Art. N° 361
Contribution COB N° 509

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 283 (27 septembre 1976)

OCÉANOGRAPHIE. — *Relation statistique entre hauteur et période des vagues de tempête.* Note (*) de MM. **Michel Arhan**, **Alain Cavanie** et **Robert Ezraty**, présentée par M. Henri Lacombe.

Un modèle théorique de densité de probabilité composée des hauteurs et périodes des vagues est défini à partir des résultats de Cartwright et Longuet-Higgins, concernant les maximums d'une fonction aléatoire gaussienne d'ordre deux de spectre étroit. L'accord avec l'expérience est satisfaisant, même pour des spectres larges, dans le cas d'enregistrements de tempête en mer du Nord.

INTRODUCTION. — En océanographie, deux méthodes distinctes sont employées pour étudier un enregistrement, en fonction du temps, des déplacements de la surface de l'eau au point fixe, et ainsi caractériser un état de mer :

1° L'analyse vague par vague, qui donne le nom de vague à chaque segment de l'enregistrement compris entre deux passages par le niveau moyen en montant, et attribue à cette vague une période T (longueur du segment) et une hauteur H (distance verticale entre le plus petit minimum et le plus grand maximum du segment);

2° L'analyse spectrale basée sur le modèle théorique des fonctions aléatoires développée par Rice ([1]), pour traiter des problèmes de bruit de fond en électronique, et qui s'est avérée satisfaisante pour schématiser différentes caractéristiques des états de mer.

Le travail résumé dans cette Note fournit, en partant du modèle théorique, une expression mathématique de la densité de probabilité composée des hauteurs et des périodes des vagues d'un état de mer donné. Afin de vérifier ces résultats, la comparaison avec de nombreux enregistrements en mer a été effectuée.

DÉTERMINATION DE LA DENSITÉ DE PROBABILITÉ COMPOSÉE THÉORIQUE. — L'idée de représenter la cote de la surface libre de l'eau ξ_1, rapportée à sa position moyenne, par une somme d'un grand nombre de perturbations sinusoïdales d'amplitude, de pulsation et de phases aléatoires, a été présentée par Pierson dès 1952 ([2]); ceci est une application à l'océanographie des travaux de Rice portant sur le bruit de fond aléatoire en électronique ([1]). La nature gaussienne de ξ_1, déduite de cette représentation, a été depuis largement confirmée par l'expérience.

Soit donc ξ_1 une fonction aléatoire gaussienne d'ordre 2, ξ_2 et ξ_3 ses dérivées première et seconde par rapport au temps. La densité de probabilité composée $p_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ est gaussienne et dépend des moments m_0, m_2 et m_4 du spectre $\Phi(\omega)$ de ξ_1. De $p_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, Cartwright et Longuet-Higgins ([3]) ont déduit la densité de probabilité sur l'ensemble des maximums de ξ_1, $p_2(\xi_1, \xi_3)$.

Il existe pour un signal sinusoïdal d'amplitude ξ_1, une relation biunivoque entre sa période T_1 et sa dérivée seconde à la crête;

$$T_1 = 2\pi\sqrt{-\xi_1/\xi_3}.$$

Cette remarque nous a conduits à associer à chaque maximum positif de la cote de la surface libre la variable T_1 en remplacement de ξ_3 et à calculer la densité de probabilité $p_3(\xi_1, T_1)$. Les valeurs de T_1 seront d'autant plus proches de la période T définie par l'analyse vague

