

Co20-PAR-C

1014
=17414
=33658 4

UNIVERSITÉ de BRETAGNE OCCIDENTALE

U. E. R. DES SCIENCES DE LA MATIÈRE ET DE LA MER

N° d'ordre 103

THESE

PRESENTEES POUR OBTENIR LE TITRE DE

Docteur de 3^e Cycle

Spécialité : OCEANOGRAPHIE PHYSIQUE

PAR

DÉPARTEMENT ENVIRONNEMENT
LITTORAL ET GESTION DU MILIEU
MARIN

PARK, YOUNG HYANG

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA GENERATION ET DE LA PROPAGATION
DES MAREES INTERNES AU LARGE DE LA COTE D'IVOIRE

Soutenue le 11 Juin 1979 devant la commission d'examen

Monsieur J. LE FLOC'H

Professeur à l'U.B.O.

} Président

Messieurs J. BOURGOIN

Ingénieur Général de l'Armement
Directeur de l'EPSHOM

A. RENOUX

Professeur à l'U.B.O.

} Examineurs

A. CAVANIE

Département de physique du COB

F. MADELAIN

Département de physique du COB

UNIVERSITÉ de BRETAGNE OCCIDENTALE

U. E. R. DES SCIENCES DE LA MATIÈRE ET DE LA MER

N° d'ordre 103

Meilleur souvenir

Park

THESE

PRESENTEES POUR OBTENIR LE TITRE DE

Docteur de 3^e Cycle

Spécialité : OCEANOGRAPHIE PHYSIQUE

PAR

PARK, YOUNG HYANG

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA GENERATION ET DE LA PROPAGATION
DES MAREES INTERNES AU LARGE DE LA COTE D'IVOIRE

Soutenu le 11 Juin 1979 devant la commission d'examen

Monsieur J. LE FLOC'H

Professeur à l'U.B.O.

} Président

Messieurs J. BOURGOIN

Ingénieur Général de l'Armement
Directeur de l'EPSHOM

A. RENOUX

Professeur à l'U.B.O.

A. CAVANIE

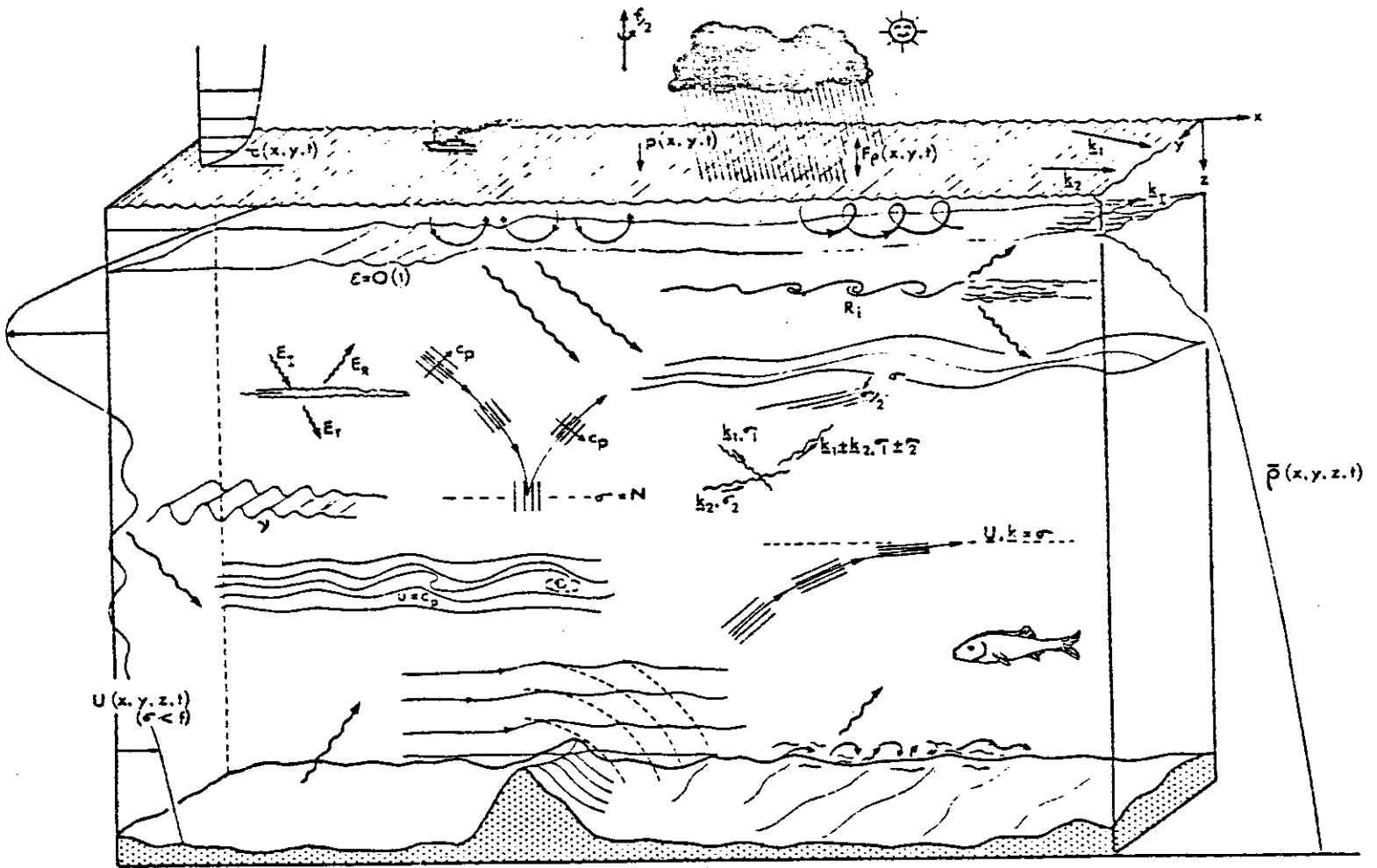
Département de physique du COB

F. MADELAIN

Département de physique du COB

} Examineurs

A mes parents,
A ma Jalila.



"Schématisation des différents procédés de génération, de propagation et de dissipation des ondes internes dans l'océan (d'après THORPE, 1975)."

REMERCIEMENTS

=====
=:::~::~=

Cette étude a été faite au Laboratoire d'Océanographie Physique de la Faculté des Sciences de Brest (LOP) ainsi qu'au département de Physique du Centre Océanographique de Bretagne (COB) de Brest avec l'étroite collaboration des chercheurs de l'Antenne de l'ORSTOM du COB.

Monsieur Jean LE FLOCH, Professeur et Directeur du Laboratoire d'Océanographie Physique, m'a accueilli dans son laboratoire où il m'a aidé et encouragé tout au long de ce travail. Je veux lui adresser mes plus chaleureux remerciements.

Je remercie Monsieur l'Ingénieur Général de l'Armement BOURGOIN Directeur de l'EPSCHOM, Monsieur le Professeur RENOUX et Messieurs CAVANIE et MADELAIN du Centre Océanologique de Bretagne de s'être intéressés à ce travail et d'avoir accepté de faire partie du Jury.

Monsieur Joël PICAUT, Maître Assistant à la Faculté des Sciences de Brest, est à l'origine de mon affectation à ce travail et m'a cordialement fourni toutes les données disponibles de l'année 1973 ainsi que plusieurs programmes de traitements et de nombreux résultats non-publiés de ses études physiques devant Abidjan. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude pour son soutien amical et ses continuels encouragements au cours de ce travail qui n'aurait pu être réalisé sans son aide.

Monsieur Alain CAVANIE, chercheur de l'Equipe de Physique du COB, m'a accueilli chaleureusement dans son équipe au début de mon stage dans le Centre et a toujours montré de l'intérêt pour le développement de mon travail. Il m'a fait profiter au maximum de ses idées et de ses profondes connaissances sur la dynamique des ondes internes. Je le remercie très sincèrement.

Mes remerciements vont aussi aux chercheurs de l'Antenne de l'ORSTOM du COB et plus particulièrement à Messieurs Alain MORLIERE et Jean-Marc VERSTRAETE qui m'ont permis d'utiliser l'ensemble des données de récents mouillages (1976 - 1977) et de nombreux résultats graphiques non-publiés.

Tous ceux qui ont collaboré à ce travail par nos échanges d'idées, et surtout Monsieur Alain COLIN DE VERDIERE chercheur de l'Equipe de Physique du COB, sachent que je les en remercie bien sincèrement.

Je ne saurais oublier le personnel de la Bibliothèque du COB qui m'a permis d'accéder facilement à une immense quantité de documents ainsi que les ingénieurs et les techniciens de la salle de l'ordinateur du BNDO du COB, dont l'aide m'a été précieuse pour le traitement des données et la mise au point des modèles envisagés.

Je ne saurais oublier non plus tous mes amis qui ont participé à la correction et à l'élaboration du texte français de ce mémoire et plus particulièrement : Mademoiselle Catherine MAILLARD et Mademoiselle Annick VANGRIESHEIM, chercheuses de l'Equipe de Physique du COB, Monsieur Michel LE BOULCH, mon meilleur ami à la Cité Universitaire de Brest et Mademoiselle Jalila M'RINI, ma meilleure amie pour la vie.

Je tiens aussi à associer à ces remerciements le personnel des services généraux du LOP et de l'Equipe de Physique du COB et surtout : Messieurs Pierre DOARE et Pierre MORIZUR (LOP) et Jean KERVELLA (COB) qui ont exécuté avec talent et habileté les nombreux graphiques et dessins. Mademoiselle Chantal MAZE (LOP) et Madame Annie GRAMOULLE (COB) qui ont assuré la dactylographie de façon remarquable.

Enfin, j'avouerais volontiers que ce travail souvent fastidieux n'aurait pas été mené à terme sans le soutien affectif de mes parents et de Jalila à qui cette Thèse est dédiée.

=====
=:::==:::==:::==

Ce travail a été réalisé à Brest, pendant mon stage de perfectionnement en Océanographie Physique dans le cadre de la coopération entre le CNEXO et le KORDI (Korea Ocean Research & Development Institute). Je suis très reconnaissant à l'ensemble du personnel de ces deux Centres et plus particulièrement à Messieurs MARAZANOF et HOUDART (CNEXO) et Beung-Don LEE (KORDI) pour leur assistance administrative et leurs encouragements tout au long de mon séjour.

Mai 1979.

.- SOMMAIRE GENERAL -.

INTRODUCTION	5
I. GÉNÉRALITÉS	8
II. PRÉSENTATION DES DONNÉES ET DES RÉSULTATS	21
II-1. DONNEES DE L'ANNEE 1973.	24
II-2. DONNEES DE L'ANNEE 1976-1977.	44
II-3. CONCLUSIONS	56
III. ASPECT DYNAMIQUE	58
III-1. EQUATIONS FONDAMENTALES ET DESCRIPTION GENERALE DES ONDES INTERNES.	61
III-2. SOLUTIONS ANALYTIQUES ET NUMERIQUES POUR DIFFERENTS MODES AVEC UN FOND HORIZONTAL	77
III-3. ESSAI DE SYNTHESE SUR DIFFERENTS MODELES DE LA GENERATION ET DE LA PROPAGATION DES MAREES INTERNES AVEC LE FOND VARIABLE.	109
IV. CONCLUSIONS GÉNÉRALES	162
BIBLIOGRAPHIE	165
ANNEXES	172

INTRODUCTION

Des variations de température, salinité et vitesse de courant de fréquence voisine de celle de la marée ont été observées presque partout dans l'océan. On constate qu'elles sont généralement beaucoup plus prononcées sur le plateau continental près de la côte qu'au large.

On soupçonne depuis de nombreuses années que ces phénomènes sont dus aux mouvements verticaux des particules fluides ou des ondes internes ayant la fréquence de la marée (marées internes). Depuis le début du siècle, de nombreux articles théoriques ou expérimentaux concernant les phénomènes des ondes internes dans l'océan ont été publiés. La majeure partie d'entre eux est basée sur la théorie fondamentale des ondes internes ayant elle-même pour origine les premiers travaux de FJELSTAD (1933). La résolution mathématique des équations des ondes internes en milieu stratifié n'a été réalisée jusqu'ici qu'avec des hypothèses très simplificatrices concernant la géométrie de l'océan et les différents paramètres intervenant dans des équations fondamentales.

Un modèle théorique que l'on rencontre le plus souvent dans la littérature traitant des ondes internes est celui d'un océan infini de fond horizontal ou le courant quasi-permanent est nul. D'après ce modèle les mouvements verticaux des particules fluides dus aux ondes internes s'annulent évidemment sur le fond et sont presque négligeables en surface ; les maxima d'intensité se trouvent quelque part entre le fond et la surface selon les "modes" considérés. Pour le premier mode qui est le plus énergétique il peut se situer dans la zone de la pycnocline où se trouve le maximum du gradient vertical de densité. Les mouvements verticaux des particules fluides déplacent les surfaces isopycnes de leurs positions initiales d'équilibre hydrostatique. Ce déplacement est donc identique pour les isothermes et les isohalines. La définition de l'onde interne est donc souvent confondue avec les variations de ces isovaleurs.

Cependant l'application de cette définition aux mesures dans la nature nécessite que les conditions se rapprochent des hypothèses sur lesquelles elle se base : l'océan infini de fond horizontal et les courants quasi-permanents nuls. Il n'y a guère d'océan qui satisfasse ces conditions

et les variations de profondeur des isothermes ou des isopycnes ne correspondent pas , en général, aux mouvements des ondes internes. On sait bien que les courants de gradient accompagnent l'inclinaison des isopycnes à cause de l'effet de la force de Coriolis. La direction de ces courants est perpendiculaire à la ligne de plus grande pente des surfaces isopycnes et l'intensité croit avec leur inclinaison. L'évolution en fonction du temps du courant de gradient étant relativement lente par rapport à celle de marée, elle peut être considérée nulle pour certains intervalles du temps (quelques semaines ou quelques mois par exemple). Avec ces courants seuls on ne peut pas avoir les variations de courtes périodes des paramètres hydrologiques. Cependant, les courants de marée peuvent faire déplacer horizontalement les surfaces isopycnes au cours de ses mouvements périodiques. Et en conséquence, l'effet de l'advection par le courant de marée dans une région où il existe un fort gradient horizontal de température dû au courant de gradient peut être identique à celui des marées internes sur les variations de profondeur des isothermes.

Un autre aspect de l'effet de l'advection par le courant de marée peut être trouvé en tenant compte de la variation de la profondeur. En effet, le fond étant imperméable le courant suit la surface du fond et le long de la pente il transporte des masses d'eaux. Une observation des températures sur le fond incliné montrera donc les variations de température à la fréquence de la marée. On constate aussi qu'elles seront plus importantes si l'intensité du courant de marée et la pente du fond augmentent. Il est prévisible que le secteur où la pente du fond est très raide, par exemple le talus continental, est très favorable à une grande variation de profondeur des isothermes près du fond.

En résumé, les variations importantes à la période de marée des températures ou des isothermes peuvent être considérés comme un amalgame de ces trois facteurs : les mouvements des marées internes, les déplacements horizontaux des isothermes et l'advection des différentes masses d'eaux suivant la pente du fond par le courant de marée. Il n'est pas toujours facile de différencier un facteur par rapport à l'autre. Cependant, l'existence des variations périodiques des courants baroclines, qui est un des caractères principaux des ondes internes, peut être utilisé comme un indicateur des ondes internes.

Dans cette étude, la prise en considération des idées précédentes sera l'une de nos préoccupations. Après avoir brièvement présenté les conditions physiques du Golfe ivoirien, nous étudierons d'abord les données hydrologiques et courantologiques recueillies, sur le plateau continental devant Abidjan, au cours des nombreuses campagnes effectuées par l'O.R.S.T.O.M. et le C.R.O. d'Abidjan en 1973 et entre 1976 et 1977. A partir des résultats graphiques de ces données et des différentes analyses nous essayerons de mettre au point les importances respectives de chaque facteur physique qui entre en jeu.

Nous rappellerons ensuite un certain nombre de travaux consacrés à la théorie générale des ondes internes. Nous montrerons comment on peut décomposer les mesures de courants en courants barotropes, baroclines, et quasi-permanents. Nous comparerons les courants baroclines ainsi obtenus avec ceux calculés d'après un modèle à fond horizontal.

Pour mieux comprendre les mesures faites devant Abidjan, et pour évaluer l'importance de la variation brutale du fond sur la g n se des marées internes et leur propagation nous examinerons deux modèles : le modèle du "plateau continental" et le modèle du "Trou-sans-Fond". Ces deux modèles sont une adaptation respectivement du modèle de PRINSENBURG (1971, 1974, 1975) et de celui de CAVANIE (1969). Ils seront appliqués aux mesures faites au large d'Abidjan et permettront d'interpréter les résultats de ces observations.

I - GENERALITES

SOMMAIRE

I-1. SITUATION GEOGRAPHIQUE	10
I-2. MORPHOLOGIE	10
1. Plateau continental	
2. Pente continentale	
3. Trou-sans-Fond	
I-3. CARACTERISTIQUES DE LA MAREE ET DES COURANTS DE MAREE	13
I-4. LES SAISONS MARINES ET LES CONDITIONS HYDROLOGIQUES	14
1. La petite saison froide	
2. La grande saison chaude	
3. La grande saison des pluies	
4. La grande saison froide	
5. La petite saison des pluies	
6. La petite saison chaude	
I-5. CIRCULATION GENERALE	18
1. Courant de Guinée	
2. Contre-courant subsuperficiel.	

I - GENERALITES

Les mesures d'hydrologie et de courantologie devant Abidjan montrent une grande variabilité suivant la saison, l'immersion et les positions des mesures. Et cette variabilité est liée étroitement aux changements saisonniers de conditions climatiques dans le Golfe de Guinée (MORLIERE et REBERT, 1972).

En plus des variations saisonnières, la complexité de la topographie du fond avec l'existence du grand canyon sous-marin "Trou-sans-fond", semble influencer considérablement le régime dynamique marin devant Abidjan.

Nous décrivons brièvement par la suite, la géographie, la morphologie et les conditions hydrologiques du plateau continental devant Abidjan afin de mieux comprendre les phénomènes des marées internes observés dans cette région.

I. 1 - SITUATION GEOGRAPHIQUE

Le plateau continental devant Abidjan se situe approximativement entre 5°N et 5°15'N. La côte forme une courbe symétrique au niveau de Trou-sans-fond qui se trouve vers 4°W. (Cf. Fig. 1).

L'importance de la situation géographique se manifeste dans le calcul dynamique des mouvements océaniques. En effet, la fréquence et la période d'inertie correspondantes à la latitude moyenne de 5°8' sont respectivement :

$$1.3 \times 10^{-5}/S \text{ et } 134 \text{ heures (environ 5.6 jours !).}$$

La faible valeur de fréquence d'inertie permettra, dans le cas pratique, de pouvoir négliger l'effet de la force de coriolis dans les mouvements considérés.

I. 2 - MORPHOLOGIE (d'après MARTIN, 1973)

1 - Plateau continental

Sur la majeure partie du plateau continental ivoirien, la rupture de pente entre plateau et pente continentale se situe entre 115 et 120 mètres. Par commodité, MARTIN a considéré l'isobathe de 120 mètres comme étant la limite

du plateau continental de la Côte d'Ivoire (voir Fig. 1).

A la hauteur de Port-Bouet, légèrement à l'Est d'Abidjan, celui-ci a une largeur d'environ 12 milles. Là, le plateau est traversé dans son entier par un très vaste canyon sous-marin, le Trou-sans-fond. Ensuite, le plateau continental conserve jusqu'à Grand-Lahou une largeur variant de 10 à 12 milles.

La pente moyenne du plateau continental devant Abidjan est entre 0,6 et 0,8 %. La figure 2 représente les profils verticaux du plateau continental devant Abidjan.

2 - Pente continentale

La pente supérieure de la pente continentale est très irrégulière et les profils transversaux recoupent de très nombreux ravins. Le profil vertical montre qu'il existe une rupture de pente vers 1400-1600 mètres dans la partie Est et vers 1200 mètres dans la partie Ouest.

La largeur de la pente continentale (entre isobathes 100 et 1500 m) varie de 9 à 23 kilomètres.

3 - Trou-sans-fond

Le Trou-sans-fond est situé en face d'un changement de direction de la côte, à peu près au milieu d'une large concavité dans la marge continentale africaine s'étendant du Cap des Palmes au Cap des Trois Pointes.

Le canyon débute au ras de la côte et entaille profondément le plateau continental. Celui-ci atteint sa dénivellation maximum (plus de 800 mètres) sur le rebord du plateau continental. Il se poursuit sur environ 120 milles pour se terminer dans la plaine abyssale de Guinée, à environ 5000 mètres de profondeur.

L'axe principal du canyon sur le plateau continental prend une direction NNE-SSO (voir figure 1). Dans sa partie supérieure, le canyon est assez étroit (environ 1 kilomètre de large) mais il s'élargit rapidement et au niveau du rebord du plateau continental, sa largeur est d'environ 12 kilomètres.

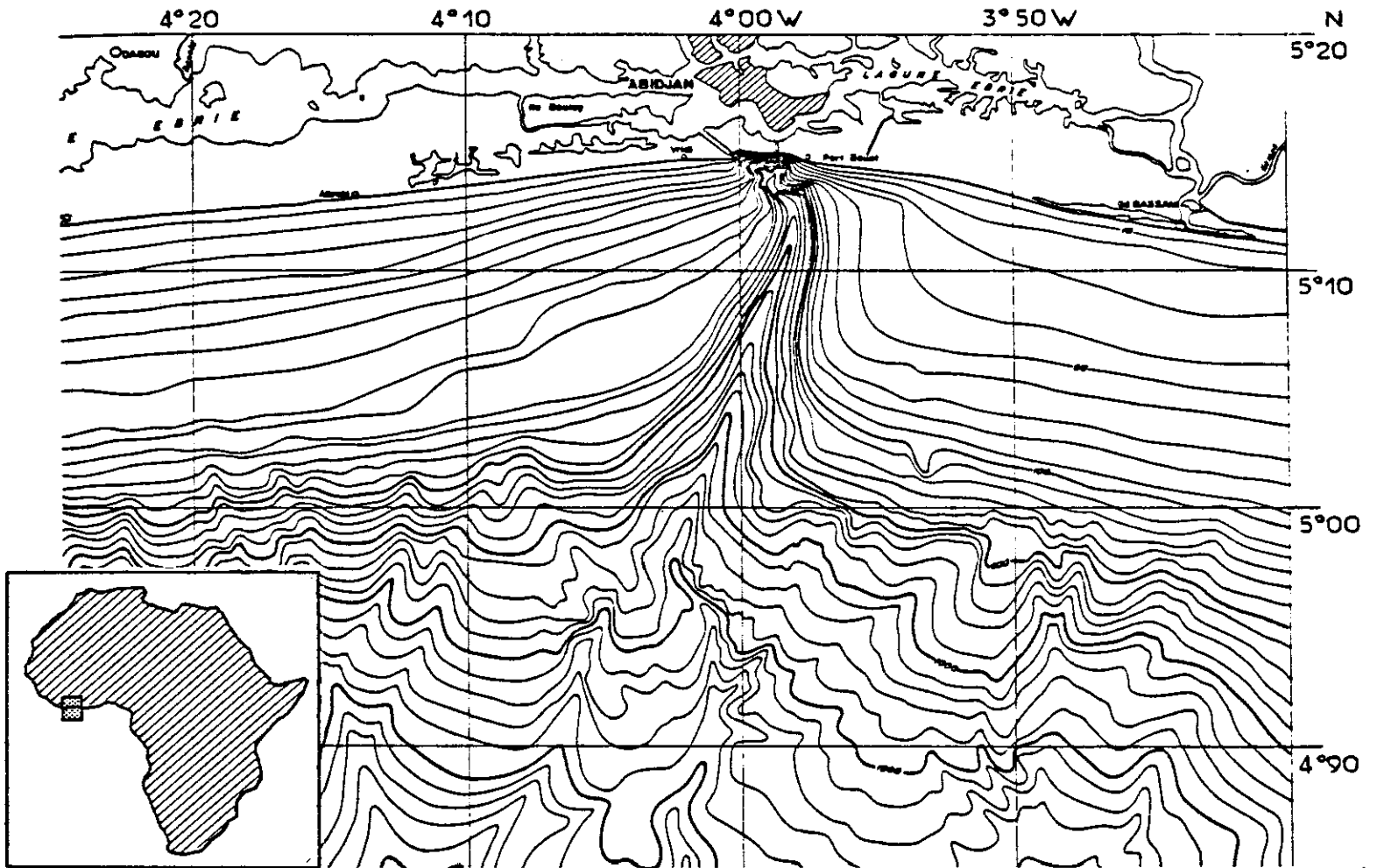


Fig. 1 : Topographie du fond devant Abidjan (d'après MARTIN, 1973).

