_1$ . Cette majoration par les coefficients de  $\psi$ -mélange est plus contraignante au niveau des propriétés de mélange, mais elle a l'avantage de faire intervenir des moments d'ordres moins élevés.

◇ preuve du lemme 3.4

La variance de l'estimateur  $E_{\hat{s}_N}(N_u)$  de  $E_s(N_u)$  s'écrit

$$\begin{aligned} V(E_{\hat{s}_N}(N_u)) &= (E_{\hat{s}}(N_u) - E_{\hat{s}_N}(N_u))^2 \\ &= E_{s_{\Delta}} \left[ \left( (\hat{d} - d)^T A \right)^2 \right] \\ &= A^T Cov(\hat{d}) A \\ &= A^T B \Gamma_L^{\Delta} B^T A \end{aligned}$$

Pour alléger les notations, on introduit les doubles indices  $i_0 = (i, k - i)$ ,  $j_0 = (j, l - j)$ . On a alors et on a  $\Gamma_L^{\Delta}$  la matrice de coefficients  $\gamma_{i_0 j_0}^{\Delta}$  avec

$$\gamma_{i_0 j_0}^{\Delta} = E_s[(\hat{m}_{i_0} - m_{i_0})(\hat{m}_{j_0} - m_{j_0})]$$

où  $\hat{m}_{i_0} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_{i_0}(X_i, X_i^{\Delta})$ .

$$E\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_{i_0}(X_i, X_i^{\Delta}) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \varphi_{j_0}(X_j, X_j^{\Delta})\right] = \frac{1}{N} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) E[\varphi_{i_0}(X_0, X_0^{\Delta}) \varphi_{j_0}(X_k, X_k^{\Delta})]$$

or les polynômes  $\varphi_{i_0}$  sont tels que

$$\begin{aligned} \varphi_{i_0}(X_0, X_0^{\Delta}) &= \varphi_{i, k-i}(X_0, X_0^{\Delta}) \\ &= \varphi_{i, k-i}(X_0, \dot{X}_0 + \frac{\Delta t}{2} \ddot{X}_0) \\ &= \sum_{q=0}^i \sum_{r=0}^{k-i} a_{qr} X_0^q (\dot{X}_0 + \frac{\Delta t}{2} \ddot{X}_0)^r \end{aligned}$$

Les termes en  $\Delta t^r$  sont négligeables pour  $r \geq 2$ , ainsi

$$\varphi_{i_0}(X_0, X_0^\Delta) \sim \varphi_{i_0}(X_0, \dot{X}_0) + \frac{\Delta t}{2} \ddot{X}_0 \sum_{q=0}^i \sum_{r=1}^{k-i} r a_{qr} X_0^q \dot{X}_0^{r-1}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \gamma_{j_0}^\Delta &\sim \frac{1}{N} \sum_{k=-N+1}^{N-1} C_{\varphi_{i_0}\varphi_{j_0}}(k\Delta t) \\ &+ \frac{\Delta t}{N} \sum_{k=-N+1}^{N-1} E[\ddot{X}_{k\Delta t} \psi_{i_0}(X_0, \dot{X}_0) + \ddot{X}_0 \psi_{i_0}(X_k, \dot{X}_k)] \end{aligned}$$

On a noté la fonction de corrélation

$$C_{\varphi_{i_0}\varphi_{j_0}}(t) = E[\varphi_{i_0}(X_0, \dot{X}_0)\varphi_{j_0}(X_t, \dot{X}_t)] - E[\varphi_{i_0}(X_0, \dot{X}_0)]E[\varphi_{j_0}(X_t, \dot{X}_t)]$$

et les polynômes  $\psi_{i_0}$  sont définis par

$$\psi_{i_0}(x, \dot{x}) = \sum_{q=0}^i \sum_{r=1}^{k-i} r a_{qr} x^q \dot{x}^{r-1}$$

Par la formule d'intégration numérique (3.27), on obtient

$$\gamma_{i_0 j_0}^\Delta \sim \frac{2}{N\Delta t} \int_0^{N\Delta t} C_{\varphi_{i_0}\varphi_{j_0}}(t) dt + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

En posant  $H_{i_0 j_0} = \int_0^{+\infty} C_{\varphi_{i_0}\varphi_{j_0}}(t) dt$ , on retrouve

$$\begin{aligned} V(E_{\hat{s}_N}(N_u)) &= \frac{2}{N\Delta t} \sum_{i_0=1}^D \sum_{j_0=1}^D b_{i_0 j_0} b_{j_0 i_0} \int_0^{N\Delta t} C_{\varphi_{i_0}\varphi_{j_0}}(t) dt A_{i_0} A_{j_0} \\ &\leq \frac{D^2}{N\Delta t} \max_{i_0, j_0} \{A_{i_0} (BHB^T)_{i_0 j_0} A_{j_0}\} \end{aligned}$$

On en déduit le lemme.  $\diamond$

$\diamond$  preuve du corollaire 3.2

Par le théorème 3.1 on obtient les majorations suivantes pour les coefficients diagonaux de la matrice  $\Gamma_L^\Delta$ , définie dans la preuve du lemme 3.4.

$$|\gamma_{i_0 j_0}^\Delta| \leq \frac{2}{N\Delta t} \int_0^{+\infty} \alpha(t)^{1/\rho} dt \|\varphi_{i_0}(X_0, \dot{X}_0)\|_\pi \|\varphi_{j_0}(X_0, \dot{X}_0)\|_\kappa \quad (3.56)$$

avec  $\rho, \pi, \kappa \geq 1$  et  $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\kappa} = 1$ . Ce qui induit pour la variance sous les bonnes hypothèses d' $\alpha$ -mélange

$$V(E_{\hat{s}_N}(N_u)) \leq C \frac{D^2}{N\Delta t} \int_0^{+\infty} \alpha(t)^{1/\rho} dt$$

avec  $C = 2 \max_{i_0, j_0} A_{i_0} (BHB^T)_{i_0 j_0} A_{j_0}$  et  $H_{i_0, j_0} = \|\varphi_{i_0}(X_0, \dot{X}_0)\|_\pi \|\varphi_{j_0}(X_0, \dot{X}_0)\|_\kappa$ .  $\diamond$

• Erreur globale

D'après les lemmes 3.2, 3.3 et 3.4, on majore l'erreur quadratique globale (3.49).

**Proposition 3.7** *Sous les hypothèses des lemmes 3.2, 3.3 et 3.4 avec  $s'_\Delta \in \mathbb{L}^{p,\rho}(I)$ , on majore l'erreur quadratique globale de l'estimateur de l'espérance du nombre de franchissements croissants de niveaux pour une observation de  $N$  points discrétisée avec un pas de temps  $\Delta t$ . En notant  $r = \min(\rho_1, \rho_2)$ ,*

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\mathcal{E}_N^2 &\leq \frac{\Delta t^2}{4} \int p_1(u)^2 W(u) du + \frac{D^2}{N\Delta t} \int C_1(u) W(u) du \\ &\quad + \sigma^2 \sup_u |p_1(u) W(u)| \frac{C_2(D)}{D^r} \end{aligned} \quad (3.57)$$

$C_1(u)$  est définie dans le lemme 3.4 et  $C_2(D)$  vient de l'erreur d'approximation, elle est constante si  $\max(\rho_1, \rho_2) > 1$  et elle est proportionnelle à  $\log(D)^2$  si  $\max(\rho_1, \rho_2) = 1$ .

En regroupant davantage de termes dans les constantes, on clarifie l'expression du majorant de la proposition 3.7 qui devient

$$\mathcal{E}_N^2 \leq K_1 \Delta t^2 + K_2 \frac{D^2}{N\Delta t} + K_3 \frac{1}{D^r}$$

Il convient alors de choisir les paramètres  $N$ ,  $\Delta t$  et  $D$  de façon à équilibrer les différents termes de la majoration. On obtient en équilibrant le premier et le troisième terme

$$\Delta t \sim D^{-r/2}$$

En remplaçant  $\Delta t$  par son équivalent en fonction de  $D$  dans le second terme et en équilibrant ce terme avec le troisième, on a

$$D \sim N^{2/(3r+4)}$$

et on obtient donc pour le pas de discrétisation  $\Delta t$

$$\Delta t \sim N^{-r/(3r+4)}$$

On en déduit que l'erreur globale  $\mathcal{E}_N^2 = O(N^{-2r/(3r+4)})$ .

On peut comparer l'ordre  $O(N^{-2r/(3r+4)})$  de l'erreur quadratique de l'estimateur de projection avec l'ordre  $O(N^{-2/3})$  du risque quadratique de l'estimateur empirique étudié plus haut (cf § 3.2). L'ordre de convergence de l'estimateur de projection est moins bon que celui de l'estimateur empirique. Ce résultat peut étonner dans la mesure où l'on compare un estimateur empirique à un estimateur que l'on peut assimiler à un estimateur paramétrique. Pourtant il s'explique en partie par le fait que l'estimateur empirique approche une fonction de  $\mathbb{R}$  tandis que l'estimateur de projection approche une fonction bivariée.

Quand le paramètre de régularité  $r$  tend vers l'infini,  $-2r/(3r+4)$  tend vers  $-2/3$ . Ainsi, si on estime une densité de probabilité telle que sa fonction de dépendance est infiniment régulière, l'erreur de l'estimateur de projection est du même ordre que l'erreur de l'estimateur empirique.

Malgré tout, il est important de remarquer que ces résultats asymptotiques ne sont qu'indicatifs. En effet, on ne peut pas calculer les constantes liées aux ordres de convergence. Or il est possible que les constantes de l'estimateur de projection soient faibles devant celles de l'estimateur empirique.

Supposons que le paramètre  $D$ , dimension de l'espace de projection, est indépendant du nombre de points  $N$ . Dans ce cas, on ajuste un estimateur purement paramétrique. Et le risque quadratique s'écrit alors d'après les lemmes 3.2, 3.3 et 3.4

$$\mathcal{E}_N^2 = C_0 \Delta t^2 + \frac{C_1}{N \Delta t}$$

En choisissant le pas de temps de discrétisation optimal  $\Delta t \sim N^{-1/3}$  on obtient un risque quadratique en  $O(N^{-2/3})$ . On retrouve une vitesse de convergence équivalente à celle de l'estimateur empirique du nombre moyen de franchissements de niveaux. On note en particulier que cette vitesse de convergence est meilleure que la vitesse de convergence de l'estimateur à noyau du nombre moyen de franchissements proposé par Sköld [54] qui est en  $O(N^{-2/5})$ . Mais, pour être tout à fait rigoureux, il faudrait tenir compte de la distance entre le modèle paramétrique approché et le vrai modèle sous jacent. Cette distance est strictement positive si le vrai modèle diffère (ne serait-ce que légèrement) du modèle paramétrique choisi et induit alors un biais constant incompressible.

Nous souhaitons maintenant comparer l'estimateur de projection avec un estimateur de type régression comme ceux étudiés par Viennet et on considère un cadre un peu différent. En effet, Viennet ne prend pas en compte la discrétisation il est donc plus naturel de supposer que l'on observe une réalisation du processus  $X_t$  et de sa dérivée  $\dot{X}_t$  plutôt que d'approcher la dérivée par une différence finie.

Quand on observe simultanément  $X_{k\Delta t}$  et  $\dot{X}_{k\Delta t}$  à la place de  $X_{k\Delta t}$  seul, on réduit le biais de l'estimateur de projection tandis que le majorant de la variance reste du même ordre.

### 3.4.3 Observation du couple $(X_t, \dot{X}_t)$

On considère maintenant le cas où la série temporelle à partir de laquelle on estime l'espérance du nombre de franchissements croissants de niveaux est constituée d'une observation du processus  $(X_{k\Delta t})_{k=1,\dots,N}$  et d'une observation de sa dérivée  $(\dot{X}_{k\Delta t})_{k=1,\dots,N}$ . La densité de probabilité jointe  $s(x, \dot{x}) = s'(x, \dot{x})p_1(x)p_2(\dot{x})$  du couple  $(X_t, \dot{X}_t)$  est approchée par une densité  $\tilde{s}$

$$\tilde{s}(x, \dot{x}) = \sum_{k=0}^L \sum_{i=0}^k d_{i,k-i} \varphi_{i,k-i}(x, \dot{x}) p_1(x) p_2(\dot{x}) \quad \text{si } (x, \dot{x}) \in I \quad (3.58)$$

$$= p_1(x)p_2(\dot{x}) \text{ ailleurs}$$

Les fonctions  $\varphi_{i,k-i}$  sont des polynômes de  $\mathbb{P}_L$ . Ils sont définis comme dans le cas où l'on observe uniquement le processus  $X$  (cf § 3.4.1), en particulier ils vérifient l'équation (3.44) pour un compact  $I$  de  $\mathbb{R}^2$  bien choisi (cf hypothèses de la proposition 3.8). Les paramètres  $d_{ij}$  sont tels que  $E_t[\varphi_{i,j}(X, \dot{X})] = E_s[\varphi_{i,j}(X, \dot{X})]$  pour tous les entiers  $i$  et  $j$  vérifiant  $0 \leq i + j \leq L$ .

On construit un estimateur de la densité de probabilité jointe  $s$  de la forme

$$\begin{aligned} \hat{s}_N(x, \dot{x}) &= \sum_{k=0}^L \sum_{i=0}^k \hat{d}_{i,k-i} \varphi_{i,k-i}(x, \dot{x}) p_1(x) p_2(\dot{x}) \text{ si } (x, \dot{x}) \in I \\ &= p_1(x) p_2(\dot{x}) \text{ ailleurs} \end{aligned} \quad (3.59)$$

où les paramètres joints  $\hat{d}_{ij}$  sont tels que  $E_{\hat{s}_N}[\varphi_{i,j}(X, \dot{X})] = \hat{m}_{ij}$  pour  $0 \leq i + j \leq L$ , les  $\hat{m}_{ij}$  étant les moments empiriques correspondant aux polynômes  $\varphi_{i,j}$ . Ici, comme dans le paragraphe 3.4.1,  $L$  est une fonction  $L(N)$  de  $N$ . On approche le nombre moyen de franchissements de niveaux du processus  $X$  en intégrant la densité  $\hat{s}_N$  dans la formule de Rice (3.1).

Sous ces hypothèses, l'erreur quadratique intégrée (3.50) pour l'estimateur de l'espérance du nombre de franchissements croissants de niveaux est définie par l'équation (3.60).

$$\mathcal{E}_N^2 = \int E[ (E_s(N_u) - E_{\hat{s}_N}(N_u))^2 ] W(u) du \quad (3.60)$$

La fonction  $W$  est un poids. L'estimateur  $\hat{s}_N$  de  $\tilde{s}$  étant sans biais, erreur quadratique est telle que

$$E[ (E_s(N_u) - E_{\hat{s}_N}(N_u))^2 ] = [ (E_s(N_u) - E_{\tilde{s}}(N_u))^2 + V(E_{\hat{s}_N}(N_u)) ] \quad (3.61)$$

Le premier terme de la majoration correspond au carré du biais de l'estimateur et il est dû à la projection de la fonction jointe  $s'$  sur la base des polynômes orthonormaux  $\varphi_{ij}$ . Le second terme est la variance de l'estimateur. On a alors la proposition 3.8.

**Proposition 3.8** Soient  $1 \leq p < +\infty$  et  $1 \leq |\rho| \leq L$ . Sous les hypothèses (i) à (v),

(i)  $s' \in \mathbb{L}^{p,\rho}(I)$  pour tout compact  $I$  avec  $1 \leq |\rho| \leq L$  et  $1 \leq p < +\infty$

(ii)  $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} E_{p_1 p_2}[(s'(X, \dot{X}) - 1)^2 \mathbf{1}_{(-\infty, -\nu] \cup [\nu, +\infty)}(X, \dot{X})] = 0$

(iii)  $\iint_{\mathbb{R}^2} s'^2(x, \dot{x}) p_1(x) p_2(\dot{x}) dx d\dot{x} < +\infty$ .

(iv) le poids  $W$  est borné

(v) le pas de discrétisation  $\Delta t$  tend vers 0,

on majore l'erreur quadratique globale de l'estimateur de l'espérance du nombre de franchissements croissants de niveaux pour une observation  $(X_{k\Delta t}, \dot{X}_{k\Delta t})_{k=1, \dots, N}$ .

$$\mathcal{E}_N^2 \leq \frac{D^2}{N\Delta t} \int C_1(u) W(u) du + \dot{\sigma}^2 \frac{C_2(D)}{D^r} \quad (3.62)$$

$C_1(u)$  est définie par l'équation (3.63).  $C_2(D)$  provient de l'erreur d'approximation elle dépend des densités marginales  $p_1$  et  $p_2$  et du compact  $I$  et de  $s'$ ; de plus, elle est constante si  $\max(\rho_1, \rho_2) \leq 2$  et proportionnelle à  $\log(D)^2$  si  $\max(\rho_1, \rho_2) = 1$ .

Si on optimise le paramètre  $D = \frac{(L+1)(L+2)}{2}$  de façon à équilibrer les deux termes du majorant de l'erreur  $\mathcal{E}_N^2$  dans l'équation (3.62), on obtient  $D \sim (N\Delta t)^{1/(r+2)}$  et  $\mathcal{E}_N^2$  est de l'ordre de  $O((N\Delta t)^{-r/(r+2)})$ . La seule contrainte pour le choix du pas de temps de discrétisation est que  $N\Delta t$  tende vers l'infini quand  $N$  tend vers l'infini. Si on a  $\Delta t \sim N^{-\alpha}$  avec  $0 < \alpha < 1$ , on obtient  $\mathcal{E}_N^2 = O(N^{-(1-\alpha)r/(r+2)})$ .

Comparons maintenant notre résultat avec celui de Viennet. On a vu que l'espérance du nombre moyen de franchissements de niveaux peut s'écrire pour un processus stochastique sous la forme d'une fonction de régression multipliée par la densité de probabilité marginale de  $X_t$  :

$$E(N_u) = E[\dot{X} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(\dot{X}) | X = u] p_X(u)}$$

Supposons que la densité de probabilité  $p_X$  de  $X$  est connue ou que l'erreur correspondant à son approximation est négligeable devant l'erreur correspondant à l'estimation de la fonction de régression. Nous avons formulé une hypothèse similaire pour construire l'estimateur de projection.

D'autre part, Viennet ne prend pas en compte la discrétisation. Pour ramener notre résultat à une expression comparable au résultat de Viennet, on considère que le pas de temps de discrétisation est égal à un, ce qui revient à poser  $\alpha = 0$ . L'ordre de convergence de l'estimateur de projection devient  $\mathcal{E}_N^2 = O(N^{-r/(r+2)})$ , avec  $r$  un paramètre de régularité pour la densité de probabilité jointe, et on le compare à l'ordre du risque quadratique de l'estimateur de régression  $O(N^{-2\tau/(2\tau+1)})$ , avec  $\tau$  paramètre de régularité pour la densité de probabilité de  $X_t$ . La vitesse de convergence de l'estimateur de régression est donc légèrement meilleure que celle de l'estimateur de projection.

◇ preuve de la proposition 3.8

a) On obtient le premier terme de la majoration en utilisant les mêmes arguments que pour montrer le lemme 3.3. En particulier, on applique le théorème de Jackson 3.2.

b) Pour majorer la variance de l'estimateur du nombre moyen de franchissements de niveaux, on reprend la démonstration du lemme 3.4 en remplaçant  $\hat{m}_{i_0} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_{i_0}(X_i, X_i^\Delta)$  par  $\hat{m}_{i_0} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_{i_0}(X_i, \dot{X}_i)$ . Les moments empiriques ne dépendent plus de  $\Delta t$ . On n'écrit donc pas de développement de Taylor et on montre directement, en notant la fonction de corrélation

$$C_{\varphi_{i_0}\varphi_{j_0}}(t) = E[\varphi_{i_0}(X_0, \dot{X}_0)\varphi_{j_0}(X_t, \dot{X}_t)] - E[\varphi_{i_0}(X_0, \dot{X}_0)]E[\varphi_{j_0}(X_t, \dot{X}_t)]$$

que

$$\begin{aligned} \gamma_{i_0 j_0}^\Delta &= \frac{1}{N} \sum_{k=-N+1}^{N-1} C_{\varphi_{i_0}\varphi_{j_0}}(k\Delta t) \\ &\sim \frac{2}{N\Delta t} \int_0^{N\Delta t} C_{\varphi_{i_0}\varphi_{j_0}}(t) dt \end{aligned}$$



En posant  $H_{i_0 j_0} = \int_0^{N\Delta t} C_{\varphi_{i_0} \varphi_{j_0}}(t) dt$  et en conservant la notation  $i_0 = (i, k-i)$ , on retrouve

$$\begin{aligned} V(E_{\hat{s}_N}(N_u)) &= \frac{2}{N\Delta t} \sum_{i_0=1}^D \sum_{j_0=1}^D b_{i_0 j_0} b_{j_0 i_0} H_{i_0 j_0} A_{i_0} A_{j_0} \\ &\leq \frac{D^2}{N\Delta t} 2 \max_{i_0, j_0} \{A_{i_0} (BHB^T)_{i_0 j_0} A_{j_0}\} \end{aligned}$$

On définit

$$C_1(u) = 2 \max_{i_0, j_0} \{A_{i_0} (BHB^T)_{i_0 j_0} A_{j_0}\} \quad (3.63)$$

Ce qui termine la preuve de la proposition.  $\diamond$

### 3.4.4 Pour un processus gaussien

On va appliquer la proposition 3.8 à un processus gaussien stationnaire centré mélangeant pour voir comment se comporte l'estimateur de projection dans le cas particulier de variables aléatoires dépendantes et le comparer à l'estimateur paramétrique gaussien (cf § 3.3).

On suppose que l'on observe  $(X_{k\Delta t}, \dot{X}_{k\Delta t})_{k=1, \dots, N}$  pour un processus gaussien  $X$  tel que sa variance et celle de sa dérivée soient égales à 1 :  $\sigma_X = \sigma_{\dot{X}} = 1$ . La densité de probabilité jointe exacte du couple  $(X_t, \dot{X}_t)$  s'écrit donc pour tout  $t$  fixé

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/2} e^{-y^2/2}$$

On note  $s' = s'(x, y)$  la fonction de dépendance de la densité de probabilité jointe comme dans l'équation (3.41) et  $p_1$  et  $p_2$  les densités de probabilité marginales. La variable  $X_t$  étant indépendante de  $\dot{X}_t$  pour un instant  $t$  fixé, la fonction  $s'$  est identiquement égale à 1.

On majore pour commencer l'erreur d'approximation. D'après le lemme 3.3, son majorant s'écrit

$$T_1 = C \sigma_{\dot{X}} \sup_u |p_1(u) 1_I(u)| \|D^\rho s'\|_{p, I}^2 \sum_{|\alpha|=L} \alpha^{-\rho}$$

où le compact  $I$  est choisi pour rendre le terme  $T_2$  assez petit.

$$T_2 = \iint_{I^c} (s'(x, y) - 1)^2 p_1(x) p_2(y) dx dy$$

Mais la fonction de dépendance  $s'$  étant égale à 1, on obtient que  $T_1$  et  $T_2$  sont nuls quel que soit le choix du compact  $I$ . Ainsi, l'erreur d'approximation est nulle et le biais de l'estimateur de projection du nombre moyen de franchissements croissants de niveaux est uniquement lié à l'identification des lois marginales par des estimateurs paramétriques.

D'après l'analyse des statistiques de l'échantillon observé telles que la moyenne, le coefficient de symétrie (skewness), le coefficient d'aplatissement (kurtosis), il est vraisemblable que l'on ajustera dans la pratique des densités gaussiennes. Le biais sera donc

lié à la distance entre la variance empirique et la vraie variance de  $X$  et  $\hat{X}$  et il sera asymptotiquement négligeable.

On majore ensuite la variance de l'estimateur. D'après la proposition 3.8, la variance est majorée par

$$T_v = \frac{D^2}{N\Delta t} \int C_1(u) du$$

où le paramètre  $D$  est la dimension de l'espace de polynômes sur lequel on projette la densité de probabilité jointe inconnue. Dans ce cas particulier, on a intérêt à choisir  $D$  le plus petit possible parmi les entiers non nul :  $D = 1$ . Ceci signifie que la fonction de dépendance  $s'$  de la densité  $p$  est projetée sur un espace de constantes. La fonction  $C_1(u)$  est alors définie par

$$\begin{aligned} C_1(u) &= 2p(u)^2 \left( \int_0^{+\infty} yp_2(y) dy \right)^2 \\ &= \frac{1}{\pi} p(u)^2 \end{aligned}$$

et on obtient donc

$$\int C_1(u) du = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}$$

Et l'erreur quadratique globale de l'estimateur de régression est donc majorée de la façon suivante dans le cas d'un processus gaussien mélangeant centré réduit :

$$\mathcal{E}_N^2 \leq \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \frac{1}{N\Delta t}$$

Ce majorant est du même ordre que le majorant que l'on obtient pour un estimateur paramétrique gaussien (cf § 3.3). Cet exemple est intéressant car on peut calculer les constantes liées à l'ordre de convergence de l'estimateur et montrer que ce cas particulier l'estimateur de projection est de bonne qualité.

### 3.4.5 Inégalité de Jackson dans $\mathbb{R}^2$

On propose ici une preuve du théorème 3.2 qui donne une inégalité de Jackson dans  $\mathbb{R}^2$ . Pour construire cette preuve on s'inspire largement de la démonstration du théorème de Jackson dans  $\mathbb{R}$  donnée par Schumaker [51].

On commence par définir le module de régularité d'une fonction de  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition 3.2** Soit  $f \in \mathbb{L}^p(J)$ ,  $J \in [0, t_1] \times [0, t_2]$ , on définit le module de régularité de  $f$  par

$$\omega_\rho(f; t)_p = \sup_{0 < |h| \leq t} \|\Delta_h^\rho f\|_p \quad (3.64)$$

où la différence finie d'ordre  $\rho$  s'écrit

$$\Delta_h^\rho f(x, y) = \sum_{k_1=0}^{\rho_1} \sum_{k_2=0}^{\rho_2} (-1)^{k_1+k_2} \binom{\rho_1}{k_1} \binom{\rho_2}{k_2} f(x + k_1 h_1, y + k_2 h_2)$$

D'autre part, on énonce plusieurs propositions ou lemmes que nous appliquons dans la démonstration du théorème de Jackson. Schumaker les montre dans  $\mathbb{R}$ . L'extension de ces démonstrations à  $\mathbb{R}^2$  ne pose pas de difficulté, on ne présente donc pas ces preuves ici.

La première proposition est un résultat de prolongement continu.

**Proposition 3.9** *Soient  $J = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subseteq I = [c_1, d_1] \times [c_2, d_2]$  et  $1 \leq p < +\infty$ . Il existe un prolongement  $T$  défini par*

$$\begin{aligned} T : \quad \mathbb{L}^p(J) &\longrightarrow \mathbb{L}^p(I) \\ f &\longmapsto Tf \text{ tel que } Tf(x) = f(x) \quad \forall x \in J \end{aligned}$$

et qui vérifie les deux inégalités suivantes.

$$\omega_\rho(Tf; t)_{\mathbb{L}^p(I)} \leq C_1(\rho, I, J) \omega_\rho(f; t)_{\mathbb{L}^p(J)}$$

Si  $f \in \mathbb{L}^{p,\rho}(J)$  et  $Tf \in \mathbb{L}^{p,\rho}(I)$ , alors

$$\|D^\rho Tf\|_{\mathbb{L}^p(I)} \leq C_2(\rho, I, J) \|D^\rho f\|_{\mathbb{L}^p(J)}$$

La proposition 3.10 donne une propriété de la différence finie d'ordre  $\rho$ .

**Proposition 3.10** *Si  $f \in \mathbb{L}^{p,\rho}([a_1, b_1 + \rho_1 h_1] \times [a_2, b_2 + \rho_2 h_2])$  alors*

$$\|\Delta_h^\rho f\|_p \leq h_1^{\rho_1} h_2^{\rho_2} \|D^\rho f\|_p$$

La proposition 3.11 majore l'écart en norme  $\mathbb{L}^p$  entre une fonction et un polynôme par un module de régularité de la fonction (cf théorème (13.21) de Schumaker [51]).

**Proposition 3.11** *Soit  $1 \leq p < +\infty$ . Il existe une constante  $C_1$  tel que  $\forall f \in \mathbb{L}^p([a_1, b_1] \times [a_2, b_2])$ , il existe un polynôme  $q$  de degré inférieur ou égal à  $\rho$  tel que*

$$\|f - q\|_p \leq C_1 \omega_\rho(f, e)_p$$

Les constantes  $e_1$  et  $e_2$  dépendent de la largeur des intervalles  $[a_i, b_i]$ ,  $i = 1, 2$ .

Quand on fait un changement de variables linéaire, la proposition 3.12 relie les modules de continuité.

**Proposition 3.12** Si  $F(y_1, y_2) = f(\gamma_1 y_1 + \delta_1, \gamma_2 y_2 + \delta_2)$  avec  $y = \gamma x + \delta : J \rightarrow I$ , alors

$$\omega_r(F, t)_{p,J} = \gamma_1^{-1/p} \gamma_2^{-1/p} \omega_\rho(f, \gamma t)_{p,I}$$

Enfin, on donne deux propriétés du module de régularité (3.64).

**Proposition 3.13** Le module de régularité d'une fonction  $f \in \mathbb{L}^{p,\rho}(I)$  a les propriétés suivantes.

(i) Soient  $n \in \mathbb{N}^2$  et  $t \in \mathbb{R}^2$ ,  $\omega_\rho(f, nt)_p \leq n^p \omega_\rho(f, t)_p$

(ii) Soit  $1 \leq p < +\infty$ ,  $\omega_\rho(f, t)_p \leq t^\rho \|D^\rho f\|_p$

Avant d'entamer la démonstration du théorème de Jackson, on rappelle l'inégalité de Minkowski. Si  $f$  est une fonction mesurable sur le rectangle  $I \times J$  telle que pour  $q \geq 1$  on ait  $\int_J \{ \int_I |f(x, y)|^q dx \}^{1/q} dy < +\infty$ , alors

$$\left\{ \int_I \left| \int_J f(x, y) dy \right|^q dx \right\}^{1/q} \leq \int_J \left\{ \int_I |f(x, y)|^q dx \right\}^{1/q} dy \quad (3.65)$$

◇ preuve du théorème 3.2

a) Il suffit de montrer le théorème de Jackson dans  $\mathbb{R}^2$ , quand la fonction  $f$  est définie sur le compact  $U = [-1, 1]^2$ . On obtient si  $f \in \mathbb{L}^{p,\rho}(U)$  qu'il existe un polynôme  $P_f$  de degré inférieur ou égal à  $m$  et qui vérifie

$$\|f - P_f\|_{p,U} \leq C \sum_{|\alpha|=m} \omega_\rho(f, \alpha^{-1})_{p,U} \quad (3.66)$$

Maintenant, si  $f$  est définie sur un ensemble plus général,  $f \in \mathbb{L}^{p,\rho}([a_1, b_1] \times [a_2, b_2])$ , on fait le changement de variables suivant.

$$F(v) = f \left( \frac{v_1(b_1 - a_1) + b_1 + a_1}{2}, \frac{v_2(b_2 - a_2) + b_2 + a_2}{2} \right)$$

Ainsi on a  $F \in \mathbb{L}^{p,\rho}(U)$  et

$$P_f(x) = P_F \left( \frac{2(x_1 - a_1) - (b_1 - a_1)}{b_1 - a_1}, \frac{2(x_2 - a_2) - (b_2 - a_2)}{b_2 - a_2} \right)$$

On obtient donc d'après les égalités précédentes

$$\begin{aligned} \|f - P_f\|_{p,[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]} &= \|F - P_F\|_{p,U} \\ &\leq C \sum_{|\alpha|=m} \omega_\rho(F, \alpha^{-1})_{p,U} \end{aligned}$$

Et par la proposition 3.12, on conclut

$$\|f - P_f\|_{p,[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]} \leq C' \sum_{|\alpha|=m} \omega_\rho(f, \alpha^{-1})_{p,[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]}$$

b) Considérons donc que  $f$  est une fonction de  $f \in \mathbb{L}^{p,\rho}(U)$ . On construit sur  $[-4, 4]^2$  une famille de polynômes  $V_\alpha$  positifs vérifiant les conditions (3.67) et (3.68) avec  $|\rho| \leq m$ ,  $\rho_1 \geq 1$  et  $\rho_2 \geq 1$ .

$$\sum_{|\alpha|=m} \iint_{\left[\frac{-1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_1}\right] \times \left[\frac{-1}{\rho_2}, \frac{1}{\rho_2}\right]} V_\alpha(y) dy = 1 \quad (3.67)$$

$$\sum_{|\alpha|=m} \iint_{[-3, 3]^2} |y_1|^{\rho_1} |y_2|^{\rho_2} V_\alpha(y) dy \leq C \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha^\rho} \quad (3.68)$$

D'après Schumaker, les polynômes qui vérifient les conditions correspondant à (3.67) et (3.68) dans  $\mathbb{R}$  existent. On en déduit, par la méthode des tenseurs qu'il est possible de construire les polynômes  $V_\alpha$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

D'après la proposition 3.9, on peut définir un prolongement  $T : f \in \mathbb{L}^{p,\rho}(U) \mapsto Tf \in \mathbb{L}^{p,\rho}([-4, 4]^2)$ . Et on construit l'opérateur linéaire  $L_m$

$$L_m f(x) = \iint_{[-2, 2]^2} Tf(y) \phi_m(y - x) dy$$

avec

$$\phi_m(u) = \sum_{|\alpha|=m} \sum_{k_1=1}^{\rho_1} \sum_{k_2=1}^{\rho_2} (-1)^{k_1+k_2} \binom{\rho_1}{k_1} \binom{\rho_2}{k_2} \frac{1}{k_1 k_2} V_\alpha\left(\frac{u_1}{k_1}, \frac{u_2}{k_2}\right)$$

on note que l'opérateur  $L_m$  laisse invariant les polynômes de degré inférieur ou égal à  $m$ . On a d'après la définition 3.2 de la différence finie

$$\begin{aligned} L_m f(x) &= \sum_{|\alpha|=m} \int [f(x) + \Delta_y^\rho Tf(x)] V_\alpha(y) dy \\ &= \sum_{|\alpha|=m} \iint_{\left[\frac{-1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_1}\right] \times \left[\frac{-1}{\rho_2}, \frac{1}{\rho_2}\right]} [f(x) + \Delta_y^\rho Tf(x)] V_\alpha(y) dy + R \end{aligned}$$

On va majorer successivement le reste  $R$  puis le terme en  $\iint_{\left[\frac{-1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_1}\right] \times \left[\frac{-1}{\rho_2}, \frac{1}{\rho_2}\right]}$ .

b-1) Majoration du reste

On a

$$\|R\|_p \leq \sum_{k_1=1}^{\rho_1} \sum_{k_2=1}^{\rho_2} \binom{\rho_1}{k_1} \binom{\rho_2}{k_2} \|R_k\|_p$$

On pose alors  $J = \{y : \frac{1}{\rho_1} \leq |y_1| \leq 3 \text{ ou } \frac{1}{\rho_2} \leq |y_2| \leq 3\} \subset [-3, 3]$ , ce qui permet d'écrire

$$\|R_k\|_p = \left\| \sum_{|\alpha|=m} \int_J Tf(x + ky) V_\alpha(y) dy \right\|_p$$

Par l'inégalité de Minkowski (3.65), on obtient

$$\|R_k\|_p \leq \|Tf\|_{p, [-4, 4]^2} \int_J \sum_{|\alpha|=m} V_\alpha(y) dy$$

D'après la proposition 3.9 pour le premier facteur et par la définition de  $J$  ( $1 \leq \rho_1|y|$ ) pour le second facteur, puis d'après la définition des  $V_\alpha$ , l'inéquation devient

$$\begin{aligned}\|R_k\|_p &\leq C_0\|f\|_{p,U} \sum_{|\alpha|=m} \int_{[-3,3]} (\rho_1|y_1|)^{\rho_1} (\rho_2|y_2|)^{\rho_2} V_\alpha(y) dy \\ &\leq C_1\|f\|_{p,U} \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha^\rho}\end{aligned}$$

Finalement, on a donc

$$\|R\|_p \leq C_2\|f\|_{p,U} \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha^\rho}$$

b-2) Majoration du premier terme que l'on note  $L^{(1)}f(x)$

$$L^{(1)}f(x) = \sum_{|\alpha|=m} \iint_{\left[\frac{-1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_1}\right] \times \left[\frac{-1}{\rho_2}, \frac{1}{\rho_2}\right]} [f(x) + \Delta_y^\rho T f(x)] V_\alpha(y) dy$$

On a par l'inégalité de Minkowski

$$\|f - L^{(1)}f(x)\|_p \leq \iint_{\left[\frac{-1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_1}\right] \times \left[\frac{-1}{\rho_2}, \frac{1}{\rho_2}\right]} \|\Delta_y^\rho T f(x)\|_{p,[-2,2]^2} \sum_{|\alpha|=m} V_\alpha(y) dy$$

D'après la proposition 3.10

$$\|f - L^{(1)}f(x)\| \leq \|D^\rho T f(x)\|_{p,[-2,2]^2} \int_{[-3,3]^2} |y|^\rho \sum_{|\alpha|=m} V_\alpha(y) dy$$

et par la proposition 3.9 d'une part et par la définition des polynômes  $V_\alpha$  d'autre part,

$$\|f - L^{(1)}f(x)\| \leq C_3\|D^\rho f(x)\|_{p,U} \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha^\rho}$$

Finalement, en regroupant les deux majorations, on obtient

$$\begin{aligned}\|f - L_m f\|_{p,U} &\leq C_4 \left( \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha^\rho} \|f\|_{p,U} + \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha^\rho} \|D^\rho f(x)\|_{p,U} \right) \\ &\leq C_5 \left( \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha^\rho} \|f\|_{p,U} + \sum_{|\alpha|=m} \omega_\rho(f, \alpha^{-1})_p \right)\end{aligned}$$

D'après la proposition 3.11, il existe un polynôme  $q \in \mathbb{P}_\rho$  tel que

$$\|f - q\|_{p,U} \leq C_6 \omega_\rho(f, e)$$

où  $e$  est une constante. On pose alors  $P_f = L_m(f - q) - q$ .  $q$  étant un polynôme de degré inférieur ou égal à  $\rho$ ,  $L_m q = q$  et  $\omega_\rho(f - q, t) = \omega_\rho(f, t)$ . On en déduit

$$\begin{aligned} \|f - P_f\|_{p,U} &\leq \|f - q - L_m(f - q)\|_{p,I} \\ &\leq C_6 \left( \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha^\rho} \|f - q\|_{p,U} + \sum_{|\alpha|=m} \omega_\rho(f - q, \alpha^{-1})_p \right) \\ &\leq C_7 \left( \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha^\rho} \omega_\rho(f, e)_p + \sum_{|\alpha|=m} \omega_\rho(f, \alpha^{-1})_p \right) \end{aligned}$$

Par la propriété (i) de la proposition 3.13 on obtient alors

$$\begin{aligned} \|f - P_f\|_{p,U} &\leq C_8 \sum_{|\alpha|=m} e_1^{\rho_1} \alpha_1^{-\rho_1} \alpha_1^{\rho_1} e_2^{\rho_2} \alpha_2^{-\rho_2} \alpha_2^{\rho_2} \omega_\rho(f, \alpha^{-1})_p \\ &\leq C_9 \sum_{|\alpha|=m} \omega_\rho(f, \alpha^{-1})_p \end{aligned}$$

On a ainsi l'inégalité de Jackson pour  $f \in \mathbb{L}^p([-1, 1]^2)$ , ce qui termine la démonstration du théorème.  $\diamond$





# Chapitre 4

## Navire rapide

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons un problème particulier de dynamique stochastique en nous intéressant au comportement d'un navire rapide sur houle réelle avec pour objectif de répondre à des problèmes de confort.