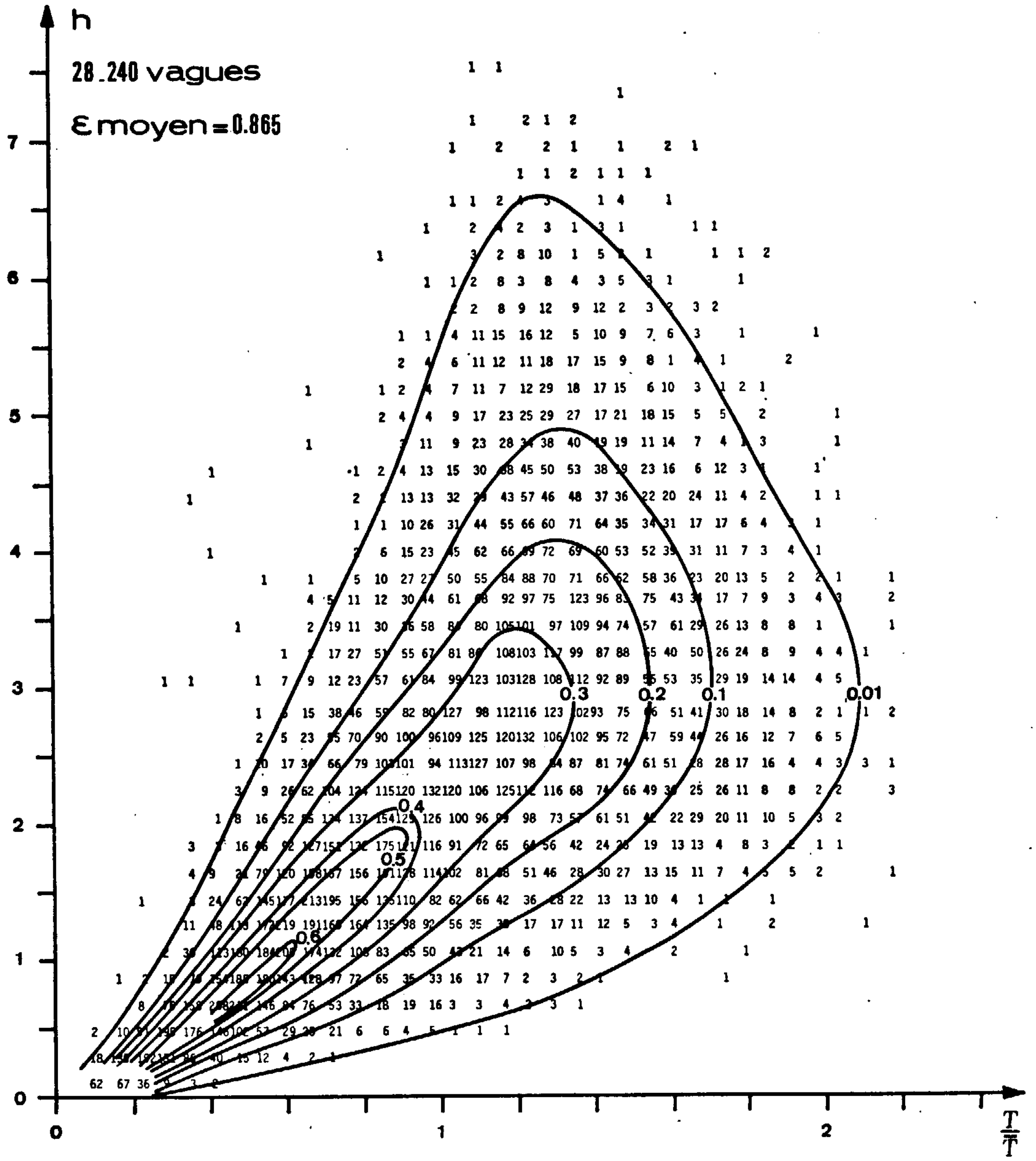

Fig. 1. — Densité de probabilité composée expérimentale.

par vague que le spectre du signal sera plus étroit. Pour faciliter la comparaison ultérieure avec des données *in situ*, il est commode d'utiliser les nouvelles variables sans dimension

$$h = 2\xi_1/\sqrt{m_0}, \qquad \tau = \alpha\,\mathrm{T}_1/(2\pi\bar{\tau}(\varepsilon)\sqrt{m_2/m_4}),$$

où ε est le paramètre de largeur du spectre défini par Cartwright et Longuet-Higgins [2] :

$$\varepsilon = [(m_0 m_4 - m_2^2)/m_0 m_4]^{1/2} \qquad \text{et} \qquad \alpha = [1+(1-\varepsilon^2)^{1/2}]/2.$$