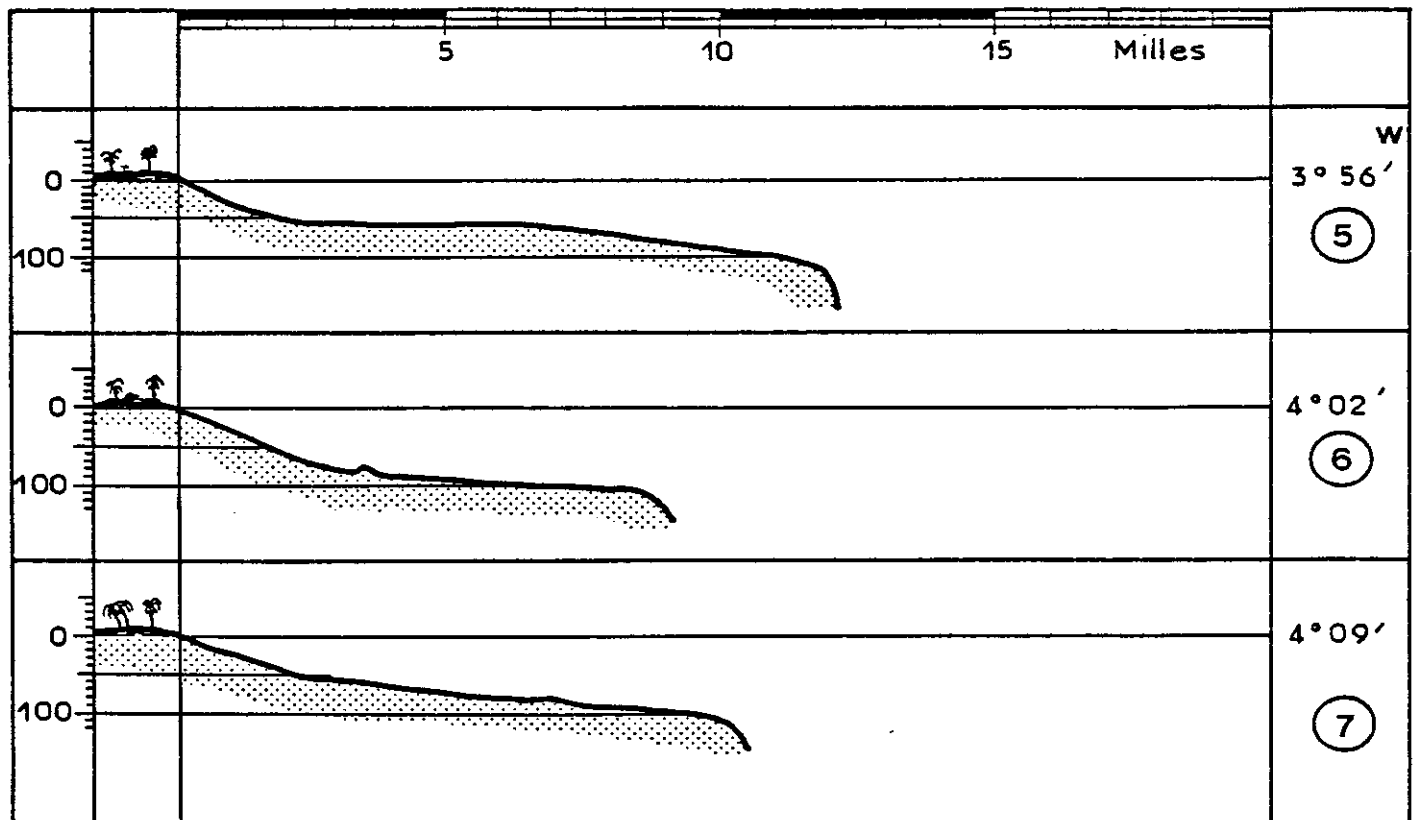


Fig. 2 : Profils verticaux du plateau continental devant Abidjan (d'après MARTIN, 1973).

Les flancs Est et Ouest sont assez symétriques : le flanc Est étant toutefois plus haut d'une quarantaine de mètres. Sur une douzaine de kilomètres, leur pente varie de 30 à 35 %. Au fur et à mesure que la vallée s'élargit, la déclivité des flancs décroît.

I. 3 - CARACTERISTIQUES DE LA MAREE ET DES COURANTS DE MAREE

PICAUT et VERSTRAETE (1977) donnent les résultats moyens d'analyse harmonique de la hauteur d'eau devant Abidjan de l'année 1971, 1974 et 1975.

Composante	K2	S2	M2	N2	K1	P1	O1	Mf	Msf	Mm
Amplitude (cm)	2.15	8.14	22.93	4.84	7.30	2.16	2.20	1.35	1.15	0.34

TABLEAU 1

D'après ces résultats, on peut déterminer le type de marée devant Abidjan. D'après DIETRICH (1963), le paramètre de forme F :

$$F = \frac{K1 + O1}{M2 + S2} \approx 0.31$$

indique ici une marée mixte avec prédominance de la marée semi-diurne. On observe donc deux pleines mers et deux basses mers par jour, mais les hauteurs présentent de fortes inégalités dues à la présence de l'onde diurne.

Le plus fort marnage enregistré est 1.5 mètres, le plus faible étant de 0.2 mètres. A la vive eau moyenne, le marnage est à 0.9 mètres (N'GBESSO, 1976).

Les courants de marée sont irréguliers et complexes (LEMASSON et REBERT, 1973/a) : ils varient en fonction de la profondeur et de la distance à la côte, mais dépendent également de la stratification des couches d'eau donc de l'hydrologie.

L'intensité des courants de marée augmente avec la dénivellation, mais ne semble pas proportionnelle à celle-ci.

Les variations de la composante zonale sont à peu près sinusoïdales et en phase avec les variations de la hauteur de la mer à Abidjan. Elle est maximum vers l'Ouest à marée haute et maximum vers l'Est à marée basse, ce qui correspond bien au sens de propagation de l'onde M2 dans le Golfe de Guinée.

I. 4 - LES SAISONS MARINES ET LES CONDITIONS HYDROLOGIQUES

Les saisons marines dans le Golfe de Guinée sont liées aux changements climatiques dans cette région. Et le profil climatique saisonnier lui-même est lié aux migrations du front intertropical dont le passage, le long des côtes d'Afrique de l'Ouest, provoque l'alternance de saisons sèches et humides.

Le littoral ivoirien, bien que situé par 5°N est soumis aux influences australes et en particulier aux alizés australs. Les vents alizés et les courants vont créer des mouvements horizontaux et verticaux qui vont faire alterner les différentes eaux.

- eau tropicale superficielle existant en permanence dont la température est élevée et la salinité variable ;
- eau subtropicale située au-dessous de la thermocline accompagnée par un maximum de salinité et une faible valeur de température ($T \approx 18^{\circ}\text{C}$; $S \approx 35,8 \text{ ‰}$) ;
- eau guinéenne existant en permanence, chaude et peu salée résultant des fortes précipitations et des apports fluviaux ($T > 24^{\circ}\text{C}$; $S < 35 \text{ ‰}$).

Les zones de formation de ces eaux sont la Baie de Biafra et les côtes du Libéria.

D'après les résultats des observations à la station côtière d'Abidjan, MORLIERE (1970, 1972) a pu distinguer les différentes saisons suivantes : une période d'eau froide et salée correspondant à l'hiver austral de juillet à début octobre et une période d'eau chaude et moins salée de novembre à mai (Cf. Fig.5).

En général, les répartitions verticales de température pour les deux saisons sont très contrastées (Voir Fig.3,4) ; pendant la saison froide, la thermocline remonte vers la surface (vers 10 m) et la variation de température au-dessous de la thermocline est relativement lente. Ceci peut être interprété par une homogénéisation des masses d'eau froide remontées vers la surface pen-

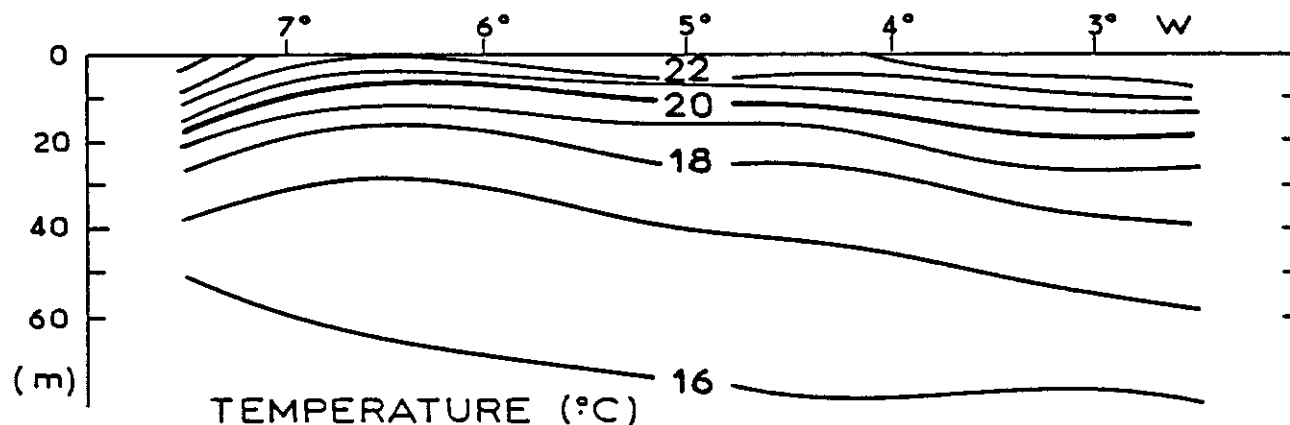


Fig. 3 : Situation moyenne de la saison froide (température) (d'après MORLIERE et REBERT, 1972).

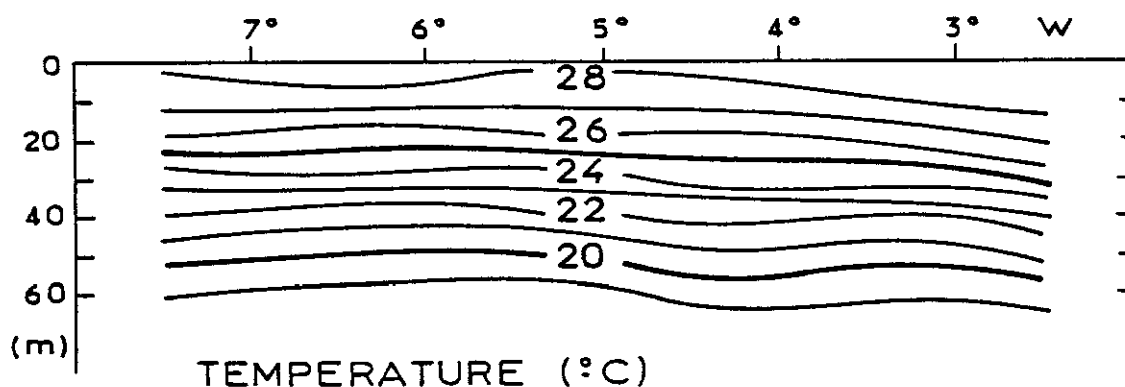


Fig. 4 : Situation moyenne de la grande saison chaude (janvier-mai) : température (d'après MORLIERE et REBERT, 1972).

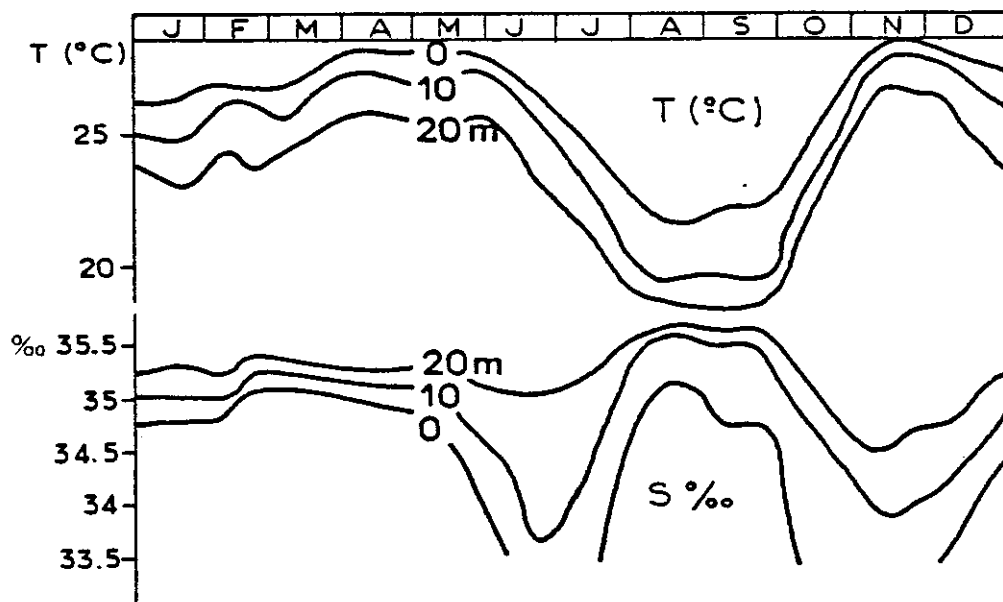


Fig. 5 : Valeurs moyennes de température et salinité par 15 jours de 1966 à 1971 à la station côtière d'Abidjan (d'après MORLIERE et REBERT, 1972).

dant la saison d'upwelling et d'un brassage dû au vent dans la couche superficielle.

Mais pendant la saison chaude, la thermocline est très bien marquée et la variation de température est presque linéaire de la surface jusqu'au fond. La température entre la surface et le fond est élevée (8°C environ).

Nous allons préciser les définitions des saisons marines et les mécanismes d'établissement des conditions météorologiques et hydrologiques. Les températures et les salinités moyennes pour les différentes saisons sont référées aux valeurs à 10 mètres.

1 - La petite saison froide (janvier)

En janvier, un faible upwelling se développe dans la région Ouest de la Côte d'Ivoire (Tabou-Sassandra), ce qui a pour effet de remplacer les eaux guinéennes par des eaux océaniques plus salées.

Le refroidissement est très bref (deux semaines) mais très caractéristique.

(T = 20 ~ 24°C ; S = 35 ~ 35,5 ‰)

2 - La grande saison chaude (février à mai)

A l'issue de la petite saison froide, le réchauffement est très rapide. C'est la grande saison chaude aux eaux océaniques chaudes et salées qui s'installent depuis février jusqu'au début de la grande saison des pluies. Des refroidissements liés à des phénomènes d'upwelling locaux peuvent modifier les conditions moyennes typiques.

(T = 25 ~ 30°C ; S = 35,5 ~ 34,7 ‰)

3 - La grande saison des pluies (mi-mai à mi-juillet)

Au printemps, par suite de l'extension vers le Nord des hautes pressions de l'Atlantique Sud, les alizés australs du SE franchissent l'équateur ; la force de Coriolis les fait dévier, et c'est avec une direction SW à WSW qu'ils atteignent la Côte d'Ivoire où ils créent un climat de mousson. Cette mousson provoque entre la mi-mai et la mi-juillet d'abondantes précipitations sur le

littoral ivoirien provoquant ainsi une désalure superficielle importante au voisinage de la côte.

(T = 25 ~ 26°C ; S ≈ 34 ‰)

4 - La grande saison froide (mi-juillet à septembre)

En juillet, la mousson remonte vers le Nord ; les pluies cessent et les vents se stabilisent. Ces vents réguliers provoquent des upwellings du fait de l'orientation favorable de la côte ; les vents sont parallèles à celle-ci entre le Cap des Palmes et Sassandra et c'est dans cette zone que l'upwelling atteindra son maximum d'intensité.

La thermocline remonte en surface pouvant quelque fois disparaître. Durant cette période, les eaux les plus froides (18°C, 35,5 ‰) se trouvent à l'Ouest. La température augmente vers l'Est vers le large, la salinité variant en sens inverse.

(T < 22°C ; S > 35 ‰)

5 - La petite saison de pluie (octobre)

Octobre voit le recul du front de mousson, ce qui provoque une deuxième période de pluie, moins importante que la première et l'arrêt des remontées d'eau. A l'issue de cette période, les eaux guinéennes se répandent au large de la Côte d'Ivoire qui se trouve alors baignée d'eaux chaudes et peu salées (28°C ; 34 ‰). Les pluies d'octobre, ainsi que la crue des fleuves, provoquent une dessalure superficielle supplémentaire.

(T = 24 ~ 26°C ; S ≈ 34,5 ‰)

6 - La petite saison chaude (novembre-décembre)

Durant cette saison, les eaux guinéennes accumulées du côté libérien du Cap des Palmes, s'écoulent vers l'Est le long de la côte. Ces eaux chaudes et peu salées se répandent le long du littoral ivoirien.

(T = 26 ~ 29°C ; S < 34,8 ‰)

I. 5 - CIRCULATION GENERALE

La circulation superficielle et profonde sur le plateau continental Ivoirien a été étudiée en détail par LEMASSON et REBERT (1968, 1973/a, 1973/b).

En général on trouve deux courants différents :

- en surface, le courant de Guinée qui existe pratiquement toute l'année et coule vers l'Est ;
- sous le courant de Guinée, s'écoule vers l'Ouest un contre-courant subsuperficiel.

1 - Courant de Guinée

Le courant de Guinée qui longe la côte africaine est une continuation du contre-courant équatorial et du courant des Canaries renforcé pendant les mois d'été par la mousson qui souffle du SW vers le continent africain (LEMASSON et REBERT, 1968).

La vitesse sur le plateau continental est toujours inférieure à celle observée au large. Elle ne dépasse pas en général 0.5 noeud (Cf. Fig. 6). Elle est maximum en fin de saison chaude, aux mois de mai et juin, où le courant atteint un noeud. Elle est faible en saison froide, s'annule et tend à s'inverser en octobre.

L'épaisseur moyenne intéressée est de 15 mètres et dépasse rarement 40 mètres au cours de l'année.

Le courant s'inverse parfois en surface. Ce phénomène se produit à deux époques de l'année qui coïncident en général avec une période de vents très faibles (janvier - mars ; octobre). LEMASSON et REBERT (1973/a) ont suggéré l'explication suivante ; succédant aux vents de mousson qui ont créé une accumulation d'eau entre Abidjan et le Cap des Trois Pointes, pendant la période des calmes, se développe un courant de pente dirigé vers l'Ouest, courant donc essentiellement transitoire.

2 - Contre-courant subsuperficiel

Sous le courant de Guinée, existe en général un contre-courant dirigé vers l'Ouest dont l'épaisseur peut parfois être très grande. La profondeur du maximum courant ne dépasse pas 60 mètres et est en moyenne d'environ 40 mètres (Voir Fig. 6).

Sa vitesse maximale est en moyenne de 20 ~ 25 cm/s. Il entraîne une branche du maximum de salinité subtropical et LE FLOCH (1970_a) a déterminé le mouvement général des eaux à salinité maximale au large de la Côte d'Ivoire en le reliant à la terminaison du contre-courant subsuperficiel équatorial.

D'après LEMASSON et REBERT (1973/b), l'hypothèse la plus probable en ce qui concerne son mécanisme est que le sous-courant est un courant de compensation dû aux upwellings ; son origine doit se trouver à l'Est, au fond du Golfe de Benin où doit se produire une accumulation d'eau sous l'effet des vents de SW.