Les accélérations violentes (extrêmes) du navire peuvent induire une fatigue de la structure et une diminution des performances de propulsion et elles dégradent le confort les passagers en provoquant par exemple des déséquilibres des passagers, des chutes d'objets, etc. D'autre part, des expériences médicales montrent que lorsque l'on soumet un humain pendant un certain temps à une oscillation verticale basse fréquence de niveau donné, on provoque chez lui des troubles dus au mal de mer. La prédiction de la tenue à la mer des corps flottants est assez bien maîtrisée par des méthodes de calcul éprouvées telles que la modélisation par écoulements de fluides parfois à surface libre qui met en oeuvre une représentation par singularités. Les principales limitations de ces méthodes sont associées aux mouvements résonnants et aux hautes fréquences (supérieures aux fréquences de la houle) induite par la vitesse de rencontre des vagues. En particulier, la grande vitesse suscite des fréquences de rencontre avec la houle incidente qui correspondent aux fréquences des oscillations responsables du mal de mer (inférieures à 2 Hertz).

Nous nous attacherons donc, dans ce chapitre, à estimer la fréquence de franchissements croissants de niveaux pour les accélérations en tangage du navire, ce qui nous permettra à la fois de détecter les passages des trajectoires d'accélération par des niveaux élevés et d'évaluer les niveaux d'accélération atteints pour les fréquences responsables du mal de mer. Ainsi, nous pourrions par exemple donner, en fonction de l'état de la mer, la vitesse limite à respecter pour que les passagers ne soient pas malades.

Le développement d'une méthode qui permette d'étudier les statistiques des accélérations d'un système dynamique non linéaire excité par de la houle réelle, même avec un seul degré de liberté, nécessite déjà un travail important. Nous détaillons donc ici la méthodologie (fig. 4.1) pour une unique vitesse d'avance de 50 noeuds (environ 92 km/h) et nous donnerons des résultats pour un seul état de mer représentatif. Une démarche identique pourrait être appliquée à d'autres vitesses d'avance ainsi qu'à d'autres types de systèmes stochastiques non linéaires.

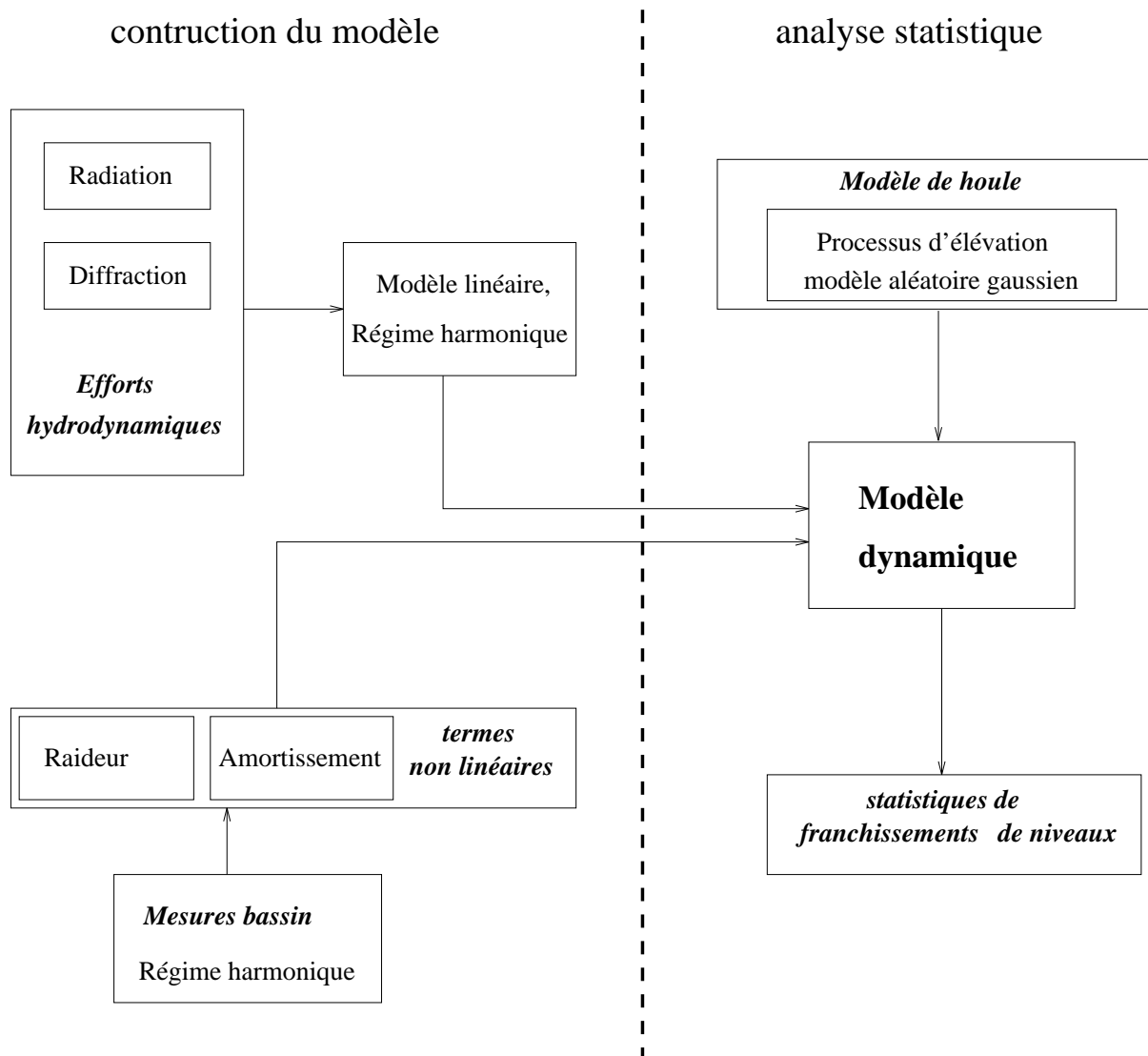


FIG. 4.1 – Statistiques du comportement de systèmes dynamiques non linéaires

Le chapitre est organisé de la façon suivante (voir aussi fig. 4.1). Dans un premier temps, nous construisons un modèle non linéaire pour le système dynamique constitué par la carène du navire et la houle incidente. La construction du modèle non linéaire se décompose en plusieurs étapes (cf fig. 4.1) : réalisation d'une campagne d'essais en régime harmonique, calcul d'un modèle linéaire en diffraction-radiation, construction du modèle non linéaire sur la base du modèle linéaire, les coefficients des termes non linéaires étant identifiés à partir des mesures. Puis, nous indiquons quels critères sont habituellement retenus dans les études de confort et nous expliquons pourquoi nous avons choisi d'étudier plus particulièrement la fréquence de franchissements de niveaux des accélérations. Nous montrons ensuite que, pour ce problème particulier, il est difficile d'appliquer les méthodes

“classiques” de la dynamique stochastique (cf chapitre 2) et nous proposons d’approcher la fréquence de franchissements à partir de simulations des accélérations. Nous présentons enfin les résultats obtenus en utilisant les estimateurs du nombre moyen de franchissements de niveaux étudiés dans le chapitre 3.

## 4.2 Système dynamique

La première étape de la construction d’un système dynamique non linéaire pour modéliser le comportement du navire rapide a consisté à réaliser des séries de mesures.

Une campagne d’essais a été conduite pour le navire rapide dans le bassin des carènes de Nantes. Les essais portaient sur un modèle de coque centrale de navire à grande vitesse de type “Monofast” étudiée par l’Ifremer dans le cadre du programme Mentor. Les mesures ont été réalisées en similitude de Froude à l’échelle 1/38.

La maquette est remorquée sous le chariot du bassin par l’intermédiaire de deux bras (cf fig. 4.2). Le flotteur est bridé en cavalement, embardée, roulis et lacet et on mesure le pilonnement et le tangage (cf fig. 1.3). Deux sondes capacitatives permettent la mesure de la houle, l’une fixe sur le bord du bassin et l’autre embarquée sur le chariot de remorquage et positionnée à une distance fixe ( $L_{cs}$ ) du modèle. La sonde fixe contrôle la houle générée par le batteur tandis que la sonde embarquée permet de déterminer la position des crêtes des vagues par rapport au centre de gravité du flotteur.

Des périodes de houle ont été sélectionnées afin de couvrir des intervalles de période de rencontres semblables lorsque la vitesse d’avance croît. Et des périodes intermédiaires ont été incluses pour décrire les résonances du flotteur. Ainsi pour cinq vitesses d’avance du navire (0, 10, 25, 40 et 50 noeuds), on dispose d’un jeu de mesures balayant différentes périodes de la houle incidente.

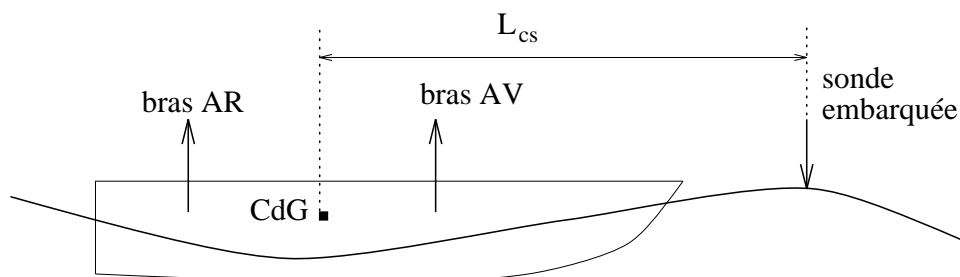


FIG. 4.2 – Positionnement du modèle dans le canal de remorquage

Ces mesures associées à un calcul linéaire de diffraction-radiation permettent d’identifier un modèle non linéaire afin d’étudier le comportement du navire rapide.

## 4.2.1 Oscillateur non linéaire

Nous décrivons maintenant comment nous construisons un modèle non linéaire pour le navire rapide [35], [37]. Nous procédons en plusieurs étapes. Pour commencer, nous calculons un modèle linéaire d'après les caractéristiques de la carène. Puis les mesures permettant de montrer, que pour des vitesses supérieures à 25 noeuds, le modèle linéaire calculé ne suffit plus à décrire le comportement du navire, nous identifions alors à partir des mesures, des termes non linéaires choisis pour leur sens physique.

### Modèle linéaire

Le modèle linéaire est calculé à partir d'un modèle classique de diffraction-radiation établi pour les corps fixes, qui donne le potentiel des vitesses de l'écoulement autour de la coque du navire. Pour écrire le modèle linéaire, on suppose que

- le fluide est parfait et incompressible
- le domaine de l'écoulement est limité par le fond horizontal et la surface libre
- l'écoulement est irrotationnel
- la houle incidente est régulière sinusoïdale et se propage face au navire
- le navire effectue des petits mouvements autour de sa position moyenne

Les efforts  $\vec{F}$  exercés sur la carène sont déduits du potentiel des vitesses de l'écoulement [14], [37]. Et le système dynamique au point fixe (4.1) est construit en posant la relation fondamentale de la dynamique linéarisée  $M_I \ddot{x} = \vec{F}$ ,

$$(M_I + \mu(\omega))\ddot{x} + \lambda(\omega)\dot{x} + kx = f(\omega) \quad (4.1)$$

où  $M_I$  représente la matrice d'inertie (masse) du navire et  $\mu$  sa masse ajoutée. La masse ajoutée est le terme de proportionnalité entre l'accélération du flotteur et les efforts hydrodynamique en phase.  $\lambda$  est l'amortissement et  $k$  la raideur hydrostatique linéaires. La raideur traduit l'effet de la variation des forces d'Archimède.  $f$  représente les efforts hydrodynamiques linéaires dus à la houle et  $\omega$  est la pulsation de la houle incidente. Les coefficients des efforts hydrodynamiques  $f$ ,  $\mu$  et  $\lambda$ , dépendent de la pulsation  $\omega$  de la houle incidente, contrairement au coefficient  $k$  des efforts hydrostatiques linéaires.

Pour prendre en compte l'influence de la vitesse d'avance notée  $v_a$ , on considère l'approximation dite de la "fréquence de rencontre" qui permet de traduire le fait que le navire rencontre les vagues de face à une fréquence  $\omega_r/2\pi$  supérieure à celle de la houle incidente  $\omega/2\pi$ . Les modifications apportées au modèle au point fixe sont liées à la dérive temporelle et les dérivées partielles par rapport au temps au point fixe sont remplacées par

$$\frac{\partial}{\partial t}|_{fixe} = \frac{\partial}{\partial t}|_{mobile} - v_a \frac{\partial}{\partial x} \quad (4.2)$$

Ceci induit des modifications des efforts hydrodynamiques et on aboutit au système linéaire (4.3) à la pulsation de rencontre  $\omega_r = \omega + v_a \omega^2/g$ .

$$(M_I + \mu(\omega_r))\ddot{x} + \lambda(\omega_r)\dot{x} + kx = f(\omega_r) \quad (4.3)$$

La pulsation de rencontre est la pulsation avec laquelle le bateau rencontre les vagues. Elle est égale à la pulsation de la houle incidente si la vitesse d'avance du navire est nulle.

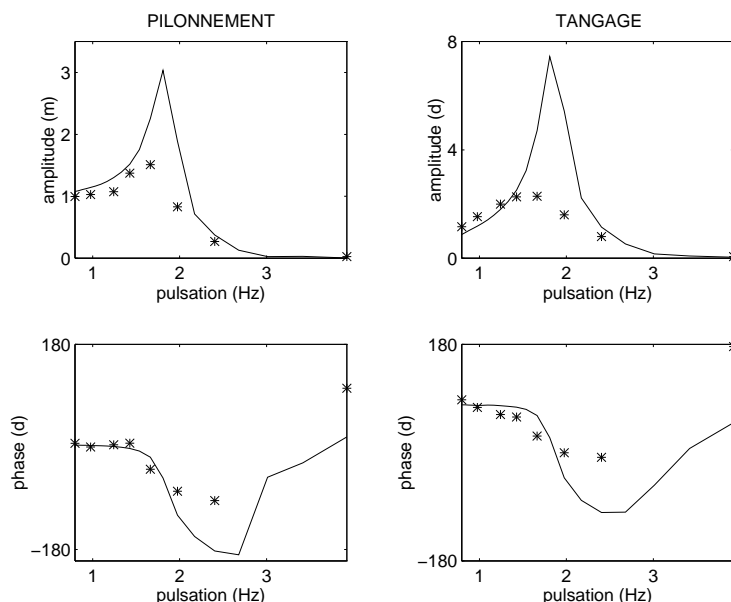


FIG. 4.3 – Comparaison du modèle linéaire calculé avec la mesure - houle de hauteur 2 mètres, vitesse d'avance 50 noeuds; \* mesures, - modèle

Si la houle incidente est sinusoïdale, alors le mouvement mesuré et la solution du modèle linéaire sont sinusoïdaux. Ainsi, dans ce cas, les mouvements sont entièrement définis par leur amplitude et leur phase.

La figure 4.3 compare l'amplitude et la phase du mouvement calculé par le modèle linéaire (en trait plein) avec l'amplitude et la phase du mouvement mesuré (étoiles) pour le tangage et le pilonnement à différentes pulsations de rencontre. Cette figure donne les mouvements du navire sur de la houle harmonique de 2 mètres pour une vitesse d'avance de 50 noeuds. On observe une discordance importante entre le mouvement calculé par le modèle (4.3) et les mesures réalisées en bassin. En particulier, la résonance du calcul est nettement plus importante que celle des mesures, et les phases sont décalées pour les pulsations de rencontre supérieures à 2 Hertz.

On compare dans l'annexe B les fonctions de transfert expérimentales aux fonctions de transfert calculées au premier ordre pour des vitesses inférieure à 50 noeuds [35]. On note que le modèle linéaire donne de bonnes approximations des mesures pour les vitesses inférieures à 25 noeuds. A partir de 25 noeuds on constate un écart entre les modules mesurés et calculés.

Les hypothèses du problème linéaire telles que l'hypothèse de fluide parfait qui sous-entend l'absence d'écoulement visqueux ou l'hypothèse de petits mouvements par exemple, sont trop simplificatrices pour bien modéliser le mouvement du navire dans des conditions extrêmes : grande vitesse ou état de mer extrême. D'autre part, on observe sur les mouvements mesurés une dissymétrie entre les crêtes et les creux des vagues (fig. 4.4) et

la transformation des signaux temporels dans le domaine fréquentiel met en évidence la présence de composantes multiharmoniques dans la réponse (fig. 4.5). Ces remarques confirment que la carène a un comportement non linéaire pour les vitesses d'avance élevées.

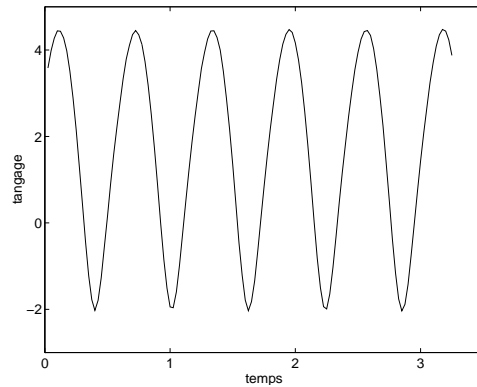


FIG. 4.4 – Tangage mesuré à la vitesse 50 nds pour de la houle incidente de 3 m de période 12 s

Le modèle linéaire de diffraction-radiation constitue le développement au premier ordre du problème général de tenue à la mer en fluide parfait, par rapport au petit paramètre  $\epsilon$  que constitue la cambrure de la houle incidente. Les perturbations de la surface libre et les mouvements du flotteur sont supposés être du même ordre  $\epsilon$ . Les développements aux ordres supérieurs font apparaître pour chaque puissance  $\epsilon^n$  un problème à l'ordre  $n$ . Nous proposons donc de construire un modèle plus complet en ajoutant au modèle linéaire des termes non linéaires qui tiennent compte des manifestations observées lors des essais sur houle régulière et qui s'inspirent des problèmes de diffraction-radiation d'ordres supérieurs à un.

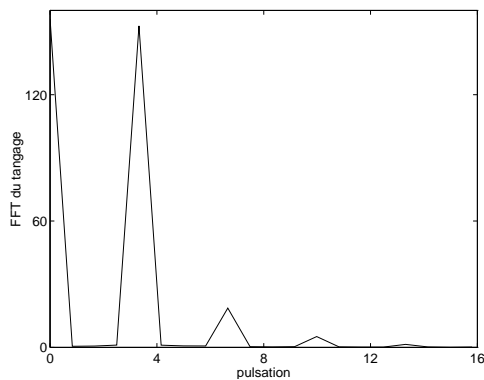


FIG. 4.5 – Transformée en fréquence du tangage mesuré à la vitesse 50 nds pour de la houle incidente de 3 m de période 12 s

## Modèle non linéaire

Pour réduire l'écart d'amplitude observé entre la mesure et le calcul linéaire de diffraction-radiation, nous avons choisi d'ajouter au modèle linéaire deux types de termes correcteurs : des termes d'amortissement pour compenser l'hypothèse de fluide parfait et expliquer l'écart d'amplitude important entre le calcul et la mesure, des termes de forces du second ordre pour compenser l'hypothèse de faible mouvement et expliquer les non linéarités observées sur les mouvements mesurés.

*Le déphasage entre le calcul et la mesure, observé sur la figure 4.3, est dû soit au modèle de base dont les coefficients seraient systématiquement biaisés soit aux mesures. Une hypothèse correctrice consiste à supposer que la sonde embarquée qui mesure la houle en avant de la carène et qui permet de recalculer les phases des mouvements par rapport à la houle équivalente au centre de gravité du navire induit un déphasage parasite croissant avec la vitesse. En effet, au point fixe les phases mesurées et calculées sont cohérentes et à grande vitesse la sonde embarquée génère une gerbe qui est du même ordre de grandeur que les gerbes d'étrave du navire et pourrait donc induire un déphasage systématique. On introduit ce déphasage sous la forme d'un décalage virtuel de la position de la sonde par rapport à sa position réelle en "corrigeant" les points d'essais.*

$$\delta\Phi = k_0\delta L_{cs}$$

où  $\delta\Phi$  représente le déphasage de la houle et  $\delta L_{cs}$  le décalage de la sonde. Cette correction permet de mieux accorder les phases calculées et mesurées [35].

Notre première idée pour atténuer l'écart d'amplitude entre le calcul et la mesure, a consisté à ajouter un amortissement linéaire de la forme  $b_1\dot{x}$ .

Mais, pour écrire le modèle linéaire, on a supposé que le fluide était parfait. L'amortissement linéaire ne rend donc compte que de la déperdition d'énergie par radiation. Or, en pratique, le fluide dans lequel évolue la carène n'est pas parfait et sa viscosité induit des frottements et des décollements. L'amortissement correspondant est non linéaire et on le traduit généralement par un terme impair fonction d'une puissance de la vitesse comprise entre 2 et 3. Ici, nous proposons d'introduire un terme cubique  $b_3\dot{x}^3$ . On note que l'amortissement non linéaire est souvent représenté par un terme de la forme  $b_2|\dot{x}| = b_2 \text{signe}(\dot{x})\dot{x}^2$  dans les modèles de roulis ou de tangage. Toutefois, dans notre cas, un terme cubique suffit à justifier le comportement non linéaire observé sur les mesures et il sera plus facile à manipuler par la suite.

D'autre part, quand on construit le modèle linéaire, on formule une hypothèse de petits mouvements autour de la position d'équilibre qui permet de négliger tous les termes d'ordre supérieur à un et en particulier un terme en carré des vitesses qui induirait une force de houle du second ordre. Nous introduisons donc dans notre nouveau modèle des forces d'ordre deux pour compenser cette hypothèse, sous la forme  $f_0 + f_2 \sin(2\omega_r t + \varphi_2)$ .

Nous avons choisi pour simplifier le processus d'identification d'ajouter au modèle linéaire des termes dont les coefficients sont indépendants de la pulsation de rencontre. Le modèle non linéaire qui corrige le modèle de diffraction-radiation est alors donné par l'équation suivante :

$$(M_I + \mu(\omega_r))\ddot{x} + (\lambda(\omega_r) + b_1)\dot{x} + kx + b_3\dot{x}^3 = f_0 + f(\omega_r) + f_2(\omega_r) \quad (4.4)$$

D'autres non linéarités, par exemple hydrostatiques, pourraient être introduites selon

le même principe.

## Identification

Nous avons implémenté deux méthodes pour identifier les coefficients des termes non linéaires de l'équation (4.4) ajoutés au modèle linéaire (4.3) de diffraction-radiation. La première est basée sur une optimisation linéaire et elle convient au cas où l'on identifie uniquement un amortissement linéaire. La seconde est une optimisation non linéaire sans contrainte plus générale. Dans les deux cas, la vitesse d'avance du navire est fixée et on identifie les coefficients sur l'ensemble des points de mesures correspondant à cette vitesse. On obtient ainsi un jeu de coefficients pour chaque vitesse d'avance.

### 1. Optimisation linéaire

Pour une vitesse d'avance donnée, il s'agit de corriger la matrice d'amortissement du modèle linéaire de diffraction-radiation en réduisant, dans le domaine fréquentiel, l'écart entre les efforts mesurés et les efforts calculés. Le système différentiel s'écrit dans le domaine fréquentiel :

$$[k - (M_I + \mu(\omega_r))\omega^2 - i\omega(\lambda(\omega_r) + b_1)]X(\omega) = F(\omega)$$

où  $X$  et  $F$  sont les transformées de Fourier respectives de la première harmonique du mouvement et de la force du premier ordre due à la houle. On obtient

$$i\omega b_1 X(\omega) = [k - (M_I + \mu(\omega_r))\omega^2 - i\omega\lambda(\omega_r)]X(\omega) - F(\omega) \quad (4.5)$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires de (4.5) on aboutit à deux systèmes élémentaires linéaires. En répétant ce procédé pour chaque pulsation de rencontre  $\omega_r$  correspondant à une mesure, la vitesse d'avance restant fixée, et en regroupant les systèmes élémentaires, on construit un système surdéterminé dont les inconnues sont les coefficients de la matrice d'amortissement  $b_1$  et que l'on peut résoudre par la méthode de Householder (voir [37] et [35]).

Dans ce problème d'optimisation linéaire, il convient d'introduire un poids afin de réduire l'influence des mouvements induits par de la houle de petite période (6 et 7 s) pour lesquels les mesures correspondantes sont peu fiables.

### 2. Optimisation non linéaire

Un processus d'optimisation non linéaire permet d'identifier les coefficients du modèle non linéaire à partir de l'ensemble des harmoniques significatives du mouvement mesuré. On minimise dans ce cas l'écart entre les mouvements mesurés et calculés pour une vitesse d'avance donnée. On va voir que ceci revient à imbriquer deux problèmes de minimisation non linéaire : le premier consiste à identifier le vecteur des coefficients et le second à calculer, à chaque étape du premier problème, le mouvement correspondant aux nouveaux coefficients.

On note  $\theta$  le vecteur des paramètres à identifier et  $X$  le vecteur des coefficients de la décomposition en série de Fourier (4.6) du mouvement  $x$ . En supposant que les harmoniques d'ordres supérieurs à  $n$  sont négligeables devant les autres, on écrit pour le



mouvement  $x$  :

$$x(t, \omega_r) = a_0(\omega_r) + \sum_{k=1}^n a_k(\omega_r) \sin(k\omega_r t) + b_k(\omega_r) \cos(k\omega_r t) \quad (4.6)$$

On note alors  $X_{\omega_r} = [X(k\omega_r)]_{k=0,n}$  et  $X(k\omega_r) = (a_k, b_k)$  si  $k \neq 0$  et  $X(0) = a_0$ . Et on pose le problème de minimisation suivant :

$$\text{déterminer } \theta \text{ réalisant le } \min_{\theta} \sum_{k=0}^n \sum_{\omega_r \in \Omega} \|X_{mes}(k\omega_r) - X_{\theta}(k\omega_r)\|_2^2$$

où on note  $\Omega$  l'ensemble des pulsations  $\omega_r$  pour lesquelles on dispose de mesures. Pour résoudre ce problème, on doit à chaque étape de l'optimisation en  $\theta$  (i.e. pour  $\theta$  fixé) calculer l'écart  $e_k$  (4.7) et son gradient par rapport à  $\theta$  pour les différentes harmoniques  $k$ .

$$e_k(\omega_r) = X_{mes}(k\omega_r) - X_{\theta}(k\omega_r) \quad (4.7)$$

On calcule  $X_{\theta}(k\omega_r)$  en injectant la décomposition en série de Fourier de  $x_{\theta}(t, \omega_r)$  dans le système différentiel (4.4). On obtient ainsi un système polynomial de degré  $n$  pour les coefficients de la décomposition de  $x$  qui se met sous la forme :

$$\theta^T h(X_{\omega_r}) = s(X_{\omega_r}) \quad (4.8)$$

et que l'on résout indépendamment pour chaque  $\omega_r \in \Omega$  en minimisant en  $X = \{a_0, (a_k, b_k)_{k=1, \dots, n}\}$  le coût  $\|\theta^T h(X) - s(X)\|_2^2$ .

Le gradient de l'écart  $e_k$  s'écrit par définition

$$\frac{\partial e_k}{\partial \theta} = \frac{\partial X_{\theta}(k\omega_r)}{\partial \theta}$$

Pour chaque pulsation de rencontre  $\omega_r$ , le mouvement  $X_{\omega_r}$  est indépendant des mouvements aux autres pulsations et  $\theta$  est constant, on peut donc calculer le gradient séparément pour chaque pulsation de rencontre. En dérivant l'équation (4.8) par rapport à  $\theta$ , on obtient un système linéaire dont l'inconnue est le gradient cherché :

$$h(X_{\omega_r}) + \left[ \frac{\partial X_{\theta}(k\omega_r)}{\partial \theta} \right] \left[ \frac{\partial \theta^T h(X_{\omega_r})}{\partial X} \right] = 0$$

Sachant calculer l'écart  $e_k(\theta)$  et son gradient, on peut résoudre le problème par une méthode standard de minimisation sans contrainte.

Avec deux degrés de liberté, pignonement et tangage, ce processus d'identification est déjà lourd et il nécessite encore plusieurs tests de validation [35].

Nous venons de montrer comment nous contruisons le système dynamique non linéaire. Nous allons maintenant modéliser les forces dues à la houle qui constituent la composante aléatoire du système.

## 4.2.2 Forces de houle

Les efforts dus à la houle qui s'exercent sur la carène sont modélisés par des forces du premier et du second ordre. Ces forces sont des filtrés linéaire et quadratique de la houle incidente. La première étape pour décrire ces efforts consiste donc à modéliser la surface libre.

Pour un état de mer aléatoire, l'élévation de la surface libre  $\eta$  est classiquement décrite [32] par un processus gaussien exprimé de la façon suivante :

$$\eta(t) = \text{Re}\left(\sum_j \sqrt{2S_{\eta\eta}(\omega_j)} d\omega u_j e^{i\omega_j t}\right) \quad (4.9)$$

où  $S_{\eta\eta}$  est la densité spectrale du processus. Un des modèles couramment utilisé pour cette densité est le modèle de Pierson-Moskowitz (fig. 4.6) caractérisé par la hauteur significative de l'état de mer  $H_s = 4\sqrt{M_0}$  et par sa période modale  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .

$$S_{\eta\eta}(\omega) = \frac{5}{16} H_s^2 \frac{\omega^{-5}}{\omega_0^{-4}} e^{-1.25(\frac{\omega}{\omega_0})^{-4}}, \quad \omega_0^2 = 0.161 \frac{g}{H_s} \quad (4.10)$$

$M_0$  est le moment spectral d'ordre zéro du processus élévation de la surface libre,  $\omega$  représente la fréquence et  $d\omega$  le pas de discrétisation en fréquence. Les variables aléatoires  $u_j$  sont des variables gaussiennes complexes centrées indépendantes et identiquement distribuées telles que  $E(|u_j|^2) = 1$ .

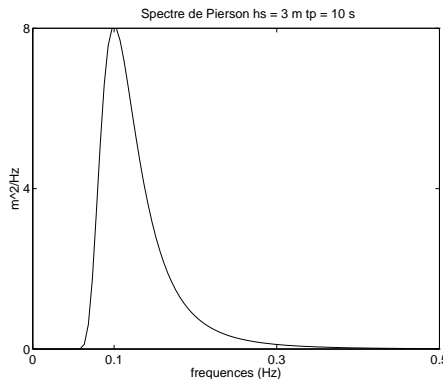


FIG. 4.6 – Spectre de Pierson

Le spectre de la force d'ordre un est calculé par le problème de diffraction-radiation du premier ordre tandis que dans notre cas la force du second ordre est identifiée. Ici, la force du second ordre est nécessairement simplifiée. En effet, en théorie, elle est modélisée par un transfert quadratique de la houle incidente. Elle devrait donc faire apparaître des contributions  $\omega_i + \omega_j$  et  $|\omega_i - \omega_j|$  où les  $\omega_i$  sont les fréquences de la houle incidente. En outre, des études sur un cylindre fixe [23] montrent que les contributions sur ces différentes pulsations sont du même ordre de grandeur ce qui ne permet pas à priori de négliger tel

ou tel terme. Dans le problème qui nous intéresse, nous disposons uniquement de mesures réalisées sur houle régulière (monofréquentielle), nous ne pouvons donc identifier la force d'ordre deux que pour les fréquences 0 et  $2\omega_i$ . En identifiant une force constante en  $2\omega_i$  nous compensons en partie les termes en  $\omega_i + \omega_j$  et  $|\omega_i - \omega_j|$  négligés à priori.