La « hauteur » adimensionnelle h est le rapport de deux fois ξ_1 à l'écart type du signal $\sqrt{m_0}$. Le paramètre auquel est rapporté T_1 est le produit de $\bar{\tau}(\varepsilon)$ par le temps moyen entre deux maximums positifs; $\bar{\tau}(\varepsilon)$ donné par l'équation

$$\bar{\tau}(\varepsilon) = (2\pi\alpha^{-1}\sqrt{m_2/m_4})^{-1}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\mathrm{T}_1\,p_3(\xi_1,\mathrm{T}_1)\,d\xi_1\,d\mathrm{T}_1$$

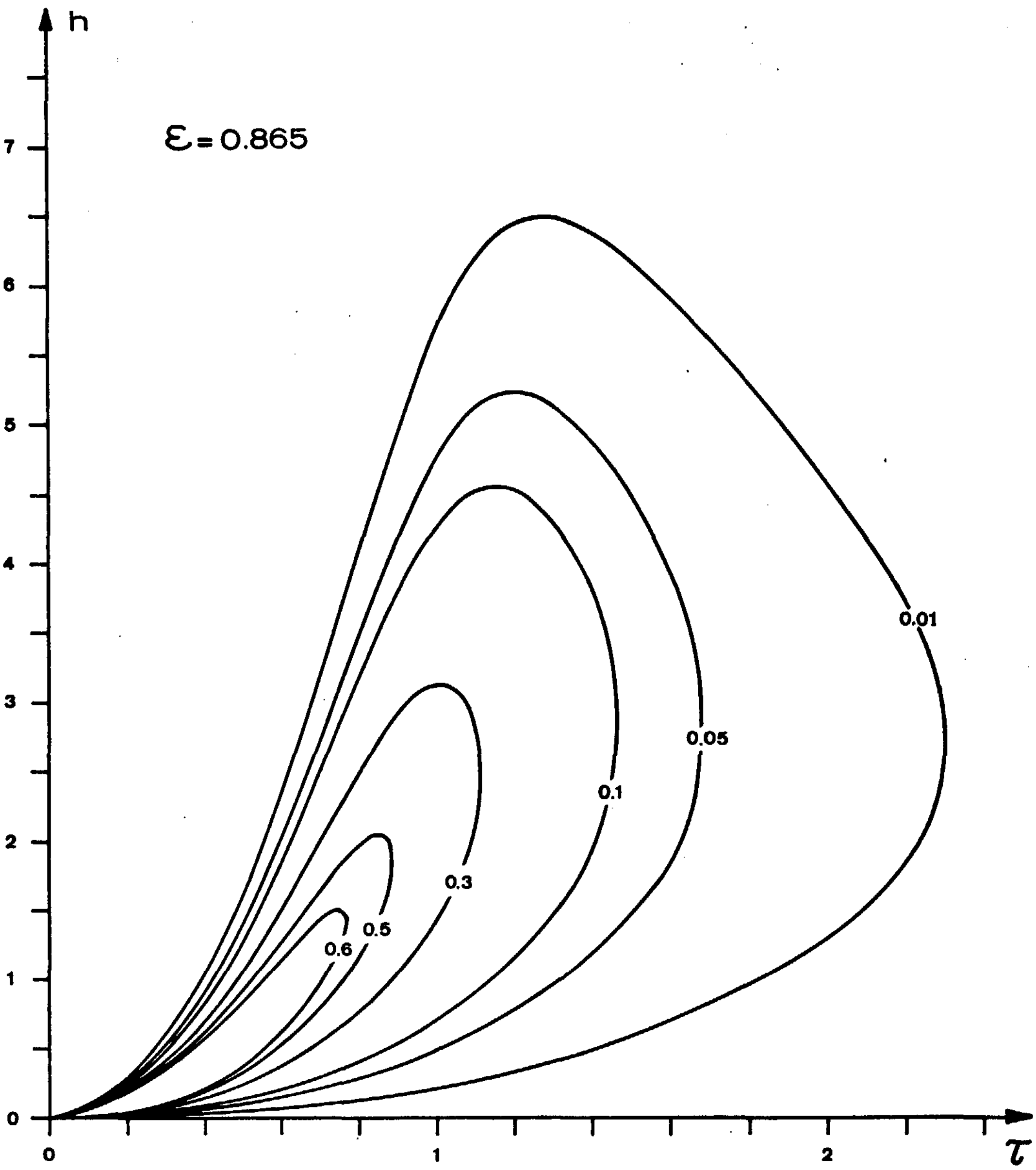

Fig. 2. — Densité de probabilité composée théorique.

assure à τ une valeur moyenne unité. Le tableau ci-dessous donne ses valeurs calculées numériquement :

ε	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,95
$\bar{\tau}$ (e).....	1,0	0,988 6	0,967 5	0,944 5	0,933 5	0,957 3	1,013 3

La densité de probabilité $p(h, \tau)$ théorique déduite de $p_3(\xi_1, T_1)$ s'exprime alors explicitement sous la forme :

$$p(h, \tau) = \alpha^3 h^2 (4\sqrt{2\pi}\varepsilon(1-\varepsilon^2)\bar{\tau}^4 \tau^5)^{-1} \exp\{-h^2(\bar{\tau}^4 \tau^4 8\varepsilon^2)^{-1}[(\bar{\tau}^2\tau^2-\alpha^2)^2+a^2\alpha^4]\},$$

où $a^2 = \varepsilon^2/(1-\varepsilon^2)$.

Détermination de la densité de probabilité expérimentale. — Une analyse vague par vague a été effectuée sur 182 enregistrements de tempête en mer du Nord, fournis par « Total-CFP » à l'Association de Recherche Action des Éléments qui suscita cette étude

et la soutint financièrement. Ces données appartiennent à l'United Kingdom Offshore Operators Association que nous remercions pour nous les avoir communiquées. Les hauteurs H et les périodes T des vagues sont rapportées aux valeurs de $\sqrt{m_0}$ et $\overline{T}$ (période moyenne observée) de l'enregistrement auquel elles appartiennent pour fournir les variables expérimentales sans dimension h' et τ'. Les valeurs de ε des enregistrements utilisés sont toutes très voisines de la valeur moyenne de 0,865 et ont un écart type de 0,031.