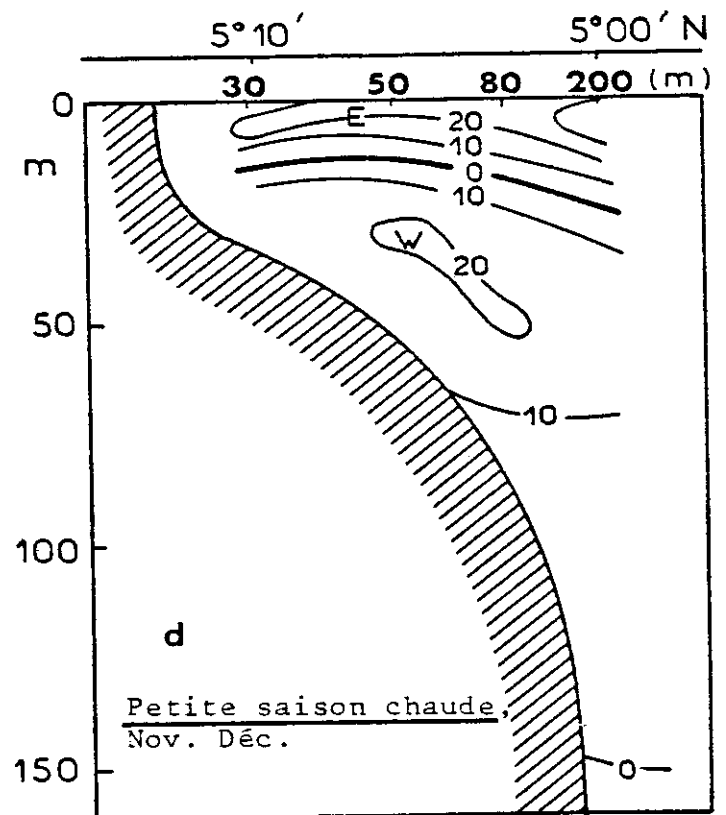
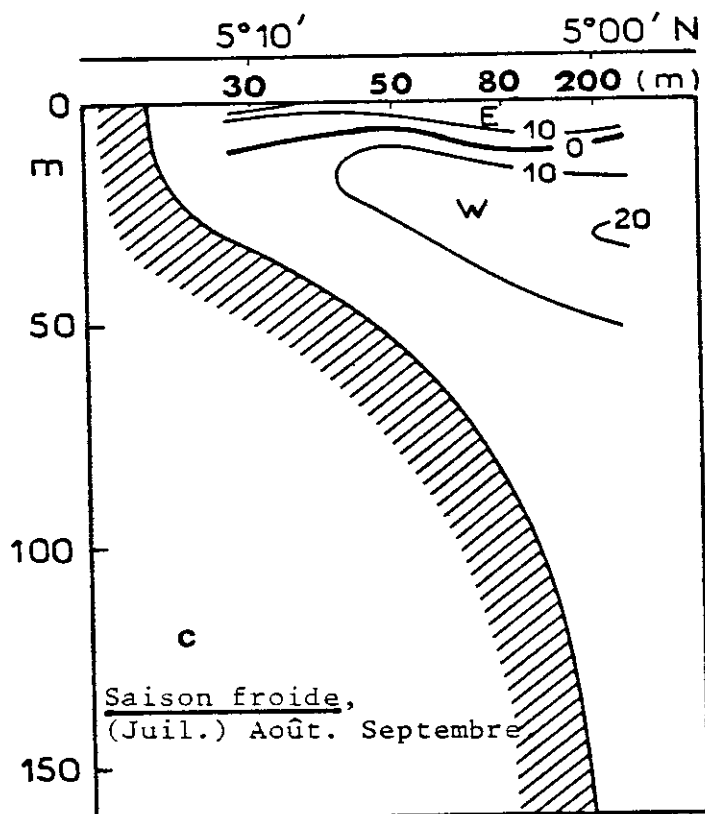
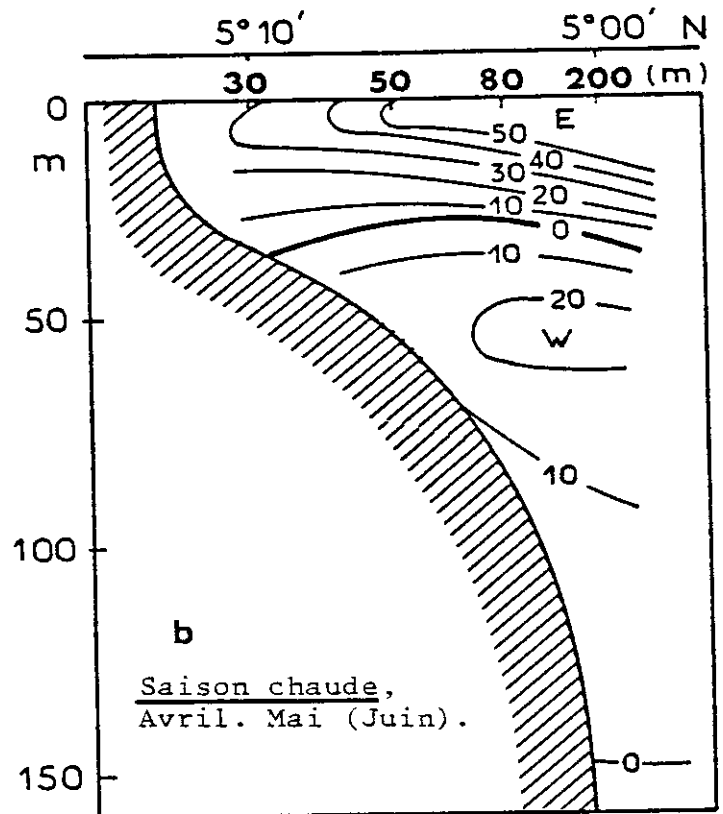
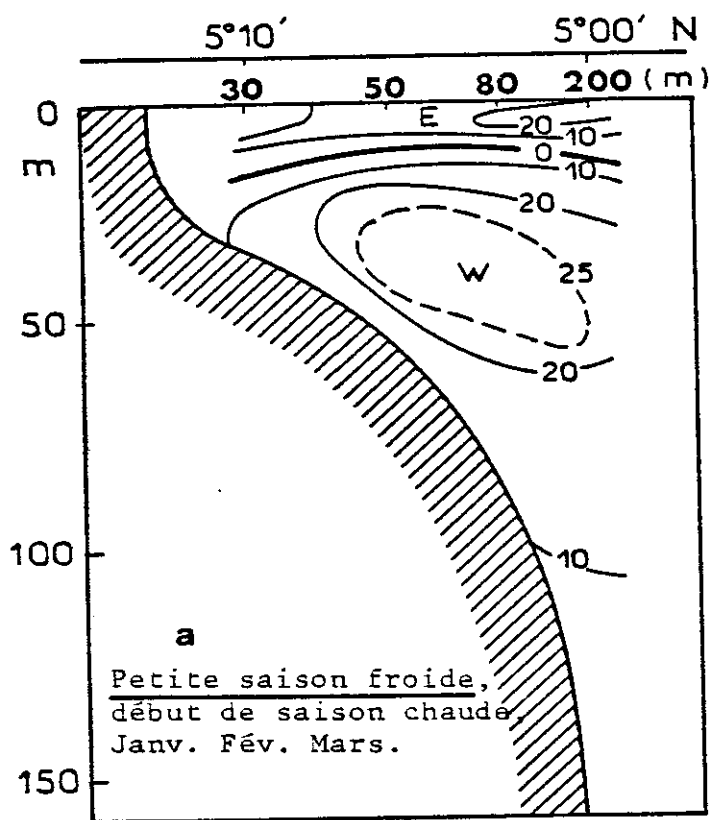


Fig. 6 : Composante zonale moyenne sur Bassam (1968-1970) par saison marine (d'après LEMASSON et REBERT, 1973b).

II - PRESENTATION DES DONNEES ET DES RESULTATS

SOMMAIRE

II-1. DONNEES DE L'ANNEE 1973	24
1. Description générale des données	24
2. Les données obtenues à l'aide du profileur de courant	26
2.1. Le profileur de courant	
2.2. Traitement préliminaire des données brutes	
2.3. Traitement des données par le programme GPCP	
3. Résultats	29
3.1. Vue générale	
3.2. Variation saisonnière	
3.3. Variation en fonction de la position géographique	
II-2. DONNEES DE L'ANNEE 1976-1977	44
1. Description générale des données	44
2. Quelques résultats graphiques	46
3. Analyse des données	46
3.1. Analyse spectrale	
A - <i>Densité spectrale d'énergie</i>	
B - <i>Spectre croisé (déphasage et cohérence)</i>	
3.2. Analyse harmonique	
A - <i>Traitement préliminaire des données</i>	
B - <i>Résultats et commentaires</i>	
II-3. CONCLUSIONS	56

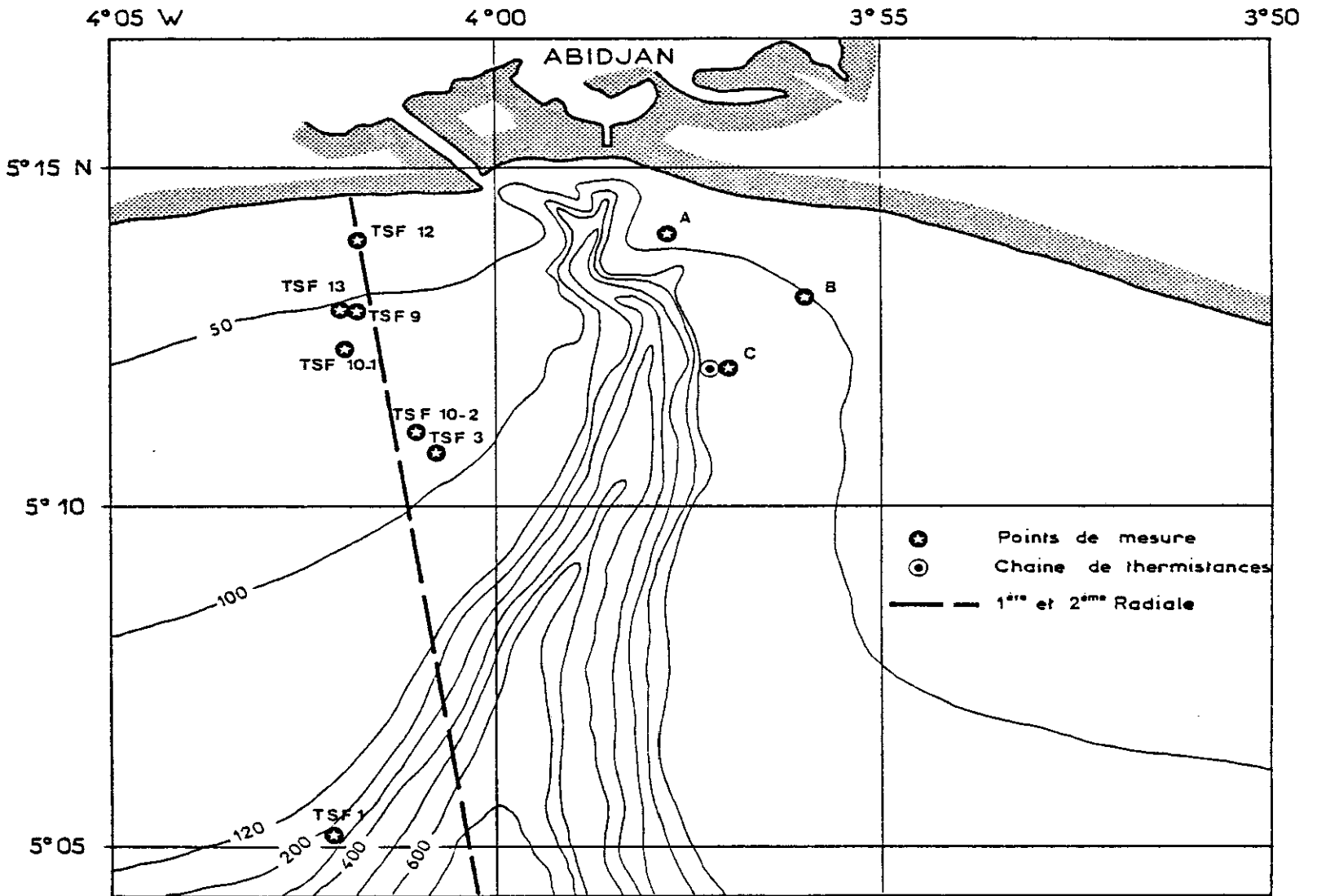


Fig. 7 : Positions des points de mesures et des radiales.

II - PRÉSENTATION DES DONNÉES ET DES RÉSULTATS

A partir de nombreuses campagnes de mesures hydrologiques et courantologiques à bord du N.O. "Reine Pokou" en 1973, J. PICAUT a mis en évidence les mouvements internes liés à la marée sur le plateau continental devant Abidjan.

Le présent travail est le prolongement de l'étude entreprise par J. PICAUT qui nous a cordialement fourni toutes les données de l'année 1973, les programmes de traitement et ses premiers résultats.

Parallèlement à ces données anciennes de 1973, on dispose de mesures hydrologiques et courantologiques de longue durée plus récentes (de juin 1976 à juin 1977) effectuées par l'O.R.S.T.O.M. en trois points fixes devant le Port-Bouet à Abidjan (points A, B, C de la figure 7).

La figure 7 représente la répartition géographique des différents points de mesure.

II.1. DONNEES DE L'ANNEE 1973 :

1. Description générale des données :

Durant toute l'année 1973, J. PICAUT et des chercheurs et techniciens du Centre de Recherches Océanographiques d'Abidjan (C.R.O.), en particulier MM. BINET, GALLARDO, TANTER et BANHORO ont étudié les conditions physiques aux abords du "Trou-sans-Fond" par une série de courtes missions à partir de la "Reine Pokou".

Le dépouillement de l'ensemble de ces données hydrologiques et courantologiques a été effectué à Abidjan par MM. PICAUT, TANTER et BANHORO.

Dans le tableau ci-après, nous en présentons la répartition dans le temps :

Station	Date	Profondeur (m)	Type de mesures	Durée	Saison marine
TSF 1	08.03.1973	210	Profils de T° c (bathy- thermographe)	15 h	chaude
TSF 3	27/28.03.1973	94		17 h	chaude
TSF 9	15/22.08.1973	52		9 jours	froide
TSF 12	15/16.11.1973	26		24 h	froide
TSF 10-1	13/14.09.1973	52	Profils de T° c et de courants	24 h	froide
TSF 10-2	14/15.09.1973	85		16 h	froide
TSF 13	27.11-01.12.1973	55	(Profileur de courant)	4 jours	chaude

TABLEAU 2

Les mesures aux stations TSF 1, TSF 3 et TSF 12 ayant été faites par bathy-thermographie durant les durées relativement courtes ne méritent pas une analyse rigoureuse. Cependant, elles montrent des variations remarquables de l'immersion des isothermes en différents endroits sur le plateau continental. Nous présentons plus loin les résultats graphiques obtenus par J. PICAUT ainsi que les commentaires qui s'y rapportent.

Pour les stations TSF 9 et TSF 13, qui ont les plus longues durées de mesure, on dispose de données complémentaires de salinités. Ceci nous permettra plus tard de pouvoir calculer et comparer les modes propres des ondes internes durant deux saisons différentes.

Pour les stations TSF 10-1, TSF 10-2 et TSF 13, les mesures continues d'hydrologie et de courantologie depuis la surface jusqu'au voisinage du fond ont été possibles grâce au "Profileur de courant" que l'on décrira plus loin.

La station TSF 13 présente un plus grand intérêt par sa durée d'enregistrement relativement longue et sa méthode de mesure continue des températures et des courants.

En tenant compte de l'importance des données de la station TSF 13 pour notre calcul ultérieur des différents modes des ondes internes et leurs contributions aux courants baroclines, il est apparu utile de détailler le fonctionnement du profileur de courant et les traitements des données brutes ainsi obtenues.

2. Les données obtenues à l'aide du profileur de courant :

2.1. Le profileur de courant (cf. DUING, 1971)

Différents efforts ont été fournis dans le passé pour observer le profil vertical des courants horizontaux. L'Université de Miami (DUING-JOHNSON) a mis au point un profileur de courant assez fiable et peu onéreux. Cet appareil a été prêté aimablement par W. DUING au C.R.O. d'Abidjan de septembre à décembre 1973 pour des mesures au large et à la côte. Ce profileur (fig. 8) est constitué d'un courantomètre autonome de type Aanderaa fixé à un bâti cylindrique servant de flotteur et de dérives. L'ensemble coule lentement le long d'un câble issu d'un navire au point fixe ou en dérives. Des lests réglables permettent de faire varier la vitesse de descente tout en maintenant le bâti horizontal.

Cette méthode présente les avantages suivants :

- un seul instrument suffit à obtenir des profils verticaux précis ;
- la largeur de 2 mètres du bâti permet une meilleure stabilisation ;
- l'absence de liaison fixe libère l'instrument des mouvements du câble.

Toutefois, on peut lui reprocher certains inconvénients :

- en particulier, l'écart possible du système par rapport à sa position d'équilibre horizontale ;
- les effets de la descente verticale sur le rotor de Savonius.

Malgré ces quelques inconvénients, les essais ont permis d'obtenir une précision convenable de l'ordre de 5 % sur l'ensemble des mesures. La simplicité d'utilisation de cet appareil en fait un modèle très adapté aux mesures à partir d'un navire. Avec une vitesse de descente de 10 cm/s et une période d'échantillonnage de 26 s, on obtient un profil très précis du courant horizontal, ce qui est indispensable pour une étude rigoureuse des mouvements internes des océans.

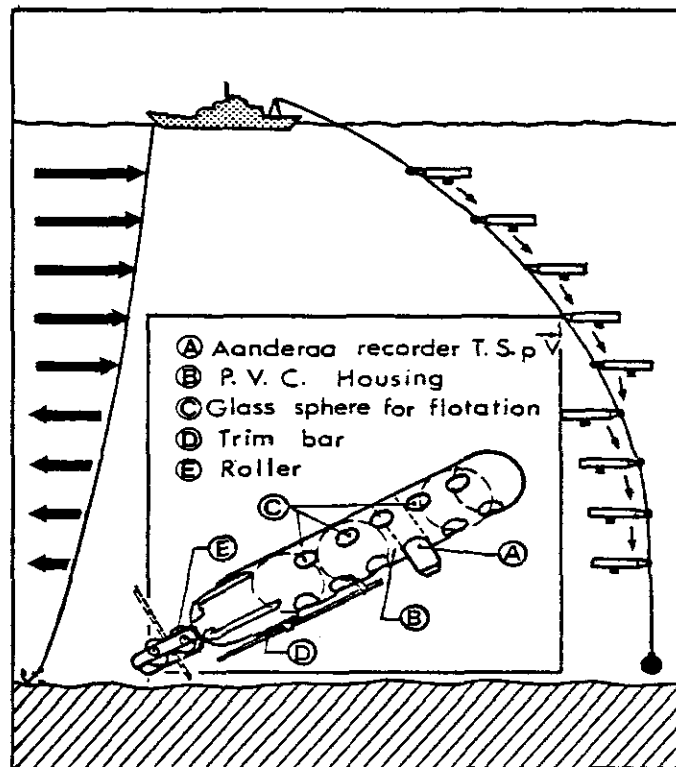


Fig. 8 : Profileur de courant (d'après DÜING, 1971).

2.2. Traitement préliminaire des données brutes (programme mis au point par J. PICAUT)

Le profileur de courant est sollicité par le mouvement horizontal et vertical du bateau lorsqu'il est bloqué en surface avant la descente et également lorsqu'il est rendu solidaire du câble à l'immersion maximale. Afin d'éviter de perdre les mesures correspondantes, un recalage de ces mesures a été effectué par comparaison avec des mesures faites à l'aide d'une drogue.

Le courantomètre Aanderaa enregistre successivement au cours de sa descente la température, la pression, la direction du courant et le nombre de tours d'un rotor de Savonius sur 2,5 mètres environ. Il est nécessaire de corriger le décalage de température, des vecteurs de courant et de la profondeur par rapport à une immersion donnée. Après un léger filtrage et élimination des valeurs aberrantes, les données sont interpolées tous les 2,5 mètres.

2.3. Traitement des données par le programme GPCP :

Les données obtenues nécessitent encore un traitement supplémentaire pour une utilisation ultérieure. A part le décalage des différentes mesures par rapport à une immersion donnée, il subsiste tout le temps, dans les enregistrements du profileur, deux défauts principaux :

Primo, on ne peut pas avoir un profil vertical instantané puisque le profileur descend, avec une vitesse plus ou moins constante, de la surface jusqu'à l'immersion maximale. Par exemple, avec une vitesse de descente de 10 cm/s et pour une immersion maximale de 60 mètres, il y aura 10 minutes de décalage entre le temps d'enregistrements en surface et à l'immersion maximale.

Secondo, après chaque arrivée du profileur à l'immersion maximale, on le remonte en surface avant la prochaine descente. Le temps nécessaire pour cette manoeuvre pouvant bien entendu être variable d'un profil à l'autre, on ne peut donc avoir des échantillonnages bien réguliers en temps pour une immersion donnée.

Heureusement, ce problème peut être résolu complètement grâce au programme GPCP (General Purpose Contouring Program) développé par Calcomp (California Computer Program, Inc) (cf GPCP). Le but principal de ce programme est de tracer des fonctions de deux variables sous forme de carte de contour.

L'intérêt de ce programme vient du fait que la fonction peut être spécifiée en donnant les valeurs aux noeuds d'un maillage rectangulaire (données quadrillées), ou bien en donnant des valeurs en des points arbitraires (données irrégulières). Dans ce dernier cas, les données peuvent être quadrillées en faisant l'estimation des valeurs de la fonction aux noeuds de maillage ; puis les contours sont tracés à partir de ces valeurs calculées. On peut sortir aussi, pour une utilisation ultérieure, les valeurs ainsi déterminées de la fonction aux noeuds de maillage soit sur cartes, soit sur un support magnétique.

Les mesures des stations TSF 10-1, TSF 10-2 et TSF 13 ont été traitées de cette manière.

3. Résultats :

3.1. Vue générale :

L'ensemble des résultats obtenus sont montrés dans les figures 9 à 15. L'allure générale des isothermes montre une oscillation semi-diurne bien marquée d'amplitude 10 à 30 mètres pour toutes les stations de mesure. Après filtrage de la marée, deux oscillations demeurent probablement quart-diurne et sixième diurne (cf. fig. 22). Il se superpose aussi des fluctuations de haute fréquence et d'amplitude relativement faible.

Dans le Golfe de Guinée, en mai-juin 1968, J. LE FLOCH et ETIENNE (1970) ont mis en évidence des ondes internes de courte période (3,3 minutes) correspondant à celle de Väisälä au niveau de la thermocline.

On notera que le pas de temps des mesures (25 minutes environ pour le cas de TSF 10-1, TSF 10-2 et TSF 13) et le filtrage préliminaire ne nous permettent pas de représenter les oscillations de période inférieure à une heure. D'autre part, dans cette étude, nous ne sommes intéressés que par les mouvements liés à la marée.

L'analyse d'une longue série de mesures de température et de courant nous permettra de déterminer avec certitude les périodicités exactes des phénomènes observés. Il ne saurait être question, avec ces données insuffisantes de définir les phénomènes dans leurs détails, mais il nous semble pratiquement certain qu'ils varient en fonction de la saison marine et de la position géographique.

3.2. Variation saisonnière :

La forme générale des variations semi-diurnes de l'immersion des isothermes durant la saison chaude montre une dissymétrie bien marquée : relèvement abrupt et redescente relativement lente. Mais cette dissymétrie devient moins évidente pendant la saison froide où les excursions des isothermes et les variations de courants sont moins importantes.

L'évolution des paramètres hydrologiques et courantologiques durant les deux saisons montre un très grand contraste. Pour effectuer la comparaison des différents paramètres entre la saison chaude et la saison froide nous prendrons TSF 9 et TSF 13 comme stations de référence.

- Pendant la saison froide :

Les valeurs moyennes, sur une période de mesure, de température, salinité et Sigma-T varient rapidement dans la couche superficielle ; au-dessous, les variations deviennent relativement lentes (voir fig. 19). Ceci semble être caractéristique d'une variation hydrologique de la saison froide. On voit une variation identique de la température dans les figures 16 et 17.

Durant cette saison, l'eau est relativement froide (25° C en surface à 16° C au fond) et salée (35.45 à $35.75^{\circ}/\text{‰}$) avec une veine de maximum de salinité au niveau de 25 mètres environ (voir fig. 19). En général, les courants moyens longitudinaux (E-W) sont prédominants et beaucoup plus réguliers que les courants méridiens (N-S). Pour la station TSF 10-2, les courants longitudinaux portent à l'Est avec un maximum de vitesse entre 5 et 10 cm/s, sauf dans la couche intermédiaire où il y a une veine de courant vers l'Ouest avec une vitesse maximum de 15 cm/s (cf. fig. 16). Ce courant d'Ouest n'est pas très net à la station TSF 10-1 (cf. fig. 17).

D'après les figures 12 et 13 , on constate que les courants instantanés sont, en général, en opposition de phases entre la couche supérieure et inférieure. Ceci pourrait être interprété par une superposition des courants baroclines et des différents courants : courants barotropes et courants quasi-permanents, etc... Ce phénomène n'apparaît pas très évident à la station TSF 10-1 où les courants, très faibles sont perturbés par les mouvements du navire au mouillage.

On notera, à ce propos, que l'évitement du navire très faible (vent très stable) et l'erreur liée au principe du profileur du courant conduisent à un bruit de fond inférieur ou égal à 5 cm/s.

- Pendant la saison chaude :

Dans la couche superficielle (au-dessus de 10 mètres environ), la température est presque homogène avec une valeur moyenne élevée (29° C environ) et la salinité relativement faible varie entre 33 et $34^{\circ}/\text{‰}$ environ (voir diagramme T-S de la figure 20).

Au-dessous de cette couche superficielle, la température varie d'une façon abrupte jusqu'au fond, tandis que la salinité varie, cette fois-ci relativement lentement. Une telle allure des variations de température et de salinité conduit à une variation de densité plus ou moins linéaire depuis la surface jusqu'à l'immersion maximale (voir Sigma-T de la figure 20).