Le système dynamique non linéaire est donc excité par la somme d'un processus stationnaire gaussien et d'un processus stationnaire gaussien convolué par un noyau diagonal d'ordre deux.

Les figures 4.7 et 4.8 donnent un exemple de l'évolution, par rapport au temps, de l'élévation de la surface libre et de la force non linéaire en tangage correspondante.

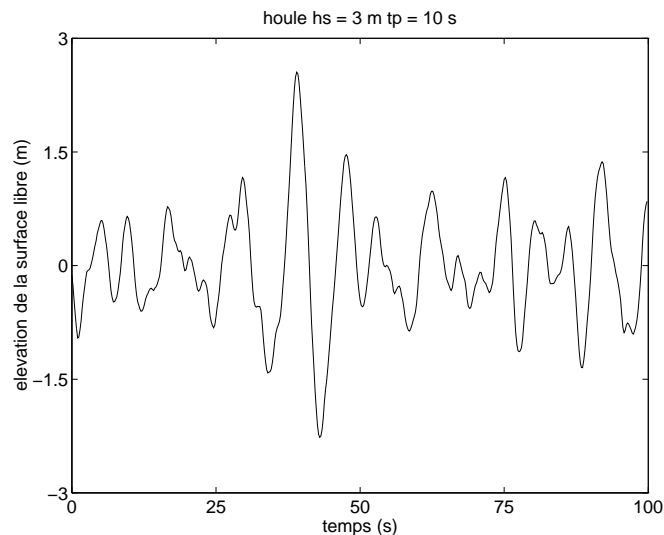


FIG. 4.7 – Elévation de la surface libre

## 4.3 Confort

Dans la section précédente, nous avons montré comment modéliser les mouvements du navire rapide quand il est excité par de la houle. Nous allons maintenant nous intéresser aux critères de confort et en particulier du mal de mer sur un navire. Nous donnons dans la première partie un certain nombre de généralités concernant le confort. Tandis que dans la seconde partie nous nous concentrons plus particulièrement sur le problème du mal de mer et nous proposons une approche nouvelle de ce problème en prenant davantage en compte le caractère aléatoire de la houle que les techniques classiques.

### 4.3.1 Définition, modélisation

Le confort des navires, rapides ou conventionnels, est un problème qui se pose depuis des années et intéresse de plus en plus les spécialistes de la navigation. L'accroissement des exigences économiques (respect des délais ...) conjugué au souci des armateurs d'assurer

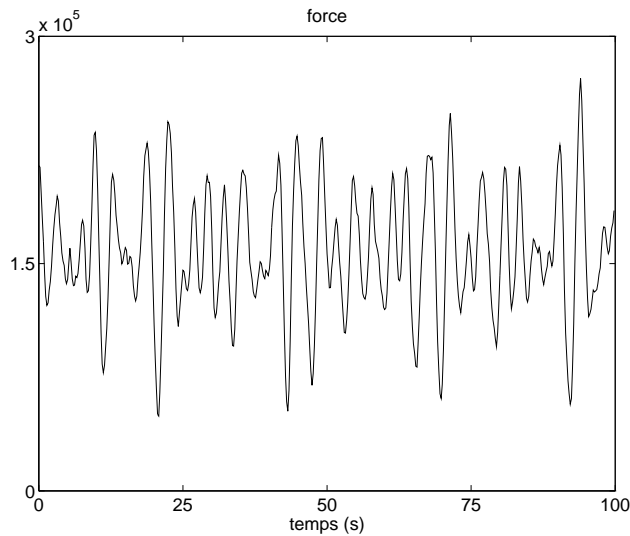


FIG. 4.8 – Force non linéaire

la sécurité et le confort des passagers, ont provoqué l'éclosion de plusieurs méthodes d'évaluation de la capacité des navires à conserver un "bon" comportement dans des conditions de mer sévères.

Le terme de confort est employé dans la vie courante pour définir différents concepts mais quand on parle de confort à bord d'un navire, on se réfère généralement à quatre notions :

- 1. la santé des individus exposés : les passagers peuvent se blesser quand le bateau subit des oscillations trop violentes ;
- 2. la capacité de travail des membres d'équipage : les membres d'équipages risquent d'être déséquilibrés par des mouvements violents du navire et d'être ainsi ralentis dans leur tâche ;
- 3. le bien-être des passagers : les compagnies de ferries souhaitent que les passagers soient suffisamment à l'aise pour désirer consommer ;
- 4. le mal de mer.

Ces quatre notions de confort sont toutes contrecarrées par des oscillations trop violentes. Mais chacune correspond à un type d'oscillation à certaines fréquences. Ainsi, l'estimation prévisionnelle du confort à la mer d'un navire passe avant tout, par l'évaluation précise des caractéristiques de trajectoires de la carène en fonction de l'état de mer considéré. Et les critères de confort sont donnés essentiellement par l'amplitude (valeur efficace) et la fréquence de l'accélération du système et par le temps d'exposition aux oscillations.

Les études sur le confort visent, d'une manière générale, à évaluer les accélérations maximales endurables par l'être humain en fonction de la fréquence de ces oscillations et de la durée de l'exposition. Les valeurs critiques proposées sont obtenues à partir d'expérimentations médicales (personne en bonne santé physique attachée à un siège vibrant) et de questionnaires remplis par les passagers lors de traversées de la Manche par exemple. Ces niveaux critiques sont en général donnés en accélération efficace  $a_{eff}$  et ils

sont calculés à partir de signaux monofréquentiels. Pour un signal temporel d'accélération  $a(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , l'accélération efficace est définie par

$$a_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T a^2(t) dt}$$

Lorsque les signaux enregistrés sont à bande de fréquence plus large, on découpe la bande de fréquences en bandes élémentaires étroites et on calcule l'accélération efficace pour chaque signal élémentaire en l'assignant à la fréquence centrale de la bande correspondante. On appelle cette technique "analyse en tiers d'octave" parce que les bandes de fréquences élémentaires sont généralement de la largeur d'un tiers d'octave.

Ces études montrent par exemple que la bande de fréquence la plus pénalisante en terme de confort se situe entre 4 Hz et 8 Hz pour les oscillations longitudinales et en dessous de 2 Hz pour les accélérations transversales. Par exemple, pour les fréquences basses, on préconise les valeurs limites en accélération efficace données dans le tableau. Ces seuils sont les valeurs efficaces pour des accélérations verticales de translation en fonction de la fréquence des oscillations et de la durée d'exposition du sujet. Quand les limites sont dépassées, un nombre significatif de passagers voit apparaître chez lui des troubles dus au mal des transports.

Fréquence (Hz)	accélération ( $\text{ms}^{-2}$ )		
	temps d'exposition		
	30 min	2 h	8 h
0.1 à 0.315	1.0	0.5	0.25
0.4	1.5	0.75	0.375
0.5	2.15	1.08	0.54
0.63	3.15	1.60	0.80

*Accélération admissible avant que le mal mer n'apparaisse  
chez 90 % des individus*

On présente dans l'annexe C des diagrammes analogues au tableau ci-dessus [2].

### 4.3.2 Mal de mer

Pour les navires rapides, le mal de mer, qui est causé par les accélérations basse fréquence (à l'échelle des conditions de travail), est prépondérant car, sur de la houle assez longue, la grande vitesse suscite en particulier des fréquences de rencontre avec les vagues inférieures à 2 Hz qui correspondent aux fréquences des oscillations provoquant le mal des transports (entre 0.1 Hz et 1 Hz).

Il existe essentiellement deux méthodes pour l'étude quantitative du mal de mer : Motion Sickness Incidence (MSI) et Motion Sickness Dose Value (MSDV). Chacune vise à évaluer mathématiquement le pourcentage de personnes malades en fonction des caractéristiques des oscillations subies (accélération, fréquence, durée). Le MSDV, par exemple, est directement proportionnel à l'accélération efficace pour une durée d'exposition donnée.

Pour citer un exemple précis, la méthode MSDV prévoit que si les passagers sont soumis à une accélération de  $0.05\text{ g}$  ( $= 0.49\text{ ms}^{-2}$ ) à  $0.16\text{ Hz}$  pendant 2 heures, 45 % d'entre eux vont être malades. L'expression du MSI est plus compliquée, mais les tendances générales des deux méthodes sont conformes. En particulier, elles concluent que les fréquences autour de  $0.17\text{ Hz}$  sont à proscrire absolument, alors que les passagers supportent mieux les fréquences comprises entre  $0.5\text{ Hz}$  et  $1\text{ Hz}$ .

Il n'est pas possible de dire si l'une de ces deux méthodes est meilleure que l'autre. En revanche, on sait que toutes deux sous-estiment le nombre de malades, en partie parce qu'elle omettent de considérer certains phénomènes auxquels le mal de mer est associé (phénomènes psychologiques, effet boule de neige...). Mais on peut aussi reprocher à ces méthodes leur approche déterministe : elles ne tiennent pas compte du caractère aléatoire de la houle. En effet leurs critères sont donnés pour une fréquence fixée et non pour une somme de signaux élémentaires à différentes fréquences, qui constituerait une meilleure approximation d'un signal aléatoire.

Payne [42] propose une méthode probabiliste basée sur l'idée que le niveau de confort du navire est contrôlé par les accélérations verticales les plus violentes. La prédiction du confort consiste pour Payne à enregistrer les pics d'accélération de façon à établir une courbe traduisant la probabilité pour que les accélérations verticales endurées par le navire dépassent certaines valeurs dans un état de mer donné. Le niveau dépassé seulement 5 % du temps est alors comparé à des valeurs de références liées au confort.

Nous proposons ici une autre méthode aléatoire dans laquelle on approche le nombre moyen par secondes de dépassements de niveaux fixés pour les accélérations verticales. Autrement dit, nous estimons la fréquence avec laquelle l'accélération franchit un niveau donné. Dans cette approche, nous ne décomposons plus la bande de fréquences des oscillations en tiers d'octave mais nous considérons le signal d'accélération dans son ensemble. Ce point est important. En effet, dans la pratique, les accélérations correspondant à diverses fréquences d'oscillation se superposent positivement ou négativement ce qui induit un écart entre le niveau franchi à une fréquence d'oscillation donnée et l'amplitude du signal élémentaire correspondant à cette même fréquence d'oscillation. Nous pouvons illustrer cette idée par des figures.

Les figures 4.9 et 4.10 permettent de comparer l'approche que nous proposons avec la méthode plus classique qui consiste à estimer l'accélération efficace sur des bandes de fréquence d'oscillation étroites (en tiers d'octave). Pour construire ces figures, on utilise un signal simulé de l'accélération en tangage d'un navire rapide (cf § 4.4.3) qui navigue à 50 noeuds sur de la houle aléatoire de hauteur significative 3 m et de période modale 10 s. L'écart-type de l'accélération est noté "std". La figure 4.9 donne l'accélération efficace en fonction de la fréquence des oscillations (analyse en tiers d'octave). Le signal d'accélération est décomposé en fréquence sur les différents tiers d'octave et l'accélération efficace estimée pour chaque composante. La figure 4.10 représente les fréquences de franchissements croissants de niveaux pour le même signal d'accélération. La comparaison de ces deux figures induit plusieurs remarques.

- En estimant l'accélération efficace, nous ne tenons pas compte de la différence entre les

niveaux d'accélération positifs et négatifs. Pourtant, nous observons sur la figure 4.10 que l'écart entre les valeurs positives et négatives n'est pas négligeable. Par exemple, pour une accélération de l'ordre de deux écart-types, la fréquence de franchissement est plus que doublée pour les niveaux négatifs par rapport aux niveaux positifs.

- Les résultats des deux méthodes ne concordent pas. En effet, pour la fréquence de franchissement 0.2 Hz par exemple, la figure 4.9 indique que l'accélération atteint un niveau de moins d'un demi écart-type, alors que la figure 4.10 montre que les niveaux franchis sont proches d'un écart-type. Il semble donc que le fait de décomposer l'accélération sur des bandes de fréquence disjointes amène à largement sous-estimer l'amplitude des niveaux d'accélération franchis à une fréquence donnée.

En outre, nous rappelons que les principales données expérimentales pour établir les niveaux admissibles des oscillations sont des mesures réalisées à l'aide de chaises vibrantes. La vibration appliquée à la chaise est généralement mono-fréquentielle. Ces expériences permettent de mettre en évidence le fait que l'humain réagit différemment à des accélérations de fréquences d'oscillation différentes et de quantifier ces réactions. Mais elles ne donnent aucun résultat pour un cumul d'accélérations d'amplitudes et de fréquences d'oscillation diverses.

D'après les remarques ci-dessus, il nous semble plus approprié de comparer les données médicales à la fréquence de franchissements croissants des niveaux d'accélération plutôt qu'aux résultats de l'analyse en tiers d'octave, pour caractériser le confort à bord d'un navire.

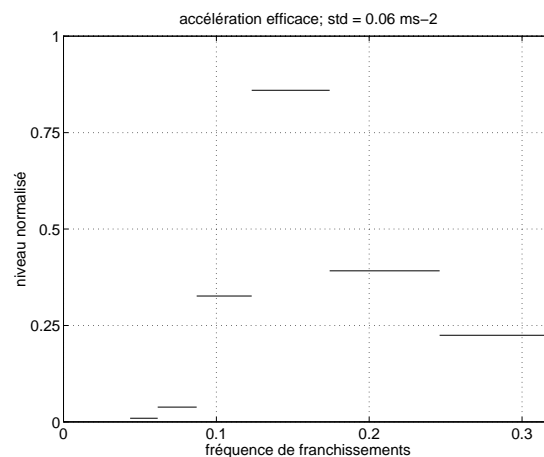


FIG. 4.9 – Accélération efficace (analyse en tiers d'octave, domaine spectral)

## 4.4 Choix d'une méthode

Dans les sections précédentes, nous avons décrit le modèle dynamique du navire rapide excité par de la houle réelle puis nous avons vu quelles sont les quantités déterminantes dans l'apparition du mal des transports. En particulier, nous avons expliqué pourquoi

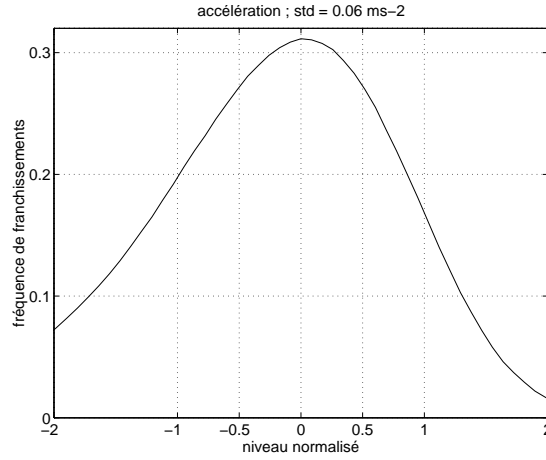


FIG. 4.10 – Fréquence de franchissements de niveaux pour l'accélération

nous choisissons de caractériser le comportement du navire étudié par la fréquence de franchissements croissants de niveaux des accélérations verticales. Il nous faut maintenant déterminer comment approcher ce nombre moyen de franchissements pour un système dynamique non linéaire.

#### 4.4.1 Système dynamique simplifié

Revenons tout d'abord sur le modèle non linéaire (4.4) dont l'équation est rappelée ci-dessous.

$$(M_I + \mu(\omega_r))\ddot{x} + (\lambda(\omega_r) + b_1)\dot{x} + kx + b_3\dot{x}^3 = f_0 + f(\omega_r) + f_2(\omega_r) \quad (4.11)$$

Nous remarquons que les termes hydrodynamiques dépendent de la fréquence de la houle incidente. Nous pourrions de façon plus générale écrire ce système sous la forme suivante :

$$M_I\ddot{x} + C(x) + kx = F(\eta(t)) \quad (4.12)$$

où l'amortissement  $C$  s'exprime

$$C(x) = \int_0^t l(t-s)\ddot{x}(s)ds + b_1\dot{x} + b_3\dot{x}^3 \quad (4.13)$$

et où la fonction  $l$  est donnée par sa transformée de Fourier en certains points.

Nous préférons dans un premier temps travailler avec un système plus simple du point de vue de la théorie de la dynamique stochastique afin de valider une méthode adaptée à l'estimation de l'espérance du nombre de franchissements croissants de niveaux. En effet, le but de cette étude est d'élaborer des méthodes d'estimation du nombre moyen de franchissements de niveaux élevés pour les accélérations verticales de la carène. Nous ne cherchons pas pour l'instant à déterminer de façon très précise le comportement d'un navire donné. Or, le modèle (4.11) a une forme complexe comparé à la plupart des systèmes



résolus par les différentes méthodes présentées dans le chapitre 2. D'autre part, certains problèmes liés à l'identification des coefficients des termes non linéaires du système (4.11) ne sont pas encore totalement éclaircis (cf § 4.2.1).

Nous proposons donc d'identifier un oscillateur non linéaire à un degré de liberté et à coefficients constants par rapport à la fréquence de la houle incidente (4.14). La forme de ce modèle est justifiée par des considérations d'ordre physique et par le développement du problème de diffraction-radiation. Les termes  $c_3\dot{x}^3$  et  $k_3x^3$  correspondent respectivement à un amortissement "visqueux" et à une force hydrostatique non linéaire. La force  $f_1$  se déduit de l'élévation de la surface libre et les forces  $f_0$  et  $f_2$  du carré de l'élévation de la surface libre. Ce type de modèle se retrouve dans de nombreuses études sur le roulis [52].

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + c_3\dot{x}^3 + k_3x^3 = f_0 + f_1(\omega_r) + f_2(\omega_r) \quad (4.14)$$

Dans l'équation (4.14), tous les coefficients sont identifiés, exceptée la force d'ordre un que nous calculons par le problème de diffraction-radiation linéaire afin d'imposer la résonance de la carène. Pour l'identification, nous travaillons avec les mesures de tangage correspondant à la vitesse 50 noeuds car cette série de points présente le comportement le plus non linéaire parmi l'ensemble des mesures et nous appliquons la seconde méthode d'identification proposée plus haut (§ 4.2.1, p. 100).

Les figures 4.11 et 4.12 comparent le module et la phase des trois premières harmoniques du mouvement. Les harmoniques suivantes sont suffisamment faibles par rapport aux premières pour être négligées. Nous observons que les résonances du mouvement calculé sont du même ordre et environ à la même fréquence que celles du mouvement mesuré. L'écart entre le calcul et les mesures sur la composante continue est dû essentiellement à la forme mathématique de l'oscillateur. Ainsi, le modèle identifié (4.14), sans être parfait, donne une assez bonne représentation des principales caractéristiques du comportement du navire rapide.

### Approximation linéaire

Une approximation, dite "linéaire", de la fréquence de franchissements croissants de niveaux pourrait être calculée à partir d'un modèle d'oscillateur linéaire (4.15).

$$m_l\ddot{x} + c_l\dot{x} + k_lx = f(\omega_r) \quad (4.15)$$

La masse  $m_l$ , l'amortissement  $c_l$  et la raideur  $k_l$  du modèle linéaire sont identifiés sur la première harmonique des mesures par la méthode d'optimisation linéaire proposée § 4.2.1 . Ce sont naturellement les mêmes mesures que nous avons utilisées pour identifier le modèle non linéaire (4.14). La force linéaire  $f(\omega_r)$  est calculée dans le problème de diffraction-radiation au premier ordre et elle est identique à la force du premier ordre du modèle non linéaire (4.14).

En identifiant ce système linéaire au lieu de tronquer le modèle non linéaire, on obtient une meilleure approximation linéaire du système dans la mesure où nous restituons vraiment la première harmonique des mouvements.

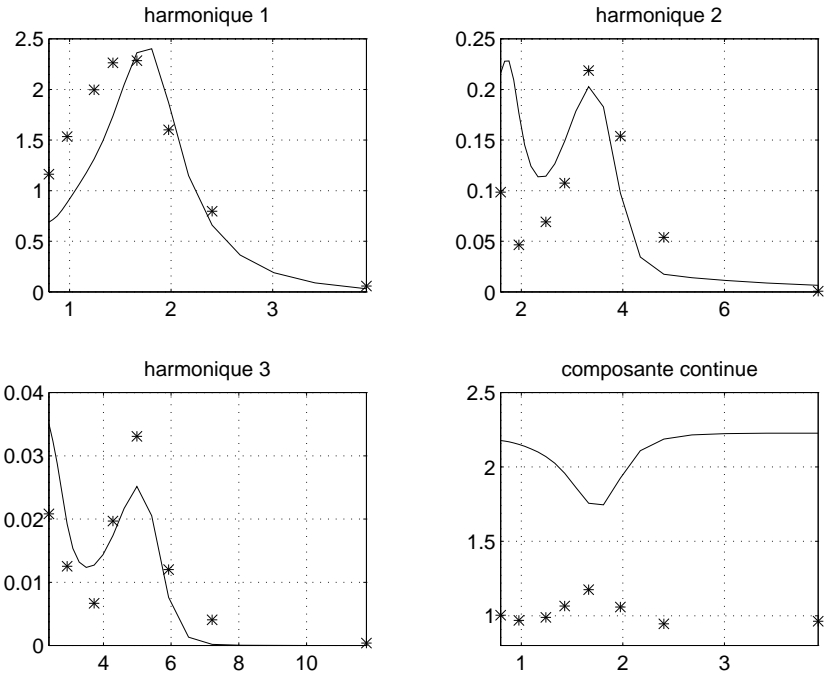


FIG. 4.11 – Module du tangage ; \* mesures, - modèle

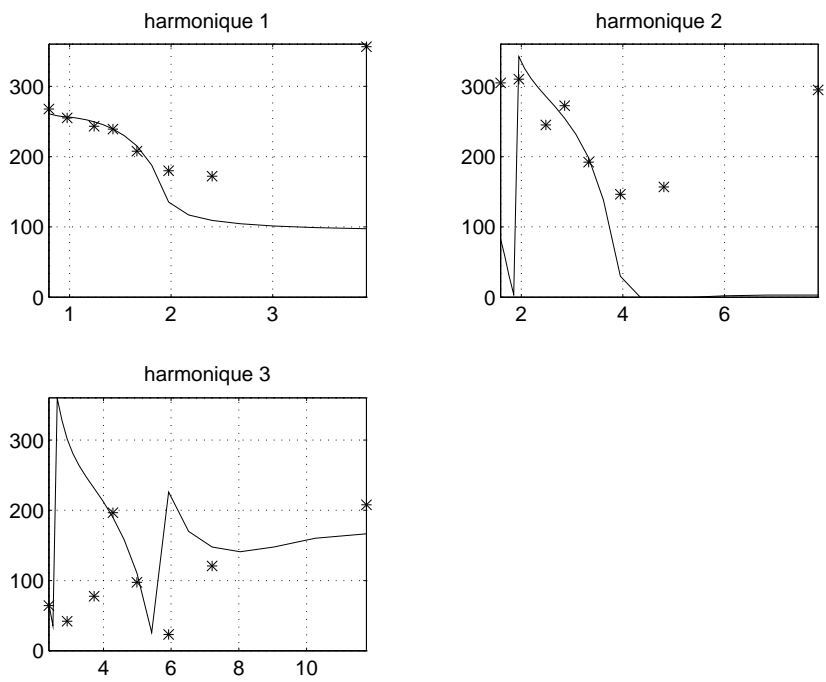


FIG. 4.12 – Phase du tangage ; \* mesures, - modèle

L'estimateur du nombre moyen de franchissements de niveaux correspondant au modèle linéaire est un estimateur paramétrique gaussien (4.16) tel que celui qui est étudié dans la section 3.3.

$$\widetilde{EN}_u = \frac{1}{2\pi} \frac{\hat{\sigma}_\Delta}{\hat{\sigma}} e^{-u^2/2\hat{\sigma}^2} \quad (4.16)$$

où  $\hat{\sigma}$  (resp.  $\hat{\sigma}_\Delta$ ) est un estimateur de l'écart-type de l'accélération (resp. de la dérivée de l'accélération).

La figure 4.13 compare cette approximation linéaire du nombre moyen de franchissements croissants de niveaux à la valeur "exacte" obtenue par le modèle non linéaire. On constate que l'approximation calculée par le modèle linéaire est éloignée de la valeur exacte de la fréquence de franchissements par son amplitude et par sa forme. En particulier, l'estimateur linéaire sous-estime très largement la fréquence de franchissements de niveaux négatifs élevés alors qu'elle sur-estime faiblement la valeur exacte des niveaux positifs élevés. En outre, elle est symétrique alors que la valeur exacte ne l'est pas. Ceci confirme la thèse selon laquelle il est important de travailler avec des estimateurs non gaussiens pour des systèmes tels que celui que nous étudions.

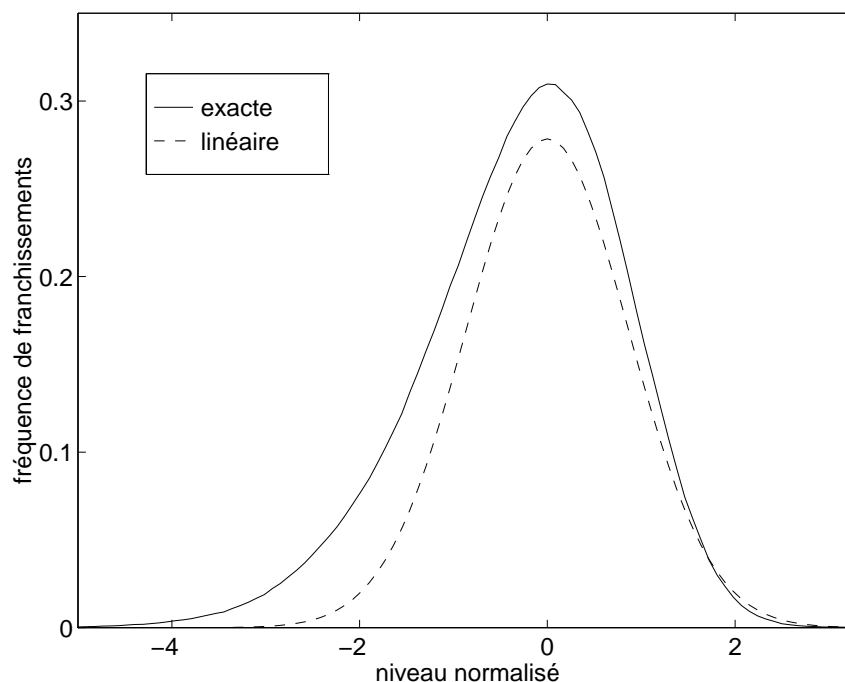


FIG. 4.13 – Comparaison de l'approximation linéaire avec la valeur exacte

Notre objectif est maintenant d'élaborer une méthode permettant d'estimer le nombre moyen de franchissements de niveaux élevés pour l'accélération en tangage du navire rapide. Ce nombre moyen peut se calculer par la formule de Rice si l'on connaît la densité de probabilité jointe du processus (ici l'accélération) et de sa dérivée. Or nous avons présenté dans le chapitre 2 diverses méthodes pour approcher la densité de probabilité jointe de la

réponse d'un système dynamique stochastique et non linéaire. Mais nous allons voir que les caractéristiques de notre problème rendent difficile l'application de ces méthodes.

#### 4.4.2 Méthodes classiques

Nous expliquons pourquoi nous ne pouvons pas appliquer à notre problème la plupart des méthodes non linéaires (chap. 2) généralement utilisées pour estimer la densité jointe de la réponse d'un oscillateur excité par une source aléatoire.

Plusieurs arguments nous amènent à écarter les méthodes basées sur la **résolution de l'équation de Fokker-Planck** (cf § 2.2).

- L'entrée du système n'est pas représentée par un bruit blanc mais par la somme d'un processus gaussien et du carré d'un processus gaussien. Le processus résultant de cette somme pourrait être approché par un filtré non linéaire de bruit blanc. Mais une telle modélisation augmenterait considérablement la dimension du vecteur d'état de notre modèle. Or nous avons vu que de résoudre des problèmes de grande dimension pose des difficultés auxquelles on ne connaît pas de réponses satisfaisantes à l'heure actuelle.
- La forme des non linéarités n'appartient pas à l'ensemble proposé par Cai et Lin [8] pour lequel l'équation de Fokker-Planck admet une solution exacte. Cette particularité ne rend pas le problème insoluble car nous pourrions encore utiliser la méthode de la "forme équivalente", mais elle en complique l'approche.
- Enfin, la raison essentielle est que nous cherchons à estimer la densité de probabilité jointe de l'accélération et de sa dérivée première. Pour approcher cette densité jointe par la solution d'une équation de Fokker-Planck, on dérive le système (4.14) pour y faire apparaître explicitement l'accélération et sa dérivée. Puis on transforme l'équation différentielle obtenue pour la mettre sous la forme d'un système d'équation d'Ito. On peut alors poser une équation de Fokker-Planck pour le système de Ito. Mais la solution de l'équation de Fokker-Planck est la densité de probabilité jointe de l'élévation de la surface libre (représentée dans ce cas par un vecteur d'état multidimensionnel), du déplacement, de la vitesse, de l'accélération et de la dérivée de l'accélération. Il faudrait ensuite intégrer cette densité pour en extraire la densité de probabilité jointe de l'accélération et de sa dérivée. Il faut noter ici d'une part que la dérivation du système initial augmente la dimension du vecteur d'état, d'autre part que l'intégration nécessaire pour la densité de probabilité jointe a de fortes chances d'être numérique, on n'obtiendrait donc pas de forme paramétrique de la densité de probabilité jointe de l'accélération en tangage et de sa dérivée.

Ainsi, les méthodes basées sur la résolution de l'équation de Fokker-Planck ne conviennent pas à l'étude des accélérations extrêmes d'un système stochastique non linéaire.

Les méthodes de **quadratisation** et de **Wiener** (cf § 2.3) semblent a priori être mieux adaptées au problème du confort d'une structure flottante puisqu'elles sont développées en particulier pour l'étude du comportement d'oscillateurs excités par de la houle. Mais, elles approchent généralement la densité de probabilité du déplacement et de la vitesse

de l'oscillateur en résolvant un système quadratique dans le domaine fréquentiel. La principale difficulté est alors de manipuler les noyaux de Volterra dont dépend la solution. Si nous voulons conserver dans notre système dynamique (4.14) les termes cubiques justifiés par la présence d'une harmonique trois sur les mesures, nous introduisons des noyaux de Wiener-Volterra d'ordre trois plus difficiles à approcher numériquement que les noyaux d'ordre un et deux.

En revanche l'étape qui permettrait de passer du couple "déplacement-vitesse" au couple "accélération-dérivée troisième" ne devrait pas poser de difficultés majeures dans la mesure où l'on travaille dans le domaine fréquentiel.

Dans la méthode de quadratisation la densité jointe du déplacement de la structure et de sa dérivée est estimée en perturbant une distribution gaussienne bivariée (schéma de Gram-Charlier (2.35)) ou en supposant que les deux processus sont statistiquement indépendants. Ces hypothèses sous-entendent que la réponse du système non linéaire reste relativement proche d'une réponse linéaire. Or les caractères non linéaires sont proportionnellement plus importants sur les accélérations que sur les mouvements de la structure. On doit donc éviter autant que possible d'approcher la loi de l'accélération de systèmes non linéaires par une perturbation de la loi de la solution du problème linéaire. Pour les systèmes assez fortement non linéaires, il est préférable d'utiliser un développement de la densité jointe similaire à celui de Langley et McWilliam [30] qui estiment cette densité par une perturbation du produit des densités marginales (non gaussiennes).

Nous donnons à titre d'exemple la figure 4.14 sur laquelle nous comparons deux estimations du nombre moyen de franchissements croissants de niveaux pour l'accélération en tangage du navire rapide. L'une des estimations est calculée à partir d'une approximation de Gram-Charlier (2.35) de la densité de probabilité jointe de l'accélération et de sa dérivée et l'autre est calculée avec l'estimateur de projection présenté dans la section 3.4 qui ressemble davantage à l'estimateur de Langley et McWilliam et dont les densités marginales ne sont pas forcément gaussiennes. L'estimateur de projection donne indiscutablement une meilleure estimation de la fréquence exacte de franchissements que celui de Gram-Charlier. Ceci est dû en particulier au fait que l'approximation du nombre moyen de franchissements de niveaux est fortement influencée par l'estimation de la densité du processus étudié. Or les densités marginales qui servent à construire l'estimateur de projection sont choisies pour être les plus proches possible des densités marginales empiriques du processus et de sa dérivée.

Pour aborder les problèmes liés au confort sur un navire rapide dont le comportement est nettement non linéaire, il n'est sans doute pas impossible d'utiliser les méthodes proposées dans le chapitre 2, mais nous irions très certainement au devant de nombreuses difficultés. En outre il faut rappeler que le système que nous avons choisi est écrit sous une forme simplifiée (4.14) que nous devons plus tard compléter si nous voulons poursuivre une analyse plus fine du comportement du navire. Ainsi, il ne nous semble pas raisonnable de choisir ces méthodes pour résoudre notre problème.

La méthode qui convient le mieux ici est de travailler à partir de **simulations** des trajectoires de l'accélération. Cette approche permet en outre de regrouper dans une même étude les problèmes dans lesquels on dispose d'une expression analytique souvent

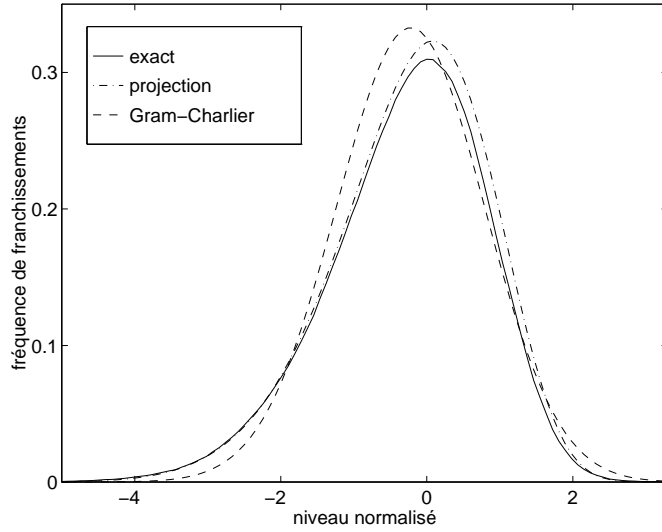


FIG. 4.14 – Fréquence de franchissements croissants de niveaux de l'accélération

complexe du système dynamique et les problèmes pour lesquels on n'a que des mesures. D'autre part, les processus de houle de même que les efforts dus à la houle ont des trajectoires régulières ce qui permet d'appliquer des méthodes d'intégration déterministes telles que les méthodes de Runge-Kutta pour simuler des trajectoires de la réponse de systèmes oscillants excités par la houle. Si l'on a des mesures ou des simulations des trajectoires de l'accélération en tangage, le nombre moyen de franchissements de niveaux peut être approché par les estimateurs statistiques que nous avons étudié dans le chapitre 3.