Analyse des résultats. — Sur les figures 1 et 2 sont reportées les courbes d'égale densité de probabilité théorique $p(h, \tau)$ et expérimentale $p(h', \tau')$ déterminée en utilisant 28 240 vagues. La répartition théorique, bien que basée sur une hypothèse justifiable *a priori* seulement pour des fonctions aléatoires de spectre étroit, s'avère quantitativement satisfaisante même pour des valeurs de ε proches de 0,9. Il est important de noter que les plus hautes vagues sont associées statistiquement à une bande de périodes relativement étroite, légèrement supérieure à la période moyenne $\overline{T}$ de l'ensemble des vagues.

Des essais complémentaires, effectués sur des signaux de spectres de plus en plus étroits ont montré, comme il faut s'y attendre, que la distribution théorique est d'autant plus satisfaisante que le paramètre de largeur est plus petit. Ainsi sont mis en évidence les liens intrinsèques entre l'analyse vague par vague traditionnelle et l'analyse spectrale plus récente et dont les applications ne cessent de s'étendre.

(*) Séance du 12 juillet 1976.

(1) S. O. Rice, *Mathematical Analysis of Random Noise*, in *Noise and Stochastic Processes*, ed. N. Wax, Dover Publications, p. 133-294.

(2) W. J. Pierson, Jr., *Advances in Geophysics*, II, New York, Academic Press, 1955, p. 93-178.

(3) D. E. Cartwright et M. S. Longuet-Higgins, *Proc. Roy. Soc.*, série A, 237, 1956, p. 212-232.

Département scientifique,
Centre océanologique de Bretagne,
B.P. n° 337,
29273 *Brest Cedex.*