Durant cette saison, l'eau peut être caractérisée par une température relativement élevée (29° C à 21° C) et une salinité moins élevée (32.5 à 35.5 ‰).

L'allure générale du tracé des isothermes montre des créneaux dissymétriques (voir surtout la figure 14).

Une telle dissymétrie est observée souvent, surtout près des côtes (cf. CAIRNS (1968), HALPERN (1971)). En effet, HALPERN (1971) a trouvé des profils similaires dans une région à thermocline saisonnière peu profonde (dans la baie de Massachusetts). CAIRNS (1967) a mesuré aussi, près de la côte de Californie, des trains d'ondes de marée interne assez dissymétriques qui ressemblent beaucoup au mascaret d'un estuaire.

Cette dissymétrie n'est pas encore bien expliquée sur le plan théorique, mais elle est probablement due à l'influence du fond sur les ondes internes.

Pour CAIRNS (1968), l'onde de marée interne devient dissymétrique lorsque celle-ci entre dans une région côtière peu profonde et devient plus prononcée lors d'un accroissement de la hauteur de l'onde. Pour HALPERN (1971), un tel profil dissymétrique pourrait s'expliquer par des effets non-linéaires.

Durant cette saison, les courants moyens sont beaucoup plus simples que ceux définis dans la saison précédente : dans la couche supérieure, le courant longitudinal porte vers l'Est avec un maximum de vitesse de 10 cm/s et dans la couche inférieure vers l'Ouest avec une vitesse de 4 à 5 cm/s (voir fig. 18)

La concordance entre les oscillations de température et de courant instantané est très remarquable (cf. figure 14). Les amplitudes des courants sont beaucoup plus importantes et l'opposition des phases des courants instantanés entre la couche supérieure et inférieure est beaucoup plus nette et régulière que celles trouvées pendant la saison froide.

3.3. Variation en fonction de la position géographique :

Pour des stations situées au voisinage du secteur où la pente du fond est relativement raide, par exemple pour TSF 1 et TSF 3, les variations importantes des isothermes sont localisées au-dessous de la mi-profondeur et les variations dans la couche superficielle sont presque négligeables (voir les figures 9 et 11).

Cette variation très importante de l'immersion des isothermes près du fond (par exemple pour la station TSF 1 où elle dépasse 50 mètres) pourrait être difficilement expliquée par un phénomène d'ondes internes seulement. Il est plutôt raisonnable de l'attribuer à l'advection de masses d'eaux différentes suivant la pente par les courants de marée. On reviendra plus tard sur ce sujet dans l'étude des modèles théoriques de génération et de propagation des marées internes.

Au fur et à mesure que l'on s'approche de la côte (par exemple pour les stations TSF 10-1, TSF 9 et TSF 13 (figures 12, 10 et 14), les variations significatives des isothermes remontent vers la surface. Pour une station plus près de la côte (TSF 12, figure 15), les variations importantes des isothermes et des isohalines se répartissent sur toute la colonne d'eau.

On pourrait présenter ce phénomène comme un déplacement horizontal des isothermes sous l'action du courant de marée en présence d'un gradient horizontal des isothermes. Malheureusement, ce dernier n'est pas, à priori, bien connu dans la région d'étude. Les coupes des isothermes quasi-synoptiques suivant les radiales I et II de la figure 7 ne semblent cependant pas confirmer une telle hypothèse (voir la figure 21) : en effet, au lieu d'observer un déplacement latéral des isothermes entre ces deux coupes effectuées avec un décalage de 6 heures environ, on trouve plutôt une inversion de la courbure des isothermes laissant plutôt penser à une oscillation interne et ceci uniquement près de la côte.

On remarque bien que les variations des isothermes près du talus continental sont presque stagnantes et que les variations importantes ne se trouvent que dans la région côtière. Ceci semble contredire l'hypothèse de l'advection horizontale des isothermes, mais plutôt signifier l'accumulation probable des énergies des ondes internes près de la côte. On reviendra plus tard sur ce problème dans l'étude du modèle du plateau continental.

Mais il ne faut pas, pour autant, exclure l'influence d'advection des masses d'eau, phénomène qui semble être assez important au voisinage du fond. Pour bien élucider ce phénomène, il faut davantage de mesures hydrologiques et courantologiques faites simultanément sur plusieurs verticales du plateau continental. Les données dont on dispose actuellement rendent cette étude inabordable.

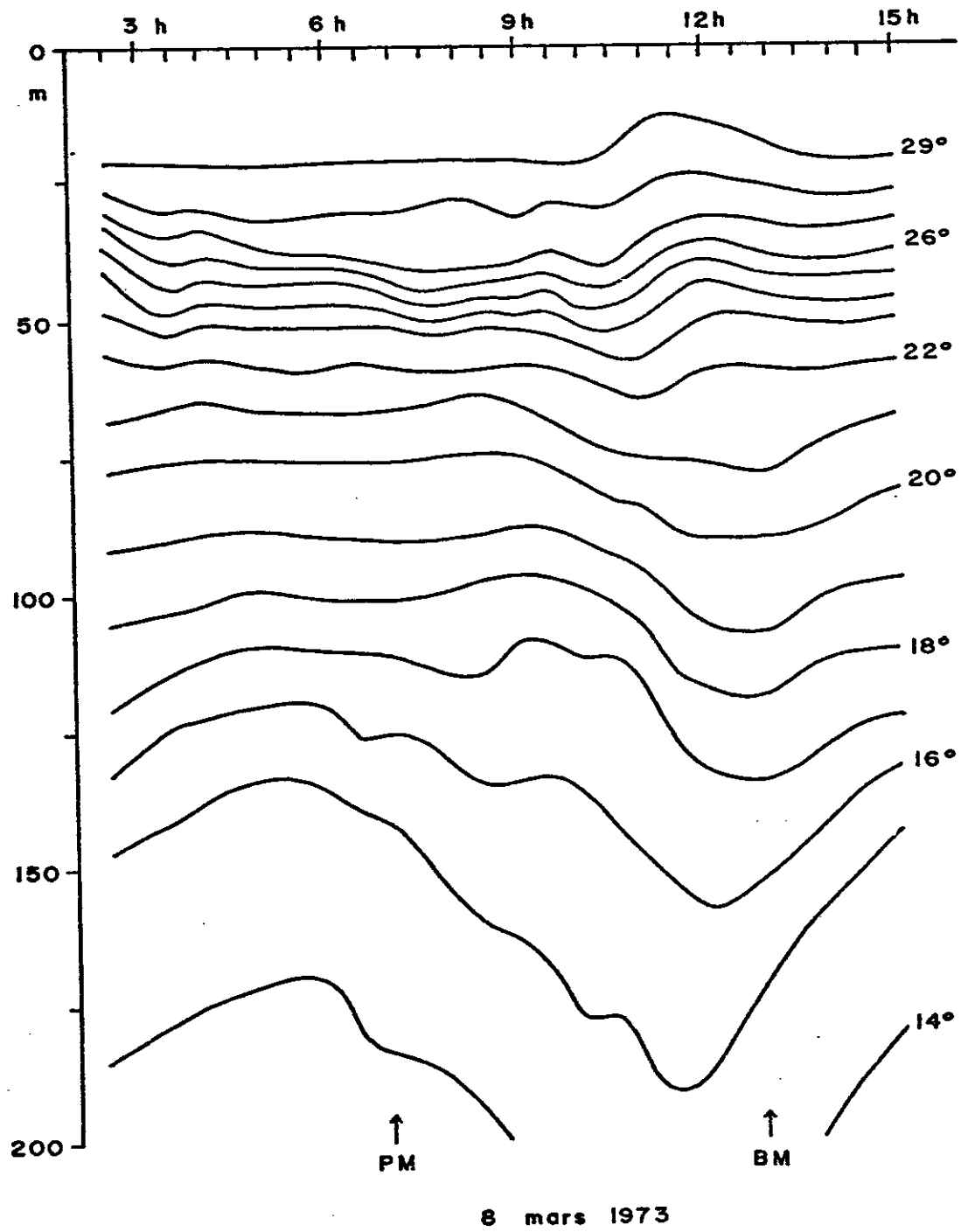


Fig. 9 : Evolution en fonction du temps des profondeurs des isothermes (TSF1 - saison chaude).

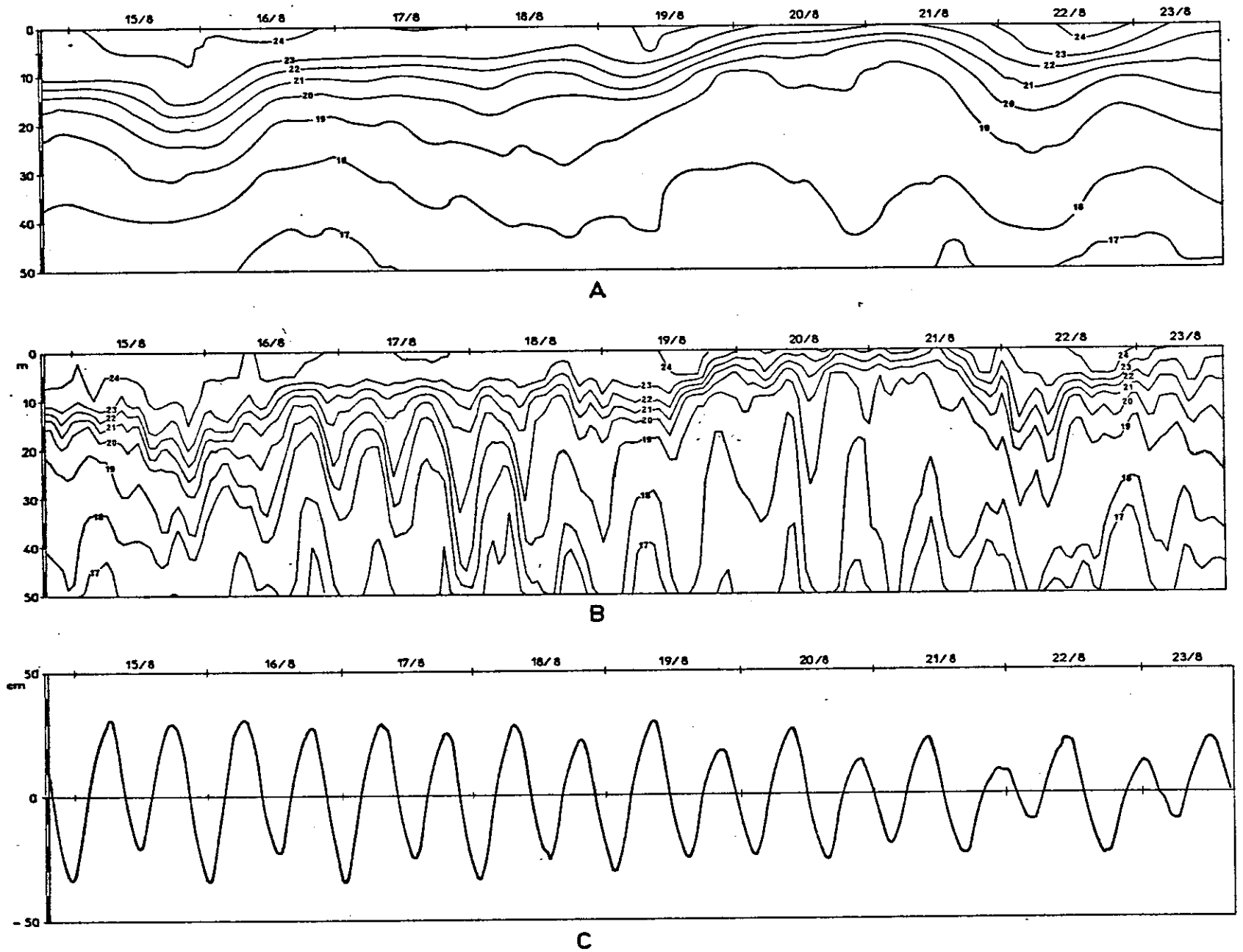


Fig. 10 : Evolution en fonction du temps des profondeurs des isothermes ;
- A : données après filtrage passe bas (élimination des ondes $< 25\text{ h}$)
- B : données brutes.
- C : Hauteurs de marée. (TSF9 - saison froide).

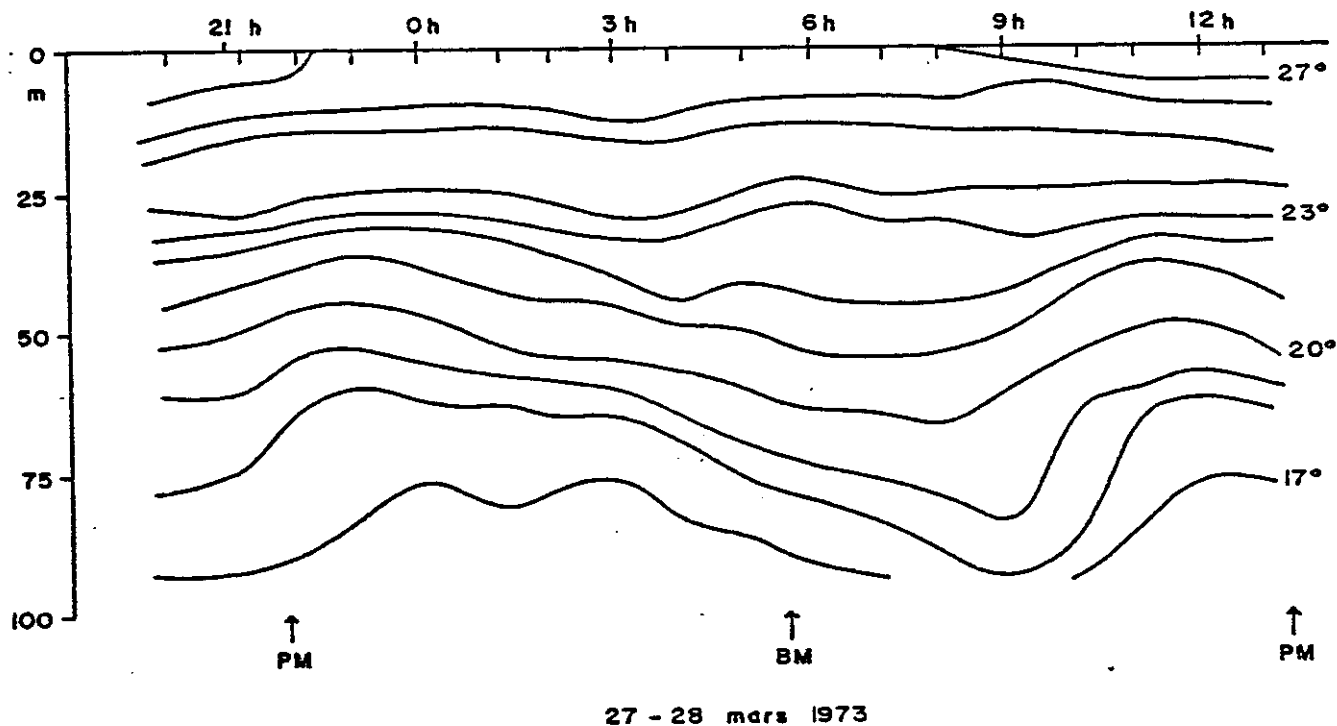


Fig. 11 : Evolution en fonction du temps des profondeurs des isothermes (TSF 3 - saison chaude).

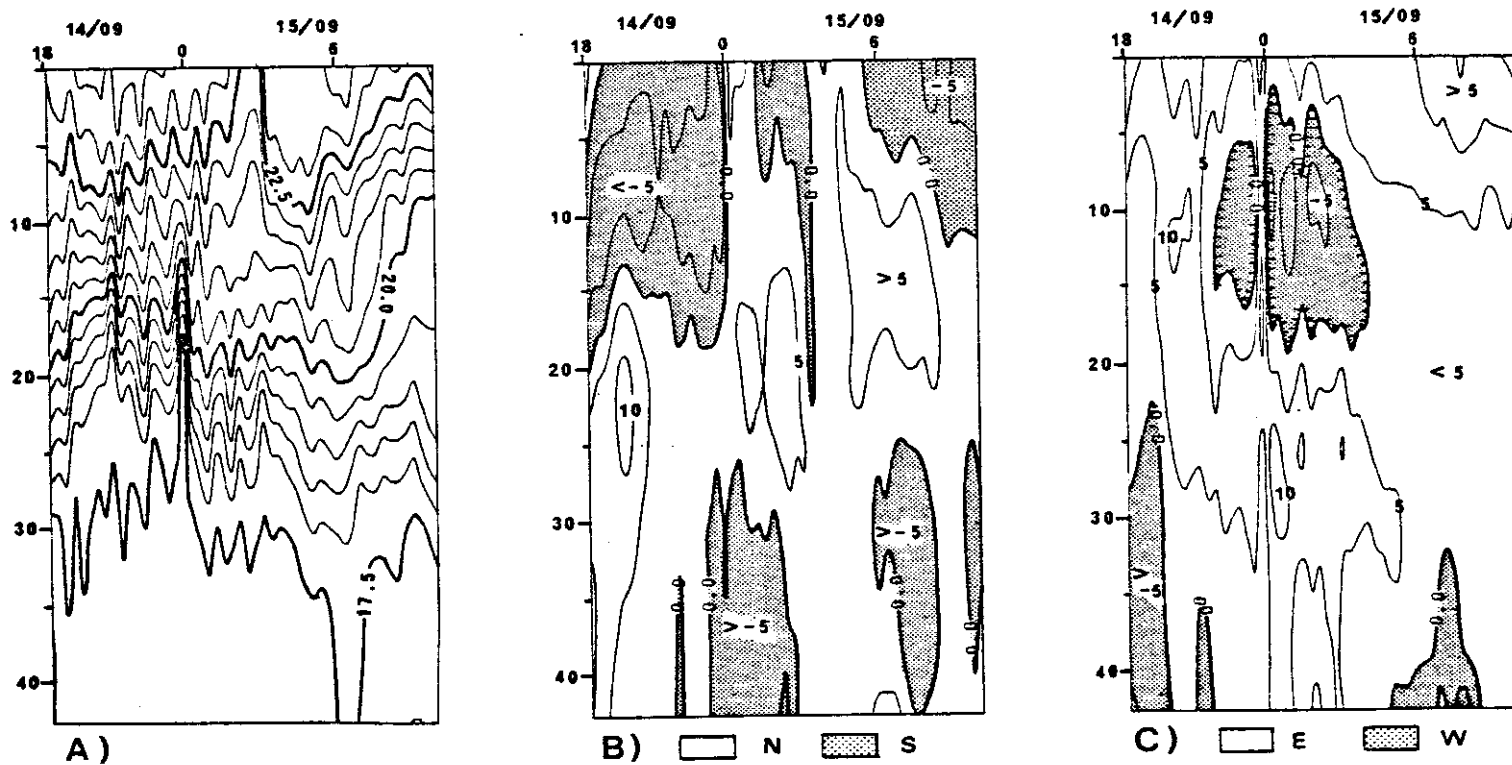


Fig. 12 : Evolution en fonction du temps ; - A : des profondeurs des isothermes, - B : des courants Nord-Sud, - C : des courants Est-Ouest (TSF10-1 - saison froide).

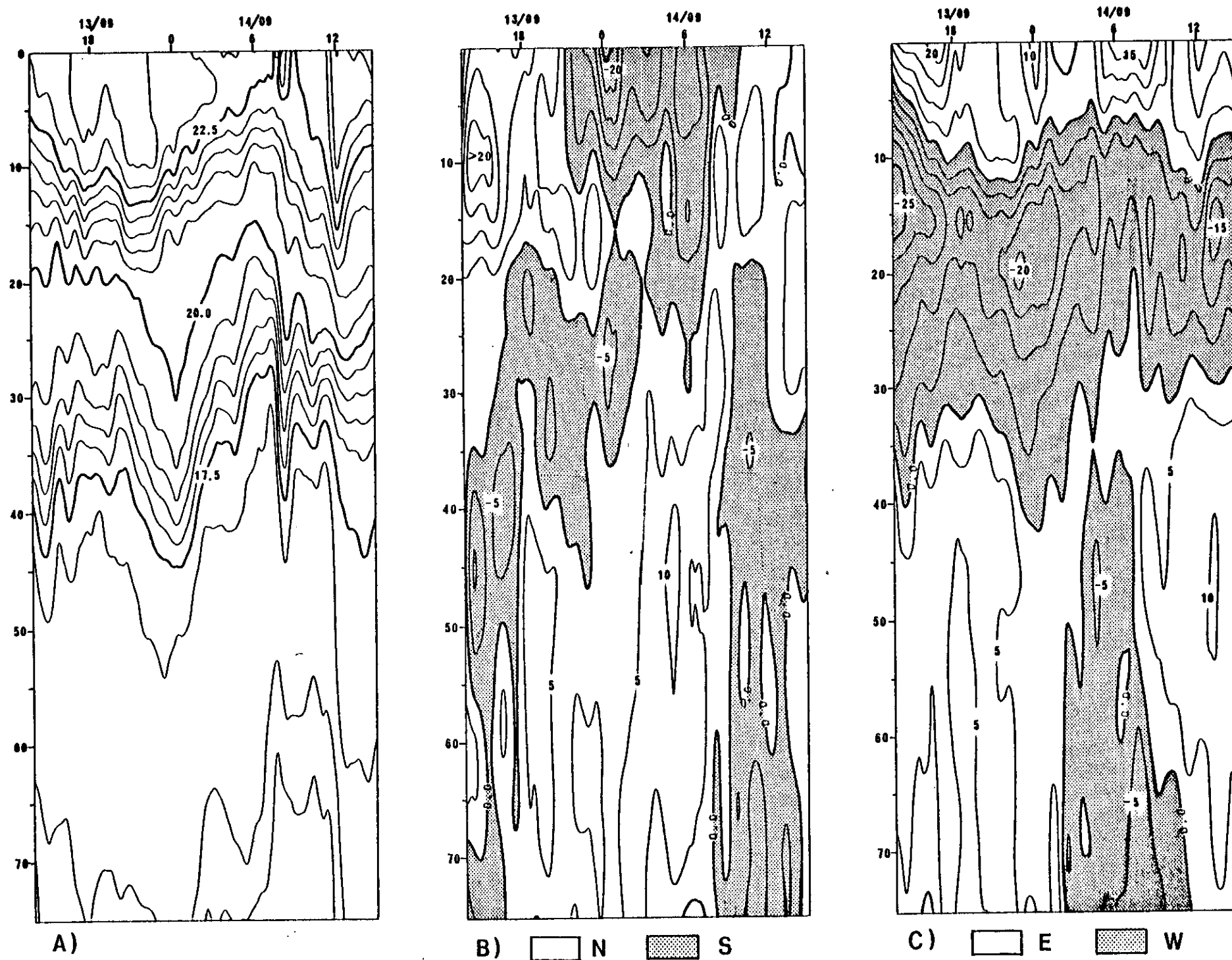


Fig. 13 : Evolution en fonction du temps ; - A : des profondeurs des isothermes, - B : des courants Nord-Sud, - C : des courants Est-Ouest (TSF 10-2 - saison froide).