### 4.4.3 Simulation des accélérations

Les échantillons de l'accélération et de sa dérivée sont simulés de la façon suivante.

Pour commencer, un signal représentant l'élévation de la surface libre (fig. 4.7) est simulé à partir d'un spectre de Pierson (4.10) dont nous choisissons la période modale  $T_p$  et la hauteur significative  $H_s$ . Le navire que nous étudions est conçu pour naviguer sur la Manche. Or dans la Manche les états de mer extrêmes ont des hauteurs significatives de l'ordre de 3 ou 4 mètres pour une période modale comprise entre 4 et 8 secondes. D'autre part, la période de résonance du navire correspond à une houle incidente de période égale à 10 secondes. Nous choisissons ici de simuler de la houle de hauteur significative égale à 3 mètres et de période modale égale à 10 secondes afin de provoquer un comportement extrême de la carène. Le signal de houle simulé associé à l'équation (4.17) permet de générer une série temporelle pour les forces (fig. 4.15).

$$\begin{aligned}
 F &= f^{(0)} \sum_k \eta_k^2 + \sum_k f_k^{(1)} \eta_k \sin(\omega_r^{(k)} t + \varphi_k + \phi_k^{(1)}) \\
 &+ f^{(2)} \sum_k \eta_k^2 \sin(2\omega_r^{(k)} t + 2\varphi_k + \phi_k^{(2)})
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

Dans cette expression des forces (4.17),  $t$  représente le temps,  $\omega_r^{(k)}$  la  $k$ ème pulsation de rencontre,  $\varphi_k$  la phase de la houle,  $f^{(0)}$  et  $\phi_k^{(i)}$  le module et la phase de la force d'ordre  $i$ . La solution de l'équation différentielle (4.14) est une approximation du tangage du navire rapide naviguant à 50 noeuds. Les forces sont suffisamment régulières pour que le modèle non linéaire (4.14) puisse être intégré par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. L'intégration numérique de l'équation différentielle génère des séries temporelles du tangage et de la vitesse en tangage. Nous calculons alors facilement l'accélération (fig. 4.16) correspondante en injectant les signaux résultant de l'intégration dans l'équation différentielle (4.14). Finalement, nous obtenons la dérivée troisième du tangage (fig. 4.17) par différence finie.

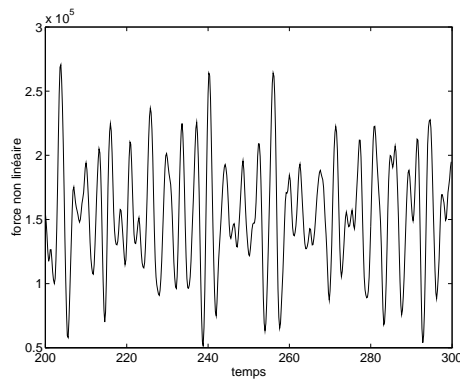


FIG. 4.15 – Force non linéaire à la vitesse 50 nds pour de la houle incidente de Hs 3 m et de Tp 10 s

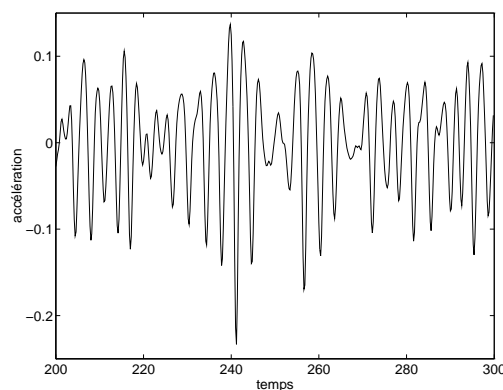


FIG. 4.16 – Accélération à la vitesse 50 nds pour de la houle incidente de Hs 3 m et de Tp 10 s

Nous simulons des séries temporelles correspondant à 8 minutes de navigation (soit environ 270 vagues) échantillonnées à 5 Hertz (soit 0.2 seconde) qui contiennent donc chacune 2400 points. Quelques tests expérimentaux indiquent que cette longueur semble être un bon compromis entre un échantillon court et une estimation correcte du nombre

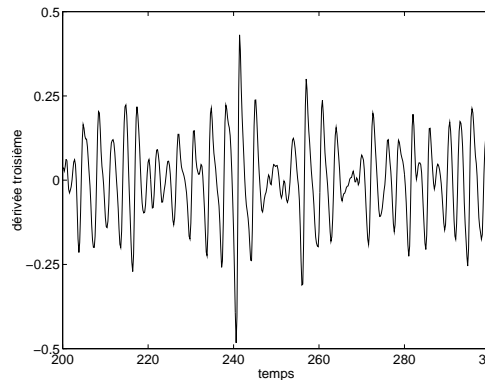


FIG. 4.17 – Dérivée troisième à la vitesse 50 nds pour de la houle incidente de Hs 3 m et de Tp 10 s

moyen de franchissements même pour des niveaux relativement élevés. A partir de ces simulations, nous estimons la fréquence de franchissements de niveaux de l'accélération en tangage. Ces approximations sont comparées à une valeur qui sera dite "exacte". Cette valeur est calculée empiriquement à partir d'une simulation correspondant à environ 6 heures de navigation et échantillonnée à 20 Hertz. Nous avons choisi un échantillonnage à 20 Hertz car nous réduisons ainsi sensiblement le biais de l'estimateur empirique par rapport à un échantillonnage à 5 Hertz (cf approximation du biais de l'estimateur empirique, § 3.2).

## 4.5 Estimation de $E(N_u)$

Nous allons comparer, dans cette section, les approximations du nombre moyen de franchissements croissants de niveaux obtenus par différents estimateurs et les confronter à une valeur "exacte" calculée à partir d'une série temporelle correspondant à 6 heures de navigation (soit plus de 10000 vagues) -échantillonnée à 20 Hertz-. Le terme "exact" est abusif puisque la valeur qu'on lui associe est une estimation empirique. Mais la convergence de l'estimateur empirique (cf section 3.2) quand le nombre de points tend vers l'infini et le pas de temps vers 0 garantit sa qualité.

Nous comparons ensuite les statistiques empiriques d'ordre deux (biais, variance) de plusieurs estimateurs de la fréquence de franchissements de niveaux.

Les estimateurs que nous avons choisi de comparer sont les suivants.

- l'estimateur empirique étudié dans la section 3.2.
- l'estimateur de projection décrit dans la section 3.4.
- l'estimateur du modèle de Plackett présenté plus bas.
- un estimateur paramétrique construit en supposant que l'accélération et sa dérivée sont des variables aléatoires indépendantes.
- un estimateur de régression construit d'après Viennet [62].



Il est utile de préciser certaines étapes de la construction des estimateurs cités.

### 4.5.1 Estimateurs

#### Estimateur de projection

Pour construire l'estimateur de projection (cf § 3.4), nous devons dans un premier temps ajuster des densités marginales paramétriques sur les signaux de l'accélération et de sa dérivée. L'observation des caractéristiques empiriques (moments et densité de probabilité) des séries temporelles nous permettent de choisir les lois qui les modélisent le mieux.

En particulier, nous calculons le skewness (4.18) et le kurtosis (4.19) de chaque échantillon. Si  $X$  est une variable aléatoire, le skewness (4.18) ou coefficient de symétrie et le kurtosis (4.19) ou coefficient d'aplatissement sont les moments centrés réduits du troisième et quatrième ordre.

$$s_k = \frac{E[(X - E[X])^3]}{E[(X - E[X])^2]^{3/2}} \quad (4.18)$$

$$k_u = \frac{E[(X - E[X])^4]}{E[(X - E[X])^2]^2} \quad (4.19)$$

Le skewness mesure la dissymétrie de la densité de probabilité de la variable aléatoire et il est nul si la loi est symétrique. Le kurtosis donne des indications sur la vitesse de décroissance des queues de la loi. Il est égal à 3 quand la loi décroît à la même vitesse que la loi gaussienne et il est supérieur (resp. inférieur) à 3 si la densité de probabilité est plus fortement (resp. faiblement) aplatie. Johnson et Kotz [24] montrent que ces deux statistiques permettent de regrouper les lois par familles. En particulier, les valeurs de référence 0 et 3 sont le skewness et le kurtosis d'une variable aléatoire gaussienne.

**Loi de l'accélération.** Le skewness et le kurtosis de la réalisation de l'accélération en tangage sont respectivement égaux à  $-0.53$  et à  $3.10$ . On les compare aux valeurs de références assorties d'intervalles de confiance à 95 pour cent :  $0 \pm 0.31$  et  $3 \pm 0.20$ . Et on en déduit que sa loi est dissymétrique et moyennement aplatie. La forme de la densité de probabilité empirique (fig. 4.18) confirme cette conclusion. L'observation de ces statistiques nous a amenés à choisir une loi de Weibull (4.20) d'origine  $x_0$ , d'échelle  $a$  et d'exposant  $b$  pour modéliser la densité de probabilité de l'accélération.

$$p_1(x) = \frac{b}{a} \left( \frac{x - x_0}{a} \right)^{b-1} e^{-\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^b}, \quad x \geq x_0 \quad (4.20)$$

Les lois de Weibull s'ajustent bien sur la densité de probabilité de l'accélération (fig. 4.18). D'autre part, l'accélération en tangage étant un phénomène physique lié aux mouvements d'un navire, elle est bornée et on ne restreint pas la généralité en lui imposant une borne inférieure. Pourtant il faut noter que la corrélation entre les paramètres  $x_0$  et  $a$  est très forte on ne peut donc pas fixer le seuil  $x_0$  selon notre convenance. Ainsi certains échantillons ne présentant pas de valeur extrême induisent l'identification d'un seuil  $x_0$  trop élevé. Dans

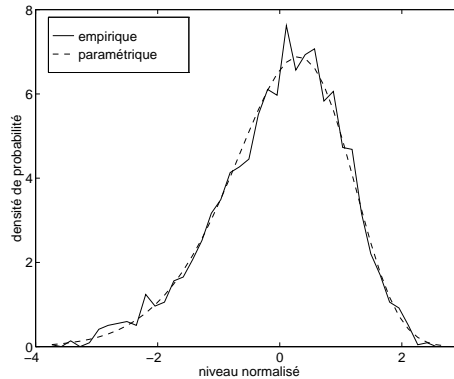


FIG. 4.18 – Densité de probabilité de l'accélération

ce cas on construit alors, à tort, un estimateur du nombre moyen franchissements qui est nul pour tout niveau  $u$  inférieur à  $x_0$ . Nous verrons plus bas que, dans l'ensemble, ces lois de Weibull permettent malgré tout d'obtenir des estimations satisfaisantes du nombre moyen de franchissements.

En pratique, les paramètres de la densité de Weibull sont ajustés en réduisant l'écart aux moindres carrés entre les trois premiers moments empiriques et paramétriques.

**Loi de la dérivée de l'accélération.** Pour modéliser la distribution de la dérivée de l'accélération il est raisonnable de choisir une loi de Gauss centrée (4.21).

$$p_2(\dot{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}} e^{-\dot{x}^2/2\hat{\sigma}^2} \quad (4.21)$$

La densité de probabilité de la dérivée (fig. 4.19) est symétrique, son skewness est égal à  $-0.17$  (à comparer à  $0 \pm 0.31$ ). Son kurtosis, égal à  $3.29$  (à comparer à  $3 \pm 0.20$ ) indique que la loi est plus fortement aplatie qu'une loi gaussienne. Mais les lois "classiques" qui sont symétriques et fortement aplaties sont des lois qui admettent seulement un nombre fini de moments (loi de Pearson de type 4 ou 7 [24]). Or d'un point de vue physique,

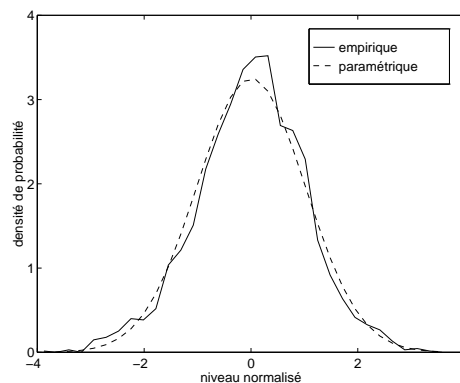


FIG. 4.19 – Densité de probabilité de la dérivée troisième

il serait incorrect de considérer que la dérivée de l'accélération n'a pas des moments à

tous les ordres. D'autre part, la loi de la dérivée n'intervient, dans les estimateurs du nombre moyen de franchissements, que sous une forme intégrée du type  $\int_0^{+\infty} \dot{x}^k p_2(\dot{x}) d\dot{x}$ . Il nous suffit donc de bien approcher la surface délimitée par la fonction  $\dot{x}^k p_2(\dot{x})$  et l'axe des abscisses. Le skewness et de kurtosis de la dérivée étant proches des caractéristiques gaussiennes, l'approximation de la surface sera bonne pour les premiers  $k$  pairs. Les figures 4.20 et 4.21 montrent que les approximation de ces surfaces par les surfaces correspondantes pour une loi gaussienne ne sont pas trop mauvaises pour les premiers  $k$  impairs.

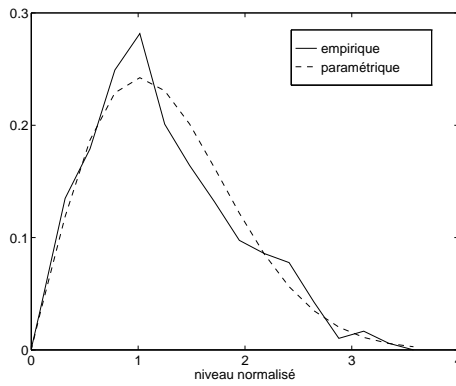


FIG. 4.20 – Fonction  $\dot{x} p_2(\dot{x})$  pour  $\dot{x} \geq 0$

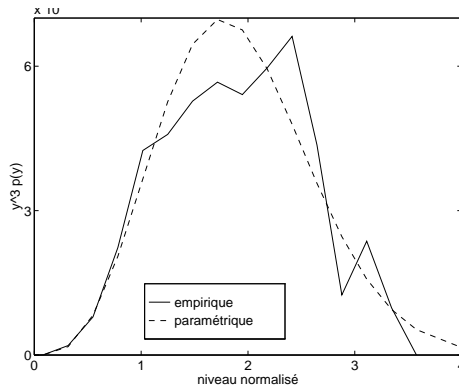


FIG. 4.21 – Fonction  $\dot{x}^3 p_2(\dot{x})$  pour  $\dot{x} \geq 0$

En pratique, le paramètre de la loi gaussienne centrée est approché par la variance empirique de la dérivée troisième.

**Estimateur de projection.** Connaissant les lois marginales paramétriques de l'accélération en tangage et de sa dérivée, nous construisons l'estimateur (4.22) du nombre moyen de franchissements croissants de niveaux comme indiqué dans la section 3.4.

$$E_{\hat{s}_N}(N_u) = \sum_{k=0}^L \sum_{i=0}^k \hat{d}_{i,k-i} \int_0^{+\infty} \dot{x} \varphi_{i,k-i}(u, \dot{x}) p_2(\dot{x}) d\dot{x} p_1(u) \quad (4.22)$$

On remarque que les  $\varphi_{i,j}$  étant des polynômes de degré inférieur ou égal à  $L$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^L \sum_{i=0}^k \hat{d}_{i,k-i} \varphi_{i,k-i}(x, \dot{x}) &= \sum_{k=0}^L \sum_{i=0}^k \hat{d}_{i,k-i} \sum_{l=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} a_{lj}^{(k,l-k)} x^l \dot{x}^j \\ &= \sum_{k=0}^L \sum_{i=0}^k \hat{c}_{i,k-i} x^i \dot{x}^{k-i} \end{aligned}$$

où les  $\hat{c}_{ij}$  seront des combinaisons des  $\hat{d}_{i,j}$  et des  $a_{kl}^{m,n}$ . Cette transformation revient à faire un changement de base de polynômes vers la base canonique. Nous pouvons alors écrire l'estimateur  $E_{\hat{t}}(N_u)$  sous la forme (4.23).

$$E_{\hat{s}_N}(N_u) = \sum_{k=0}^L \sum_{i=0}^k \hat{c}_{i,k-i} u^i p_1(u) \int_0^{+\infty} \dot{x}^{k-i+1} p_2(\dot{x}) d\dot{x} \quad (4.23)$$

C'est cette forme que nous utilisons en pratique car elle simplifie un certain nombre de calculs. Les paramètres joints  $\hat{c}_{ij}$  sont identifiés selon la procédure que nous avons décrite dans la section 3.4 c'est à dire tels que

$$E_{\hat{s}_N}[X_t^k \dot{X}_t^l] = \hat{m}_{kl} \text{ pour } 0 \leq k, l \leq L$$

avec  $\hat{m}_{kl}$  le moment empirique associé à  $E_{\hat{s}_N}[X_t^k \dot{X}_t^l]$ . On remarque que ce système est un système algébrique linéaire avec un second membre "creux" par la propriété (2.33)  $E[X^k \dot{X}] = 0$  des processus stationnaires.

Le choix de l'estimateur de projection est intéressant ici dans la mesure où l'on perturbe le modèle correspondant à l'hypothèse d'indépendance statistique de  $X_t$  et  $\dot{X}_t$ , car plus on s'intéresse à des niveaux élevés de  $X_t$  plus la dépendance entre eux est faible.

Nous avons choisi a priori le paramètre  $L$  égal à 3 lorsque les enregistrements de l'accélération sont échantillonnés à 5 Hertz et qu'ils comportent 2400 points. Le choix  $L = 2$  reviendrait à travailler sous l'hypothèse d'indépendance car le couple  $(X_t, \dot{X}_t)$  est décorrélé ( $E[X_t \dot{X}_t] = 0$ ). D'autre part, nous avons constaté après plusieurs tests qu'en choisissant  $L$  égal à 4 nous n'améliorons que très peu l'estimation par rapport au cas où  $L$  est égal à 3.

## Estimateur du modèle de Plackett

Nous introduisons ici un autre modèle de densité de probabilité jointe construit à partir du produit des densités marginales.

La complexité de la forme générale d'une distribution bivariable en fonction de ses marginales et de paramètres décrivant la structure de dépendance, telles que les séries infinies de Fourier ou de Gram-Charlier développées à partir des années 1960, ont amené des auteurs comme Plackett à construire des modèles comportant seulement un petit nombre de paramètres.

L'idée de Plackett [43] [1] est de construire une classe de distributions bivariées pour laquelle on peut choisir les distributions marginales et qui ne contient qu'un paramètre pour mesurer la dépendance entre les deux processus. Il impose que cette classe vérifie certaines propriétés, en particulier qu'elle contienne le cas de l'indépendance et les bornes de Fréchet  $H_0$  et  $H_1$ . En notant  $F_1$  et  $F_2$  les fonctions de répartition marginales, on a

$$H_0(x, \dot{x}) = \max(F_1(x) + F_2(\dot{x}) - 1, 0)$$

et

$$H_1(x, \dot{x}) = \min(F_1(x), F_2(\dot{x}))$$

Fréchet montre que la fonction de répartition jointe  $H$  doit vérifier

$$H_0(x, \dot{x}) \leq H(x, \dot{x}) \leq H_1(x, \dot{x})$$

Ces conditions impliquent que la fonction de répartition jointe est comprise entre 0 et 1, qu'elle est égale à 0 en  $(-\infty, -\infty)$  et à 1 en  $(+\infty, +\infty)$ . Elles imposent aussi que la fonction  $H$  soit croissante quand  $x$  ou  $\dot{x}$  croît. En vérifiant ces trois conditions Plackett construit le modèle (4.24) pour la densité de probabilité jointe  $p$  de deux variables aléatoires dans lequel les  $F_i$  représentent les fonctions de répartition marginales et les  $p_i$  les densités de probabilité marginales.

$$p(x, \dot{x}, \psi) = D(x, \dot{x}, \psi)p_1(x)p_2(\dot{x}) \quad (4.24)$$

où on note  $D$  la fonction de dépendance définie par

$$D(x, \dot{x}, \psi) = \frac{\psi((\psi - 1)[F_1(x) + F_2(\dot{x}) - 2F_1(x)F_2(\dot{x})] + 1)}{([1 + (F_1(x) + F_2(\dot{x}))(\psi - 1)]^2 - 4\psi(\psi - 1)F_1(x)F_2(\dot{x}))^{3/2}}$$

L'unique paramètre joint  $\psi$  appartient à l'intervalle  $]0, +\infty[$ . Le cas où  $\psi$  est égal à 1 correspond au cas où les variables sont indépendantes.  $\psi < 1$  traduit une corrélation négative et  $\psi > 1$  une corrélation positive.

Les lois  $F_1$ ,  $F_2$  sont choisies comme les lois paramétriques marginales introduites pour construire l'estimateur de projection. Pour ce modèle de densité de probabilité jointe, on peut identifier les lois marginales en minimisant un écart quadratique pondéré entre les fonctions de répartition marginales empiriques et théoriques. Le poids permet de donner plus ou moins d'importance aux queues des lois. Toutefois, les exemples montrent que la méthode d'ajustement des lois marginales influe peu sur l'estimateur du nombre moyen de franchissements.

C'est seulement quand on connaît les distributions marginales que l'on identifie le paramètre  $\psi$  de la loi jointe en minimisant une norme quadratique (4.25) entre la fonction de répartition empirique  $\hat{H}_{ij}$  et la fonction de répartition théorique  $H_\psi$ .

$$\psi^* = \min_{\psi} \sum_{i,j} (\hat{H}_{ij} - H_\psi(x_i, \dot{x}_j))^2 \quad (4.25)$$

Ici, on remarque qu'on ne pondère pas la norme pour identifier les paramètres joints. Quand on observe les niveaux élevés de l'accélération, on tend vers une certaine forme d'indépendance statistique des deux processus et on perd de l'information sur la structure

de dépendance. Les exemples montrent d'ailleurs que l'on obtient une meilleure estimation du paramètre  $\psi$  sans pondérer les valeurs élevées de l'accélération.

L'estimateur du modèle de Plackett du nombre moyen de franchissements croissants de niveaux est calculé en intégrant la densité de probabilité jointe (4.24) dans la formule de Rice. Nous verrons que cet estimateur donne des résultats proches de ceux de l'estimateur de projection malgré sa structure de dépendance plus simple (un unique paramètre). D'autre part, le modèle de Plackett étant paramétrique, il suffit d'appliquer la théorie des estimateurs du minimum de contraste de Dacunha-Castelle et Duflo [13] pour étudier sa vitesse de convergence. Le biais de l'estimateur dépend de la distance entre la vraie loi jointe et le modèle de Plackett.

### Estimateur sous l'hypothèse d'indépendance

Nous avons supposé pour construire l'estimateur de projection que l'accélération et sa dérivée sont seulement faiblement dépendantes l'une de l'autre. Il est donc intéressant de construire un estimateur (4.26) du nombre moyen de franchissements de niveaux en supposant que l'accélération est statistiquement indépendante de sa dérivée, c'est à dire que la densité de probabilité jointe du couple est égale au produit des densités marginales. Cette hypothèse est vérifiée par exemple si la distribution de l'accélération est gaussienne.

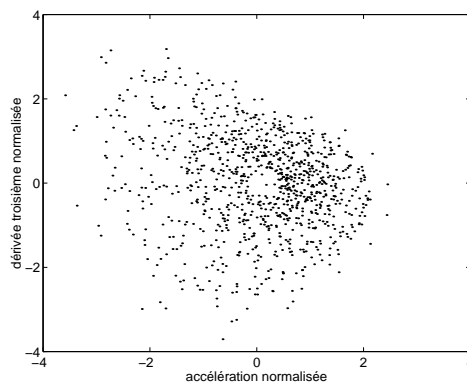


FIG. 4.22 – Répartition jointe de l'accélération en tangage simulée et de sa dérivée

Les figures 4.22 et 4.23 permettent de comparer la distribution du couple accélération-dérivée troisième quand les variables aléatoires sont dépendantes ou non. La figure 4.22 donne la répartition du couple simulé en intégrant l'équation différentielle (4.14). Tandis que sur la figure 4.23 on présente la distribution d'un couple de variables aléatoires qui ont les mêmes lois marginales que l'accélération et sa dérivée mais qui sont statistiquement indépendantes. On constate une différence entre ces deux distributions bivariées. Mais cet écart concerne relativement peu de points. En effet, l'aire qui regroupe une concentration plus forte de points reste sensiblement la même. Le nuage de points de la figure 4.22 est étiré vers le quadrant supérieur gauche (accélération négative, dérivée troisième positive) par rapport au nuage de la figure 4.23 qui est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

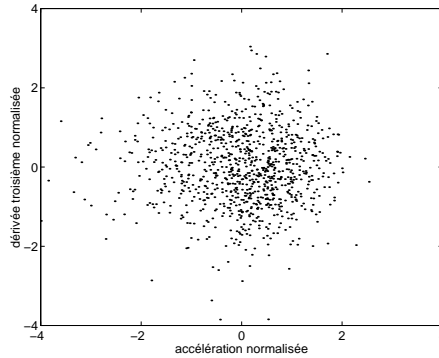


FIG. 4.23 – Répartition “virtuelle” de l’accélération en tangage en fonction de sa dérivée sous l’hypothèse d’indépendance

Sur les deux figures la répartition l’accélération est nettement dissymétrique tandis que celle de la dérivée est symétrique.

Nous pouvons en conclure que la dépendance entre l’accélération et sa dérivée n’est pas nulle mais qu’elle n’est pas très forte.

L’estimateur de  $E(N_u)$  s’écrit sous l’hypothèse d’indépendance :

$$E_{p_1 p_2}(N_u) = p_1(u) \int_0^{+\infty} \dot{x} p_2(\dot{x}) d\dot{x} \quad (4.26)$$

où les densités de probabilité marginales  $p_1$  et  $p_2$  sont les densités de Weibull et de Gauss ajustées pour l’estimateur de projection. Comparer l’estimateur (4.26) avec l’estimateur de projection (4.22) permettra de montrer que le terme de perturbation du produit des densités marginales dans l’équation (4.22) est une bonne correction.

### Estimateur de régression

Nous construisons finalement un estimateur dit “de régression” afin de comparer nos résultats à l’estimateur du minimum de contraste d’une fonction de régression étudié par Viennet [62] (voir aussi § 3.1). D’après l’équation (3.3) nous approchons le nombre moyen de franchissements de niveaux de l’accélération par l’estimateur  $\widehat{EN}_u$ .

$$\widehat{EN}_u = \hat{f}(u) \hat{p}_X(u)$$

avec

$$f(u) = E[\dot{X} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(\dot{X}) | X = u]$$

Le chapeau  $\hat{\phantom{x}}$  symbolise une grandeur estimée.

Pour avoir un estimateur de régression comparable aux autres nous choisissons la densité de probabilité marginale de l’accélération comme pour l’estimateur de projection c’est à dire une loi de Weibull dont les paramètres sont identifiés sur les trois premiers moments empiriques.

Nous suivons une procédure analogue à celle qui est proposée par Viennet. Nous approchons ici la fonction  $f$  en la projetant sur une base de splines cubiques de dimension  $D$ . La suite des noeuds est choisie sous la forme  $\{k_{-r+1} = \dots = k_0 < k_1 \dots < k_m = \dots = k_{m+r}\}$  avec  $r$  égal au degré maximum de la fonction spline (ici  $r = 3$ ) et  $m = D - r$ . Les noeuds intérieurs sont équidistants et les noeuds  $k_0$  et  $k_m$  sont respectivement égaux à la plus petite et la plus haute valeur de l'échantillon considéré.

Nous obtenons ainsi un estimateur de l'espérance du nombre de franchissements de l'accélération qui est déduit de l'estimateur d'une fonction de régression. L'erreur quadratique associée est de l'ordre de celle calculée par Viennet dans le cadre absolument mélangeant (cf section 3.1), en supposant que le biais éventuellement introduit par l'ajustement de la densité de probabilité marginale  $p_1$  est négligeable.

## 4.5.2 Résultats

Nous allons maintenant comparer à l'aide de graphes les estimations obtenues avec les différents estimateurs cités ci-dessus, ainsi que leurs statistiques empiriques. Les valeurs statistiques et les figures que l'on présente à titre d'exemple sont données pour une simulation particulière, mais on peut vérifier que d'autres séries (accélérations simulées) ayant les mêmes caractéristiques (nombre de points, pas de temps de discrétisation et caractéristiques de la houle incidente) ont un comportement similaire.

### Fréquence de franchissements de niveaux

La figure 4.24 regroupe les différentes estimations de la fréquence des franchissements croissants de niveaux calculées pour un enregistrement de l'accélération de 2400 points (8 minutes de navigation) échantillonné à 5 Hertz. Et les figures 4.25 et 4.26 sont des agrandissements des queues des courbes pour les niveaux supérieurs à 2 écart-types en valeur absolue. On rappelle que la valeur dite "exacte" de la fréquence de franchissements croissants de niveaux est une estimation empirique calculée à partir d'une série correspondant à environ 6 heures de navigation et échantillonnée à 20 Hertz. Cet échantillonnage permet de réduire significativement son biais par rapport à un échantillonnage à 5 Hertz

On parle ici de franchissements croissants de niveaux positifs aussi bien que de niveaux négatifs car le nombre moyen de franchissements croissants est égal au nombre moyen de franchissements décroissants d'un même niveau.

Pour davantage de clarté, la figure 4.24 ne fait pas apparaître l'estimateur de régression qui n'est introduit qu'à partir de la figure 4.27.

**Sous l'hypothèse d'indépendance.** La courbe calculée sous l'hypothèse d'indépendance est bien plus proche de la valeur exacte que l'approximation linéaire ce qui justifie le choix de lois marginales non systématiquement gaussiennes. Mais elle est davantage distante de la courbe exacte que les courbes des autres estimateurs non gaussiens, ainsi on vérifie que l'introduction d'une fonction de dépendance dans l'estimateur de projection ou de Plackett est sensée. Comme l'approximation linéaire (cf fig. 4.13), l'approximation construite sous l'hypothèse d'indépendance sous-estime la fréquence de franchissements



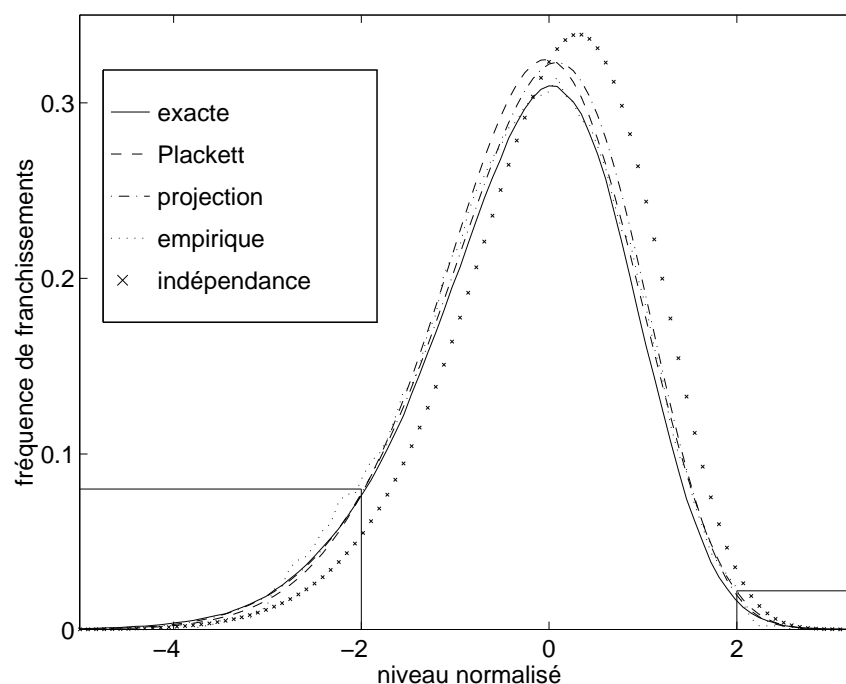


FIG. 4.24 – Fréquence de franchissements de niveaux de l'accélération à la vitesse 50 nds pour de la houle incidente de Hs 3 m et de Tp 12 s, l'écart-type de l'accélération est égal à  $0.06 \text{ (ms}^{-2}\text{)}$

pour les niveaux négatifs et la sur-estime pour les niveaux positifs.

#### **Estimateur empirique, estimateur de projection et estimateur de Plackett.**

Les estimations obtenues par l'estimateur empirique, l'estimateur de projection et l'estimateur de Plackett sont proches les unes des autres et donnent une assez bonne approximation du taux de franchissements croissants de niveaux. Le nombre moyen de franchissements des niveaux négatifs élevés (fig. 4.25) est particulièrement bien approché par l'estimateur de projection. En effet, l'estimateur de projection est construit comme une perturbation de la loi jointe qui correspond à l'hypothèse d'indépendance (produit des densités de probabilité marginales). Or plus les niveaux sont élevés et plus la dépendance entre le processus et sa dérivé est faible. Le modèle de projection est donc d'autant meilleur. L'estimateur de Plackett le sous-estime très légèrement et l'estimateur empirique est irrégulier et devient assez vite nul car il est calculé avec peu de points pour ces niveaux. En revanche, la fréquence de franchissements des niveaux centraux (fig. 4.24) et des niveaux positifs (fig. 4.26) est légèrement sur-estimée par les estimateurs de projection et de Plackett, en dehors des niveaux positifs supérieurs à 2.5 écart-types. Pour les niveaux positifs supérieurs à 2.5 écart-types, les estimateurs de projection et de Plackett deviennent rapidement nuls et ils sous-estiment le taux de franchissements.

*Niveaux négatifs.* Le nombre moyen de franchissements est mieux approché pour les niveaux négatifs élevés que pour les autres niveaux. Ce phénomène est en partie dû à

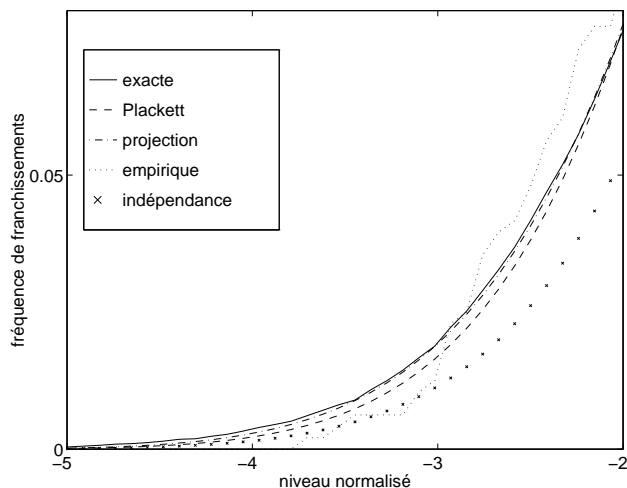


FIG. 4.25 – Agrandissement de la figure 4.24 pour les niveaux négatifs, l'écart-type de l'accélération est égal à  $0.06 \text{ (ms}^{-2}\text{)}$

l'ajustement de la loi marginale de l'accélération. En effet lors de l'identification des paramètres de la loi de l'accélération, plus les niveaux de l'échantillon sont élevés et plus leur poids relatif est important. Ainsi, les densités de probabilité marginales ont tendance à être mieux ajustées sur les queues que sur les valeurs centrales et en particulier sur la queue négative car l'accélération atteint des niveaux négatifs proportionnellement plus élevés que les niveaux positifs.