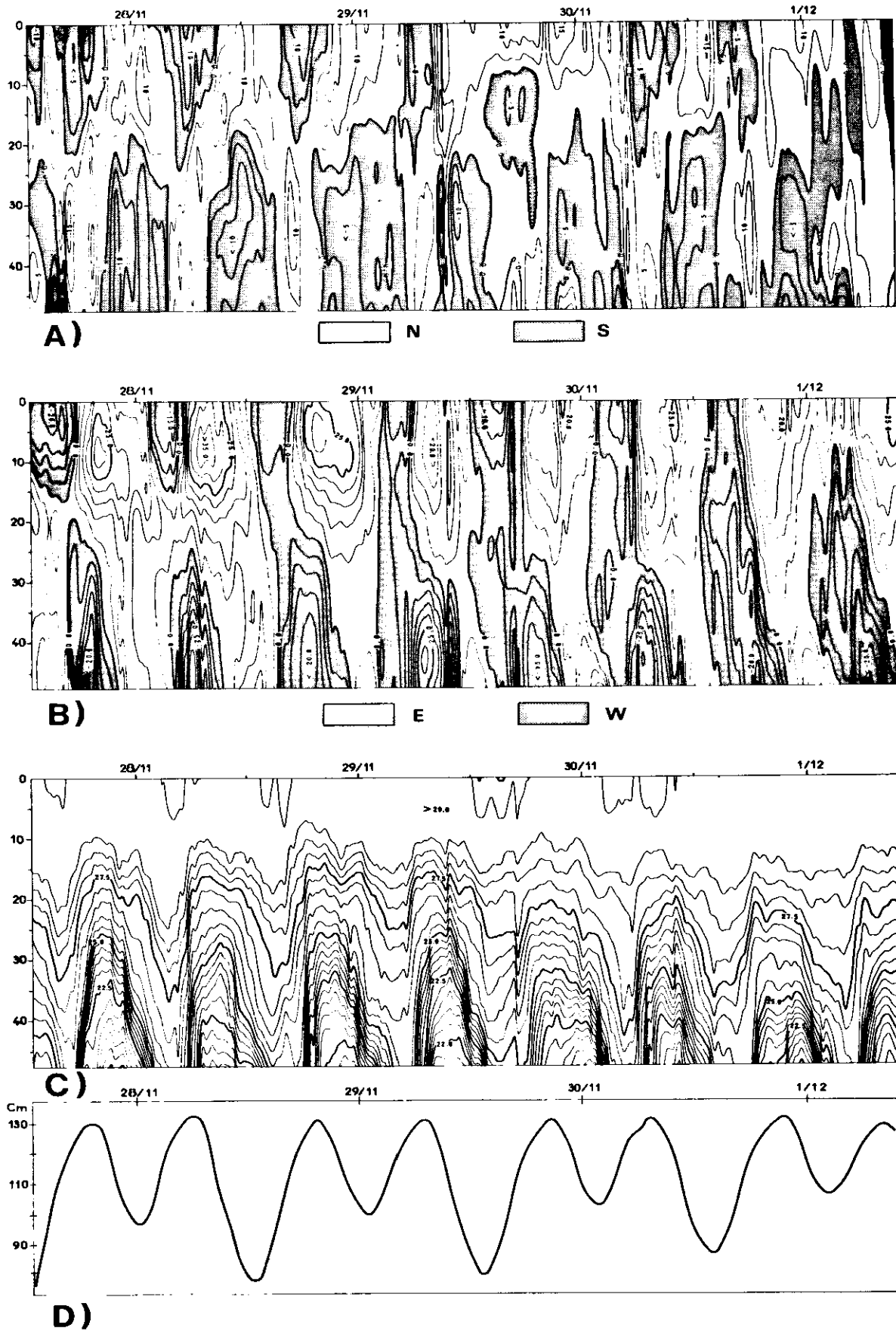


Fig. 14 : Evolution en fonction du temps - A : des courants Nord-Sud, - B : des courants Est-Ouest, - C : des profondeurs des isothermes, - D : des hauteurs d'eau. (TSF13 - saison chaude).

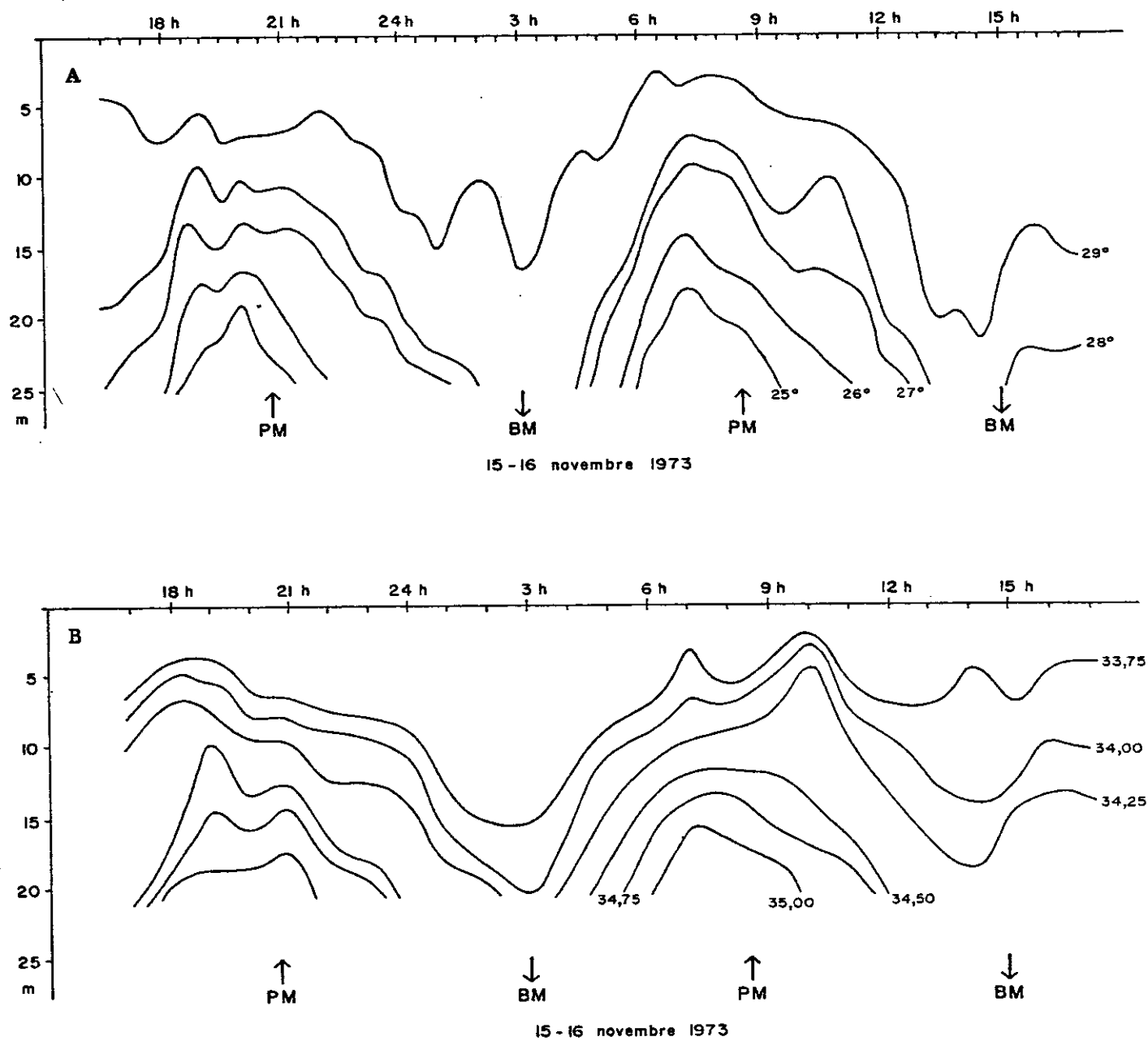


Fig. 15 : Evolution en fonction du temps des profondeurs ;
- A - des isothermes
- B - des isohalines
(TSF 12 - saison froide)

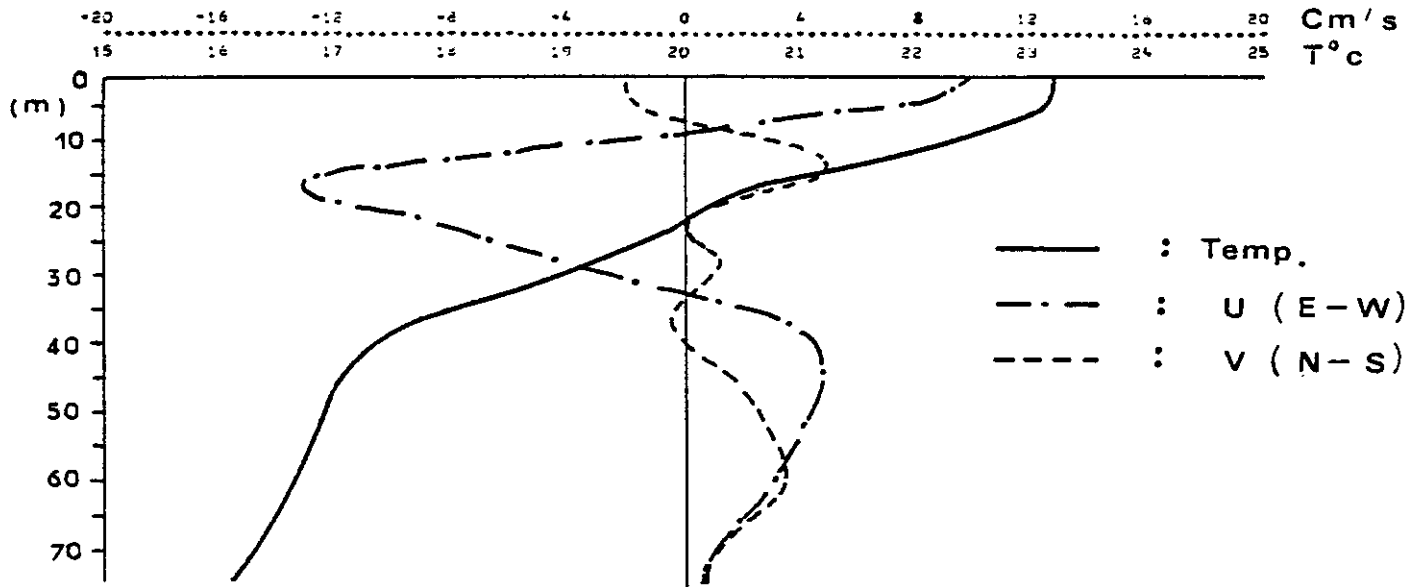


Fig. 16 : Valeurs moyennes de température et de courants (TSF 10-2 - saison froide).

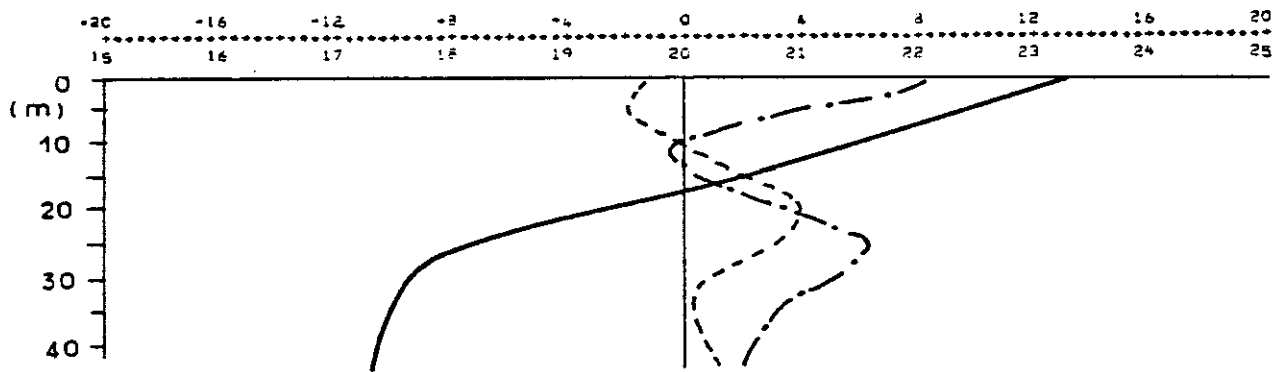


Fig. 17 : Valeurs moyennes de température et de courants (TSF 10-1 - saison froide).

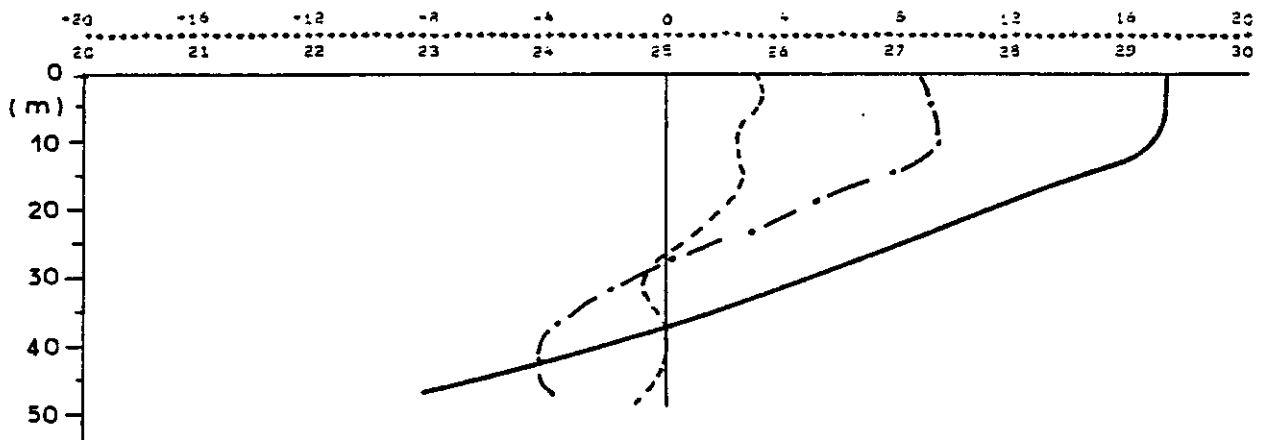


Fig. 18 : Valeurs moyennes de température et de courants (TSF 13 - saison chaude).

Fig. 19 : Valeurs moyennes de Sigma-T, de température, de salinité et le diagramme T-S (TSF 9 - saison froide).

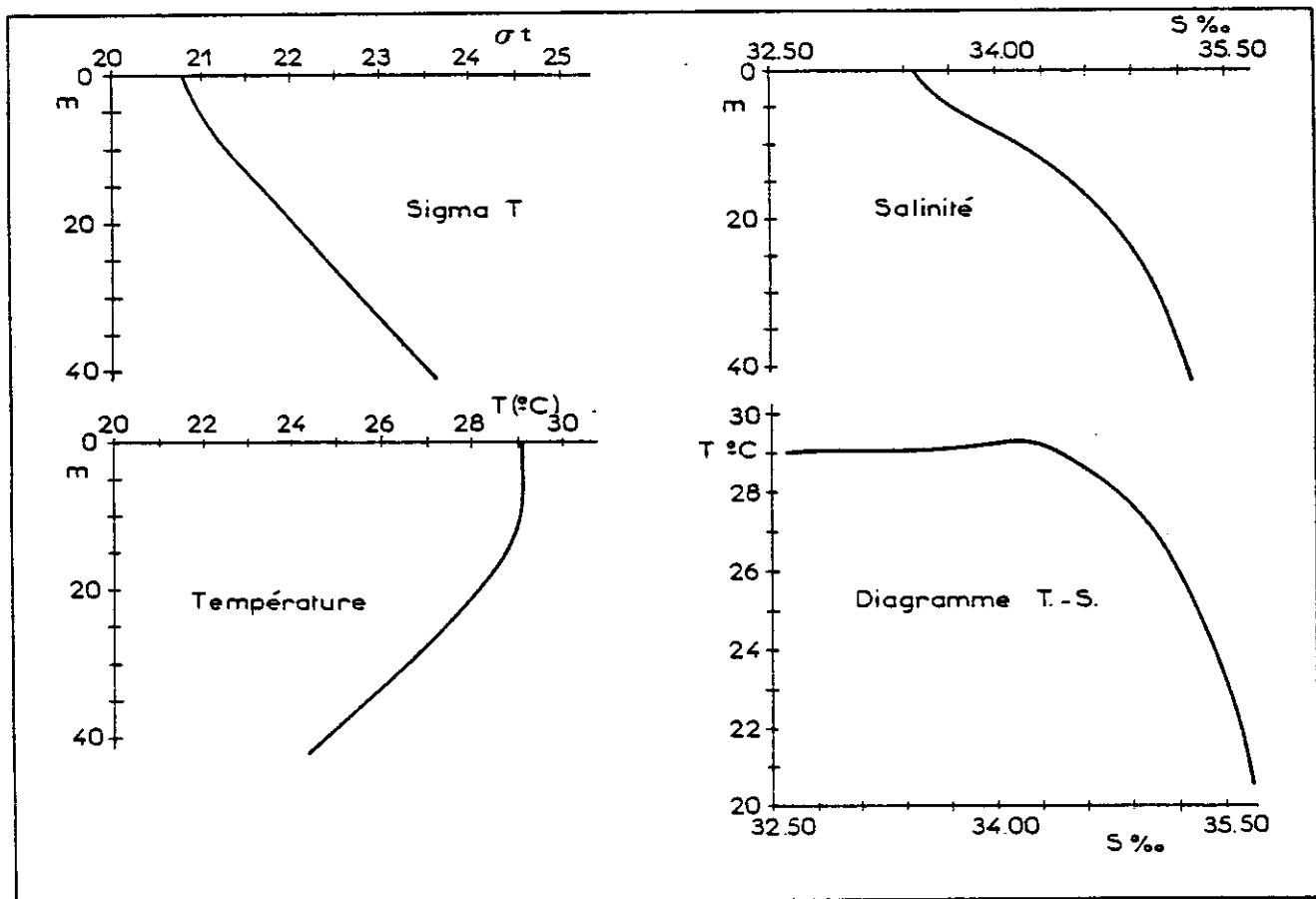
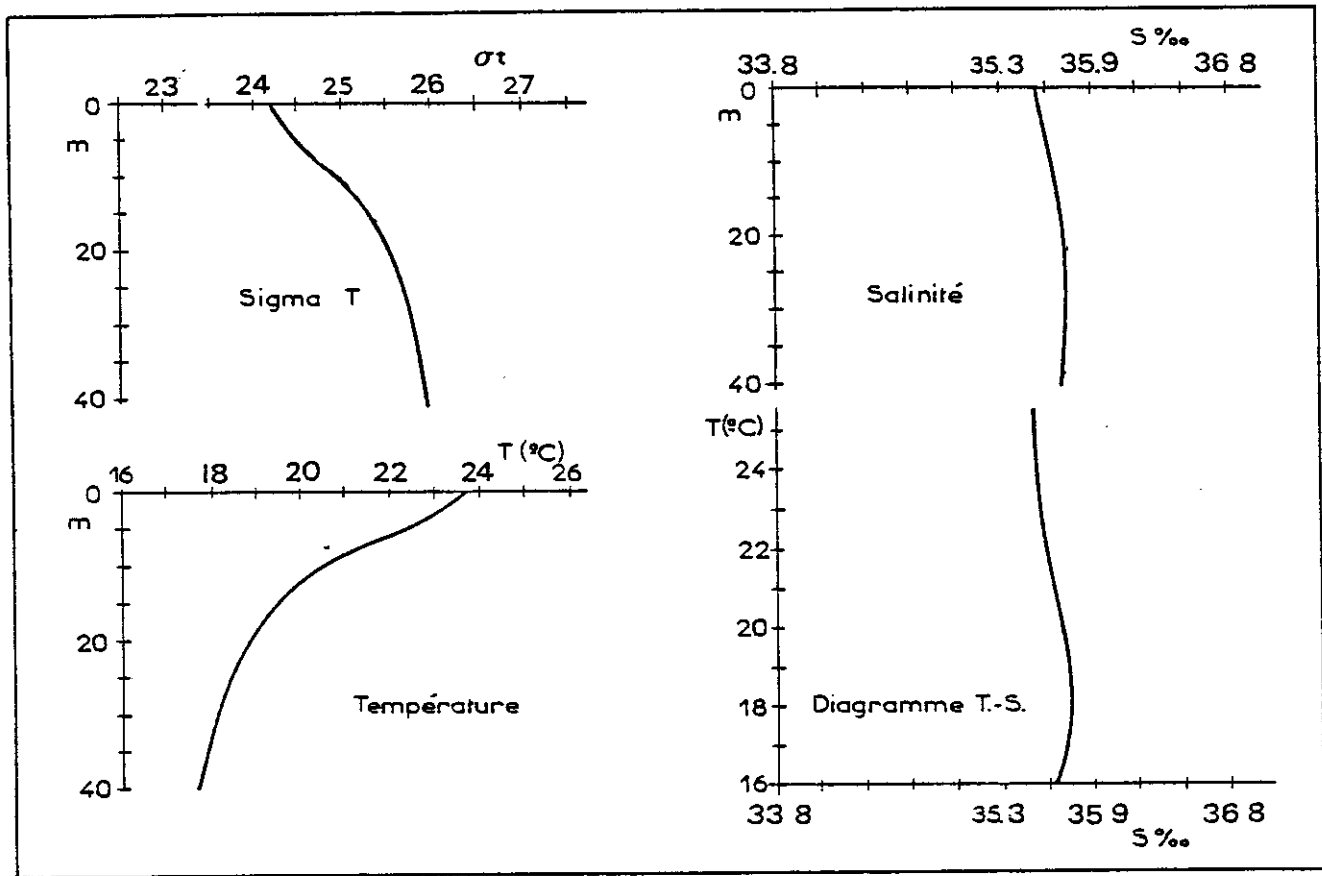


Fig. 20 : Valeurs moyennes de Sigma-T, de température, de salinité et le diagramme T-S (TSF 13 - saison chaude).