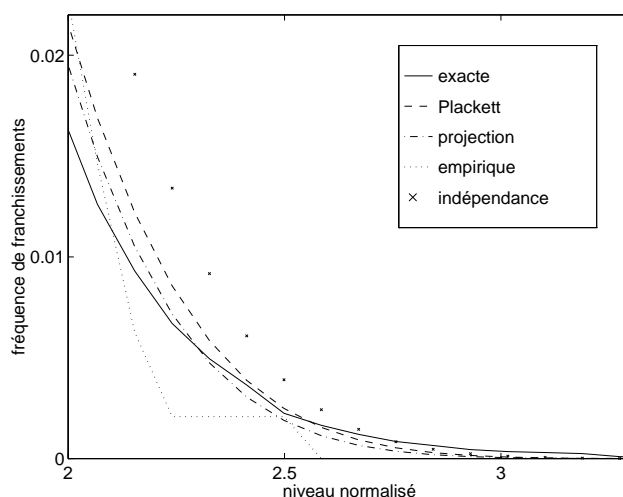


FIG. 4.26 – Agrandissement de la figure 4.24 pour les niveaux positifs, l'écart-type de l'accélération est égal à  $0.06 \text{ (ms}^{-2}\text{)}$

*Niveaux positifs.* On peut corriger légèrement le biais du modèle de Plackett sur les

niveaux positifs en introduisant un poids différent lors de l'identification de la loi de l'accélération. Dans ce cas, on peut par exemple estimer séparément les franchissements de niveaux positifs et négatifs en identifiant des lois de probabilité différentes sur les valeurs positives et négatives. En outre, on a vu que les ajustements des lois marginales sont bons mais pas parfaits. Les vraies lois sous-jacentes ne sont vraisemblablement pas des lois de Weibull ou de Gauss et on retrouve donc un biais sur l'estimateur du nombre moyen de franchissement de niveaux.

*Niveaux centraux.* On observe d'autre part sur la figure 4.24 que l'estimateur empirique donne une bonne approximation des valeurs centrales bien qu'il soit irrégulier. L'échantillon est riche autour des niveaux centraux ce qui permet une bonne approximation empirique. Par ailleurs, la dépendance entre le processus et sa dérivée est plus forte que pour les niveaux élevés et les estimateurs de projection et de Plackett perdent en qualité.

**A propos du mal de mer.** La valeur exacte de la fréquence de franchissements croissants de niveaux, comme l'approximation empirique et les estimations de projection et de Plackett, montrent que les niveaux franchis par l'accélération à des fréquences entre 0.1 Hz et 0.2 Hz sont compris entre un et deux écart-types (ie entre  $0.06 \text{ ms}^{-2}$  et  $0.12 \text{ ms}^{-2}$ ). Or ces valeurs sont bien en-dessous des seuils admissibles pour le mal de mer (cf tableau de la section 4.3) qui varient entre  $1 \text{ ms}^{-2}$  et  $0.25 \text{ ms}^{-2}$  suivant le temps d'exposition aux oscillations. On peut donc en conclure que si le bateau navigue à la vitesse de 50 noeuds sur de la houle réelle de hauteur significative 3 m et de période modale 12 s, les passagers ne seront pas majoritairement malades.

**Estimateur de régression.** L'estimateur de régression (fig. 4.27) donne, dans l'ensemble, une assez bonne estimation du nombre moyen de franchissements de niveaux mais il sous-estime la valeur exacte pour les niveaux élevés (supérieurs en valeur absolue à 3 écart-types). En imposant une régularité plus importante sur les queues nous pourrions éventuellement remédier à ce phénomène.

## Statistiques des estimateurs

Cet exemple montre à travers les figures 4.24 à 4.27 qu'il est possible de calculer avec l'estimateur empirique, l'estimateur de projection ou l'estimateur du modèle de Plackett de bonnes approximations de la fréquence de franchissements croissants de niveaux à partir d'enregistrements de l'accélération correspondant à seulement 8 minutes de navigation sur houle réelle. Mais afin d'évaluer la qualité des différents estimateurs nous comparons sur les figures 4.28 et 4.29 les statistiques du second ordre de ces estimateurs. La figure 4.30 donne la racine carrée de l'erreur en moyenne quadratique relative des mêmes estimateurs.

Le biais et l'écart-type relatifs des estimateurs de la fréquence de franchissements de niveaux sont le biais et l'écart-type empiriques calculés à partir de 122 échantillons (8 minutes de navigation, échantillonnés à 5 Hz) et divisés par la valeur "exacte" du nombre moyen de franchissements. Les irrégularités sur les différentes courbes sont dues au fait

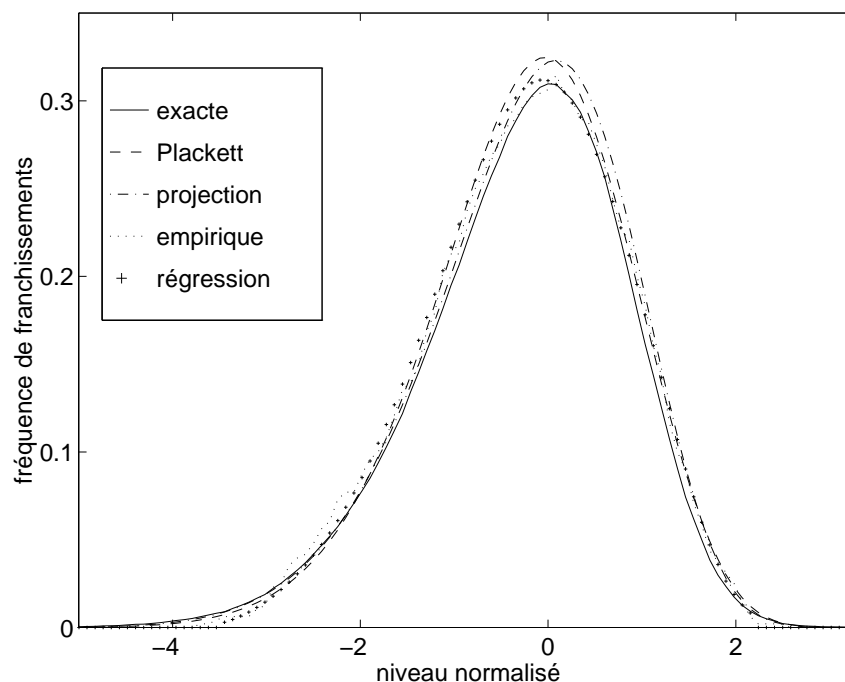


FIG. 4.27 – Fréquence de franchissements de niveaux de l'accélération à la vitesse 50 nds pour de la houle incidente Hs 3 m et de Tp 12 s, l'écart-type de l'accélération est égal à  $0.06 \text{ (ms}^{-2}\text{)}$

que la valeur dite exacte est une estimation empirique calculée à partir d'un grand nombre de points, et qu'elle reste irrégulière sur la queue malgré la longueur de la série.

**Biais relatif.** Sur la figure 4.28, on compare les biais relatifs, en valeur absolue, de l'estimateur empirique, des estimateurs de projection et de Plackett et de l'estimateur de régression. Si on note  $\widehat{EN}_u$  l'estimateur du nombre moyen de franchissements et  $E_{ref}$  sa valeur exacte, le biais relatif s'écrit comme suit

$$\text{biais relatif} = \frac{|\widehat{EN}_u - E_{ref}|}{E_{ref}}$$

Dans les quatre cas présentés sur la figure 4.28, le biais relatif a tendance à croître avec le niveau franchi. Le biais de l'estimateur de régression est bien supérieur aux autres. Ceci est dû au décalage déjà observé sur la figure 4.24.

*Niveaux négatifs.* Pour les niveaux négatifs, le biais relatif de l'estimateur de projection est environ deux fois plus faible que celui de l'estimateur de Plackett qui atteint au maximum la valeur  $1/2$ . Et le biais relatif de l'estimateur empirique oscille entre les deux autres. Le biais relatif de l'estimateur de régression est faible jusqu'au niveau  $4\sigma$  puis il devient presque égale à 1. Ceci est dû à des oscillations trop importantes des estimateurs splines sur les queues. Le biais de l'estimateur de régression devrait être diminué en imposant une régularité plus grande sur les queues de la fonction de régression.

*Niveaux positifs.* En revanche, pour les niveaux positifs, le biais relatif de l'estimateur

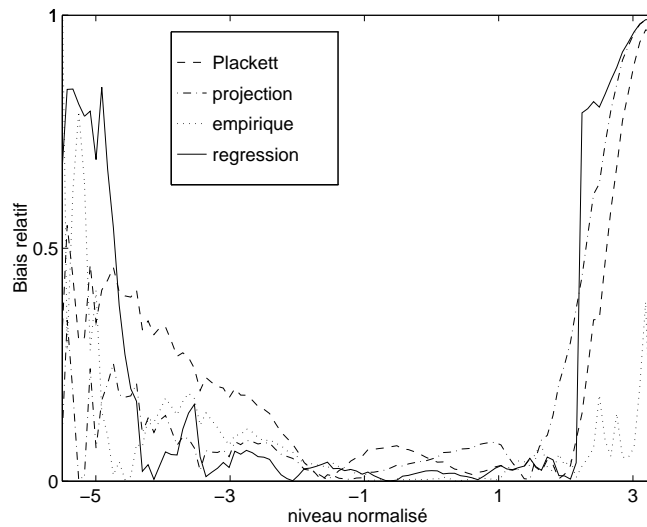


FIG. 4.28 – Biais relatif en valeur absolue des estimateurs de la fréquence de franchissements de niveaux de l'accélération

empirique est largement plus faible que les biais des approximations de projection et de Plackett qui sont proches l'un de l'autre et croissent rapidement avec le niveau franchi au delà de 1.5 écart-type. Ceci indique que pour les niveaux positifs, le vrai modèle sous jacent est relativement éloigné des modèles "paramétriques" que nous avons choisi d'ajuster. On pourrait corriger en partie le biais de l'estimateur de projection en ajoutant des paramètres joints mais les exemples testés montrent que cette correction reste très faible. Le biais relatif de l'estimateur de régression est du même ordre que celui de l'estimateur de projection.

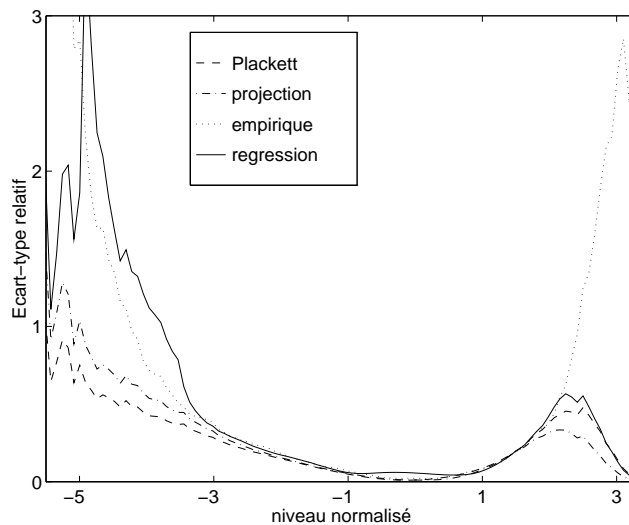


FIG. 4.29 – Ecart-type relatif des estimateurs de la fréquence de franchissements de niveaux de l'accélération

**Écart-type relatif.** La figure 4.29 donne les écart-types relatifs de l'estimateur empirique, des estimateurs "paramétriques" de projection et de Plackett et de l'estimateur de régression. L'écart-type relatif est donné pour un estimateur  $\widehat{EN}_u$  par

$$\text{écart type relatif} = \sqrt{\frac{V(\widehat{EN}_u)}{E_{ref}^2}}$$

où  $E_{ref}$  représente la valeur exacte de  $E(N_u)$ . L'écart-type relatif de l'estimateur empirique est très supérieur à celui des estimateurs de Plackett et de projection pour les niveaux supérieurs, en valeur absolue, à deux écart-types et il croît rapidement en fonction du niveau franchi. On a en effet remarqué dans la section 3.2 que la variance relative de l'estimateur empirique croît exponentiellement si la densité de probabilité marginale de l'accélération décroît exponentiellement ce qui est le cas ici puisque la loi marginale de l'accélération est proche d'une loi de Weibull.

*Niveaux négatifs.* Pour les niveaux négatifs, il semble que l'écart-type relatif des estimateurs "paramétriques" (Plackett et projection) ait une croissance plutôt polynomiale. La distance entre les écart-types relatifs de ces deux estimateurs est relativement faible et l'écart-type relatif de l'estimateur de projection est supérieur à celui de l'approximation de Plackett. Et l'écart-type relatif de l'estimateur de régression est important pour les niveaux supérieurs, en valeur absolue, à  $3\sigma$ . Ce phénomène est en partie dû aux oscillations de la spline approximante sur la queue et il devrait être réduit en modifiant la condition de régularité imposée en ces points (nombre de noeuds égaux).

*Niveaux positifs.* Pour les niveaux positifs, les écart-types relatifs des estimateurs de projection, de Plackett et de régression augmentent avec le niveau jusqu'à un niveau d'environ trois écart-types puis ils décroissent. Pour les niveaux positifs élevés de l'accélération (supérieurs à trois écart-types) l'approximation de la fréquence de franchissements obtenue par les estimateurs "paramétriques" est vraiment très proche de zéro quelque soit l'échantillon considéré et sous-estime la valeur exacte. C'est pourquoi l'écart-type relatif décroît. Dans ce cas, le biais est prépondérant dans le calcul de l'erreur associée à l'estimateur.

**Erreur en moyenne quadratique relative.** La figure 4.30 donne la racine carrée des erreurs en moyenne quadratique relatives des estimateurs. Si on note  $E_q$  l'erreur en moyenne quadratique,  $\widehat{EN}_u$  l'estimateur du nombre moyen de franchissements et  $E_{ref}$  sa valeur exacte, on a

$$E_q = E[(\widehat{EN}_u - E_{ref})^2]$$

L'erreur en moyenne quadratique est égale à la somme de la valeur absolue du biais de l'estimateur et de son écart-type.

On remarque que les estimations "paramétriques" des estimateurs de projection et de Plackett sont équivalentes et qu'elles sont meilleures que l'approximation empirique pour les niveaux supérieurs à 2 écart-types en valeur absolue ; l'erreur relative de l'estimateur de Plackett est légèrement plus faible. L'erreur relative de l'estimateur empirique croît très rapidement avec le niveau franchi. Pour les niveaux négatifs, l'erreur quadratique de

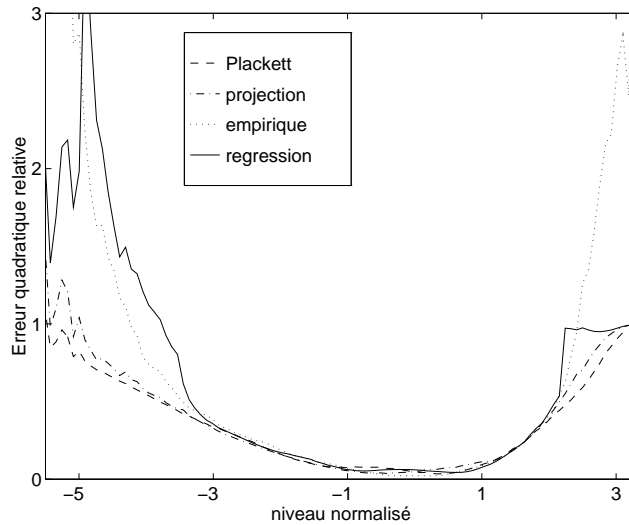


FIG. 4.30 – Racine carrée de l’erreur quadratique relative des estimateurs de la fréquence de franchissements de niveaux de l’accélération

l’estimateur de régression est largement plus importante que celle des estimateurs de projection et de Plackett pour les niveaux supérieurs, en valeur absolue, à  $3\sigma$ . En revanche pour les niveaux positifs elle est du même ordre. Il faut noter qu’un choix différents des noeuds de la base de splines pour le calcul de la courbe de régression pourrait éventuellement améliorer les résultats présentés ici.

### 4.5.3 Conclusion

Finalement, l’idéal serait d’utiliser l’estimateur de projection pour estimer la fréquence de franchissements de niveaux négatifs élevés, l’estimateur de Plackett pour la fréquence de franchissements de niveaux positifs élevés (en introduisant éventuellement un poids pour ajuster la loi marginale de l’accélération), et l’estimateur empirique pour les niveaux proches de zéro. Si l’objectif de l’estimation est de donner des critères de confort en fonction de l’état de mer, c’est le nombre moyen de franchissements des niveaux négatifs qui sera prépondérant car les niveaux atteints, à fréquence équivalente, sont plus élevés que les niveaux positifs. Il suffira donc d’appliquer l’estimateur de projection.

Dans la section 3.4, nous avons montré que l’estimateur empirique en  $O(N^{-1/3})$  et l’estimateur de régression en  $O(N^{-\rho/(2\rho+1)})$  ont des vitesses de convergence meilleures que celle de l’estimateur de projection  $O(N^{-r/(3r+4)})$ . Ces vitesses de convergence sont données quand le nombre  $N$  de points observés tend vers l’infini. L’exemple proposé ici montre au contraire, que pour un nombre de points fini, l’estimateur de projection permet d’obtenir une meilleure approximation du nombre moyen de franchissements de niveaux élevés que les deux autres estimateurs. L’estimateur de projection approche une fonction de  $\mathbb{R}^2$  avant de l’intégrer par rapport à la seconde variable tandis que les autres estimateurs du nombre de franchissements de niveaux approchent directement une fonction de  $\mathbb{R}$  ce qui explique qu’ils aient une meilleure vitesse de convergence quand la taille de l’échantillon

tend vers l'infini. Mais si on raisonne à horizon fini, l'estimateur de projection approche la densité de probabilité jointe par le produit d'un polynôme et de densités de probabilité marginales proches des vraies densités marginales du couple (accélération, dérivée de l'accélération), ainsi cet estimateur est déjà proche, dans un certain sens, de la valeur exacte si la dépendance statistique entre l'accélération et sa dérivée est faible ce qui est d'autant plus le cas que les niveaux considérés sont élevés. D'autre part, les estimateurs non paramétriques tels que les estimateurs de régression [62] ou des estimateurs à noyau [54] ont une régularité faible sur les queues qui induit un biais et une variance importants qui implique qu'on leur préfère les estimateurs "paramétriques" (Plackett, projection) pour estimer des quantités liées aux niveaux élevés si on est en mesure de choisir un bon modèle paramétrique.

La comparaison des statistiques empiriques nous permet de déterminer quel est le meilleur estimateur pour le système dynamique particulier que nous avons étudié. Il est vraisemblable que si nous considérons un nouveau système dont le comportement est très proche de celui-ci, nous pourrions utiliser ces mêmes conclusions. Par exemple si nous identifions un système à plusieurs degrés de liberté pour avoir une représentation plus complète du comportement du navire rapide, et que nous simulons entre autres le tangage, nous pourrions utiliser nos conclusions pour analyser les séries d'accélération en tangage. En revanche, si nous voulons étudier un système différent, nous ne pouvons plus utiliser nos résultats "empiriques".

## Estimation paramétrique des statistiques

Nous pouvons malgré tout donner un élément de réponse en utilisant certains résultats théoriques obtenus dans le chapitre 3. Les équivalents ou les majorations établis pour évaluer les statistiques d'ordre deux de l'estimateur empirique et de l'estimateur de projection du nombre moyen de franchissements de niveaux permettent d'évaluer grossièrement à partir d'un unique échantillon les valeurs du biais et de la variance relatifs de ces estimateurs.

Les figures 4.31, 4.32 et 4.33 montrent les résultats que nous pouvons obtenir d'après les formules développées au chapitre 3. Pour chaque figure, nous donnons une ou deux approximations de la statistique (biais ou écart-type relatif) avec, en référence, la statistique calculée empiriquement à partir de 122 échantillons.

**Estimateur empirique.** Le biais relatif de l'estimateur empirique (fig. 4.31) est estimé en appliquant l'équation (3.13) de la proposition 3.1 et en approchant la loi jointe par l'estimateur de projection. On remarque que l'estimation "modèle-projection" du biais relatif majore assez largement la valeur calculée empiriquement.

Pour estimer l'écart-type relatif de l'estimateur empirique (fig. 4.32), nous avons utilisé la formule (3.25) écrite pour les processus gaussiens mais en modélisant la loi jointe par



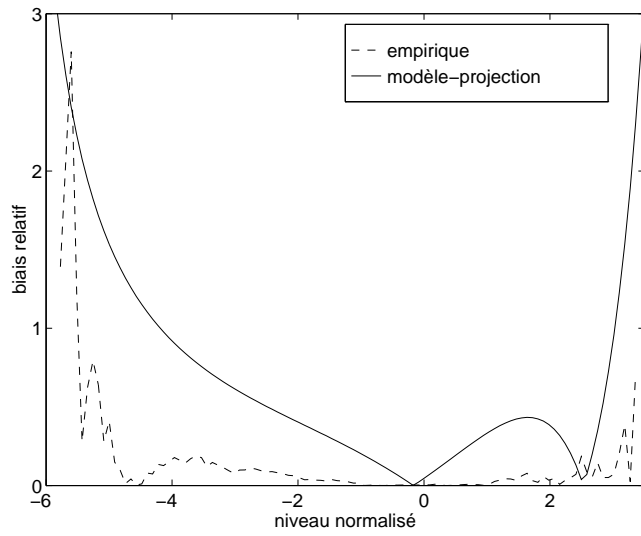


FIG. 4.31 – Biais relatif de l'estimateur empirique

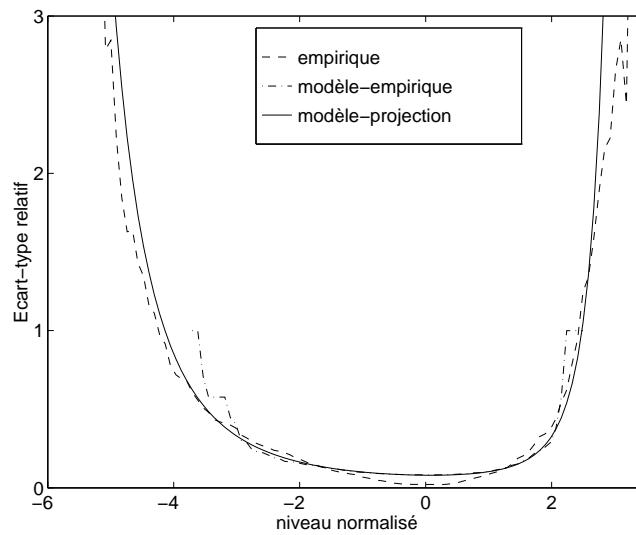


FIG. 4.32 – Ecart-type relatif de l'estimateur empirique

l'estimateur de projection :

$$V_{est} \leq \frac{1}{N\Delta t} \left[ \frac{\pi}{2} \hat{\sigma} E_{\hat{s}_N}(N_u) + 2u^2 E_{\hat{s}_N}(N_u)^2 \int_0^{N\Delta t} |C(t)| dt \right]$$

où  $E_{\hat{s}_N}(N_u)$  est l'estimation obtenue par le modèle de projection et  $C$  est la fonction d'autocorrélation de l'accélération. Pour calculer la courbe référencée "modèle-empirique" on remplace  $E_{\hat{s}_N}(N_u)$  par l'estimation empirique  $\overline{N_u}$  de la fréquence de franchissements. L'estimation obtenue par le modèle de projection donne une bonne approximation de l'écart-type relatif au-delà de un écart-type. L'estimateur référencé "modèle-empirique" surestime rapidement la variance relative. Cet estimateur est donné sur un intervalle plus court parce que l'estimateur empirique de  $E(N_u)$  devient nul pour les niveaux très élevés et on ne peut pas calculer l'écart-type relatif pour ces niveaux.

**Estimateur de projection.** On obtient une bonne approximation de l'écart-type relatif de l'estimateur de projection pour les niveaux négatifs élevés en appliquant le lemme 3.4. En revanche, on surestime très largement la variance relative pour les niveaux positifs.

Nous ne sommes pas en mesure pour l'instant de donner une approximation (même très vague) du biais de l'estimateur de projection.

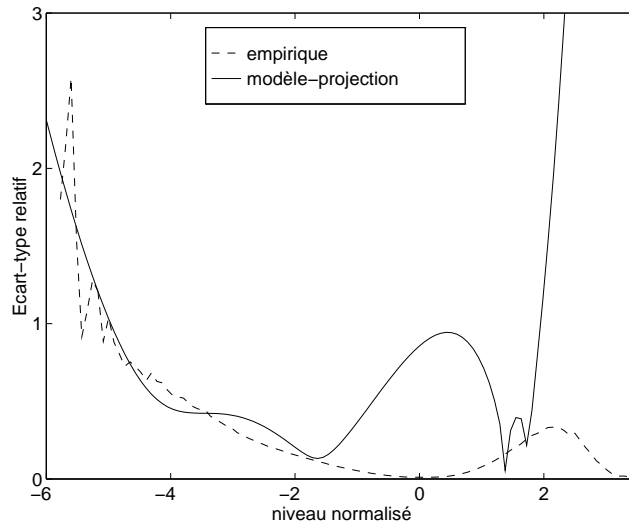


FIG. 4.33 – Ecart-type relatif de l'estimateur de projection

**Comparaison des estimateurs.** La figure 4.34 montre que les estimations des écart-types relatifs, à  $N$  et  $\Delta t$  fixés, permettent de comparer les estimateurs de la fréquence de franchissements au moins pour les niveaux négatifs. En effet, on retrouve que la variance relative de l'estimateur de projection est moindre que celle de l'estimateur empirique pour les niveaux négatifs supérieurs en valeur absolue à 2 écart-types alors que l'écart-type relatif de l'estimateur empirique est plus faible pour les niveaux centraux entre -2 et 2 écart-types.

Pourtant, dans l'état actuel du travail, on ne doit pas considérer ces approximations des statistiques des estimateurs comme des valeurs fiables mais seulement à titre indicatif et pour avoir un ordre d'idée très approximatif des performances des estimateurs les uns par rapport aux autres.

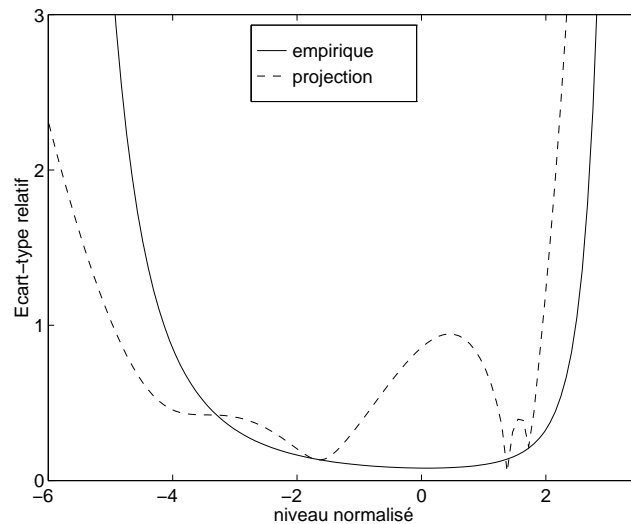


FIG. 4.34 – Comparaison des écart-types relatifs approchés

Il serait intéressant d'être à même de calculer plus précisément les constantes associées aux ordres de convergence théoriques afin de pouvoir réellement choisir un estimateur plutôt qu'un autre en fonction des caractéristiques d'un échantillon donné et de la gamme de niveaux que l'on souhaite étudier.

## 4.6 Méthodologie

L'étude d'un exemple concret comme le comportement d'un navire rapide permet de suggérer une démarche visant à mener une analyse statistique de la réponse d'un système dynamique stochastique non linéaire stationnaire.

Nous envisageons ici essentiellement le problème de l'estimation de la densité de probabilité jointe d'une composante de la réponse et de sa dérivée ou du nombre moyen de franchissements de niveaux d'une composante de la réponse.

La démarche que nous proposons ci-dessous et à travers la figure 4.35 doit être considérée à titre indicatif. Elle reprend les grandes étapes de l'analyse statistique d'un échantillon et donne quelques éléments permettant de faciliter certains choix nécessaires au cours de l'étude.

### (1) Ce dont on dispose

Pour étudier les statistiques d'un système dynamique aléatoire, on dispose au départ soit d'un modèle de système dynamique sous la forme d'une ou plusieurs équations différentielles, soit d'un ensemble de mesures de la réponse du système. Si l'on ne dispose que

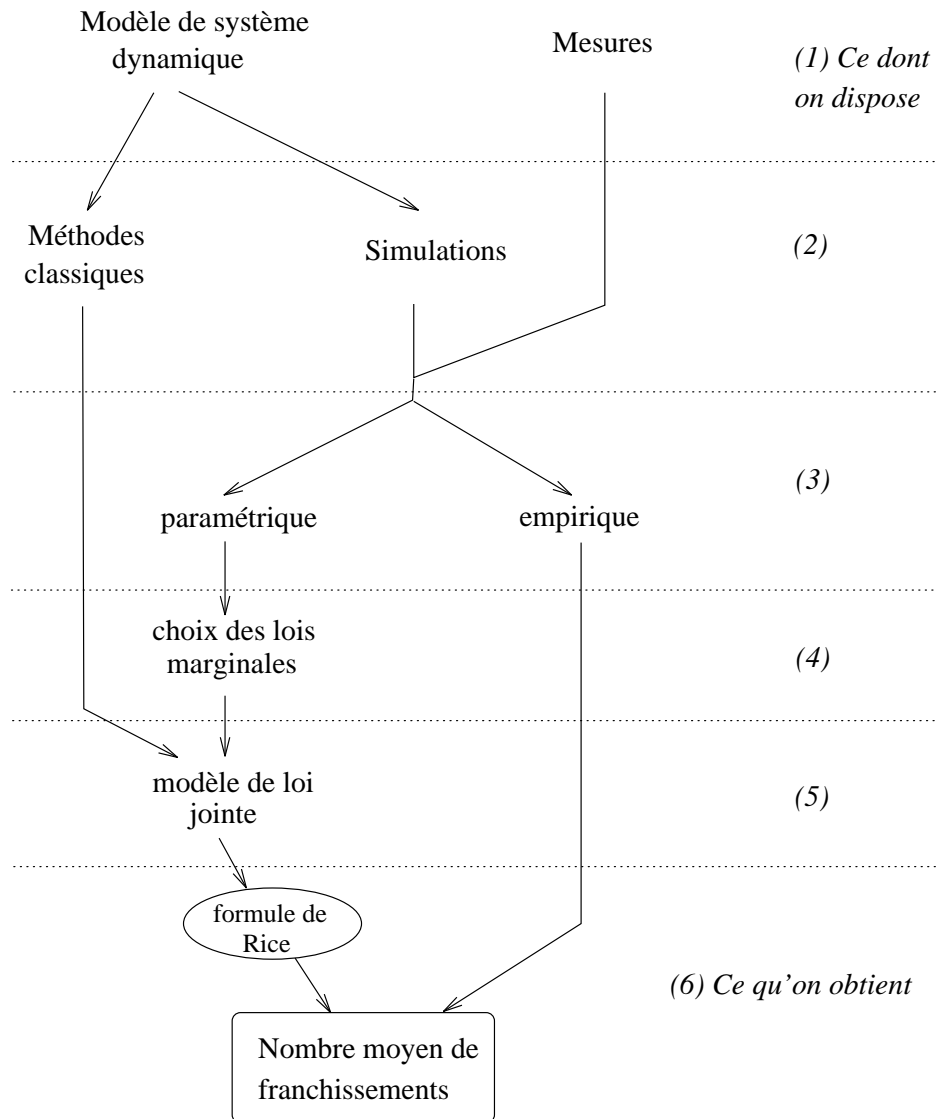


FIG. 4.35 – Démarche pour l'étude d'un système dynamique non linéaire, aléatoire et stationnaire

des résultats de mesures, on n'a à priori pas d'autre alternative que de mener une étude statistique sur ces données. En revanche, si on possède un modèle de système dynamique, on peut choisir entre utiliser l'une des méthodes "classiques" présentées au chapitre 2 ou simuler une série temporelle de la réponse du système.

## **(2) Choisir entre simulation et méthode "classique"**

Si on doit choisir entre des simulations et les méthodes "classiques", la première étape consiste à se demander s'il est possible d'appliquer l'une des méthodes du chapitre 2 et en premier lieu la méthode de Cai et Lin (§ 2.2.1) ou celle de Mac William et Langley (§ 2.3.2). La méthode Cai et Lin est en effet particulièrement intéressante car elle calcule pour certains oscillateurs la densité de probabilité jointe exacte du déplacement et de sa dérivée. Et la méthode de Mac William et Langley approche la densité de probabilité jointe par une perturbation du produit des densités de probabilité marginales, or on a vu plus haut que de tels modèles de loi permettent d'obtenir de bonnes estimations du nombre moyen de franchissements de niveaux.

Afin de savoir si l'on peut utiliser l'une des méthodes "classiques", on peut se reporter au tableau de la section 2.4 qui donne les principales caractéristiques des méthodes et des systèmes pour lesquels elles sont susceptibles de s'appliquer.

Si l'on constate qu'on ne peut pas appliquer l'une de ces méthodes, on simule une série temporelle de la réponse du système par une méthode numérique du type Runge-Kutta. On se trouve alors dans une situation similaire au cas où l'on dispose d'un ensemble de mesures, et on réalise une étude statistique sur les données. Dans les cas envisagés ici (approximation de la densité de probabilité jointe du processus et de sa dérivée, ou estimation du nombre moyen de franchissements de niveaux), l'étude statistique consiste à construire un estimateur paramétrique ou empirique de la quantité à approcher.

## **(3) Choisir entre un estimateur empirique ou paramétrique**

Si l'on dispose d'une série temporelle, mesurée ou simulée, de la réponse du système dynamique, on doit choisir de travailler avec un estimateur paramétrique ou avec un estimateur empirique.

On entend ici, par "estimateur paramétrique", un estimateur qui approche la densité de probabilité jointe du processus et de sa dérivée par une perturbation du produit de densité de probabilité marginales exactes ou une approchées par des modèles paramétriques.

Si l'on estime une fonction comme la densité de probabilité jointe ou le nombre moyen de franchissements de niveaux, le choix de l'estimateur va dépendre des caractéristiques de l'échantillon (longueur, pas de temps de discrétisation) et de la gamme de niveaux à laquelle on s'intéresse. L'exemple des franchissements de niveaux de l'accélération du navire rapide traité ci-dessus montre que pour des échantillons correspondant à 8 minutes de navigation (2400 points échantillonnés à 5 hertz), il est souhaitable d'appliquer l'estimateur empirique pour des niveaux normalisés compris entre -2 et 2, et un estimateur paramétrique pour les niveaux plus élevés. Mais cet exemple constitue un cas particulier.

De façon plus générale, pour justifier le choix de l'estimateur, on peut essayer de prévoir l'erreur en moyenne quadratique induite par chaque estimateur en fonction des caractéristiques de l'échantillon. On a montré que certains résultats théoriques concernant

les statistiques des estimateurs du nombre moyen de franchissements permettent, à horizon fini, d'approcher ou de majorer de façon très approximative le biais et l'écart-type relatifs de ces estimateurs et de donner un rudiment d'information pour le choix de l'estimateur (cf § 4.5.3).

On peut parallèlement se servir des statistiques descriptives (skewness et kurtosis, cf § 4.5.1) de l'échantillon pour déterminer à partir de quels niveaux il est préférable d'appliquer un estimateur paramétrique. En particulier, si le skewness et le kurtosis ne sont pas trop éloignés des caractéristiques gaussiennes, on sait qu'entre -2 et 2 écart-types, l'échantillon est encore assez riche et on peut donc appliquer l'estimateur empirique entre ces niveaux.

Mais le choix entre les estimateurs empiriques ou paramétriques dépend aussi du problème posé. Prenons par exemple les deux problèmes suivants : l'approximation de la densité de probabilité jointe d'un processus et de sa dérivée et l'estimation du nombre moyen de franchissements de niveaux d'un processus. Dans le premier cas on estime une fonction réelle bivariée alors que dans le second cas, on estime une fonction d'une seule variable réelle. Or quand on utilise un estimateur paramétrique pour approcher le nombre moyen de franchissements de niveaux, on estime d'abord la densité de probabilité jointe du processus et de sa dérivée, donc une fonction de  $\mathbb{R}^2$  alors que l'estimateur empirique approche directement le nombre moyen de franchissements dans  $\mathbb{R}$ . Dans ce cas, l'estimateur empirique est d'autant meilleur qu'il apporte une information moins riche alors que si l'on cherchait uniquement à approcher la densité de probabilité jointe, on n'aurait probablement pas intérêt à travailler avec cet estimateur.

#### (4) Choix des lois marginales

Si on a opté pour un modèle paramétrique, le choix des densités de probabilité marginales qui vont servir à construire l'estimateur est important. Comme on l'a vu plus haut, on a intérêt à employer des lois qui s'ajustent bien sur les lois empiriques du processus et de sa dérivée. Pour choisir ces lois marginales, on se sert d'une part de propriétés générales des systèmes stochastiques non linéaires, d'autre part des premiers moments des échantillons.

Quel que soit le choix du type de loi paramétrique, les paramètres des densités de probabilité marginales seront ajustés en réduisant un contraste entre les moments empiriques et théoriques ou entre les fonctions de répartitions empiriques et théoriques (cf § 4.5.1).

##### *Loi du processus.*

Pour choisir la loi paramétrique marginale approchée du processus lui-même, on utilise essentiellement ses premiers moments centrés réduits et en particulier ses coefficients de symétrie et d'aplatissement (skewness et kurtosis). Ces deux paramètres permettent en effet de caractériser un grand nombre lois de probabilités univariées [24]. D'autre part, le problème physique peut éventuellement permettre de se décider entre deux alternatives : loi avec ou sans seuil, loi avec nombre fini ou infini de moments... Par exemple, si on mesure une quantité qui est toujours positive, il est judicieux de choisir une loi ayant un seuil nul.

D'autre part, de façon générale, plus les paramètres de la loi sont nombreux, et plus

l'ajustement est bon (réduction du biais), en revanche la dispersion entre les ajustements sera plus importante d'un échantillon à l'autre (augmentation de l'écart-type). Il est important de trouver un juste équilibre entre le biais et l'écart-type. En particulier, si on travaille avec des échantillons assez courts, il est plus raisonnable de choisir des lois ayant seulement 2 ou 3 paramètres.

*Loi de la dérivée.*

On note tout d'abord que d'après la méthode de la solution exacte de Cai et Lin, si on étudie un système dynamique stationnaire excité par un processus gaussien tel que seule sa raideur est non linéaire alors, sa vitesse est gaussienne. D'autre part, on vérifie empiriquement que lorsque le système admet aussi des non linéarités sur l'amortissement ou les forces d'excitations et qu'il est excité par un processus gaussien, alors les dérivées d'ordres impairs (vitesse, dérivée de l'accélération...) sont symétriques avec un kurtosis qui a tendance à augmenter. On utilisera donc le plus souvent des lois paramétriques symétriques avec un kurtosis plus ou moins important pour modéliser la dérivée. Toutefois, il faut rappeler que la plupart des lois symétriques qui ont un kurtosis élevé n'admettent qu'un nombre fini de moments ce qui peut être incompatible avec la réalité physique. Par ailleurs, dans certains cas comme celui du nombre moyen de franchissements de niveaux, la densité de probabilité de la dérivée n'intervient que sous forme intégrée, l'ajustement de la loi paramétrique peut donc éventuellement être plus approximatif et on aura parfois intérêt à travailler avec un modèle gaussien même si le kurtosis de l'échantillon est un peu élevé.

Connaissant les lois marginales, on construit le modèle de la loi jointe.

**(5) Choix du modèle de loi jointe**

On a déjà précisé que l'idéal est de construire un modèle de loi de probabilité jointe tel que les lois marginales soient proches des vraies lois marginales du processus et de sa dérivée, surtout si l'on s'intéresse aux niveaux élevés ceci d'autant plus que l'on s'approche de l'indépendance des deux processus. Cette remarque amènera par exemple à écarter dans de nombreux cas non linéaires le modèle de Gram-Charlier (2.35) qui est développé à partir d'un produit de loi gaussiennes (cf § 4.4.2).

On propose d'appliquer des modèles tels que le modèle de Plackett (cf § 4.5.1) ou le modèle de projection (cf § 3.4, § 4.5.1). Ces deux modèles perturbent le produit des densités de probabilité marginales.

Le premier admet un paramètre joint unique que l'on peut par exemple ajuster en réduisant un coût aux moindres carrés entre les fonctions de répartitions jointes empiriques et paramétriques. Le fait d'ajuster le paramètre sur la fonction de répartition (et non sur les moments comme dans le modèle de projection) permet d'introduire un poids au moment de l'identification des paramètres pour favoriser telle ou telle gamme de niveaux. On pourrait envisager d'estimer les paramètres  $\theta$  du modèle de Plackett par une méthode du maximum de vraisemblance comme le fait Athanassoulis [1] pour des couples de variables aléatoires  $Z = (X, Y)$  :

$$\theta = \max_{\theta} P_{Z_1, \dots, Z_n}(z_1, \dots, z_n; \theta)$$

Si les variables aléatoires  $Z_i = (X_i, Y_i)$  sont indépendantes, l'expression se simplifie et on a

$$\theta = \max_{\theta} \prod_{i=1}^n P_{Z_i}(z_i; \theta)$$

où on note  $P_{Z_i}$  la densité marginale de  $Z_i$ . Mais nous travaillons ici avec un processus et on ne peut pas factoriser la probabilité correspondant à  $P_{Z_1, \dots, Z_n}(z_1, \dots, z_n; \theta)$  et la méthode du maximum de vraisemblance ne s'applique pas facilement.

Le modèle de projection perturbe le produit des densités marginales par un polynôme bivarié. On peut choisir le degré de ce polynôme et ainsi le nombre de paramètres joints (coefficients du polynôme) que l'on veut faire intervenir. Les paramètres sont ajustés à l'aide des moments simples et croisés et cet ajustement fait intervenir les moments d'ordre  $2r$  si le degré du polynôme de perturbation est  $r$ . Ainsi, il est prudent de choisir ce degré en fonction de la taille des échantillons pour que les estimations empiriques des moments qui interviennent dans l'ajustement des paramètres joints soient fiables. D'autre part, si on veut construire un "vrai" modèle joint, il faut faire intervenir un polynôme de degré supérieur ou égal à trois (10 paramètres joints dont certains sont nuls), sinon on se retrouve dans le cadre où le processus est statistiquement indépendant de sa dérivée car le seul moment croisé qui intervient est alors de la forme  $E[X \dot{X}]$  et il est nul d'après la propriété (2.33).

Il n'est pas facile de choisir entre le modèle de Plackett et le modèle de perturbation. Le modèle de Plackett a l'avantage de permettre d'introduire un poids lors de l'ajustement des paramètres marginaux ou joints et ainsi de mettre en valeur telle ou telle gamme de niveaux. Le modèle de projection offre davantage de souplesse de part son nombre de paramètres, les calculs liés à son ajustement sont plus rapides et il est plus facile de montrer ou d'utiliser des résultats théoriques pour cet estimateur...

Si on a choisi, au départ, d'appliquer une des méthodes "classiques" du chapitre 2, on obtient directement un modèle paramétrique de loi jointe du processus et de sa dérivée.

### **(6) Nombre moyen de franchissements croissants de niveaux**

Finalement, on obtient directement le nombre moyen de franchissements croissants de niveaux

- i. directement si on a choisi de travailler avec un estimateur empirique
- ii. indirectement en appliquant la formule de Rice à l'approximation paramétrique de la loi jointe sinon.



# Chapitre 5

## Conclusion

Dans cette thèse, nous avons présenté une méthode destinée à estimer le nombre moyen de franchissements croissants de niveaux des degrés de libertés (et/ou de leurs dérivées premières et secondes) d'une structure évoluant dans un environnement aléatoire tel que la houle. Bien que la méthode développée puisse s'appliquer à divers types de systèmes, notre intérêt se porte plus particulièrement sur l'étude du comportement d'un navire rapide en termes de confort des passagers.

La modélisation non linéaire du système et la représentation sous forme d'un processus stationnaire gaussien de la houle ont permis d'avoir une approche différente des démarches purement hydrodynamiques et déterministes, des problèmes tels que la tenue à la mer ou le confort à bord du navire. Le processus d'analyse du comportement que nous avons proposé se décompose essentiellement en deux phases :

1. Un modèle d'oscillateur non linéaire a été construit. Les paramètres des termes linéaires sont fournis par les calculs de diffraction-radiation et ceux des termes non linéaires par des identifications à partir d'essais en bassin sur houle régulière. En particulier, nous avons montré que l'écart observé, à grande vitesse, entre les mesures et le calcul linéaire de diffraction-radiation peut être presque totalement annulé en ajoutant au modèle linéaire des termes non linéaires choisis pour leur sens physique. Les termes ajoutés compensent les hypothèses formulées pour le calcul linéaire en diffraction-radiation : fluide parfait, petits mouvements, etc...

2. L'analyse statistique a permis, en décrivant la surface libre sous forme de processus aléatoires, d'estimer des statistiques du nombre de franchissements de niveaux de l'accélération en tangage du navire, dimensionnant pour les problèmes posés.

Le nombre moyen de franchissements a été estimé à partir de simulations relativement courtes (8 minutes de navigation sur houle réelle) en intégrant, dans la formule de Rice, des approximations de la densité de probabilité jointe de l'accélération et de sa dérivée. Les estimateurs que nous avons appliqués s'écrivent sous la forme d'une fonction de dépendance multipliée par le produit des densités de probabilité marginales.

La qualité de ces estimateurs du nombre moyen de franchissements a été évaluée par

comparaison à une valeur empirique “exacte” et par l’estimation empirique des statistiques d’ordre deux des estimateurs. Nous avons ainsi montré, à travers des exemples, que les estimateurs construits en perturbant le produit des densités marginales donnent de bonnes approximations de la fréquence de franchissements de niveaux, en particulier pour les niveaux élevés (au-delà de deux écart-types).

Ceci est dû au fait que plus on s’approche des niveaux élevés et plus la dépendance entre le processus et sa dérivée devient faible. Or les estimateurs perturbent le produit des lois marginales qui est égal à la loi jointe sous l’hypothèse d’indépendance instantannée des deux processus. Dans le cas particulier du navire rapide, l’estimateur de projection donne plus particulièrement une bonne approximation du nombre moyen de franchissements des niveaux négatifs. Mais ce phénomène est induit par la répartition de l’accélération en tangage qui est dissymétrique et plus importante sur les niveaux négatifs. Pour les niveaux centraux, il est préférable de calculer un estimateur empirique. En effet, l’échantillon est plus riche autour de ces niveaux qu’around des niveaux élevés et la dépendance entre le processus et sa dérivée est plus forte, on s’éloigne donc du modèle de l’estimateur de projection.

L’évaluation des performances des estimateurs non paramétriques du nombre moyen de franchissements de niveaux nécessiterait de poursuivre les recherches pour réussir à approcher de façon fiable les caractéristiques telles que le biais et la variance des estimateurs à partir d’enregistrements de longueur finie et pour un pas de temps de discrétisation fixé.

En ce qui concerne le comportement du navire, nous avons pu observer que les résultats obtenus par les méthodes appliquées habituellement à l’étude du confort sous-estiment assez largement notre approximation de la fréquence de franchissements de niveaux. Les méthodes “classiques” donnent, pour le signal considéré, les niveaux d’accélération efficace atteints correspondant à des bandes de fréquences élémentaires et les comparent à des niveaux admissibles. Cette approche, qui considère une représentation déterministe de la surface libre et qui peut s’avérer performante pour des problèmes linéaires, amène à sous-estimer, dans un cadre non linéaire, les niveaux d’accélération réellement atteints à une fréquence donnée et à prédire à tort que le navire aura une bonne tenue à la mer et que les passagers ne seront pas victimes du mal de mer.

L’exemple du navire rapide permet de mettre en évidence l’intérêt d’une approche statistique sur une démarche déterministe pour l’étude du comportement de systèmes dynamiques non linéaires évoluant dans un environnement tel que la houle.

L’application d’estimateurs du nombre moyen de franchissements de niveaux pour caractériser le comportement du navire rapide a motivé une étude théorique plus approfondie visant à calculer les statistiques d’ordre deux de l’estimateur de projection (perturbation polynômiale du produit des densités marginales) pour des processus stationnaires mélangés à trajectoires régulières et à les comparer aux statistiques d’autres estimateurs non paramétriques.

Nous avons tout d’abord évalué les statistiques asymptotiques d’ordre deux de l’estimateur empirique de l’espérance du nombre de franchissements de niveaux dans un cadre général puis pour un processus gaussien. Nous avons ainsi déterminé que le biais de l’esti-

mateur empirique en  $O(\Delta t)$  ne dépend que du pas de temps de discrétisation  $\Delta t$  et du niveau franchi. Tandis que sa variance en  $O(\frac{1}{N\Delta t})$  dépend à la fois de la taille de l'échantillon  $N$ , du pas de temps de discrétisation, du niveau franchi et des propriétés de mélange du processus. La vitesse de convergence de l'estimateur empirique est en  $O(N^{-2/3})$ .

Nous avons ensuite approché l'erreur en moyenne quadratique asymptotique de l'estimateur paramétrique dans le cas particulier des processus gaussiens. Le cadre des processus gaussiens correspond à une sorte de cas idéal. Il est largement utilisé dans divers types de problèmes statistiques et il donne ici un élément de comparaison pour les autres estimateurs. Le biais de l'estimateur paramétrique gaussien en  $O(\Delta t^2)$  est totalement indépendant du niveau franchi. La variance est, comme pour l'estimateur empirique, en  $O(\frac{1}{N\Delta t})$ .

Nous avons terminé en nous intéressant aux caractéristiques de l'estimateur de projection lorsque que la dimension  $D$  de l'espace de projection dépend de  $N$  et tend vers l'infini. Nous avons différencié le cas où nous disposons d'une observation de la dérivée de celui où nous observons uniquement le processus lui-même et où la dérivée est approchée par une différence finie. Quand nous approchons la dérivée par une différence finie, le carré du biais de l'estimateur de projection se décompose en deux termes, l'un dû à la différence finie en  $O(\Delta t^2)$  et l'autre dû à la projection en  $O(D^{-r})$ , sa variance est en  $O(\frac{D^2}{N\Delta t})$ , d'où nous déduisons l'ordre de l'erreur en moyenne quadratique en  $O(N^{-2r/(3r+4)})$ . Nous avons d'autre part montré que le carré du biais de cet estimateur, si on connaît la dérivée, est en  $O(D^{-r})$  ou  $r$  est un paramètre de régularité de la densité de probabilité jointe sous jacente. Tandis que sa variance, comme dans le cas précédent, est en  $O(\frac{D^2}{N\Delta t})$ .

Nous avons ainsi déterminé, que si en pratique l'estimateur de projection donne une bonne approximation du nombre moyen de franchissements à horizon fini (meilleure que l'estimateur empirique ou que l'estimateur de régression pour les niveaux négatifs élevés), sa vitesse de convergence, en  $O(N^{-r/(r+2)})$  si on a la dérivée, est moins bonne que celle d'autres estimateurs non paramétriques (estimateur empirique en  $O(N^{-2/3})$  ou un estimateur adaptatif du minimum de contraste -régression- en  $O(N^{-2\tau/(2\tau+1)})$  où  $\tau$  est un paramètre de régularité de la densité de probabilité marginale du processus).

La méthode que nous avons proposée n'a pas été appliquée à une étude complète du comportement d'une structure sur houle. Cependant, ce travail a permis d'éclaircir plusieurs points concernant la modélisation non linéaire du système et de montrer l'intérêt d'une approche statistique dans l'étude de son comportement. D'autre part nous avons pu déterminer quels types de méthodes sont adaptées à l'étude des accélérations de systèmes dynamiques stochastiques et dégager une démarche assez générale permettant d'aborder l'étude de systèmes dynamiques stochastiques non linéaires.

Au cours de cette thèse, nous avons élaboré une boîte à outil de statistiques sous le logiciel matlab plus particulièrement orientée vers l'estimation et l'ajustement de lois de probabilité marginales ou bivariées et vers l'estimation de l'espérance du nombre de franchissements de niveaux pour un processus (cf Annexe A).



# Bibliographie

- [1] Athanassoulis G.A., Skarsoulis E.K., Belibassakis K.A., *Bivariate distributions with given marginals with an application to wave climate description*, Applied Ocean Research 16 (1994) 1-17
- [2] Barillon J.L., *Etude du confort a la mer des navires rapides, analyse bibliographique rapport carehna 93/64/RF1/M (diffusion réduite)*
- [3] Bendat J.S., Pierson A.G., *Random data : analysis and measurement procedures*, John Wiley (1971)
- [4] Bercu B., Oulidi A., Labeyrie J., Prevosto M., *Statistiques du comportement d'un système oscillant basse fréquence*, Rapport Ifremer
- [5] Berlinet A., Devroye L., *A comparison of kernel density estimates*, Pub. Inst. Stat. Univ. Paris XXXVIII, fasc. 3 (1994)
- [6] Birgé L., Massart P., *From model selection to adaptative estimation*, prépublication (1994)
- [7] Bosq D., *Vitesses optimales et superoptimales des estimateurs fonctionnels pour les processus à temps continu*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série I, (1993)
- [8] Cai G.Q., Lin Y.K., *On exact stationary solutions of equivalent non-linear stochastic systems*, International Journal of Non linear Mechanics 23-4 (1988) 315-325
- [9] Cai G.Q., Lin Y.K., *A new approximate solution technique for randomly excited non-linear oscillators*, International Journal of Non linear Mechanics 23-5/6 (1988) 409-420
- [10] Cai G.Q., Lin Y.K., *A new approximate solution technique for randomly excited non-linear oscillators - II*, International Journal of Non-Linear Mechanics 27-6 (1992) 969-979
- [11] Castellana J.V., Leadbetter M.R., *On smoothed probability density estimation for stationary processes*, Stochastic Processes and their Applications 21 (1986) 179-193
- [12] Caughey T.K., Payne H.J., *On the response of a class of self-excited oscillators to stochastic excitation*, International Journal of Non linear Mechanics 2 (1967)
- [13] Dacunha-Castelle D., Duflo M., *Probabilités et statistiques 2. Problèmes à temps mobile*, Masson (1993)
- [14] Delhommeau G., *Les problèmes de diffraction-radiation et de résistance de vagues : étude théorique et résolution numérique par la méthode des singularités* Ecole Nationale Supérieure de Mécanique (1987)

- [15] Donley M.G., Spanos P.D., *Dynamic analysis of non linear structures by the method of statistical quadratization*, Springer-verlag (1990)
- [16] Donley M.G., Spanos P.D., *Stochastic response of a tension leg platform to viscous drift forces*, Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering 113 (mai 1991) 148-155
- [17] Doukhan P., Massart P., Rio E., *The functional central limit theorem for strongly mixing processes*, Probabilités et statistiques 30-1 (1994)
- [18] Doukhan P., Massart P., Rio E., , Annales I.H.P. (1994)
- [19] Doukhan P., *Mixing, properties and examples*, Lecture Notes in Statistics 85 - Springer Verlag (1995)
- [20] Hall P., Heyde C.C., *Martingale limit theory and its application*, Academic Press (1980)
- [21] Hagen O., Tvedt L., *Vector process out-crossing as parallel system sensitivity measure*, Journal of Engineering Mechanics, Vol 117 No 10 (1991)
- [22] Harrison G.W., *Numerical solution of the Fokker-Planck equation using moving finite elements*, Numerical Methods for Partial Differential Equation 4, John Wiley (1988)
- [23] Herfjord K., Nielsen F.G., *Non linear wave forces on a fixed vertical cylinder due to the sum frequency of waves in irregular sea*, Applied Ocean Research 8 (1986) 8-21
- [24] Johnson N.L., Kotz S., *Distribution in Statistics : continuous univariate distributions 1 and 2*, John Wiley (1969)
- [25] Johnson N.L., Kotz S., *Distribution in Statistics : continuous multivariate distributions*, John Wiley (1972)
- [26] Kloeden P.E., Platen E., *Numerical solution of stochastic differential equations*, Applications of Mathematics 23 - Springer-verlag (1992)
- [27] Lamb B., Holcomb D., *Ride quality of fast ferries*, ATMA 92-Navires à grande vitesse (1992)
- [28] Langley R.S., *A finite element method for the statistics of non-linear random vibrations*, Journal of Sound and Vibration 101-1 (1985) 41-54
- [29] Langley R.S., *A statistical analysis of low frequency second order forces and moments*, Applied Ocean Research 9 (1987)
- [30] Langley R.S., Mc William S., *A statistical analysis of first and second order vessel motions induced by waves and wind dust*, Applied Ocean Research 15 (1993) 13-23
- [31] Langley R.S., Mc William S., *Extreme values of first- and second-order wave-induced vessel motions*, Applied Ocean Research 15 (1993) 169-181
- [32] Langley R.S., Mc William S., *Response statistics of non-linearly moored vessels under the action of first and second order wave forces*, Applied Ocean Research 16 (1994) 295-311
- [33] Langtangen H.P., *A general numerical method for Fokker-Planck equations with applications to structural reliability*, Probabilistic Engineering Mechanics 6-1 (1991)

- [34] Le Boulluec M., Prevosto M., Labeyrie J., *Tenue à la mer des navires rapides*, Rapport d'avancement 1 (1992)
- [35] Le Boulluec M., *Tenue à la mer des navires rapides*, Rapport d'avancement 2 (1993)
- [36] Lin Y.K., Cai G.Q., *Probabilistic structural dynamics - Advanced theory and applications*, McGraw-Hill (1995)
- [37] Monbet V., *Identification de termes non linéaires dans un modèle dynamique de NGV*, Rapport de DEA (1993)
- [38] Monbet V., *Statistiques du comportement de systèmes dynamiques non-linéaires Application à la tenue à la mer de Navires Grande Vitesse*, 1er rapport d'avancement (1994)
- [39] Monbet V., Prevosto M., Deshayes J., *Rate of high level upcrossings for a stochastic oscillator*, Proceedings ICASP 7 conference (1995)
- [40] Monbet V., Prevosto M., Deshayes J., *Joint PDF parametric models for the rate of upcrossings of the acceleration for a non linear stochastic oscillator*, International Journal of Non linear Mechanics 31-5 (1996) 591-599
- [41] Naess A., Johnsen J.M., *Response statistics of nonlinear compliant offshore structures by the path integral solution method*, Probabilistic Engineering Mechanics 8 (1993) 91-106
- [42] Payne P., *Advanced seaknife ride confort : a preliminary comparison with a wave strider and a deep-V hull*, (1990)
- [43] Plackett R.L., *A class of bivariate distributions* Journal of The American Statistical Association 60 (1965) 516-522
- [44] Quek S.T., Li X.M., Koh C.G., *Statistical linearization, quadratization and cubicization for non linearity arising from drag*, Proceedings ICASP 7 (1995)
- [45] Rice S.O., *Mathematical analysis of random noise*, Bell Syst. Tech. 24 (1945)
- [46] Risken H., *The Fokker-Planck equation*, Springer Verlag (1989)
- [47] Roberts J.B., Spanos P.D., *Stochastic averaging : an approximate method of solving random vibration problems*, International Journal of Non linear Mechanics 21-2 (1986)
- [48] Roussas G.G., *Non parametric regression estimation under mixing conditions*, Stochastic processes and their applications 36 (1990)
- [49] Roy V.R., *Stochastic averaging of oscillators excited by colored white noise*, International Journal of Non linear Mechanics (1994)
- [50] Schetzen M., *The Volterra and Wiener theories of non linear systems*, John Wiley (1980)
- [51] Schumaker, (1981)
- [52] Senjanović I., Fan Y., Francescutto A., *Non linear detrerministic and random oscillations of cubic dynamical systems*, Proceedings of the second european conference on structural dynamics-EURODYN (1993)
- [53] Silverman B.W., *Density estimation for statistics and data analysis*, Chapman and Hall (1986)

- [54] Sköld M., *Kernel intensity estimation for marks and crossing of differentiable stochastic processes*, Theory of Stochastic Processes vol 2(18) No 1 (1996)
- [55] Soize C., *Steady-state solution of Fokker-planck equation in higher dimension*, Probabilistic Engineering Mechanics 3-4 (1988) 196-206
- [56] Soong T.T., *Random differential equations in science and engineering*, Academic Press (1973)
- [57] Spanos P.D., *ARMA Algorithms for ocean wave modeling*, Transaction of ASME 105 (1983) 300-309
- [58] Spanos P.D., Donley M.G., *Equivalent statistical quadratization for nonlinear systems*, Journal of Engineering Mechanics 117-6 (1991) 1289-1311
- [59] Spencer B.F., Bergman L.A., Wojtkiewicz S.F., *Solution of the a Fokker-Planck equation in stochastic dynamical systems : a comparative study of numerical solvers to narrow band excitation*, Euromech Colloquium 329, Innsbruck/Igls (Mars 1995)
- [60] Sri Namachchivaya N., Lin Y.K., *Application of stochastic averaging for non linear dynamical system with high damping*, Probabilistic Engineering Mechanics 3-3 (1988) 159-167
- [61] Stratonovich R.L., *Topics in the theory of random noise*, Gordon and Breach, New York (1963)
- [62] Viennet G., *Estimation minimax et adaptative dans un cadre absolument régulier*, thèse de l'université de Paris-Sud (1996)
- [63] Wong E., Zakai M., *On the relation between ordinary and stochastic differential equations*, International Journal of Engineering Sciences 3 (1965) 213-229
- [64] Wu W.F., Lin Y.K., *Cumulant-neglect closure for non-linear oscillators under random parametric and external excitations*, International Journal of Non linear Mechanics 19-4 (1984) 349-362
- [65] Yong Y., Lin Y.K., *Exact stationary response solution for second order nonlinear systems under parametric and external white noise excitation*, Transaction of the ASME vol 54 (1987)



# Annexe A

## Estimation de lois de probabilité (Matlab)

### A.1 Introduction

Nous avons élaboré une boîte à outil sous Matlab pour l'estimation et l'ajustement de densités de probabilité marginales et bivariées, en particulier dans l'idée d'estimer le nombre de moyen de franchissements de niveaux pour un processus. On peut regrouper les modules de cette boîte à outil en quatre catégories :

- Statistiques descriptives
- Estimation non paramétrique de lois uni ou bivariées
- Ajustement de lois paramétriques
- Estimation du nombre moyen de franchissements de niveaux

1. La partie **statistiques descriptives** vient en complément de la boîte à outil Statistics développée par matlab. Elle permet de calculer les moments et les cumulants simples et croisés d'un échantillon jusqu'à des ordres élevés. Et elle donne quelques éléments pour choisir déterminer la loi d'un échantillon (voir en particulier la routine **descrep**). Par exemple, pour une variable aléatoire normale centrée réduite,

```
» X = randn(1,1000) ;

» KX = cumulants(6,X)

ans =

-0.0131  1.0225  -0.1461  -0.1209  0.3106  -0.1249

» MX = cum2mom(KX(2 :6))

ans =
```

```
1.0225 -0.1461 3.0158 -1.1832 14.2715
```

```
» mean(X4)
```

```
ans =
```

```
3.0245
```

```
» mean(X6)
```

```
ans =
```

```
14.3641
```

```
» x = randn(1,100) ;
```

```
» descprep(x)
```

```
—> courbe faiblement dissymétrique : skewness = -0.45  
(écart seuil : 0 +/- 0.69 )
```

```
—> courbe moyennement aplatie (normale si symétrie)
```

```
kurtosis = 3.02
```

```
écart seuil = 3 +/- 0.96
```

2. La partie concernant l'**estimation non paramétrique de lois** propose plusieurs estimateurs empiriques et à noyau pour approcher les densités et les fonctions de répartition de lois marginales ou bivariées. Elle comporte aussi des modules permettant d'approcher, sous une hypothèse gaussienne, l'intervalle de confiance des estimateurs ou leur erreur en moyenne quadratique. Deux routines de démonstration (fig. A.2) offrent la possibilité de tester certains modules (estimation de densités).

```
» [pe,te] = densemp(X) ;
```

```
» [pn,tn] = densker(X) ;
```

```
» plot(te,pe,'w',tn,pn,'w-') ; (fig. A.1)
```

```
» legend('empirique','à noyau') ;
```

3. La troisième partie traite essentiellement du problème de l'**ajustement de lois paramétriques**. Plusieurs modèles de lois sont proposés :

- Beta 1ère espèce (p,q,a,b)
- normale (m,σ)
- Galton (x<sub>0</sub>,a,b) - log normale
- Gumbel (x<sub>0</sub>,a)
- Rayleigh (x<sub>0</sub>,a)

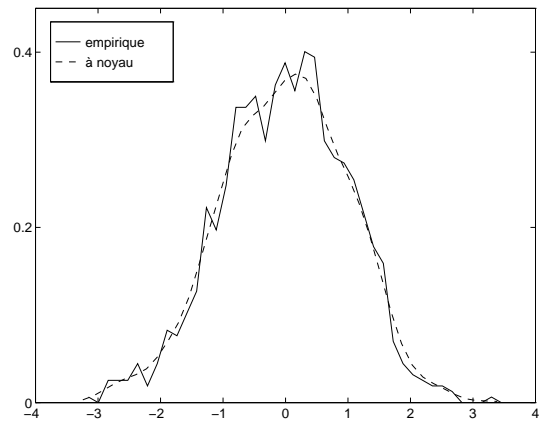


FIG. A.1 – Estimation non paramétrique d'une loi normale centrée réduite

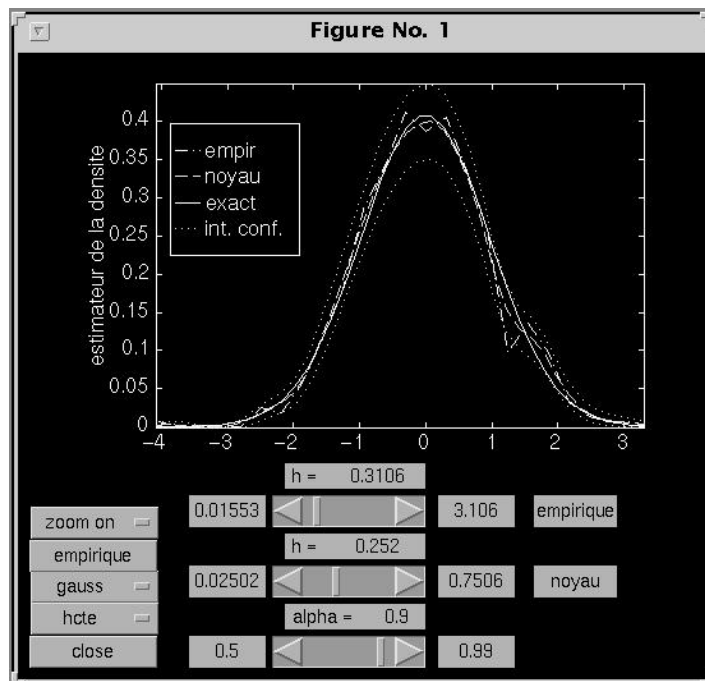


FIG. A.2 – Démonstration pour l'estimation de densités marginales

- Weibull min ( $x_0, a, b$ )
- Weibull max ( $x_0, a, b$ )
- Plackett (modèle de loi bivarié avec différents types de marginales)

Et pour chacune de ces lois, on dispose des modules suivants

- *calcul de la densité de probabilité*

La densité de probabilité décrit la distribution d'une variable aléatoire  $X$ . Elle est définie par

$$f(x) = P(X \in [x - dx/2, x + dx/2]) / dx$$

où  $dx$  est infiniment petit.

- *calcul de la fonction de répartition*

La fonction de répartition est définie par

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

C'est une fonction croissante comprise entre 0 et 1.

- *simulation d'une matrice de nombres aléatoires*

Ces modules permettent de générer une suite de nombre aléatoires indépendants distribué suivant la loi donnée. Par exemple

```
» weibsim(-2,2,1.4,1,3)
```

```
ans =
```

```
-1.2631 -1.7708 0.1906
```

On simule ainsi une suite de 3 nombres suivant la loi de weibull de paramètres (-2,2,1.4).

- *ajustement par moindres carrés en réduisant un coût entre les fonctions de répartition empiriques et théoriques*

On ajuste la loi de paramètre  $\theta$  pour un échantillon  $(X_i)_{i=1, \dots, n}$  en réduisant un coût en  $\theta$  de la forme

$$C(\theta) = \sum_{i=1}^n (\hat{F}_i - F_\theta(t_i))^2 W_i$$

où  $\hat{F}_i$  est la fonction de répartition empirique de  $(X_i)_{i=1, \dots, n}$  et  $F_\theta$  la fonction de répartition théorique. Le poids  $W$  permet de favoriser l'ajustement sur une partie de la loi, par exemple sur les queues.

```
» x = weibsim(-2,2,1.4,1,1000) ;
```

```
» [x0,a,b,err] = weibpar(x,min(x),max(x),1,2) ;
```

```

x0 =
-1.9986

a =
2.0197

b =
1.3872

» [pe,t] = repemp(x) ;
» p = weibr(t,x0,a,b) ;
» plot(t,pe,'w',t,p,'w-')
» axis([-2 7 0 1])

```

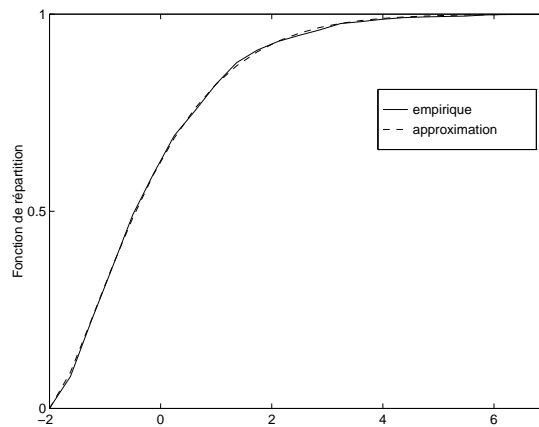


FIG. A.3 – Ajustement d'une loi de Weibull par moindres carrés

- *ajustement par maximum de vraisemblance*

Les paramètres de la loi sont identifiées en maximisant la vraisemblance par un algorithme de Newton-Raphson. Pour les lois marginales à 3 paramètres, il est généralement nécessaire de fixer le seuil pour que l'algorithme converge. D'autre part, il est déconseillé d'utiliser le critère du maximum de vraisemblance pour ajuster les paramètres joints d'un modèle bivarié si on étudie des processus (dépendance dans le temps).