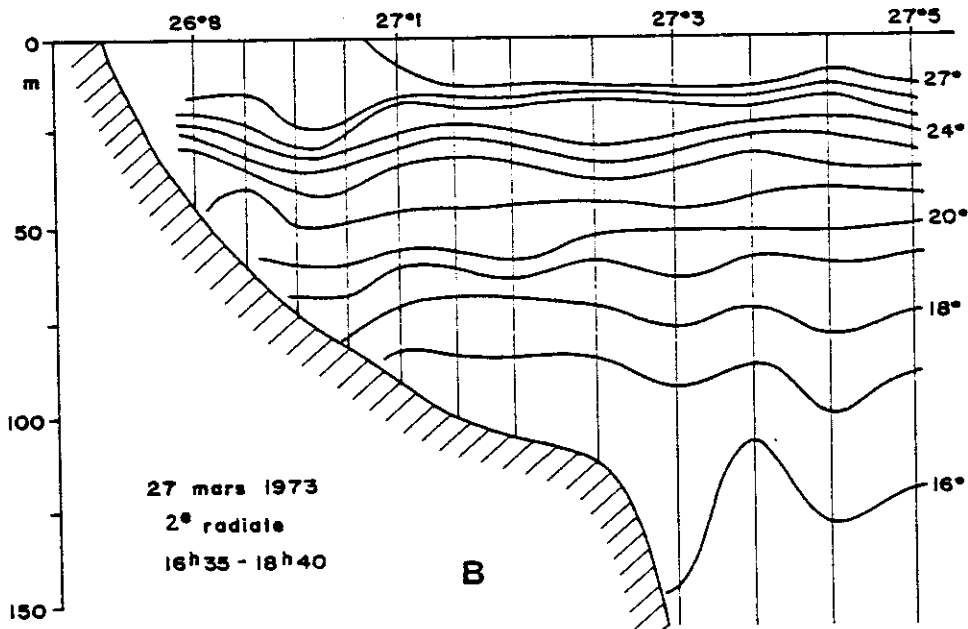
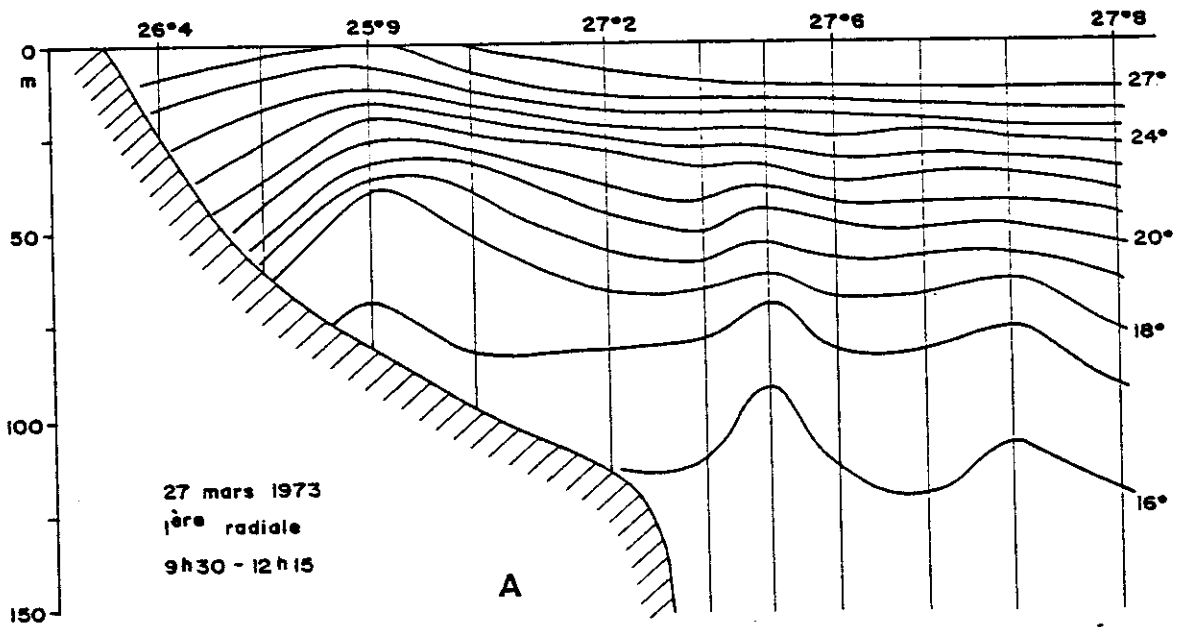


Fig. 21 : Coupes des isothermes suivant ;
- A : la première radiale,
- B : la deuxième radiale.

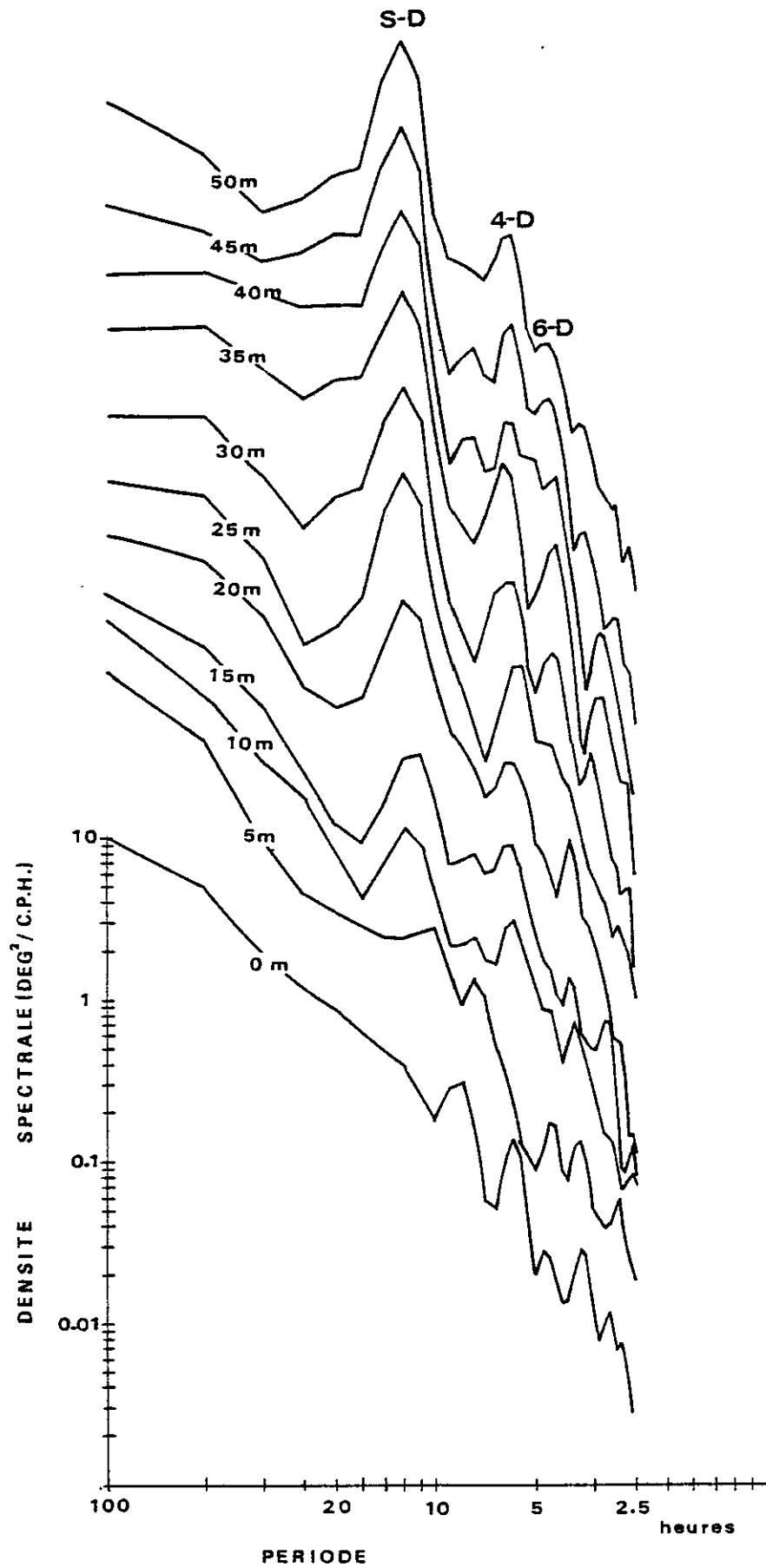


Fig. 22 : Densité spectrale d'énergie de température pour différentes profondeurs (TSF 9 - saison froide).

II.2. DONNEES DE L'ANNEE 1976-1977.

1. Description générale des données :

Au cours des campagnes océanographiques de 1976-1977, le C.R.O. d'Abidjan a mis en place 8 courantographes Aanderaa qui ont fonctionné de manière continue entre le 1er juin 1976 et le 10 août 1977. Ces appareils étaient mis en place devant Port-Bouet sur le site de l'émissaire projeté (les points de mesures A, B, C de la fig.7). Les coordonnées d'implantation de ces verticales et les profondeurs d'immersion des appareils sont données dans le tableau ci-après.

Mouillage	Longitude	Latitude	Hauteur d'eau totale	Profondeur d'immersion des courantographes		
				1	2	3
A	3° 58' W	5° 14' N	25 m	11 m	17 m	
B	3° 56' W	5° 13' N	50 m	14 m	25 m	44 m
C	3° 57' W	5° 12' N	70 m	13 m	36 m	64 m

TABLEAU 3

Les courantographes Aanderaa sont équipés de 5 capteurs assurant la mesure de la température, de la conductivité de l'eau, de la pression, de la direction et de la vitesse du courant.

La vitesse du courant est déterminée par le nombre de tours du moulinet entre deux échantillonnages. La fréquence de cet échantillonnage était de 10 minutes pour la station B et de 20 minutes pour les autres stations.

Parallèlement à ces mesures, on a mouillé une chaîne de thermistances près de la station C entre le 11 février 1977 et le 25 juillet 1977.


Les premiers résultats montrent certaines anomalies (surtout dans les mesures de salinité et des courants) qui seraient dues au "fouling" sur le rotor et à des salissures sur les capteurs. La répartition dans le temps, l'ensemble des données utilisables après élimination des valeurs aberrantes est donnée dans le tableau 4 .

S.F.

S.C.

STATION	IMMERSION MOYENNE	1976												1977		
		Juin	Juillet	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.	Janv.	Fév.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août
A (ΔT : 20min.)	10m	(T.S.F.) 25221202C		25221203C		2522960C	25221305C	25229603C	25221307C	25221308C	25221309C		25178610C			
	16m	25221302C		25221303C			25229602C	25221306C	25229604C	25229605C		25221310C				
B (ΔT : 10min.)	15m		50221701C		50221702C		50221703C	50221904C	50221705C			50221707C	50221806C			
	25m		50221801C		50221802C		50221804C	50221804C		50221805C	50221906C	50221807C	50221908C			
	40m		50221901C				50221903C				50221806C		50221708C			
C (ΔT : 20min.)	15m		70221401C		70221402C		70221403C				70221505C	70221406C			70221207C	
	35m		70221501C		70221502C		70221503C				70221405C	70221506C				
	65m		70221601C				70221603C		70221504C		70221605C		70221606C			

——— TEMPERATURE
 - - - - SALINITE
 - - - - VITESSE


 Chaîne de thermistances

TABIEAU 4 : Répartition dans le temps des données utilisables aux points de mesures A, B, C et de la chaîne de thermistances (les noms des fichiers pour chaque courantographe sont indiqués par les chiffres et les alphabètes). S.C. (saison chaude) et S.F. (saison froide) sont définies provisoirement pour les différentes analyses.

2. Quelques résultats graphiques :

Nous nous limitons à présenter une partie des résultats graphiques des isothermes évalués d'après les données de la chaîne de thermistances. La figure 23 représente l'évolution en fonction du temps des isothermes entre le 22 et le 28 mars correspondant à la saison chaude. On y trouve une très grande similitude avec les isothermes de la station TSF 13 (fig. 14).

On constate que les variations semi-diurnes de l'amplitude entre 10 et 30 mètres augmentent linéairement avec la profondeur ; il s'y ajoute des fluctuations de hautes fréquences qui varient d'une façon irrégulière. On y voit aussi, bien qu'elle soit moins nette que celle de la station TSF 13, une dissymétrie dans la variation de l'immersion des isothermes. L'ensemble des constatations précédentes pourrait nous conduire à la conclusion suivante : les profondeurs d'immersion des isothermes évoluent d'une façon très similaire de part et d'autre du Trou-sans-Fond durant la saison chaude. Il est très probable que ce sera la même chose pendant la saison froide.

Mais une étude plus détaillée sur la relation des différents paramètres de part et d'autre du Trou-sans-fond est jusqu'ici impossible du fait du manque de données synoptiques.

3. Analyse des données :

Une observation sommaire des résultats graphiques permet de constater l'existence indiscutable de variations semi-diurnes importantes dans les mesures hydrologiques et courantologiques sans nécessiter pour cela le recours à une analyse rigoureuse. Mais pour mieux définir la périodicité et les propriétés statistiques des différentes séries de mesures, nous présentons par la suite les résultats des diverses analyses.

3.1. Analyse spectrale :

L'ensemble des résultats de l'analyse spectrale a pu être obtenu grâce au programme TIMSAN de la WHOI ainsi qu'à l'ordinateur CII 10070 du BNDO du C.O.B. de Brest. Ce programme utilise l'algorithme de la FFT (Fast Fourier Transform) de SINGLETON (1969).

Nous ne détaillerons pas l'algorithme et les développements mathématiques ou statistiques de l'analyse spectrale. On trouvera facilement la littérature traitant de ce sujet (voir par exemple BENDAT et PIERSOL (1971), BLACKMAN et TUCKEY (1958), SINGLETON (1969) et RESCH et BOURGUEL (1976), etc...).

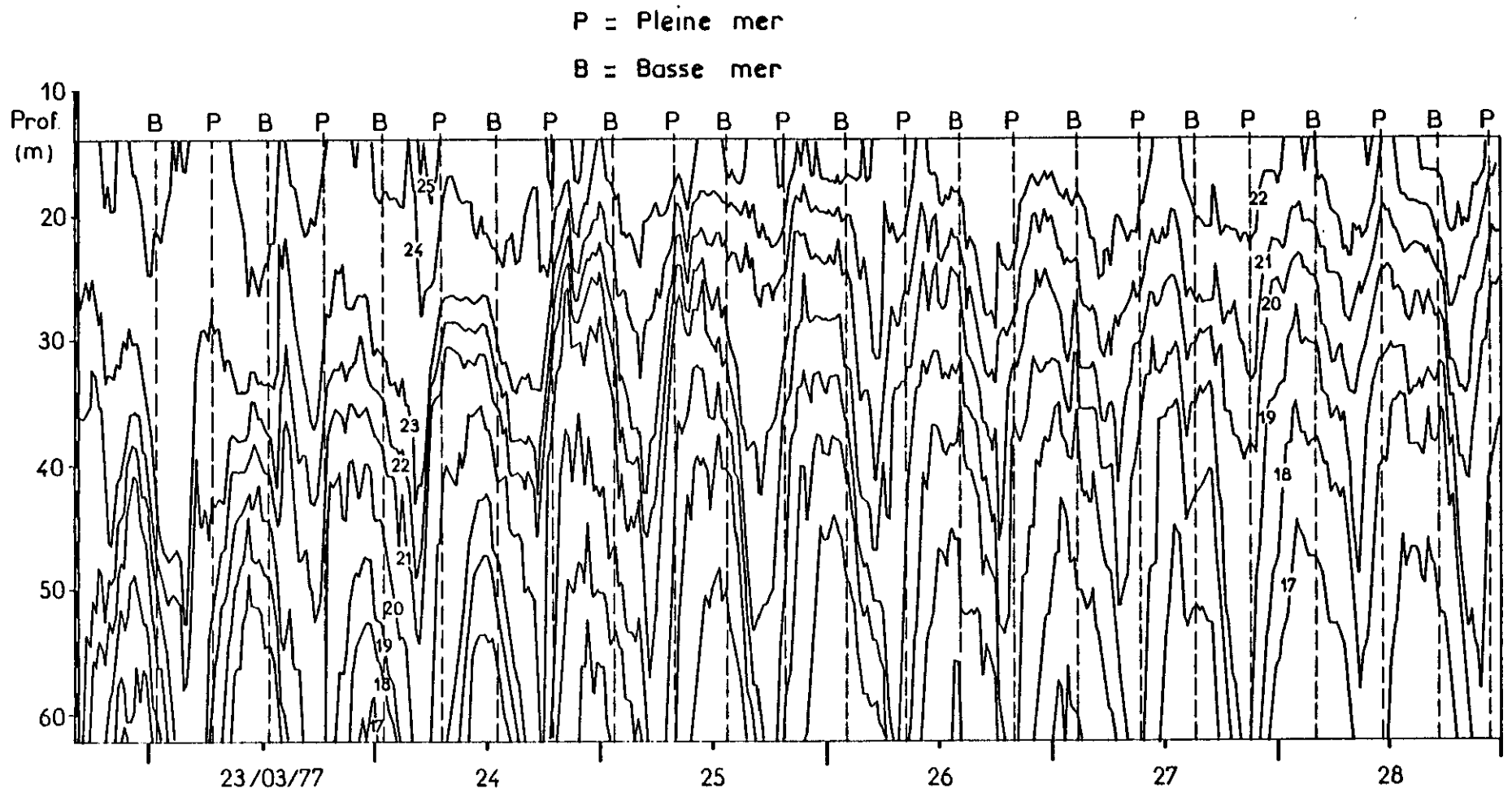


Fig. 23 : Evolution en fonction du temps des profondeurs des isothermes (chaîne de thermistances près de la station C - saison chaude).

Nous nous contenterons de présenter et de discuter les résultats graphiques obtenus par cette méthode.

A - La densité spectrale d'énergie :

La densité spectrale d'énergie d'une fonction aléatoire montre la contribution de chaque composante fréquentielle à la valeur carrée moyenne de cette fonction.

Bien que les fluctuations de température à une certaine immersion ne sont pas directement liées aux mouvements possibles des ondes internes ou aux variations d'énergie potentielle, elles peuvent cependant refléter la périodicité de ces mouvements.

La figure 24 représente les densités spectrales d'énergie des variations de température en différentes profondeurs de la chaîne de thermistances

Les pics significatifs dans les spectres mettent en évidence les fréquences des phénomènes dominants qui sont ici les ondes semi-diurnes. On y rencontre aussi des pics secondaires correspondant aux ondes quart-diurnes.

On peut noter que ces résultats ne font que confirmer par une méthode statistique des phénomènes dominants mis en évidence par simple observation des données point par point. Cependant la détermination des périodes exactes par la méthode de l'analyse spectrale n'est pas toujours adaptée, surtout lorsque l'on tente de distinguer une onde parmi d'autres de fréquences très voisines (par exemple les ondes de marée semi-diurne).

On sait bien que la résolution en fréquence dépend de la longueur de l'enregistrement (T) ; en effet, dans le domaine des fréquences, les valeurs du spectre seront distantes de $\Delta f = \frac{1}{T}$ et le spectre d'énergie est estimé sur l'intervalle $(f - \frac{1}{2T}, f + \frac{1}{2T})$. Mais en pratique, en raison de l'imprécision du spectre (ou afin d'augmenter le nombre de degrés de liberté) on découpe la série entière en plusieurs tronçons et le spectre présenté est la moyenne des spectres calculés sur chacun des tronçons. Ceci peut diminuer considérablement la résolution dans les basses fréquences. Donc, si on veut distinguer, par exemple, l'onde M2 des ondes S2, L2 et N2 en gardant la précision convenable du spectre, il faudrait un enregistrement de plusieurs mois. Ce qui n'est pas toujours réalisable pour les mesures océanographiques.

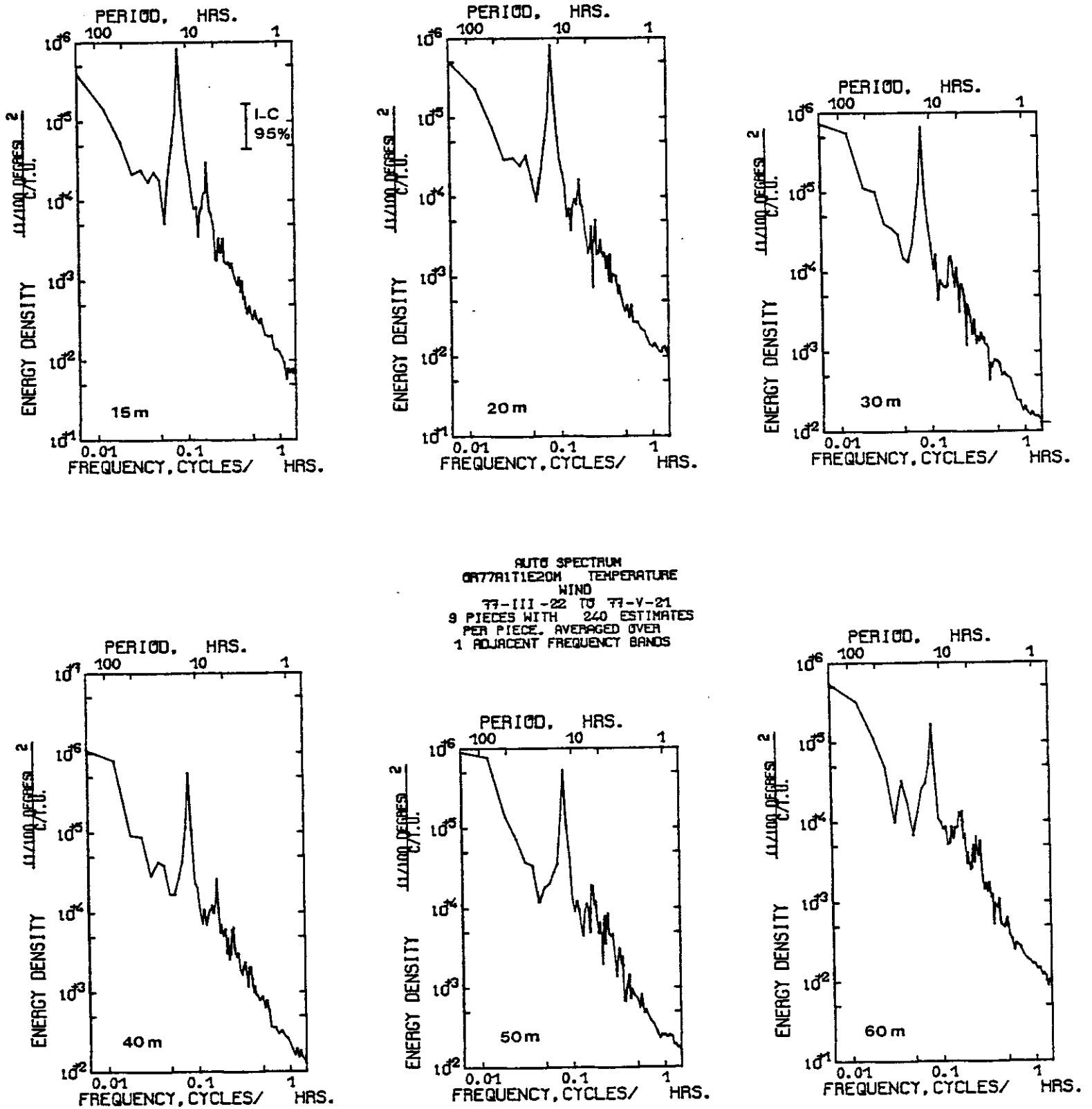


Fig. 24 : Densités spectrales d'énergie des variations de température à différentes profondeurs de la chaîne de thermistances (saison chaude).

La détermination des périodes exactes des phénomènes dominants sera obtenue par l'analyse harmonique que nous détaillerons plus loin.

B - Spectre croisé (déphasage et cohérence) :

Les liaisons statistiques entre les deux signaux peuvent généralement être représentées par les fonctions cohérence et déphasage.

Afin d'assurer une meilleure comparaison des résultats entre les deux saisons, nous définissons provisoirement leurs périodes typiques de la manière suivante :

saison froide ; du 1er juillet au 31 juillet

saison chaude ; du 18 avril au 17 mai.

Les figures 25a à 25f représentent quelques exemples des résultats de l'analyse du spectre croisé (déphasage et cohérence) pour les mesures de température de stations A, B, et C durant les deux saisons.

Il faut noter que nous avons préalablement filtré les séries de températures en utilisant le filtre Passe-bas P_1 de STALLINGS (sous-programme de TIMSAN) qui laisse passer, dans notre cas, les périodes supérieures à 3 heures environ. Les effets de filtrage sont très visibles dans la plupart des figures par la constance de la cohérence et du déphasage dans les hautes fréquences.

On remarque tout d'abord que la cohérence reste généralement assez importante (≈ 0.9) dans le domaine des ondes semi-diurnes, sauf dans le cas de la figure 25c où elle est relativement moins importante (0.72). Dans toutes les figures, les cohérences correspondantes aux ondes semi-diurnes se trouvent au-dessus de la limite de confiance d'une probabilité de 95% ; elles sont aussi stables dans le temps que dans l'espace. Autrement dit, les variations des températures sont très bien liées verticalement à toutes les stations durant les deux saisons.

Pour les autres fréquences, les cohérences sont, en général, relativement faibles et très aléatoires. Pour les fréquences supérieures à la fréquence de coupure ($F_c = 0.33$ CPH) les résultats ne sont pas significatifs à cause du filtrage préliminaire des données.