- *ajustement sur les moments empiriques*

Les paramètres du modèles sont identifiés en réduisant un coût aux moindres carrés entre les moments empiriques et les moments théoriques.

4. La dernière catégorie est consacrée à l'**estimation du nombre moyen de franchissements de niveaux**. Elle propose quelques fonctions pour approcher la fréquence de franchissements de niveaux  $E(N_u)$  pour un processus stationnaire  $X_t$  par la formule de Rice.

$$E(N_u) = \int_0^{+\infty} \dot{x} p(u, \dot{x}) d\dot{x}$$

où on note  $p$  la densité de probabilité jointe du couple  $(X_t, \dot{X}_t)$ .

On décrit et commente ci-dessous l'ensemble des modules de la boîte à outils. L'aide en ligne dans matlab donne la syntaxe de chaque routine. Par exemple, en tapant sous matlab

```
» help densker
```

on obtient un descriptif rapide de la fonction DENSKER et de sa syntaxe :

```
DENSKER estimateur a noyau de la densite d'un echantillon
estimateur f a noyau gaussien standard de la densite
d'un echantillon X de longueur n en dimension 1
En notant K la densite gaussienne standard, on a
 $f(t) = 1/n/h * \sum_i (K((t - X(i))/h))$ 
```

```
syntaxe : [f,t,h,h1] = densker(x,[method],[nx],[h] ;
```

```
E - x : echantillon
E - method : 'hcte' pour une methode ou h est constant
              'hvar' pour une methode ou h varie
E - nx : nombre de points equidistants
          pour lesquels on evalue fn
          OU nx contient le vecteur des points pour
          lesquels on veut evaluer la densite
          (bornes des intervalles)
E - h1 : largeur de la fenetre dans le cas 'hcte'
          valeur 'initiale' dans le cas 'hvar'
          Par defaut cas 'hcte' : h1 optimal (cf Ref)
S - f : estimateur a noyau
S - t : abscisses pour f
S - h : largeur de la fenetre, fenetre variable
S - h1 : largeur de la fenetre, fenetre constante
          (si method = 'hcte', alors h = h1)
```

```
Ref : Silverman B.W.
```

```
"Density estimation for statistics and data analysis"
```

Chapman and Hall (1986)

voir aussi : MSEKER, ICLIM, DENSEMP, PLOTDENS

On décrit et commente ci-dessous l'ensemble des modules de la boîte à outils. Agnès Robin a développé une partie de ces fonctions.

## A.2 Description des fonctions matlab

### A.2.1 Statistiques descriptives

**BICUMUL** cumulants croisés d'ordre  $(Nx, Ny)$

#### Syntaxe

`KX = bicumul(Nx, Ny, X, Y)`

#### Description

`bicumul(Nx, Ny, X, Y)` renvoie le cumulants croisés d'ordre  $(Nx, Ny)$  du couple  $(X, Y)$  pour  $0 < Nx + Ny < 8$ .

Les cumulants sont par définition les coefficients de la décomposition en série entière du logarithme de la fonction caractéristique de l'échantillon. Ainsi, les cumulants joints  $k_{pq}$  sont tels que

$$\sum_{p,q} k_{pq} \frac{z_1^p z_2^q}{p!q!} = \log E[e^{-i(z_1 X + z_2 Y)}]$$

**CUMULANT** cumulants de  $X$  d'ordre 1 à  $Nb$

#### Syntaxe

`KX = cumulants(Nb, X)`

#### Description

`cumulants(Nb, X)` estime empiriquement les cumulants du vecteur  $X$  jusqu'à l'ordre  $Nb$ . Si le vecteur  $X$  est assez long ( $> 1000$  points) on peut estimer sans problème les cumulants jusqu'à l'ordre 6, mais au-delà l'approximation devient mauvaise.

Les cumulants sont par définition les coefficients de la décomposition en série entière du logarithme de la fonction caractéristique de l'échantillon. Ainsi, les cumulants marginaux  $k_p$  sont tels que

$$\sum_p k_p \frac{z^p}{p!} = \log E[e^{-izX}]$$

**KURT** kurtosis (coefficient de convexité)

#### Syntaxe

`ku = kurt(x)`

#### Description

`kurt(x)` calcule le kurtosis (moment centré réduit d'ordre 4) du vecteur  $X$ . Le kurtosis est le moment centré réduit d'ordre 4. Il donne des indications sur la vitesse



de décroissance des queues de la loi. Il est égal à 3 quand la loi décroît à la même vitesse que la loi gaussienne et il est supérieur (resp. inférieur) à 3 si la densité de probabilité est plus fortement (resp. faiblement) aplatie.

$$k = \frac{E[(X - E[X])^4]}{E[(X - E[X])^2]^2}$$

**MOM2CUM** calcul des cumulants à partir les moments centrés d'ordre 2 à  $n$  avec  $n \leq 8$

**Syntaxe**

`c = mom2cum(m)`

**Description**

`mom2cum(m)` calcule les cumulants  $c = [k_2, k_3, \dots, k_n]$  correspondant aux moments centrés  $m = [m_2, m_3, \dots, m_n]$ . On ne donne pas le cumulants  $k_1$  qui est égal au moment centré  $m_1$  d'ordre 1.

D'après la définition des cumulants et des moments, on a

$$\sum_p m_p \frac{z^p}{p!} = \log \sum_p k_p \frac{z^p}{p!}$$

**CUM2MOM** calcul des moments centrés à partir les cumulants d'ordre 2 à  $n$  avec  $n \leq 6$

**Syntaxe**

`m = cum2mom(c)`

**Description**

`cum2mom(c)` calcule les moments centrés  $m = [m_2, m_3, \dots, m_n]$  correspondant aux cumulants centrés  $c = [k_2, k_3, \dots, k_n]$ .

D'après la définition des cumulants et des moments, on a

$$\sum_p m_p \frac{z^p}{p!} = \log \sum_p k_p \frac{z^p}{p!}$$

**SKEWN** skewness (coefficient de symétrie)

**Syntaxe**

`sk = skewn(x)`

**Description**

`skewn(x)` calcule le skewness du vecteur  $x$ . Le skewness est le moment centré réduit d'ordre 3. Il donne des indications sur la symétrie de la densité de probabilité. En particulier, il vaut 0 si la loi est symétrique.

$$s = \frac{E[(X - E[X])^3]}{E[(X - E[X])^2]^{3/2}}$$

**STAELEM** module de calcul de statistiques élémentaires

**Syntaxe**

```
[s] = staelem( x, [ifNaN ] )
```

**Description**

`staelem(x)` donne quelques statistiques élémentaires de l'échantillon  $x$ . Dans l'ordre : la moyenne, l'écart-type, r.m.s, le skewness, le kurtosis, le min et le max. La variable `ifNaN` doit être égale à `in` si on veut ignorer les valeurs NaN de l'échantillon.

```
>> x = randn(1,300) ;  
>> staelem(x)
```

```
ans =
```

```
0.0356 1.0427 1.0433 0.0162 2.8920 3.2069 -2.8728
```

**DESCREP** module de description d'un échantillon

**Syntaxe**

```
descrep( x, [ifNaN ] )
```

**Description**

`descrep(x)` affiche le skewness et le kurtosis de l'échantillon  $x$  avec un intervalle de confiance calculé sous une hypothèse gaussienne qui dépend de la taille de l'échantillon et donne une première interprétation du résultat. (D'après Stexom). Par exemple,

```
>> x = randn(1,100) ;  
>> descrep(x)  
→ courbe faiblement dissymétrique : skewness = -0.45  
(écart seuil : 0 +/- 0.69 )
```

```
→ courbe moyennement aplatie (normale si symétrie)  
kurtosis = 3.02  
écart seuil = 3 +/- 0.96
```

## A.2.2 Estimation non paramétrique de lois

**BIDENSEMP** estimateur empirique de la densité d'un échantillon bidimensionnel

### Syntaxe

```
[f,tx,ty] = bidensemp(x,y[,nx[,ny)
```

### Description

`bidensemp(x,y)` estime empiriquement la densité de probabilité jointe des échantillons  $x$  et  $y$ . L'intervalle de définition de  $x$  (resp.  $y$ ) est découpé en  $nx$  (resp.  $ny$ ) sous-intervalles de même longueur. Pour calculer l'estimateur empirique, on calcule le pourcentage de points appartenant à chaque sous-intervalle. En sortie du module, on obtient l'estimateur de la densité pour les abscisses  $(tx, ty)$ .

$$f(tx_k, ty_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1_{]tx_k, tx_{k+1}[}(x_i) 1_{]ty_j, ty_{j+1}[}(y_i)}{(tx_{k+1} - tx_k)(ty_{j+1} - ty_j)}, \quad k = 1, \dots, nx, \quad j = 1, \dots, ny$$

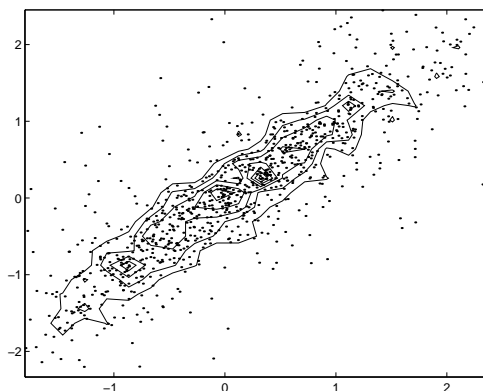


FIG. A.4 – Estimateur empirique d'une loi jointe de plackett avec des marginales gaussiennes standards

**BIDENSKER** estimateur à noyau de la densité d'un échantillon bidimensionnel

### Syntaxe

```
[f,tx,ty,h,h1] = bidensker(x,y,[method,[nx,[ny,[h)
```

### Description

`bidensker(x,y)` calcule un estimateur à noyau polynomial de degré 2 pour la densité de probabilité d'un couple de variables aléatoires  $(x, y)$ .

$$f(s, t) = \frac{1}{nh^2} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{s - X_i}{h}, \frac{t - Y_i}{h}\right)$$

Le noyau  $K$  est décrit par

$$\begin{aligned} K(z) &= (1 - z'z)^2 \text{ si } z'z \in [-1, 1] \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

où  $z = (x, y)$ .

On utilise un noyau polynomial plutôt qu'un noyau gaussien pour que les calculs soient plus rapides. Le noyau polynomial assure un bon compromis entre la régularité et la rapidité de calcul.

On estime la densité de probabilité jointe soit avec une fenêtre  $h$  constante soit avec une fenêtre adaptative qui varie en fonction de la densité l'échantillon autour du point pour lequel on estime la densité jointe. Par exemple la fenêtre devient plus large sur les queues de distribution. La largeur de la fenêtre est calculée en optimisant l'erreur en moyenne quadratique (biais + variance) pour un échantillon gaussien. On a parfois intérêt à faire varier soi-même le paramètre  $h$  de façon à faire ressortir plus ou moins les détails de la répartition en fonction du résultat que l'on souhaite obtenir.

On calcule l'approximation de la densité de probabilité jointe pour  $(nx, ny)$  points équidistants.

Référence : Silverman B.W. *Density estimation for statistics and data analysis* Chapman and Hall (1986)

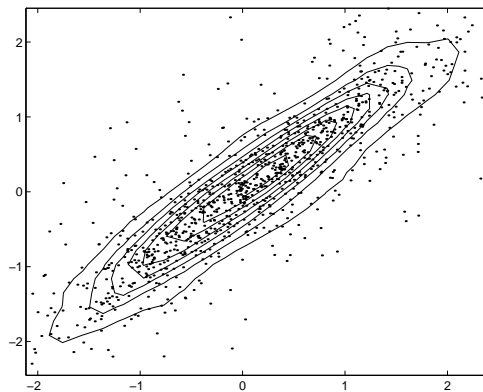


FIG. A.5 – Estimateur à noyau d'une loi jointe de plackett avec des marginales gaussiennes standards

**BIICLIM** intervalle de confiance pour l'estimateur d'une densité de probabilité jointe

#### Syntaxe

```
[bi,bs,f,tx,ty] = biiclim(x,y,[alpha[,method[,nx[,ny[,h1])
```

#### Description

`biiclim(x,y)` calcule un estimateur  $f$  à noyau polynomial d'ordre 2 de la densité

de probabilité jointe de  $(x, y)$  et un intervalle de confiance approché  $[b_i, b_s]$  pour  $f$  par un théorème de limite centrale :

$$P[b_i < f < b_s] = \alpha$$

L'estimateur à noyau de la densité de probabilité jointe est calculé comme dans la fonction `bidensker`.

Pour calculer l'intervalle de confiance, on suppose que  $\frac{\hat{f}-f}{\sigma_{\hat{f}}}$  suit une loi normale standard. On a alors

$$P\left(\left|\frac{\hat{f}-f}{\sigma_{\hat{f}}}\right| < e\right) = \alpha$$

avec

$$e = -qnorm\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$$

$$\sigma_{\hat{f}} = \sqrt{\frac{3}{\pi n h^2}} \hat{f}$$

où `qnorm` est l'inverse de la fonction de distribution normale standard et  $\hat{f}$  est l'estimateur à noyau de la densité de probabilité  $f$ . Ainsi on obtient,

$$b_i = \hat{f} - e\sigma_{\hat{f}} \quad \text{et} \quad b_s = \hat{f} + e\sigma_{\hat{f}}$$

Référence : D. Bosq, J.P. Lecoutre, *Theorie de l'estimation fonctionnelle* Economica (1987)

**BIMSEKER** erreur en moyenne quadratique pour un estimateur à noyau de loi jointe

**Syntaxe**

`[er,b,v,f,tx,ty] = bimseker(x,y[,method[,nx[,ny[,h1])`

**Description**

`bimseker(x,y)` approche l'erreur en moyenne quadratique commise en estimant la densité de probabilité jointe d'un couple de variables aléatoires  $(x, y)$  par un estimateur à noyau polynomial.

$$err = biais^2 + variance$$

L'estimateur à noyau de la densité de probabilité jointe est calculé comme dans la fonction `bidensker`.

Le biais est approché par

$$b = \frac{h^2}{16} \left( \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial y^2} \right)$$

et la variance par

$$V = \frac{3}{\pi n h^2} \hat{f}$$

Référence : Silverman B.W. *Density estimation for statistics and data analysis* Chapman and Hall (1986)

**BIREPEMP** estimateur empirique de la fonction de répartition jointe de 2 variables aléatoires

**Syntaxe**

`[F,tx,ty] = birepemp(x,y[,nx,ny])`

**Description**

`birepemp(x,y)` estime empiriquement la fonction de répartition jointe de 2 variables aléatoires  $(x, y)$ .

On calcule l'approximation de la fonction de répartition jointe pour le couple de vecteurs  $(tx, ty)$ .

$$f(tx_k, ty_j) = \frac{\text{card}(x_i < tx_k, y_i < ty_j)}{n}, \quad k = 1, \dots, nx, \quad j = 1, \dots, ny$$

**DENSEMP** densité de probabilité empirique

**Syntaxe**

`[f,t,h] = densemp(x[,n[,h])`

**Description**

`densemp(x)` calcule un estimateur empirique de la densité de probabilité de la variable aléatoire  $x$  en découpant l'intervalle de définition de  $x$  en  $n$  sous-intervalles de largeur  $h$ . La variable  $n$  peut éventuellement contenir le vecteur des abscisses pour lesquelles on veut estimer la densité de probabilité. (voir fig. A.2)

$$f(t_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_{k+1} - t_k} 1_{]t_k, t_{k+1}[}(x_i), \quad k = 1, \dots, nx$$

**DENSKER** estimateur à noyau de la densité d'un échantillon de dimension 1

**Syntaxe**

`[f,t,h,h1] = densker(x,[method],[nx],[h])`

**Description**

`densker(x)` calcule un estimateur  $f$  à noyau gaussien standard de la densité d'un échantillon  $X$  de longueur  $n$  en dimension 1. En notant  $K$  la densité de probabilité gaussienne standard, on a

$$f(t) = \frac{1}{nh} \sum_i K\left(\frac{t - X_i}{h}\right)$$

On estime la densité de probabilité jointe soit avec une fenêtre  $h$  constante soit avec une fenêtre adaptative qui varie en fonction de la densité l'échantillon autour du point pour lequel on estime la densité jointe. Par exemple la fenêtre devient plus large sur les queues de distribution. La largeur de la fenêtre est calculée en

optimisant l'erreur en moyenne quadratique (biais + variance) pour un échantillon gaussien. On a parfois intérêt à faire varier soi-même le paramètre  $h$  de façon à faire ressortir plus ou moins les détails de la répartition en fonction du résultat que l'on souhaite obtenir. (voir fig. A.2)

Référence : Silverman B.W., *Density estimation for statistics and data analysis*, Chapman and Hall (1986)

## REPEMP2 fonction de répartition empirique

### Syntaxe

`[F,t] = repemp2(x, [n, [pcv]`

### Description

`repemp2(x)` calcule un estimateur empirique de la fonction de répartition de la variable aléatoire  $x$  en découpant l'intervalle de définition de  $x$  en  $n$  sous-intervalles. La variable  $n$  peut éventuellement contenir le vecteur des abscisses pour lesquelles on veut estimer la fonction de répartition. La variable  $pcv$  est un paramètre de convexité compris entre 0 et 1. La fonction de répartition est calculée de la façon suivante.

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{\text{card}(x_i < t) - pcv}{n + 1 - 2 * pcv} \quad \text{si } 0 \leq pcv < 1 \\ &= \frac{\text{card}(x_i < t)}{n} \quad \text{si } pcv = -1 \end{aligned}$$

## ICLIM intervalle de confiance pour estimateur à noyau de densité

### Syntaxe

`[bi,bs,f,t] = iclim(x, [alpha[,method[,nx[,h1]`

### Description

`iclim(x)` calcule un intervalle de confiance  $[bi, bf]$  pour l'estimateur  $f$  à noyau gaussien standard de la densité de probabilité de  $x$  par un théorème de limite centrale.

$$P[bi < f < bs] = \alpha$$

L'estimateur à noyau de la densité de probabilité est calculé comme dans la fonction `densker`.

Pour calculer l'intervalle de confiance, on suppose que  $\frac{\hat{f}-f}{\sigma_{\hat{f}}}$  suit une loi normale standard. D'où on a

$$P\left(\left|\frac{\hat{f}-f}{\sigma_{\hat{f}}}\right| < e\right) = \alpha$$

avec

$$e = -qnorm\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$$
$$\sigma_{\hat{f}} = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\pi}nh}\hat{f}}$$

où  $qnorm$  est l'inverse de la fonction de distribution normale standard et  $\hat{f}$  est l'estimateur à noyau de la densité de probabilité  $f$ . Ainsi on obtient,

$$b_i = \hat{f} - e\sigma_{\hat{f}} \text{ et } b_s = \hat{f} + e\sigma_{\hat{f}}$$

Référence : D. Bosq, J.P. Lecoutre, *Théorie de l'estimation fonctionnelle*, Economica (1987)

**MSEKER** approximation de l'erreur en moyenne quadratique pour un estimateur à noyau de densité

### Syntaxe

`[er,b,v,fn,t] = mseker(x, [method, [nx, [h1]`

### Description

`mseker(x)` approche l'erreur en moyenne quadratique commise en estimant la densité de probabilité d'un échantillon  $x$  par un estimateur à noyau gaussien standard. Cette approximation est encore vraie (asymptotiquement) si  $x$  est un processus stationnaire discrétisé. L'estimateur à noyau de la densité de probabilité est calculé comme dans la fonction `densker`.

Le biais est approché par

$$b = \frac{1}{h^2}\hat{f}''$$

et la variance par

$$V = \frac{1}{2\sqrt{\pi}nh}\hat{f}$$

Référence : Silverman B.W., *Density estimation for statistics and data analysis*, Chapman and Hall (1986)

**DEMDENS** démonstration (ou outil) pour l'estimation de densités de probabilité marginales

### Syntaxe

`demdens`

### Description

Cette démonstration est une fenêtre active (fig. A.2). On y calcule des estimateurs à noyau et empirique de divers échantillons de 500 points. On peut faire varier le type



et la largeur des fenêtres ainsi que la largeur de l'intervalle de confiance approché. On a aussi la possibilité d'utiliser cet outil pour estimer on paramétriquement un échantillon particulier que l'on charge soit même.

**DEMOESTLOI2** démonstration pour l'estimation de densités de probabilité jointes

**Syntaxe**

`demoestloi2[(n)`

**Description**

démonstration pour l'estimation de la densité de probabilité jointe d'un couple de variables aléatoires dépendantes distribuées selon des lois de Weibull (loi jointe : modèle de Plackett) par un estimateur à noyau polynomial :

- estimateur avec une fenêtre de largeur variable
- estimateur avec une fenêtre de largeur constante
- approximation de la largeur de l'intervalle de confiance
- approximation de l'erreur en moyenne quadratique

### A.2.3 Approximation paramétrique

#### Loi beta

**BETAP** Densité de probabilité de la loi beta (4 paramètres)

##### Syntaxe

`p = betap(x,p,q,a,b)`

##### Description

`betap(x,p,q,a,b)` donne la densité de probabilité de la loi beta de paramètres  $(p, q, a, b)$  pour les abscisses  $x$ .

$$p(x) = \frac{(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}}{\text{beta}(p,q)(b-a)^{p+q-1}}$$

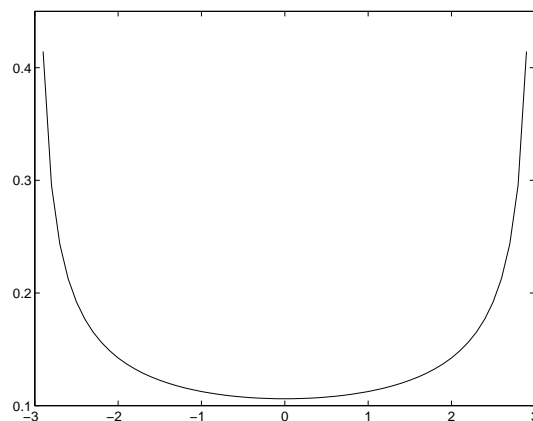


FIG. A.6 – Densité de probabilité de la loi beta (1/2,1/2,-3,3)

**BETAR** Fonction de répartition de la loi beta (4 paramètres)

##### Syntaxe

`p = betar(x,p,q,a,b)`

##### Description

`betar(x,p,q,a,b)` donne la fonction de répartition de la loi beta de paramètres  $(p, q, a, b)$  pour les abscisses  $x$ .

**BETA AJ** ajustement d'une loi de beta, en fixant les paramètres initiaux

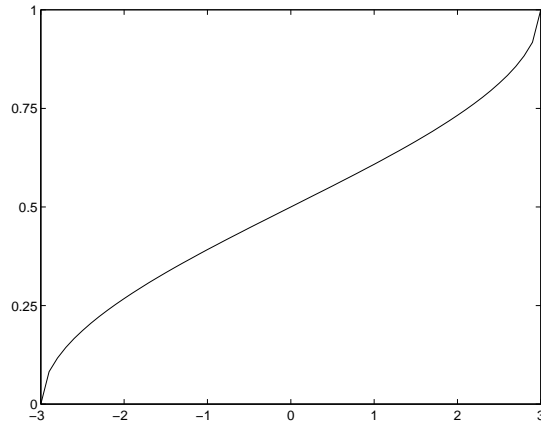


FIG. A.7 – Fonction de répartition de la loi beta (1/2,1/2,-3,3)

### Syntaxe

`[p,q,a,b,err,n] = betaaj(x[,W[,pi[,qi[,ai[,bi[,[,aff[,n)`

### Description

`betaaj(x)` identifie les paramètres  $(p, q, a, b)$  d'une loi beta de première espèce pour l'échantillon  $x$ . On peut introduire un poids (si  $W = 1$ ). Si on ne donne pas en entrée de valeur initiales  $p_i, q_i, a_i$  et  $b_i$  des paramètres, alors  $a_i$  et  $b_i$  sont initialisés respectivement par le min et le max de  $x$  tandis que  $p_i$  et  $q_i$  sont calculés en fonction de la moyenne et la variance de  $x$ . La variable  $n$  permet d'imposer le nombre de points pour lesquels on estime la fonction de répartition empirique.

Le coût  $C$  minimisé pour identifier les paramètres  $p, q, a$  et  $b$  est défini par

$$C = \sum_{i=1}^n (\hat{F}_i - F_{a,b,p,q}(t_i))^2 W_i$$

avec le poids  $W$  qui favorise l'ajustement sur les queues de la loi

$$W_i = \frac{1}{F_i(1 - F_i)}$$

On impose de plus une contrainte pour que les paramètres de forme  $p$  et  $q$  restent positifs.

## Loi de Pearson type 7

**TYP7P** densité de probabilité d'une loi de Pearson type 7

### Syntaxe

`p = typ7p(x,a,m)`

### Description

`typ7p(x,a,m)` donne la densité de probabilité de la loi de Pearson de type 7.

$$p = \frac{(1 + x^2/m^2)^{-m}}{\text{beta}(1/2, m - 1/2)a}$$

Le paramètre  $m$  doit être supérieur ou égal à  $1/2$  et le paramètre  $a$  supérieur à 0. Si  $m$  est inférieur ou égal à 1, la distribution n'admet pas de moments d'ordre supérieur à 1. Si  $m$  est inférieur ou égal à 2, la distribution n'admet pas de moments d'ordre supérieur à 2, etc ...

Référence : Kendall-Stuart, vol 1

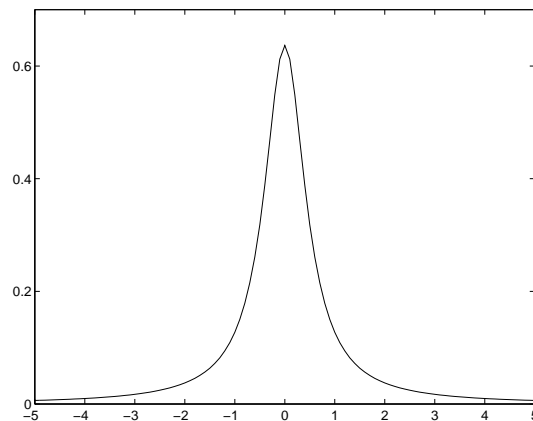


FIG. A.8 – Densité de probabilité de la loi type 7 (1/2,1)

## Loi normale

**NORMMOM** premiers moments de la loi normale

### Syntaxe

`[m1,m2,m3,m4,m5,m6] = normmom(m,s)`

### Description

`normmom(m,s)` calcule les 6 premiers moments de la loi normale de paramètres  $(m, s)$  en fonction de la moyenne  $m$  et de la variance  $s$ .

**NORMAJ** ajustement d'une loi normale, en fixant les paramètres initiaux

### Syntaxe

`[me,st,err] = normaj(x,mi,si[,xmin[,xmax[,aff)`

### Description

`normaj(x,mi,si)` ajuste une loi normale sur les données  $x$  en réduisant un coût aux moindres carrés entre les fonctions de répartition empirique et théorique. Il faut donner en entrée les valeurs initiales  $m_i$  et  $s_i$  des paramètres.

$$C = \sum_{i=1}^n (\hat{F}_i - F_{a,b,p,q}(t_i))^2 W_i$$

avec le poids  $W$  qui favorise l'ajustement sur les queues de la loi

$$W_i = \frac{1}{F_i(1 - F_i)}$$

Si  $x$  est une matrice, le traitement est effectué sur chaque colonne de  $x$ .

Les valeurs min et max (`xmin` et `xmax`) servent à restreindre l'ajustement de la loi à un compact ou un demi espace et non à supprimer des valeurs aberrantes.

**NORMPAR** ajustement d'une loi normale

### Syntaxe

`[me,st,err] = normpar(x[,mn[,mx[,iwf)`

### Description

`normpar(x)` ajuste une loi normale sur les données  $x$  sur l'intervalle  $[x_{min}, x_{max}]$ . Cette fonction contient l'initialisation des paramètres.

On peut choisir le type de minimisation

`iwf = 1` : moindres carrés sur les fonctions de répartition (pondéré)

`iwf = 0` : moments

Et si on choisit de travailler avec en minimisant un coût sur les fonctions de répartition, on introduit un poids qui favorise l'ajustement sur les queues de la loi

$$W = \frac{1}{F_i(1 - F_i)}$$

Si  $x$  est une matrice, le traitement est effectué sur chaque colonne de  $x$ .

Les valeurs min et max (mn et mx) servent à restreindre l'ajustement de la loi à un compact ou un demi espace et non à supprimer des valeurs aberrantes.

## Loi de Galton

**GALTP** densité de probabilité de la loi de Galton( $x_0, a, b$ ) log-normale

### Syntaxe

`p = galtp(x, x0, a, b[, ifm])`

### Description

`galtp(x, x0, a, b)` calcule la densité de probabilité de la loi de Galton de paramètres ( $x_0, a, b$ ) pour les abscisses  $x$ .

$$r = \frac{\log(x - x_0) - a}{b} \quad \text{avec } x > x_0$$
$$p = \frac{1}{x\sqrt{2\pi b}} e^{-r^2/2}$$

L'argument *ifm* permet de sortir à l'écran la moyenne et l'écart-type théoriques de la loi.

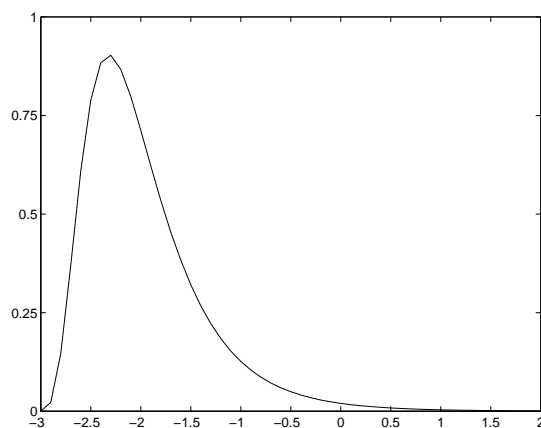


FIG. A.9 – Densité de probabilité de la loi de Galton (-3.1,0,1/2)

**GALTR** fonction de répartition de la loi de Galton( $x_0, a, b$ ) log-normale

### Syntaxe

`p = galtr(x, x0, a, b[, ifm])`

### Description

`galtr(x, x0, a, b)` calcule la fonction de répartition de la loi de Galton de paramètres ( $x_0, a, b$ ) pour les abscisses  $x$ .

$$r = \frac{\log(x - x_0) - a}{b} \quad \text{avec } x > x_0$$
$$p = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{-r}{\sqrt{2}}\right)$$

L'argument *ifm* permet de sortir à l'écran la moyenne et l'écart-type théoriques de la loi.

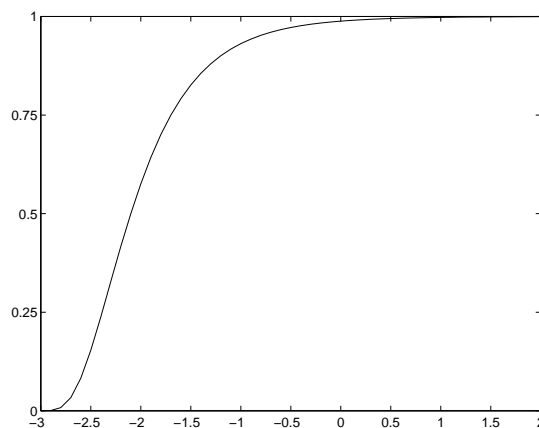


FIG. A.10 – Fonction de répartition de la loi de Galton  $(-3.1, 0, 1/2)$

**GALTSIM** générateur de nombres aléatoires de la loi de Galton( $x_0, a, b$ ) log-normale

**Syntaxe** `x = galtsim(x0, a, b[, m [, n[, ifm]`)

**Description**

`galtsim(x0, a, b)` génère une matrice de nombres aléatoires de taille  $m \times n$  distribuée suivant la loi de Galton de paramètres  $(x_0, a, b)$ . Le paramètre  $b$  doit être positif.

**GALTAJ** ajustement d'une loi de Galton( $x_0, a, b$ ), en fixant les paramètres initiaux

**Syntaxe**

`[x0, a, b, err] = gumbaj(x, x0i, ai, bi, nfit, iwf, xmin, xmax, aff)`

**Description**

`galtaj(x, x0i, ai, bi, nfit, iwf, xmin, xmax, aff)` identifie les paramètres  $(x_0, a, b)$  d'une loi de Galton sur l'intervalle  $[x_{min}, x_{max}]$ . On peut choisir divers poids pour l'ajustement :

- `iwf = 0` :  $P_0 = 1$
- `iwf = n` :  $P_n = 1/(1 - F)^n$  avec  $n \in [0, 1]$
- `iwf = 1` :  $P_1 = 1/(1 - F)$
- `iwf = 2` :  $P_2 = F/(1 - F)$
- `iwf = 3` :  $P_3 = F/F(1 - F)$

$P_n$  induit un poids sur la partie supérieure de la distribution,  $P_1$  a le même effet que  $P_n$  mais plus prononcé,  $P_2$  a le même effet que  $P_1$  mais induit un poids nul sur la partie inférieure de la distribution au lieu d'un poids 1, enfin  $P_3$  donne du poids aux 2 queues de la distribution. Si  $x$  est une matrice, le traitement est effectué sur chaque colonne de  $x$ .



Les valeurs min et max (xmin et xmax) servent à supprimer des valeurs aberrantes.

## **GALTPAR** ajustement d'une loi de Galton

### **Syntaxe**

`[x0,a,b,err] = galtpar(x [,nfit [,iwf [,mn [,mx, [fixx0)`

### **Description**

`galtpar(x)` identifie les paramètres  $(x_0, a, b)$  d'une loi de Galton pour l'échantillon  $x$ . L'échantillon est tronqué en dehors de  $[mn, mx]$ . Cette fonction contient l'initialisation des paramètres.

On peut choisir le type de minimisation

nfit = 0 : moindres carrés sur les fonctions de répartition

nfit = 1 : maximum de vraisemblance

nfit = 2 : moments

Et si on choisit de travailler avec en minimisant un coût sur les fonctions de répartition, on peut introduire un poids

iwf = 0 :  $P_0 = 1$

iwf = n :  $P_n = 1/(1 - F)^n$  avec  $n \in [0, 1]$

iwf = 1 :  $P_1 = 1/(1 - F)$

iwf = 2 :  $P_2 = F/(1 - F)$

iwf = 3 :  $P_3 = F/F(1 - F)$

$P_n$  induit un poids sur la partie supérieure de la distribution,  $P_1$  a le même effet que  $P_n$  mais plus prononcé,  $P_2$  a le même effet que  $P_1$  mais induit un poids nul sur la partie inférieure de la distribution au lieu d'un poids 1, enfin  $P_3$  donne du poids aux 2 queues de la distribution.

L'ajustement n'est généralement pas bon si le paramètre  $x_0$  n'est pas fixé par l'utilisateur.

Si  $x$  est une matrice, le traitement est effectué sur chaque colonne de  $x$ .

Les valeurs min et max (mn et mx) servent à supprimer des valeurs aberrantes.