Les déphasages, dans le domaine des ondes semi-diurnes, sont très différents d'une saison à l'autre : pendant la saison froide, ils restent relativement faibles (environ $\pm 48^\circ$) tandis que pendant la saison chaude, ils sont parfois très élevés (par ex. 135° à la figure 25 a et 108° à la figure 25 c).

En ce qui concerne le déphasage, il est souvent facile de le relier à celui des mouvements internes. Mais il convient d'être prudent quant aux conclusions formulées ; en effet, comme nous l'avons cité plus haut, les fluctuations de température ne sont pas liées directement aux mouvements internes. Il est très probable qu'il existe des effets non négligeables des courants baroclines suivant les différentes orientations faisant apparaître les déphasages dans les séries de températures. Il est prévisible que ce phénomène sera beaucoup plus prononcé s'il existe des mouvements internes relativement importants (par exemple, pendant la saison chaude) ; pendant la saison froide, les mouvements internes peuvent être moins importants et donc moins de déphasage dans les mesures de températures.

3.2. Analyse harmonique :

Il est discutable d'utiliser la méthode de l'analyse harmonique pour les variations de température. Car la température varie non seulement par les effets directs ou indirects des marées astronomiques (par exemple par le courant de marée ou par les mouvements des marées internes), mais aussi par les autres facteurs plus ou moins irréguliers : la variation du climat, la variation journalière ou saisonnière de température de l'eau, l'advection et la convection des différentes masses d'eaux par les courants marins etc...

Cependant, si une variation de température est fortement liée aux effets des marées astronomiques (qu'il s'agisse du courant de marée ou des mouvements de marée interne), on peut espérer qu'elle réponde mieux aux ondes prédominantes de marée astronomique.

Nous utiliserons cette méthode pour déterminer les amplitudes des événements de périodes correspondant aux principales ondes de marée.

L'algorithme et le programme du calcul des constantes harmoniques ont été empruntés à SIMON (1974).

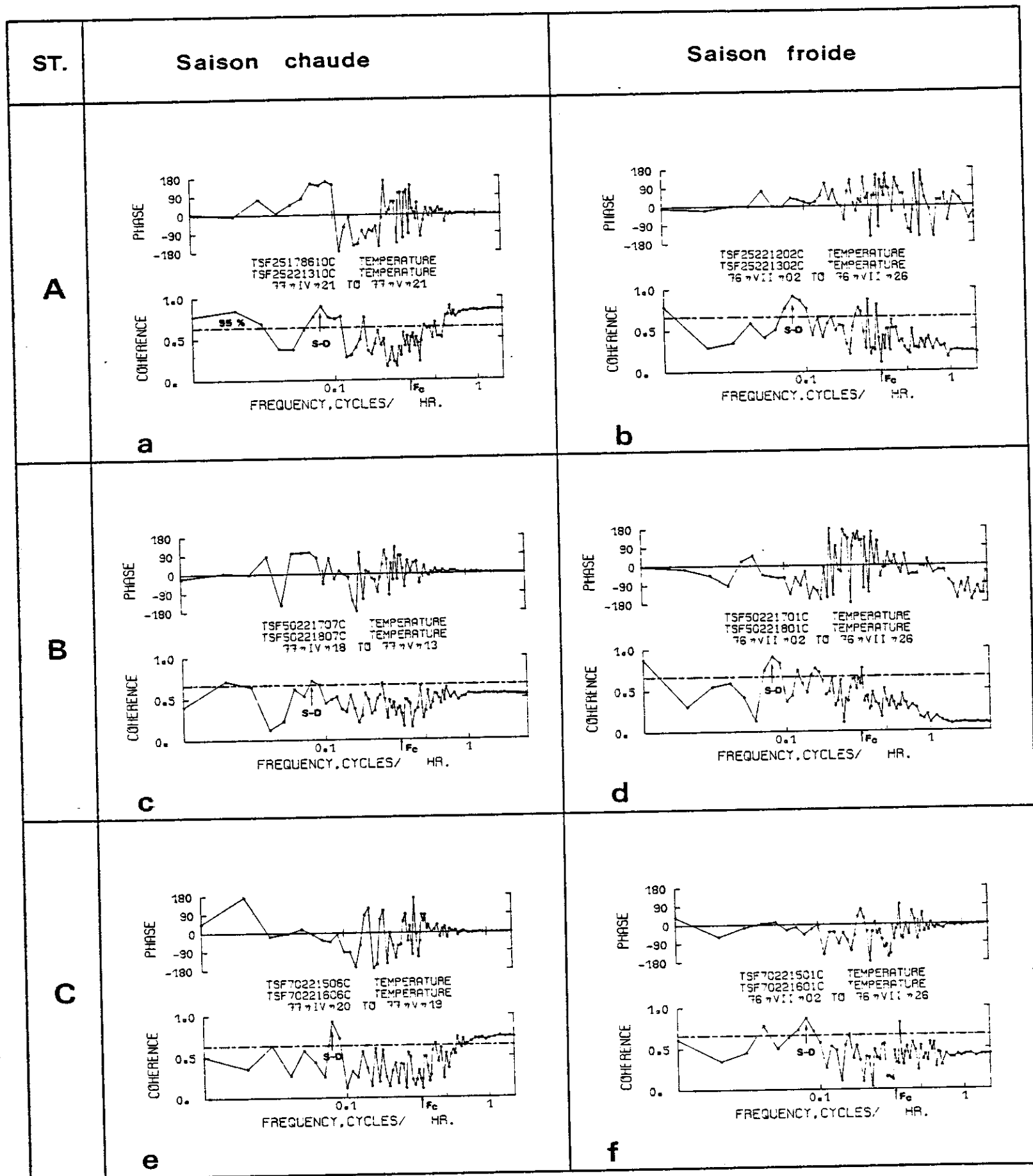


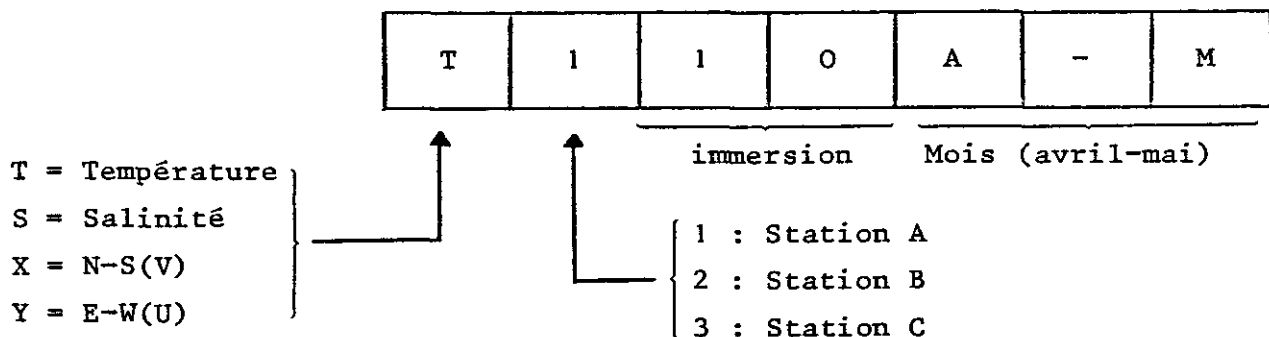
Fig. 25 : Quelques exemples des résultats de l'analyse du spectre croisé (déphasage et cohérence) pour les mesures de température des stations A, B et C durant la saison froide et la saison chaude.

A - *Traitement préliminaire des données (des stations A, B et C) :*

L'algorithme de SIMON nécessite des observations horaires. Pour ce faire, nous avons suivi les différents procédés de traitements suivants :

- i) afin d'atténuer les hautes fréquences, on lisse les données en utilisant un filtrage classique ;
 - sur trois points (1/4, 1/2, 1/4) pour les stations A et C où le pas d'échantillonnage est de 20 minutes,
 - sur cinq points (1/16, 4/16, 6/16, 4/16, 1/16) pour la station B où le pas d'échantillonnage est de 10 minutes,
- ii) on calcule les valeurs horaires par une interpolation linéaire des données ainsi lissées ;
- iii) avec des valeurs horaires complètes (24 valeurs par jour), on crée de nouveaux fichiers ; les noms de fichiers sont donnés de la manière suivante :

exemple :



B - *Résultats et commentaires :*

Afin de comparer l'évolution des ondes privilégiées durant les deux saisons, nous avons calculé les constantes harmoniques pour les séries de température durant les périodes des saisons déterminées précédemment.

Les constantes harmoniques sont calculées pour 7 ondes diurnes (001, J1, K1, M1, O1, Q1, 2Q1) et 6 ondes semi-diurnes (2SM2, S2, L2, M2, N2, μ 2) séparées sur 30 jours.

La contribution de chaque onde (en pourcentage) sur la somme des amplitudes des ondes diurnes et semi-diurnes, pour différentes séries de températures, est représentée sur les figures 26 A et 26 B respectivement pour la saison chaude et la saison froide. Afin d'avoir davantage de confiance statistique, la valeur moyenne des contributions des différentes séries de température sur chaque onde a été calculée ainsi que le pourcentage de l'écart-type sur la valeur moyenne (voir les petites figures insérées dans la figure 26).

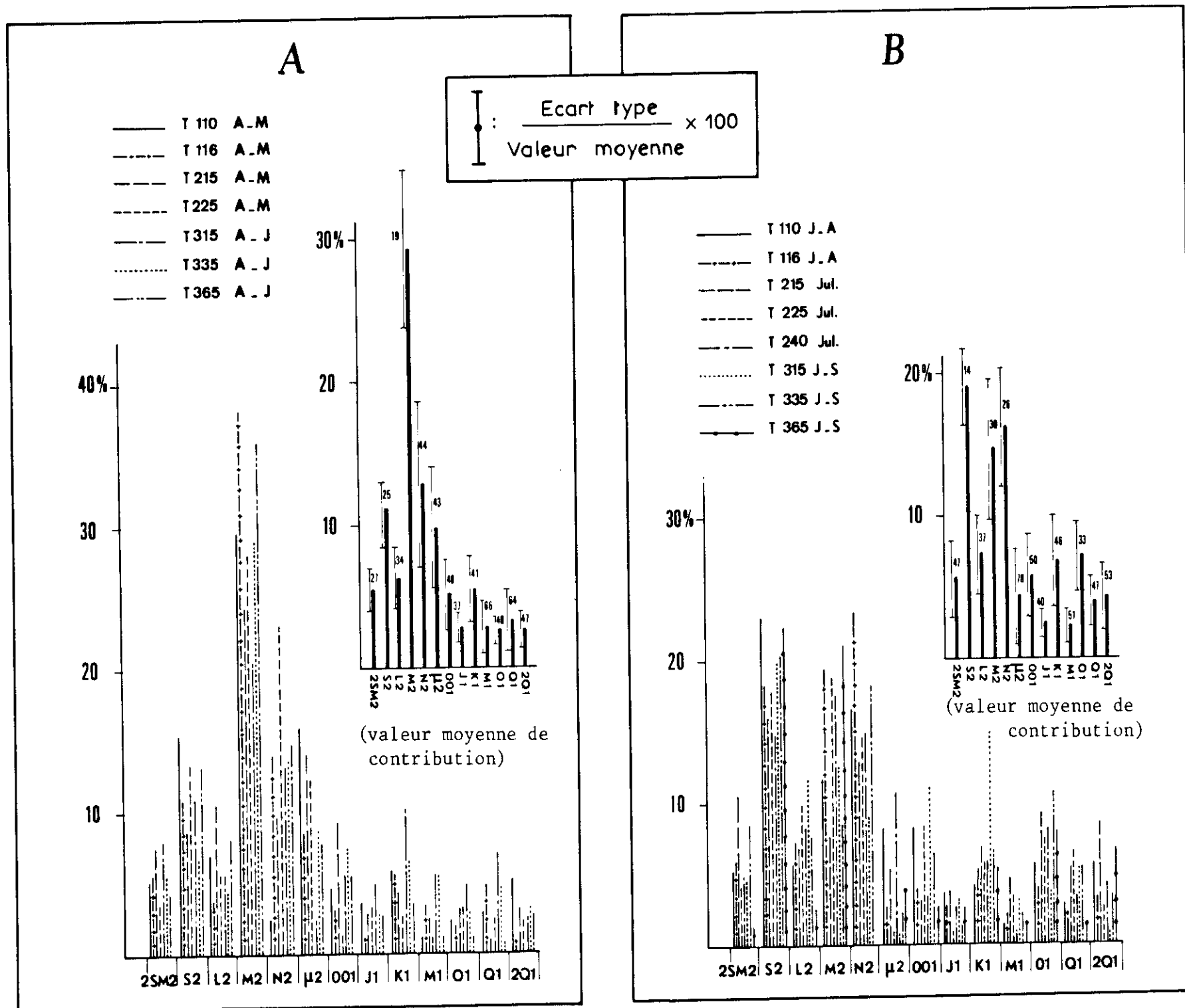


Fig. 26 : Contribution de chaque onde (en %) sur la somme des amplitudes des ondes diurnes et semi-diurnes pour :
 - A : la saison chaude et - B : la saison froide.

Bien que les valeurs obtenues ne sont généralement pas très stables statistiquement parlant (valeurs importantes de l'écart-type), on peut tirer de ces figures certains points intéressants. On remarque que les allures générales de ces deux figures sont très contrastées :

- pendant la saison chaude, on voit une raie prédominante à l'onde M₂ (vers 30% de contribution) avec une faible valeur de l'écart-type. En second lieu les ondes semi-diurnes S₂, N₂ et μ_2 présentent une contribution quasi-identique de 10% environ ; les contributions des ondes diurnes sont négligeables,
- pendant la saison froide, la distribution des raies est beaucoup plus plate que précédemment. Autrement dit, au lieu d'avoir une raie prédominante, il apparaît plusieurs ondes importantes (surtout S₂, M₂ et N₂). On remarque que les raies correspondant à S₂ et N₂ sont plus importantes que la raie correspondant à M₂, ce qui est en contradiction avec les résultats de l'analyse harmonique des hauteurs d'eau (Cf. Généralités). Durant cette période, les ondes diurnes sont plus prononcées que celles de la saison précédente (surtout les ondes O₀₁, K₁ et O₁).

Est-ce que ces résultats représentent vraiment les phénomènes réels ayant pour origine la marée astronomique ?

Comme nous l'avons commenté précédemment, l'analyse harmonique pour une série de températures n'est généralement pas justifiée, sauf dans le cas où l'évolution des températures est liée étroitement à celle de la marée. Il semble que cela soit le cas lors de la saison chaude ; durant cette période, l'eau étant bien stratifiée il est probable que l'on ait des mouvements internes importants. De plus, grâce à la forte stratification de l'eau, les effets des marées internes ou de l'advection des isothermes due au courant de marée peuvent être bien marqués dans l'enregistrement des températures.

Contrairement à la saison chaude, pendant la saison froide, la stratification de l'eau étant peu développée, on constatera moins de marées internes importantes ; les effets des autres phénomènes irréguliers (par exemple les effets du changement de climat ou de l'advection par les courants marins) peuvent être plus prononcés qu'à la saison précédente dans l'enregistrement de température. L'ensemble de l'énergie des phénomènes aperiodiques peut se répandre sur plusieurs ondes de différentes périodes. Le résultat de l'analyse harmonique des températures de la saison froide peut être expliquée de cette manière.

II.3. CONCLUSIONS

Les nombreux résultats graphiques obtenus et les différentes analyses entreprises révèlent les différents aspects dynamiques des phénomènes physiques de la région.

Pour toutes les stations sur le plateau continental, il existe des variations semi-diurnes très importantes dans les données hydrologiques et courantologiques. Ces variations évoluent suivant la saison marine et la position géographique.

L'évolution des paramètres hydrologiques et courantologiques, montre un très grand contraste entre les deux saisons. Les excursions verticales des isothermes sont généralement de l'ordre de 10 à 30 mètres ; elles sont beaucoup plus prononcées et plus dissymétriques en saison chaude qu'en saison froide. Cette dissymétrie dans les tracés des isothermes est probablement due à l'influence du fond lorsque les marées internes atteignent une région côtière peu profonde.

Les résultats de l'analyse harmonique montrent que l'onde M2 est prédominante pendant la saison chaude, tandis que pendant la saison froide, les ondes S2 et N2 sont légèrement plus importantes que l'onde M2. Ceci s'explique par le fait qu'en saison chaude le milieu étant bien stratifié, il est très favorable à l'existence de marées internes importantes ; les effets de marée peuvent donc être bien ressentis dans les enregistrements de température. Tandis que pendant la saison froide, les phénomènes apériodiques peuvent perturber les spectres des ondes périodiques. Ceci est dû probablement à la faible stratification de l'eau ainsi qu'à l'influence relativement faible des marées internes durant cette saison. On note, d'autre part, que les courants baroclines sont beaucoup plus importants et plus stables en saison chaude qu'en saison froide.

D'après différents résultats graphiques des isothermes, nous pouvons constater que la région côtière peut être très favorable à l'accumulation de l'énergie des marées internes. Cela se traduit par le fait que les variations importantes de l'immersion des isothermes n'apparaissent que près du fond au niveau de talus continental et gagnent la surface au fur et à mesure que l'on s'approche de la côte ; près de la côte, elles se répartissent sur toute la colonne d'eau.

En ce qui concerne l'origine de ces variations semi-diurnes, il n'est pas très évident de l'attribuer uniquement aux marées internes. En effet, l'advection des isothermes par les courants de marée peut engendrer des effets identiques. Il est difficile d'évaluer, a priori, la contribution de ce second phénomène, car on ne connaît pas très bien le gradient horizontal des paramètres hydrologiques dans la région. Cette deuxième hypothèse n'est, malgré tout, pas à rejeter en particulier pour le secteur où la pente du fond est très raide où les courants de marée peuvent provoquer des apports de masses d'eaux différentes le long de la pente (par exemple : près du talus continental ou aux bords du Trou-sans-Fond). En-dehors de ce secteur, la prédominance de l'effet des marées internes semble plus probable en raison de :

- l'importance des courants baroclines dans les mesures de courants ;
- l'accumulation privilégiée de l'énergie sur le plateau continental près de la côte.

Pour une étude rigoureuse des marées internes, des mesures continues d'hydrologie et de courantologie sur plusieurs verticales seraient nécessaires. Seules les données de la station TSF 13 sont suffisamment complètes pour être utilisées pour le calcul des modes internes, ainsi que de leurs contributions aux courants baroclines (voir "Décomposition d'une mesure de courant").

Pour mieux comprendre les phénomènes observés, nous étudierons maintenant la théorie générale des ondes internes, ainsi que des modèles de leur génération et de leur propagation.

III - ASPECT DYNAMIQUE

III - 1. EQUATIONS FONDAMENTALES ET DESCRIPTION GENERALE DES
ONDES INTERNES

SOMMAIRE

1. Equations générales de dynamiques des fluides	61
2. Diverses approximations et équations correspondantes.	62
2.1. Fluide incompressible	
2.2. Fluide parfait	
2.3. Linéarisation	
2.4. $\vec{F} = 0$; $\Omega_x = \Omega_y = 0$	
2.5. Approximation de Boussinesq	
3. Equations des vitesses verticales des ondes internes.	66
4. Fréquence de Väisälä	68
5. Bande de fréquence des ondes internes	69
6. Conditions aux limites	72
6.1. Conditions au fond	
6.2. Conditions à la surface libre	
6.3. Conditions à l'interface de deux fluides.	

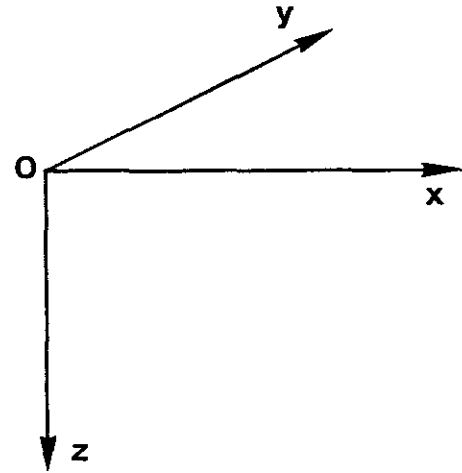
III.1 - EQUATIONS FONDAMENTALES ET DESCRIPTIONS GENERALES DES ONDES INTERNES

Avant d'étudier en détail les modèles que l'on peut appliquer à la région du "Trou-sans-fond", nous allons rappeler rapidement, la théorie générale des ondes internes.

Si les mouvements considérés dans l'océan ont des échelles de grandeur beaucoup plus petites que le rayon de la terre, il suffit d'utiliser le système de coordonnées orthogonales cartésiennes (oxyz), dont l'origine 0 peut être située en surface avec l'axe Oz suivant la verticale descendante. Le plan Oxy est le plan tangent à la surface du globe au point 0, avec Ox dirigé vers l'Est et Oy vers le Nord.

Dans la description Eulérienne d'un mouvement, les grandeurs physiques comme la vitesse ($\vec{V} = (u,v,w)$), la pression (p) et la densité de l'eau (ρ) sont considérées comme des fonctions de la position et du temps ;

$$\vec{V}, p, \rho = \vec{V}, p, \rho (x,y,z,t)$$



1 - Equations générales de dynamique des fluides

Dans ce système d'axe l'équation du mouvement du fluide visqueux peut s'écrire :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} + 2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{V} = - \vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V} + (\lambda + \frac{\mu}{3}) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \vec{F} \quad (1 - 1)$$

où

$\vec{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$: vecteur de rotation de la terre

$\vec{g} = (0, 0, g)$: accélération gravitationnelle apparente et supposée constante

μ et λ : coefficients de viscosité

\vec{F} : résultante des autres forces agissant sur une particule fluide.

et les opérateurs :

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad : \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \text{ étant les vecteurs unitaires}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad : \text{Laplacien}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \quad : \text{dérivée temporelle lagrangienne}$$

Elle exprime l'équilibre d'une particule fluide sous l'action des forces d'inertie $(\rho \frac{d\vec{V}}{dt})$, force de coriolis due à la rotation terrestre $(2 \rho \vec{\Omega} \wedge \vec{V})$, force de pression $(-\vec{\nabla} p)$, force de masse $(\rho \vec{g})$, force interne de frottement $(\mu \nabla^2 \vec{V} + (\lambda + \frac{\mu}{3}) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}))$ et autre force (\vec{F}) éventuelle.

La conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (1-2)$$

qui exprime que la masse d'une particule fluide donnée est invariable au cours du mouvement.

2 - Diverses approximations et équations correspondantes

La résolution des équations (1-1) et (1-2) est pratiquement impossible et on se contente souvent de décrire l'allure générale du mouvement par approximation simplificatrice.

On se limite généralement au cas où les vitesses (u,v,w) ne constituent que des fluctuations de petite amplitude dues aux ondes internes. Autrement dit, on ne tient pas compte du courant permanent dans les équations.

2.1 - Fluide incompressible

La densité de l'eau de mer ρ est fonction à la fois de la pression, de la température et de la salinité : $\rho = \rho(p, T, S)$.

Bien qu'elle soit extrêmement faible, une particule fluide sera soumise à une variation de densité due à la variation de pression lorsqu'elle est déplacée verticalement de sa position initiale (l'ordre de grandeur du gradient adiabatique en densité $\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_{ad}$ étant $5 \times 10^{-5} \text{ km}^{-1}$) (GONELLA, 1973).