## Loi de Gumbel

**GUMBP** densité de probabilité de la loi de Gumbel( $x_0, a$ )

### Syntaxe

`p = gumbp(x, x0, a[, ifm])`

### Description

`gumbp(x, x0, a)` calcule la densité de probabilité de la loi de Gumbel de paramètres  $(x_0, a)$  pour les abscisses  $x$ .

$$r = \frac{(x - x_0)}{a}$$
$$p = \frac{r}{a} e^{-r}$$

L'argument *ifm* permet de sortir à l'écran la moyenne et l'écart-type théoriques de la loi.

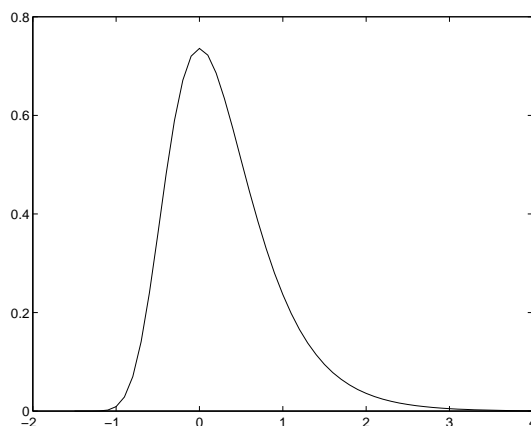


FIG. A.11 – Densité de probabilité de la loi de Gumbel (0,1/2)

**GUMBR** fonction de répartition de la loi de Gumbel( $x_0, a$ )

### Syntaxe

`p = gumbr(x, x0, a[, ifm])`

### Description

`gumbr(x, x0, a)` calcule la fonction de répartition de la loi de Gumbel de paramètres  $(x_0, a)$  pour les abscisses  $x$ .

$$r = \frac{(x - x_0)}{a}$$
$$p = e^{-e^r}$$

L'argument *ifm* permet de sortir à l'écran la moyenne et l'écart-type théoriques de la loi.

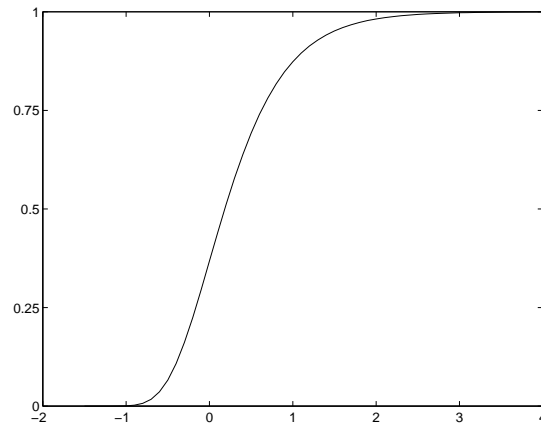


FIG. A.12 – Fonction de répartition de la loi de Gumbel (0,1/2)

**GUMBSIM** générateur de nombres aléatoires de la loi de Gumbel( $x_0, a$ )

**Syntaxe**

`r = gumbsim( x0, a, m, n[, ifm ]`

**Description**

`gumbsim(x0, a, b)` génère une matrice de nombres aléatoires de taille  $m \times n$  distribuée suivant la loi de Gumbel de paramètres  $(x_0, a)$ . Le paramètre  $a$  doit être positif.

L'argument *ifm* permet de sortir à l'écran la moyenne et l'écart-type théoriques de la loi.

**GUMBAJ** ajustement d'une loi de Gumbel( $x_0, a$ ), en fixant les paramètres initiaux

**Syntaxe**

`[x0, a, err] = gumbaj(x, x0i, ai, nfit, iwf, xmin , xmax, aff)`

**Description**

`gumbaj(x, x0i, ai, nfit, iwf, xmin , xmax, aff)` identifie les paramètres  $(x_0, a)$  d'une loi de Gumbel sur l'intervalle  $[x_{min}, x_{max}]$ . On peut choisir divers poids pour l'ajustement :

- `iwf = 0` :  $P_0 = 1$
- `iwf = n` :  $P_n = 1/(1 - F)^n$  avec  $n \in [0, 1]$
- `iwf = 1` :  $P_1 = 1/(1 - F)$
- `iwf = 2` :  $P_2 = F/(1 - F)$
- `iwf = 3` :  $P_3 = F/F(1 - F)$

$P_n$  induit un poids sur la partie supérieure de la distribution,  $P_1$  a le même effet que  $P_n$  mais plus prononcé,  $P_2$  a le même effet que  $P_1$  mais induit un poids nul sur la partie inférieure de la distribution au lieu d'un poids 1, enfin  $P_3$  donne du poids aux 2 queues de la distribution. Si  $x$  est une matrice, le traitement est effectué sur chaque colonne de  $x$ .

Les valeurs min et max (`xmin` et `xmax`) servent à supprimer des valeurs aberrantes.

**GUMBP**AR ajustement d'une loi de Gumbel( $x_0, a$ )

**Syntaxe**

`[x0,a,err] = gumbpar(x, nfit, iwf[,mn[,mx])`

**Description**

`gumbpar(x, nfit, iwf)` identifie les paramètres ( $x_0, a$ ) d'une loi de Gumbel. L'échantillon est tronqué en dehors de  $[mn, mx]$ . Cette fonction contient l'initialisation des paramètres.

On peut choisir le type de minimisation

nfit = 0 : moindres carrés sur les fonctions de répartition

nfit = 1 : maximum de vraisemblance

nfit = 2 : moments

Et si on choisit de travailler avec en minimisant un coût sur les fonctions de répartition, on peut introduire un poids

iwf = 0 :  $P_0 = 1$

iwf = n :  $P_n = 1/(1 - F)^n$  avec  $n \in [0, 1]$

iwf = 1 :  $P_1 = 1/(1 - F)$

iwf = 2 :  $P_2 = F/(1 - F)$

iwf = 3 :  $P_3 = F/F(1 - F)$

$P_n$  induit un poids sur la partie supérieure de la distribution,  $P_1$  a le même effet que  $P_n$  mais plus prononcé,  $P_2$  a le même effet que  $P_1$  mais induit un poids nul sur la partie inférieure de la distribution au lieu d'un poids 1, enfin  $P_3$  donne du poids aux 2 queues de la distribution. Si  $x$  est une matrice, le traitement est effectué sur chaque colonne de  $x$ .

Les valeurs min et max (mn et mx) servent à supprimer des valeurs aberrantes.

## Modèle de Plackett

**PLACKP** densité de probabilité jointe de Plackett

### Syntaxe

`[p,t1,t2] = plackp(loix,loiy,px,py,psi,tx,ty)`

### Description

`plackp(loix,loiy,px,py,psi,tx,ty)` calcule la densité de probabilité jointe du modèle de Plackett pour un couple de variables aléatoires de loi *loix* (resp. *loiy*) de paramètres *tx* (resp. *ty*) avec un paramètre joint *psi* et pour les abscisses (resp. ordonnées) *tx* (resp. *ty*). On peut choisir les lois marginales

loix = 1 : Gauss

loix = 2 : Weibull min

loix = 3 : Weibull max

loix = 4 : Gumbel

loix = vecteur de la forme  $[F_x(\cdot), f_x(\cdot)]$  : loi empirique où  $F_x$  et  $f_x$  sont respectivement la fonction de répartition et la densité de probabilité

La densité de probabilité du modèle de Plackett est définie par

$$p(x, y, \psi) = D(x, y, \psi)p_1(x)p_2(y)$$

où on note  $p_1, p_2$  les densités de probabilités marginales et  $D$  la fonction de dépendance définie par

$$D(x, y, \psi) = \frac{\psi((\psi - 1)[F_1(x) + F_2(y) - 2F_1(x)F_2(y)] + 1)}{([1 + (F_1(x) + F_2(y))(\psi - 1)]^2 - 4\psi(\psi - 1)F_1(x)F_2(y))^{3/2}}$$

avec  $F_1$  et  $F_2$  les fonctions de répartition marginales.

Référence : Plackett R.L., *A class of bivariate distribution*, J. of the American Statistical Association 60 (1965)

**PLACKR** fonction de répartition jointe de Plackett

### Syntaxe

`[p,t1,t2] = plackr(loix,loiy,px,py,psi,tx,ty)`

### Description

`plackr(loix,loiy,px,py,psi,tx,ty)` calcule la fonction de répartition jointe du modèle de Plackett pour un couple variables aléatoires de loi *loix* (resp. *loiy*) de paramètres *px* (resp. *py*) avec un paramètre joint *psi*. On peut choisir les lois marginales

loix = 1 : Gauss

loix = 2 : Weibull min

loix = 3 : Weibull max

loix = 4 : Gumbel

loix = vecteur de la forme  $[Fx(\cdot), fx(\cdot)]$  : loi empirique où  $Fx$  et  $fx$  sont respectivement la fonction de répartition et la densité de probabilité marginales de l'échantillon.

La fonction de répartition du modèle de Plackett est définie par

$$S(x, y, \psi) = 1 + (\psi - 1)(F_1 + F_2)$$

avec  $F_1$  et  $F_2$  les fonctions de répartition marginales et

$$F(x, y, \psi) = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4\psi(\psi - 1)F_1 * F_2}}{2(\psi - 1)}$$

Référence : Plackett R.L., *A class of bivariate distribution*, J. of the American Statistical Association 60 (1965)

**PLACKSIM** simulation de 2 variables aléatoires dépendantes dont la loi jointe est une loi de Plackett

#### Syntaxe

`[X,Y] = placksim(n,psi,loix,loiy,px,py)`

#### Description

`placksim(n,psi,loix,loiy,px,py)` génère un couple de variables aléatoires dépendantes suivant le modèle de Plackett avec des lois marginales *loix* et *loiy* de paramètres *tx* et *ty* et un paramètre joint *psi*. On peut choisir les lois marginales

loix = 1 : Gauss

loix = 2 : Weibull min

loix = 3 : Weibull max

loix = 4 : Gumbel

Référence : Johnson M.E., *Multivariate statistical simulation*, John Wiley and sons (1987)

**PLACKMOM** moments du modèle de Plackett

#### Syntaxe

`[p,t1,t2] = plackmom(loix,loiy,px,py,psi,tx,ty,m,n)`

#### Description

`plackmom(loix,loiy,px,py,psi,tx,ty,m,n)` calcule les moments simples et croisés associés au modèle de Plackett jusqu'à l'ordre  $(m, n)$ . On réalise des intégrations numériques par la formule du trapèze. On peut choisir les lois marginales

loix = 1 : Gauss

loix = 2 : Weibull min

loix = 3 : Weibull max

loix = 4 : Gumbel

loix = vecteur de la forme  $[Fx(\cdot), fx(\cdot)]$  : loi empirique où  $Fx$  et  $fx$  sont respectivement la fonction de répartition et la densité de probabilité

**PLACKAJ** ajustement du paramètre de dépendance pour un modèle de Plackett, en fixant les paramètres initiaux

### Syntaxe

`[psi, err, px, py] = plackaj(X, psii, loix, loiy, px, py, xmn, xma, ymn, yma, poids)`

### Description

`plackaj(X, psii, loix, loiy, px, py, xmn, xma, ymn, yma, poids)` ajuste le paramètre de corrélation  $psi$  pour un modèle de Plackett en minimisant la distance aux moindres carrés entre les fonctions de répartition empirique et théorique sur  $[xmn, xma] \times [ymn, yma]$ . On peut introduire un poids afin de favoriser l'ajustement sur la queue de la loi (valeurs extrêmes).  $poids = 0 : P_0 = 1$

$$poids = 1 : P_1 = \frac{1}{F(1-F)}$$

$$poids = 2 : P_2 = \frac{1}{F}$$

On peut choisir les lois marginales

loix = 1 : Gauss

loix = 2 : Weibull min

loix = 3 : Weibull max

loix = 4 : Gumbel

loix = vecteur de la forme  $[Fx(\cdot), fx(\cdot)]$  : loi empirique où  $Fx$  et  $fx$  sont respectivement la fonction de répartition et la densité de probabilité

Les valeurs min et max (xmn,xma,ymn,yma) servent à restreindre l'ajustement de la loi à un compact ou un demi espace et non à supprimer des valeurs aberrantes.

Référence : Plackett R.L., *A class of bivariate distribution*, J. of the American Statistical Association 60 (1965)

**PLACKMV** ajustement du paramètre de dépendance pour un modèle de Plackett par maximum de vraisemblance

### Syntaxe

`p = plackmv(X, psii, loix, loiy, px, py)`

### Description

`plackmv(X, psii, loix, loiy, px, py)` ajuste le paramètre de corrélation  $psi$  pour un modèle de Plackett par un maximum de vraisemblance. On peut choisir les lois marginales

loix = 1 : Gauss

loix = 2 : Weibull min

loix = 3 : Weibull max

loix = 4 : Gumbel

loix = vecteur de la forme  $[Fx(\cdot), fx(\cdot)]$  : loi empirique où  $Fx$  et  $fx$  sont respectivement la fonction de répartition et la densité de probabilité

Rq : L'algorithm peut converger vers une valeur de  $psi$  proche de l'infini si la valeur initiale (psii) est mal choisie... a priori l'idéal est de donner une valeur initiale proche

et supérieure à la vraie valeur!

Référence : Plackett R.L., *A class of bivariate distribution*, J. of the American Statistical Association 60 (1965)

**PLACKAJM** ajustement du paramètre de dépendance sur le coefficient de corrélation empirique pour un modèle de Plackett

### Syntaxe

```
[psi,err,x0,ax,bx,y0,ay,by] = plackaj(x,y[,x0,ax,bx[,y0,ay,by  
[,psii[,xmn[,xma[,ymn[,yma)
```

### Description

`plackaj(x,y)` ajuste le paramètre de corrélation  $psi$  pour un modèle de Plackett en minimisant la distance en valeur absolue entre le coefficient de corrélation empirique et le coefficient de corrélation théorique. Les distributions marginales suivent des lois de Weibull min.

Les valeurs min et max (`xmn,xma,ymn,yma`) servent à restreindre l'ajustement de la loi à un compact ou un demi espace et non à supprimer des valeurs aberrantes.

Référence : Plackett R.L., *A class of bivariate distribution*, J. of the American Statistical Association 60 (1965)



## Loi de Rayleigh

**RAYLP** densité de probabilité de la loi de Rayleigh ( $x_0, a$ )

### Syntaxe

`p = raylp(x, x0, a[, 0])`

### Description

`raylp(x, x0, a)` calcule la densité de probabilité de la loi de Rayleigh de paramètres  $(x_0, a)$  pour les abscisses  $x$ . La loi de Rayleigh est une loi de Weibull min telle que le paramètre  $b$  soit égal à 2.

$$r = \frac{x - x_0}{a}$$
$$p = \frac{2}{a} r e^{-r^2}$$

L'argument *ifm* permet de sortir à l'écran la moyenne et l'écart-type théoriques de la loi.

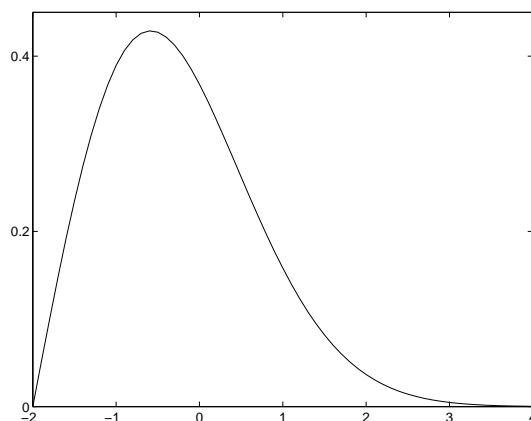


FIG. A.13 – Densité de probabilité de la loi de Rayleigh (-2,2)

**RAYLR** fonction de répartition de la loi de Rayleigh ( $x_0, a$ )

### Syntaxe

`F = raylr(x, x0, a[, ifm])`

### Description

`raylr(x, x0, a)` calcule la fonction de répartition de la loi de Rayleigh de paramètres  $(x_0, a)$  pour les abscisses  $x$ . La loi de Rayleigh est une loi de Weibull min

telle que le paramètre  $b$  soit égal à 2.

$$r = \frac{x - x_0}{a}$$
$$p = 1 - e^{-r.2}$$

L'argument *ifm* permet de sortir à l'écran la moyenne et l'écart-type théoriques de la loi.

**RAYLSIM** générateur de nombres aléatoires de la loi de Rayleigh( $x_0, a$ )

#### Syntaxe

`r = raylsim( x0 , a, m, n[, ifm )`

#### Description

`raylsim(x0 , a, b, m, n[, ifm)` génère une matrice de nombres aléatoires de taille  $m \times n$  distribuée suivant la loi de Rayleigh de paramètres  $(x_0, a)$ . Le paramètre  $a$  doit être positif. La loi de Rayleigh est une loi de Weibull min telle que le paramètre exposant soit égal à 2.

L'argument *ifm* permet de sortir à l'écran la moyenne et l'écart-type théoriques de la loi.

**RAYLAJ** ajustement d'une loi de Rayleigh, en fixant les paramètres initiaux

#### Syntaxe

`[x0 , a, err] = raylaj(x, x0i, ai, nfit, iwf, xmin , xmax, aff, fixx0)`

#### Description

`raylaj(x, x0i, ai, nfit, iwf, xmin , xmax, aff, fixx0)` identifie les paramètres  $(x_0, a)$  d'une loi de Rayleigh sur l'intervalle  $[x_{min}, x_{max}]$ . On peut choisir divers poids pour l'ajustement :

$$\begin{aligned} \text{iwf} = 0 : P_0 &= 1 \\ \text{iwf} = n : P_n &= 1/(1 - F)^n \text{ avec } n \in [0, 1] \\ \text{iwf} = 1 : P_1 &= 1/(1 - F) \\ \text{iwf} = 2 : P_2 &= F/(1 - F) \\ \text{iwf} = 3 : P_3 &= F/F(1 - F) \end{aligned}$$

$P_n$  induit un poids sur la partie supérieure de la distribution,  $P_1$  a le même effet que  $P_n$  mais plus prononcé,  $P_2$  a le même effet que  $P_1$  mais induit un poids nul sur la partie inférieure de la distribution au lieu d'un poids 1, enfin  $P_3$  donne du poids aux 2 queues de la distribution. Si  $x$  est une matrice, le traitement est effectué sur chaque colonne de  $x$ .

Les valeurs min et max (`xmin, xmax`) servent à supprimer des valeurs aberrantes.

**RAYLPAR** ajustement d'une loi de Rayleigh

## Syntaxe

`[x0 ,a,err] = raylpar(x, nfit, iwf, mn, mx, fixx0)`

## Description

`raylpar(x)` identifie les paramètres  $(x_0, a)$  d'une loi de Rayleigh. L'échantillon est tronqué en dehors de  $[mn, mx]$ . Cette fonction contient l'initialisation des paramètres. On peut choisir le type de minimisation

`nfit = 0` : moindres carrés sur les fonctions de répartition

`nfit = 1` : maximum de vraisemblance

`nfit = 2` : moments

Et si on choisit de travailler en minimisant un coût sur les fonctions de répartition, on peut introduire un poids

`iwf = 0` :  $P_0 = 1$

`iwf = n` :  $P_n = 1/(1 - F)^n$  avec  $n \in [0, 1]$

`iwf = 1` :  $P_1 = 1/(1 - F)$

`iwf = 2` :  $P_2 = F/(1 - F)$

`iwf = 3` :  $P_3 = F/F(1 - F)$

$P_n$  induit un poids sur la partie supérieure de la distribution,  $P_1$  a le même effet que  $P_n$  mais plus prononcé,  $P_2$  a le même effet que  $P_1$  mais induit un poids nul sur la partie inférieure de la distribution au lieu d'un poids 1, enfin  $P_3$  donne du poids aux 2 queues de la distribution. Si  $x$  est une matrice, le traitement est effectué sur chaque colonne de  $x$ .

Les valeurs min et max (`xmin,xmax`) servent à supprimer des valeurs aberrantes.

## Lois de Weibull

**WBMAXP** densité de probabilité de la loi de Weibull max ( $x_0, a, b$ )

### Syntaxe

$$p = \text{wbmaxp}(x, x_0, a, b)$$

### Description

$\text{wbmaxp}(x, x_0, a, b)$  calcule la densité de probabilité de la loi de Weibull max de paramètres  $(x_0, a, b)$  pour les abscisses  $x$ .

$$r = -\frac{x - x_0}{a} \text{ avec } x < x_0$$
$$p = \frac{b}{a} r^{(b-1)} e^{-r^b}$$

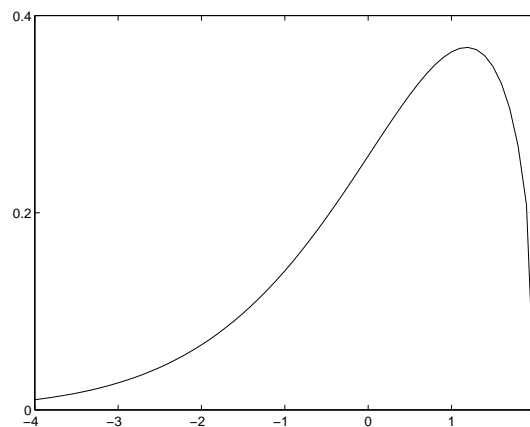


FIG. A.14 – Densité de probabilité de la loi de Weibull (2,2,1.4)

**WBMAXR** fonction de répartition de la loi de Weibull max ( $x_0, a, b$ )

### Syntaxe

$$F = \text{wbmaxr}(x, x_0, b, a)$$

### Description

$\text{wbmaxr}(x, x_0, a, b)$  calcule la fonction de répartition de la loi de Weibull max de paramètres  $(x_0, a, b)$  pour les abscisses  $x$ .

$$r = -\frac{x - x_0}{a} \text{ avec } x < x_0$$
$$p = e^{-r^b}$$

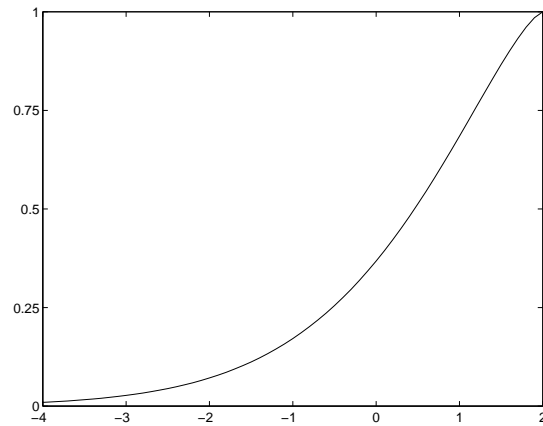


FIG. A.15 – Fonction de répartition de la loi de Weibull max (2,2,1.4)

**WBMAXSIM** générateur de nombres aléatoires de la loi de Weibull max( $x_0, a, b$ )

**Syntaxe**

$r = \text{wbmaxsim}(x_0, a, b, m, n)$

**Description**

$\text{wbmaxsim}(x_0, a, b, m, n)$  génère une matrice de nombres aléatoires de taille  $m \times n$  distribuée suivant la loi de Weibull max de paramètres  $(x_0, a, b)$ . Le paramètre  $b$  doit être positif.

**WBMAXMOM** premiers moments de la loi de Weibull max( $x_0, a, b$ )

**Syntaxe**

$[m1, m2, m3, m4, m5, m6] = \text{wbmaxmom}(x_0, a, b)$

**Description**

$\text{wbmaxmom}(x_0, a, b)$  calcule les 6 premiers moments de la loi de Weibull max de paramètres  $(x_0, a, b)$  par des formules de “récurrences” déduites du modèle.

**WBMAXPAR** ajustement d’une loi de Weibull max( $x_0, a, b$ )

**Syntaxe**

$[x_0, a, b, \text{err}] = \text{wbmaxpar}(x[, mn[, mx[, iwf])$

**Description**

$\text{wbmaxpar}(x)$  ajuste les paramètres  $(x_0, a, b)$  d’une loi de Weibull max pour un échantillon  $x$  en réduisant un coût aux moindres carrés entre les fonctions de répartition empirique et théorique sur l’intervalle  $[mn, mx]$ . On peut imposer un poids  $W(t)$  pour favoriser l’ajustement de la queue de la loi.

$$W(t) = \frac{1}{F(t)(1 - F(t))}$$

où  $F$  est la fonction de répartition empirique de  $x$ . Si  $x$  est une matrice, le traitement est effectué sur chaque colonne de  $x$ .

Les valeurs min et max (mn,mx) servent à restreindre l'ajustement de la loi à un compact ou un demi espace et non à supprimer des valeurs aberrantes.

**WEIBP** densité de probabilité de la loi de Weibull ( $x_0, a, b$ )

**Syntaxe**

`p = weibp(x, x0, a, b)`

**Description**

`weibp(x, x0, a, b)` calcule la densité de probabilité de la loi de Weibull de paramètres  $(x_0, a, b)$  pour les abscisses  $x$ .

$$r = \frac{x - x_0}{a} \text{ avec } x > x_0$$

$$p = \frac{b}{a} r^{b-1} e^{-r^b}$$

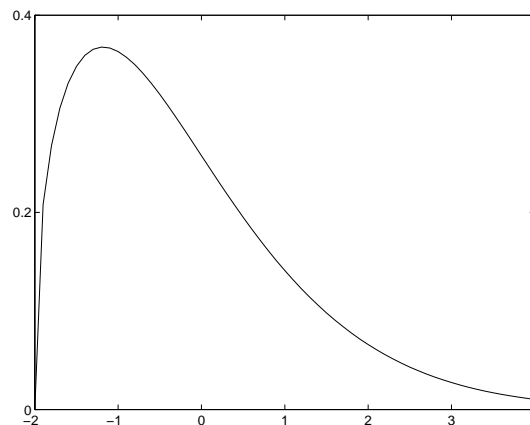


FIG. A.16 – Densité de probabilité de la loi de Weibull (-2,2,1.4)

**WEIBR** fonction de répartition de la loi de Weibull ( $x_0, a, b$ )

**Syntaxe**

`F = weibr(x, x0, b, a)`

**Description**

`weibr(x, x0, a, b)` calcule la fonction de répartition de la loi de Weibull de paramètres  $(x_0, a, b)$  pour les abscisses  $x$ .

$$r = \frac{x - x_0}{a} \text{ avec } x > x_0$$

$$p = 1 - e^{-r^b}$$

**WEIBQ** quantile de la loi de Weibull ( $x_0, a, b$ )

**Syntaxe**

`q = weibq(y, x0, a, b)`

**Description**

`weibq(y, x0, a, b)` calcule le quantile d'ordre  $y$  ( $0 < y \leq 1$ ) de la loi de Weibull de paramètres  $(x_0, a, b)$ .

$$q = a(-\log(1 - y))^{1/b} + x_0 \text{ avec } y > x_0$$

**WEIBSIM** générateur de nombres aléatoires de la loi de Weibull ( $x_0, a, b$ )

**Syntaxe**

`r = weibsim(x0, a, b, m, n)`

**Description**

`weibsim(x0, a, b, m, n)` génère une matrice de nombres aléatoires de taille  $m \times n$  distribuée suivant la loi de Weibull de paramètres  $(x_0, a, b)$ . Le paramètre  $b$  doit être positif.

**WEIBMOM** premiers moments de la loi de Weibull ( $x_0, a, b$ )

**Syntaxe**

`[m1, m2, m3, m4, m5, m6] = weibmom(x0, a, b)`

**Description**

`weibmom(x0, a, b)` calcule les 6 premiers moments de la loi de Weibull de paramètres  $(x_0, a, b)$  par des formules de "récurrences" déduites du modèle.

**WEIBPAR** ajustement d'une loi de Weibull ( $x_0, a, b$ )

**Syntaxe**

`[x0, a, b, err] = weibpar(x[, mn[, mx[, iwf)`

**Description**

`weibpar(x)` ajuste les paramètres  $(x_0, a, b)$  d'une loi de Weibull max pour un échantillon  $x$  sur l'intervalle  $[mn, mx]$ . On peut choisir le type d'ajustement :

`nfit = 0` : moindres carrés sur les fonctions de répartition (pondérés)

`nfit = 1` : maximum de vraisemblance

`nfit = 2` : moindres carrés sur les fonctions de répartition (non pondérés)

Dans le cas des MC pondérés, le poids qui favorise l'ajustement sur la queue de la loi, est défini par

$$W(t) = \frac{1}{F(t)(1 - F(t))}$$

où  $F$  est la fonction de répartition empirique de  $x$ . Les paramètres sont initialisés automatiquement à partir des 3 premiers moments empiriques. Le seuil  $x_0$  initial est éventuellement corrigé pour être inférieur à  $mn$ . Si  $x$  est une matrice, le traitement est effectué sur chaque colonne de  $x$ .

Les valeurs min et max ( $mn, mx$ ) servent à restreindre l'ajustement de la loi à un compact ou un demi espace et non à supprimer des valeurs aberrantes.

**WEIBMV** ajustement d'une loi de Weibull ( $x_0, a, b$ ) par maximum de vraisemblance

**Syntaxe**

`[x0 ,a,b,err] = weibmv(x,x0 i,ai,bi,[fixx0)`

**Description**

`weibmv(x,x0i,ai,bi)` ajuste les paramètres ( $x_0, a, b$ ) d'une loi de Weibull max pour un échantillon  $x$  par maximum de vraisemblance. Le seuil est fixé au paramètre `fixx0` et l'exposant  $b$  est obtenu en résolvant une équation de la forme  $F(b) = 0$  par l'algorithme de Newton-Raphson :

$$\begin{aligned} \text{répéter } n = n + 1 ; b[n + 1] &= b[n] - \frac{F(b[n])}{F'(b[n])} \\ \text{tant que } d_{rel} = \frac{abs(b[n + 1] - b[n])}{b[n]} &\geq d_{lim} (= 0.01) \end{aligned}$$

Si  $x$  est une matrice, le traitement est effectué sur chaque colonne de  $x$ .

**WEIBAJ** ajustement d'une loi de Weibull min ou max ( $x_0, a, b$ ), en fixant les paramètres initiaux

**Syntaxe**

`[x0 ,a,b,err] = weibaj(x,typ,x0i,ai,bi[,xmin[,xmax[,fixx0[,poids[,aff)`

**Description**

`weibaj(x,typ,x0i,ai,bi)` ajuste les paramètres ( $x_0, a, b$ ) d'une loi de Weibull min ou max (`typ = 'min' ou 'max'`) pour un échantillon  $x$  sur l'intervalle  $[x_{min}, x_{max}]$  en réduisant un coût aux moindres carrés entre les fonctions de répartition empirique et paramétrique. On peut imposer un poids  $W$  qui favorise l'ajustement sur la queue de la loi et qui est défini par

$$W(t) = \frac{1}{F(t)(1 - F(t))}$$

où  $F$  est la fonction de répartition empirique de  $x$ . Il faut donner des valeurs initiales des paramètres en entrée. Si  $x$  est une matrice, le traitement est effectué sur chaque colonne de  $x$ .

Les valeurs min et max (`xmin, xmax`) servent à restreindre l'ajustement de la loi à un compact ou un demi espace et non à supprimer des valeurs aberrantes.



**WEIBCI** ajustement + int. de confiance pour une loi de Weibull ( $x_0$ , a,b)

**Syntaxe**

[ci,y] = weibci(x[,xmn[,xma[,rep[,B[,C)

**Description**

weibci(x) ajuste les paramètres d'une loi de Weibull ( $x_0$ , a,b) et calcule un intervalle de confiance pour les estimateurs par un algorithme de bootstrap (méthode d'Efron). On peut choisir le type d'ajustement :

nfit = 0 : moindres carrés sur les fonctions de répartition (pondérés)

nfit = 1 : ajustement sur les moments

ATTENTION : l'algorithme ne donne pas toujours de bons résultats et il occupe une part importante de la mémoire...

Référence : P. Hall, *The Bootstrap and Edgeworth Expansion*, Springer-Verlag (1992)

## A.2.4 Nombre moyen de franchissements de niveaux

**DEPEMP** nombre moyen de franchissements de niveaux processus par un estimateur empirique

### Syntaxe

$E = \text{depemp}(u, x, \text{fech})$

### Description

$\text{depemp}(u, x, \text{fech})$  estime le nombre moyen de franchissements du niveau  $u$  par comptage (estimateur empirique).

**DEPGAUSS** nombre moyen de franchissements de niveaux pour un processus gaussien

### Syntaxe

$\text{ndep} = \text{depgauss}(u, x, dx, \text{fech})$

### Description

$\text{depgauss}(u, x, dx, \text{fech})$  estime le nombre moyen de franchissements du niveau  $u$  pour le processus discrétisé  $x$  de dérivée  $dx$  par la formule de Rice, qui s'écrit dans le cas des processus stationnaires gaussien

$$\text{ndep} = \frac{1}{2\pi} \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} e^{-u^2/2\sigma^2}$$

avec  $\sigma$  et  $\dot{\sigma}$  les écart-types empiriques de  $x$  et  $dx$ .

**DEPKER** estimation de l'esperance du nombre de dépassements d'un processus par un estimateur à noyau de la densité jointe

### Syntaxe

$[\text{ENu}, h1, \text{bia}, \text{va}, \text{MSE}] = \text{depker}(u, x, dx[, \text{biais}[, \text{variance}[, \text{mse}]])$

### Description

$\text{depker}(u, x, dx)$  approche par un estimateur à noyau polynomial l'esperance du nombre de dépassements d'un niveau  $u$  pour un processus. Pour obtenir la formule qui permet d'estimer le nombre moyen de franchissements, on remplace dans la formule de Rice la densité de probabilité jointe du processus et de sa dérivée par l'estimateur à noyau de cette densité de probabilité jointe de  $(x, dx)$ .

**NDEPMO** estimation du nombre moyen de franchissements de niveaux par une méthode de perturbation polynomiale du produit des densités marginales

### Syntaxe

$[E, c, \text{parx}, \text{pary}] = (\text{u}, \text{x}, \text{y}, \text{loix}, \text{loiy})$

**Description**

`ndepmo(u,x,y,loix,loiy)` estime le nombre moyen de franchissements de niveaux par une méthode de perturbation polynomiale du produit des lois marginales. Le polynôme est de degré inférieur ou égal à 3. Et ses coefficients sont identifiés à partir des moments empiriques simples et croisés. On peut choisir parmi différentes distributions marginales : Gauss, Weibull min et Weibull max.

**PLACKNDEP** estimation du nombre moyen de franchissements de niveaux par un modèle de Plackett

**Syntaxe**

`ENu = plackndep(u,loix,loiy,px,py,psi)`

**Description**

`plackndep(u,loix,loiy,px,py,psi)` approche de l'espérance du nombre de franchissements de  $u$  pour un processus discrétisé  $x$  en approchant la loi jointe du processus et de sa dérivée par un modèle de Plackett. On doit donner en entrée les paramètres du modèle. On peut choisir parmi différentes distributions marginales : Gauss, Weibull min, Weibull max et loi empirique.



## Annexe B

# Comparaison des fonctions de transfert du tangage

Nous comparons sur les graphes qui suivent [35] les fonctions de transfert expérimentales du premier ordre du tangage du navire aux fonctions de transfert calculées d'après le modèle linéaire de diffraction-radiation. Et ceci pour des vitesses d'avances du navire variant de 0 à 50 noeuds.



## Annexe C

# Evolution de la résistance au mal de mer

Nous présentons deux diagrammes qui évoquent la proportion de passagers atteints du mal du mer (MSI) en fonction de l'accélération verticale efficace (RMS acceleration) et la durée de l'exposition à cette accélération.