Dans le modèle théorique on s'affranchit de cette faible variation en utilisant la densité potentielle (ρ_θ) au lieu de la densité in situ. En effet, ρ_θ est définie par :

$$\rho_\theta = \rho - \int_{p_a}^p \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{\eta S} dp$$

qui peut être interprétée par une diminution de densité de la particule fluide lorsqu'elle est déplacée adiabatiquement (donc l'entropie η est constante) avec la salinité (S) constante de sa pression ambiante (p) à la pression atmosphérique (p_a) (PHILLIPS, 1977).

Avec l'équation de vitesse du son (CS) : $(dp)_{\eta S} = C_S^2 (d\rho)_{\eta S}$ et avec la conservation de densité potentielle, on a :

$$\frac{d\rho_\theta}{dt} = \frac{d\rho}{dt} - \frac{1}{C_S^2} \frac{dp}{dt} = 0$$

Si on utilise la densité potentielle (ρ_θ) à la place de densité in situ (ρ), le fluide peut être considéré théoriquement comme incompressible $\frac{D\rho_\theta}{Dt} = 0$ et l'équation de la conservation de la masse (1-2) devient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (1-3)$$

Néanmoins, les effets de compression adiabatique $\int_{p_a}^p \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{\eta S} dp$

étant extrêmement faibles sont souvent négligeables dans l'Océanographie pratique excepté dans le cas des grandes profondeurs où ils jouent un rôle important. On a donc :

$$\frac{D\rho}{Dt} \approx \frac{D\rho_\theta}{Dt} = 0 \quad (1-4)$$

2.2 - Fluide parfait ($\mu = 0$)

La viscosité entraîne la dissipation d'énergie liée aux processus de frottement interne. La dissipation des ondes internes dans l'océan peut être expliquée en tenant compte du frottement interne dû à la viscosité.

Mais dans l'océan, le nombre de REYNOLDS ($R = \rho UL/\mu$) qui exprime la grandeur relative du terme d'inertie à celle de viscosité est très grand et le terme de viscosité est souvent négligeable dans beaucoup de mouvements océaniques et on suppose que le fluide est parfait ou non visqueux (PHILLIPS, 1977) (où L et U sont des échelles de distance et de vitesse pour un mouvement océanique).

2.3 - Linéarisation ($(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = 0$)

Si les mouvements dus aux ondes internes ont des petites amplitudes $O(\epsilon)$, les termes non-linéaires de convection $((\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V})$ sont de l'ordre de ϵ^2 ($O(\epsilon^2)$) et peuvent être négligés devant les termes $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ (où ϵ est un petit paramètre qui caractérise l'amplitude d'un mouvement).

L'importance de cette linéarisation est de pouvoir résoudre l'équation d'onde par une série de "modes normaux" dans chacun desquels les mouvements des particules fluides sont harmoniques simples et indépendantes des autres modes (TURNER, 1973).

2.4 - $\vec{F} = 0$; $\Omega_x = \Omega_y = 0$

On suppose encore qu'on peut négliger toute force extérieure excepté la gravité ($\vec{F} = 0$) et qu'on néglige la composante horizontale de rotation de la terre ($\Omega_x = \Omega_y = 0$).

Avec les approximations précédentes, les équations (1-1), (1-3) et (1-4) peuvent s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \rho f v + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho f u + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0 \quad \left. \vphantom{\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0} \right\} \text{équations du mouvement (1-5)}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad \text{équation de l'incompressibilité (1-6)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{équation de continuité (1-7)}$$

où

$f = 2 \Omega_z = 2 \omega \sin \vartheta_\ell$: paramètre de Coriolis

$\omega = \frac{2\pi}{24h}$ étant la vitesse angulaire de la terre

et ϑ_ℓ étant la latitude.

2.5 - Approximation de Boussinesq

Si on fait un développement ρ et p autour des valeurs $\rho_0(z)$ et $p_0(z)$ dans l'état de référence d'équilibre hydrostatique, on a /:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho_0(z) + \rho' (x, y, z, t) \\ p &= p_0(z) + p' (x, y, z, t) \\ \frac{dp_0}{dz} - \rho_0 g &= 0 \end{aligned} \right\} (1-8)$$

où ρ' et p' représentent les fluctuations dues aux ondes internes.

Dans ce cas, les amplitudes des fluctuations étant petites, on a :

$$\rho_0 \gg \rho' \quad ; \quad p_0 \gg p' \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial \rho'}{\partial t} \right] \gg \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \rho' \right] \quad (1-9)$$

L'approximation de Boussinesq repose essentiellement sur l'hypothèse que ρ' peut être négligeable en ce qui concerne les termes d'inertie. Mais ρ' joue un rôle principal dans la flottabilité du fluide et ne peut pas être négligé dans le terme de gravité (PHILLIPS, 1977 ; TUERNER, 1973).

Cette approximation est valable si la longueur d'onde dans l'océan est beaucoup plus petite que 6 000 km (LEBLOND et MYSAK, 1978) ce qui est le cas de la majorité des ondes internes dans l'océan.

Avec les relations (1-8) et (1-9), et l'approximation de Bousinesq, (1-5) et (1-6) peuvent être écrits :

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} - \rho_0 f v + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (1-10)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \rho_0 f u + \frac{\partial p'}{\partial y} = 0 \quad (1-11)$$

$$\rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial z} - g \rho' = 0 \quad (1-12)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + w \frac{d\rho_0}{dz} = 0 \quad (1-13)$$

On notera immédiatement par (1-12) qu'une petite variation de la force de gravité ($g\rho'$) est cause de déplacements verticaux d'une particule fluide. Ce qui caractérise les ondes internes.

L'équation (1-13) implique que la variation de densité d'un point donné est due au déplacement vertical de la structure moyenne de densité.

3 - Equation de vitesse verticale des ondes internes

A partir des équations précédentes et en faisant quelques manipulations mathématiques on peut déduire l'équation de vitesse verticale des ondes internes. Le principe de ces manipulations est d'éliminer progressivement p' , ρ' , u et v des équations. On emprunte la méthode utilisée par J. ROBERTS (1975). On élimine d'abord les termes en p' des équations (1-10), (1-11) et (1-12) par différentiations croisées en x et z entre les équations (1-10) et (1-12) d'une part :

$$\frac{\partial(1-12)}{\partial x} - \frac{\partial(1-10)}{\partial z}$$

et en y et z pour les équations (1-11) et (1-12) d'autre part :

$$\frac{\partial(1-12)}{\partial y} - \frac{\partial(1-11)}{\partial z}$$

En faisant une simplification de $\left(\frac{d\rho_0}{dz} \approx 0\right)$ sauf dans l'équation (1-13), l'addition des deux équations obtenues précédemment donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - f \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{g}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial x} + \frac{\partial \rho'}{\partial y} \right) = 0$$

Pour éliminer ρ' on dérive l'équation précédente par rapport à t et on applique l'équation (1-13) :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - f \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0$$

On fait une différenciation en x et y pour l'équation précédente et puis on les ajoute :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - f \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} .$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) - \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

$$- f \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (1-14)$$

Afin d'éviter la complexité de l'équation on néglige les trois derniers termes de (1-14). Finalement, si on applique l'équation de continuité (1-7) et si on fait la transformation suivante par différenciation croisée en x et y des équations (1-10) et (1-11) :

$$\frac{\partial(1-10)}{\partial y} - \frac{\partial(1-11)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = f \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1-15)$$

on obtient l'équation de vitesse verticale des ondes internes simplifiée :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 w) + N^2 \nabla_h^2 w + f^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (1-16)$$

où

$$\nabla_h^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$N = \left(\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \right)^{1/2} \quad : \text{fréquence de Väisälä}$$

La fréquence de Väisälä est le facteur le plus important dans la détermination des caractéristiques des ondes internes et nous allons donc l'étudier d'une manière détaillée.

4 - Fréquence de Väisälä

Supposons qu'une particule fluide se déplace verticalement par une petite distance ξ de sa position d'équilibre sans perturber la stratification du fluide environnant et puis se lâche, son mouvement peut être décrit par les équations (1-12) et (1-13).

En effet, par (1-13) :

$$\rho' = - \frac{d\rho_0}{dz} \cdot \xi \quad \text{car } w = \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

Si on applique les relations précédentes à (1-12) et si on néglige le terme de petite fluctuation de pression, on a :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + N^2 \xi = 0$$

La stabilité impose $\frac{d\rho_0}{dz} > 0$ et aussitôt $N^2 > 0$

La particule fluide oscille donc autour de sa position d'équilibre dans un mouvement harmonique simple dont la fréquence angulaire est N dite fréquence de Väisälä. Autrement dit, elle est la fréquence naturelle d'oscillation d'une particule fluide dans une mer stratifiée.

La période correspondante $\frac{2\pi}{N}$ dite période de Väisälä (T_N) varie de quelques minutes dans la thermocline où se trouve un fort gradient de densité jusqu'aux quelques heures dans l'océan profond où l'eau de mer est presque neutre

du point de vue de la stabilité statique.

La répartition verticale de la fréquence de Väisälä $N(z)$ représente l'ordre de grandeur de la stratification de la mer et peut être servie comme un critère de stabilité statique de la mer :

La stabilité est d'autant plus forte que le gradient vertical de densité est élevé et donc que la fréquence de Väisälä est elle-même élevée.

Contrairement à la tendance stabilisatrice du gradient vertical de densité, le gradient vertical de vitesse horizontale $\frac{\partial \bar{U}}{\partial z}$ (cisaillement) accroît l'instabilité.

$$\text{Le nombre de Richardson } Ri = N^2 / \frac{\partial \bar{U}}{\partial z}^2$$

définit le critère d'instabilité hydrodynamique :

Si $Ri < 1/4$ l'écoulement devient instable

5 - Bande de fréquence des ondes internes

Afin de trouver théoriquement le domaine de fréquence des ondes internes, on se place dans le cas simple d'un fond horizontal et on cherche une solution de la vitesse verticale sous forme de produit de fonctions variables séparées : (Cf. Annexe A) :

$$w = W(z) e^{i(k_x x + k_y y - \sigma t)} \quad (1-17)$$

où :

$W(z)$ étant l'amplitude de la vitesse verticale des ondes internes

σ étant sa fréquence angulaire

k_x et k_y étant respectivement les composantes de x et de y du vecteur de nombre d'onde horizontal (\vec{k}_h) :

$$k_h = \left[\vec{k}_h \right] = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

Si on applique (1-17) à (1-16) on obtient :

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + R^2(z) k_h^2 W = 0 \quad (1-18)$$

où

$$R^2(z) = \frac{N^2(z) - \sigma^2}{\sigma^2 - f^2}$$

Le type de solution de (1-18) dépend du signe du coefficient $R^2(z)$. Si on se limite au cas où $\sigma > f$ on va suivre par la suite le schéma de PHILLIPS (1977) ;

SI $N < \sigma$:

La solution $W(z)$ devient une fonction monotone de z et l'unique mode possible est l'onde de surface qui a une valeur maximale en surface et qui diminue monotoniquement pour disparaître sur le fond.

SI $N > \sigma$:

Dans ce domaine de fréquence les signes de W'' et de W de (1-18) étant opposés, $W(z)$ aura la caractéristique d'une fonction oscillatoire qui change de signe dans l'intervalle de profondeur où $N > \sigma$. De plus, dans cet intervalle on aura une infinité de solutions pour une infinité de valeurs discrètes de k_h .

Ceci est bien illustré par la figure 27 .
(dans PHILLIPS σ est remplacé par n)

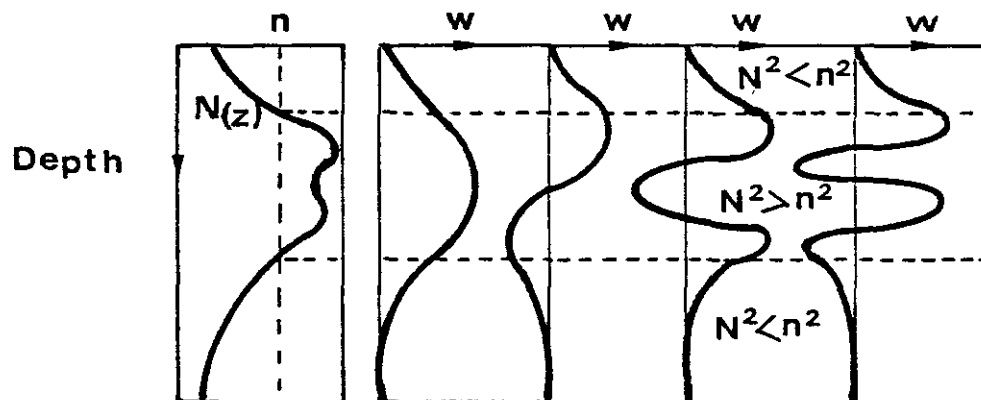


Fig. 27 : Distribution de vitesse verticale W pour les quatre premiers modes des ondes internes. La distribution $N(z)$ est montrée à gauche ; l'intervalle de profondeur où $N^2(z) - n^2 > 0$ est comprise entre les lignes discontinues (PHILLIPS, 1977).

En conclusion, la limite supérieure de fréquence des ondes internes doit être celle de Väisälä et la bande de fréquence des ondes internes est donnée par :

$$f < \sigma < N$$

Les périodes correspondantes :

$$T_N < T < T_f$$

où T_f étant la période d'inertie et définie par :

$$T_f = \frac{2\pi}{f} = \frac{\pi}{\omega \sin \vartheta_\ell}$$

Pour ROBERTS, N est probablement inférieur de $4,2 \times 10^{-2}$ /sec avec une période correspondante de 2,5 minutes. Il faut noter que la fréquence et la période d'inertie sont fonction de la latitude ϑ_ℓ et que les ondes internes ne peuvent se propager au-delà de la latitude critique (ϑ_{cri}) définie par :

$$\vartheta_{cri} = \text{Sin}^{-1} \left(\frac{\sigma}{2\omega} \right)$$

KRAUSS (1966) a donné les limites géographiques pour les différentes marées internes :

S_2 : 90°S - 90°N	K_1 = 30°S - 30°N
M_2 : 75°S - 75°N	O_1 = 28°S - 28°N
N_2 : 72°S - 72°N	

"Or, les observations dans la nature sont en contradiction avec les résultats précédents ; en effet, par exemple, dès 1930, HELLAND-HANSEN notait que des ondes internes de marée diurne caractérisaient les mers profondes de l'Atlantique Nord ($\vartheta_\ell > 30^\circ$)". (SUBERVILLE, 1974).

6 - Conditions aux limites

Les équations du mouvement écrites plus haut, sont dites équations indéfinies. Elles doivent être complétées par les conditions aux limites. Ces conditions aux limites sont déterminées par des conditions physiques sur l'interaction d'un fluide et d'un solide ou de deux surfaces de deux milieux fluides à une surface de séparation.

6.1 - Conditions au fond

En fluide parfait ($\mu = 0$) la vitesse relative est tangente à la paroi solide : $V_r \cdot \vec{n} = 0$, tandis qu'en fluide visqueux, l'expérience montre qu'il y a adhérence du fluide à la paroi : $V_r = 0$ (BINDEL, 1970).

où :

V_r étant la vitesse relative qui est perpendiculaire à \vec{n} et \vec{n} étant le vecteur unitaire perpendiculaire au plan tangent de la paroi (Cf. Fig. 28). Dans cette étude on considère que le fluide est parfait comme on en a supposé plus haut.

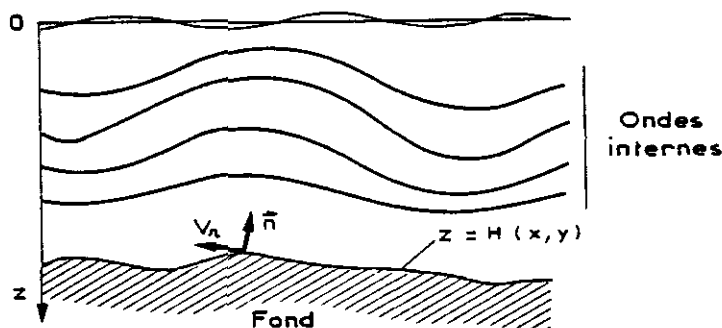


FIGURE 28

Si on désigne par $z = H(x,y)$, la fonction du fond variable, la vitesse verticale w peut être écrite :

$$w = u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \quad \text{pour } z = H(x,y) \quad (1-19)$$

On remarque que la vitesse verticale sur le fond est fonction des composantes horizontales de la vitesse au fond et des gradients horizontaux de la profondeur.

$$\text{Dans le cas du } \underline{\text{fond horizontal}}, \text{ on a : } \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

$H(x,y) = h$ (const.) et la vitesse verticale w est nulle :

$$w = 0 \quad \text{pour } z = h \quad (1-20)$$

6.2 - Condition à la surface libre

A la surface libre, la variation de la pression du fluide est égale à celle de la pression atmosphérique $p_a(x,y,t)$:

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{Dp_a}{Dt} \quad (\text{KRAUSS, 1966})$$

Si on rappelle que la pression p est supposée être composée par la partie d'équilibre hydrostatique $p_0(z)$ et la fluctuation p' due aux ondes internes, on a approximativement :

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p'}{\partial t} + w \frac{dp_0}{dz} = \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 g w \approx \frac{Dp_a}{Dt}$$

Supposons que la pression atmosphérique est constante, on a :

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = -\rho_0 g w \quad (1-21)$$

On dérive (1-10), (1-11) et (1-12) respectivement par rapport à x, y et z et on les ajoute :

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p'}{\partial z} - g\rho' \right) + \nabla_h^2 p' + \rho_0 f \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$$

avec (1-7) et (1-12) l'équation précédente devient :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} - \nabla_h^2 p' - \rho_0 f \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$$

Si on dérive l'équation précédente par rapport à t et puis si on applique la relation (1-15), on a :

$$\rho_0 \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial t^2} - \nabla_h^2 \left(\frac{\partial p'}{\partial t} \right) + \rho_0 f^2 \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1-22)$$

Avec (1-21) on obtient finalement l'équation de vitesse verticale des ondes internes à la surface libre :

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial t^2} + g \nabla_h^2 w + f^2 \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1-23)$$

CAS PRATIQUE

Pour savoir l'ordre de grandeur de vitesse verticale des ondes internes à la surface libre on se place dans le cas du fond horizontal.

Si on applique (1-17) à (1-23), on a :

$$\left(\frac{\sigma^2 - f^2}{gk_h^2} \right) \frac{dW}{dz} + W = 0 \quad (1-24)$$

pour le cas de $N(z)$ constant, la solution (1-18) sera :

$$W \propto e^{iRk_h z}$$

Si on compare maintenant le premier terme de (1-24), avec son deuxième :

$$\left[\left(\frac{\sigma^2 - f^2}{gk_h^2} \right) \frac{dW}{dz} \right] \Big/ W = \frac{\sqrt{\sigma^2 - f^2} \cdot \sqrt{N^2 - \sigma^2}}{gk_h} \quad (1-25)$$

Généralement (1-25) est beaucoup plus petit que l'unité. Par exemple, pour une marée interne dont les paramètres sont de l'ordre de grandeur :

$$N = 0 (10^{-2}) ; \sigma = 0 (10^{-4}) ; k_h = 0 (10^{-6}) ; g = 0 (10^{+2})$$

(1-25) sera de l'ordre de grandeur $0 (10^{-2})$.

Donc, en première approximation, le premier terme de (1-24) peut être négligé devant le deuxième et on utilise souvent dans le cas pratique, la condition simplifiée suivante :

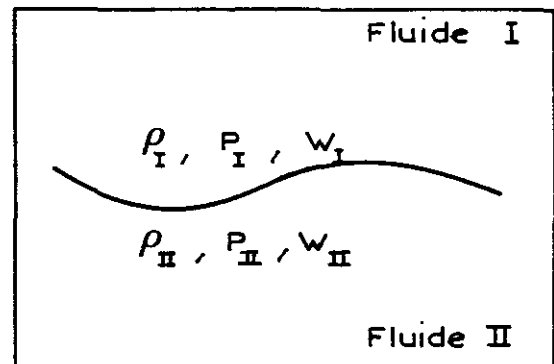
$$W = 0 \quad \text{pour } z = 0 \quad (1-26)$$

6.3 - Conditions à l'interface de deux fluides

Quand deux fluides ne sont pas miscibles, ils sont en contact le long d'une surface de séparation. Sur cette surface, les conditions suivantes seront satisfaites :

$$\begin{aligned} p_I &= p_{II} \\ w_I &= w_{II} \end{aligned} \quad (1-27)$$

où les indices I et II représentent respectivement, la contribution des fluides I et II.



Comme dans le cas de la surface libre, on a :

$$\frac{D(p_I)}{Dt} = \frac{D(p_{II})}{Dt}$$

Ce qui peut être écrit approximativement :

$$\frac{\partial p'_I}{\partial t} + w_I g \rho_I = \frac{\partial p'_{II}}{\partial t} + w_{II} g \rho_{II}$$

Si on applique (1-22) on a :

$$\rho_I \left(\frac{\partial^3 w_I}{\partial z \partial t^2} + f^2 \frac{\partial w_I}{\partial z} + g \nabla_h^2 w_I \right) = \rho_{II} \left(\frac{\partial^3 w_{II}}{\partial z \partial t^2} + f^2 \frac{\partial w_{II}}{\partial z} + g \nabla_h^2 w_{II} \right)$$

Ensemble avec (1-27), c'est une condition à satisfaire à l'interface de deux fluides non-miscibles.

III - 2. SOLUTIONS ANALYTIQUES ET NUMERIQUES POUR DIFFERENTS
MODES AVEC UN FOND HORIZONTAL

SOMMAIRE

1. Solutions analytiques	79
1.1. Modèle à fréquence de Väisälä constante.	
1.2. Equations de vitesse horizontale, de la pression en fonction de $W(z)$	
1.3. Caractéristiques de la propagation des ondes internes	
2. Solutions numériques	87
2.1. Intégration numérique par une méthode de RUNGE-KUTTA	
2.2. Application pratique	
A - Calcul des modes propres	
B - Décomposition d'une mesure des courants (Barocline, Barotrope, quasi-permanent)	
C - Calcul des contributions des différents modes.	
D - Effets des courants permanents sur les ondes internes	
E - Détermination de l'axe privilégié de la propagation des marées internes.	
2.3. Conclusions	108

III - 2. Solutions analytiques et numériques pour différents modes avec un fond horizontal.

Dans le cas du fond horizontal, en utilisant la méthode de séparation des variables (1-17) on obtient l'équation différentielle relativement simple (1-18) :

$$\frac{d^2W}{dz^2} + R^2 k_h^2 W = 0 \quad \text{avec } R^2 = \frac{N^2 - \sigma^2}{\sigma^2 - f^2}$$

Les conditions aux limites sont :

$$W = 0 \text{ pour } z = 0 \text{ et } z = h$$

On est ramené à un problème de valeurs propres. C'est-à-dire, que pour des valeurs de σ et de f données, on aura une infinité de solutions des fonctions propres $W_n(z)$ pour une infinité de valeurs propres de k_h . Où l'indice n ($= 1, 2, 3, \dots$) signifie le nombre de mode.

On indique habituellement l'onde de surface par le mode zéro. Les vitesses verticales des ondes internes de Nième mode sont nulles au fond, à la surface libre et en $(N-1)$ points sur la verticale.

On montre par la figure 29 les profils des ondes internes des cinq premiers modes. On compare les profils avec les schémas des amplitudes des vitesses verticales ajoutés à droite de chaque profil.

1. Solutions analytiques

L'équation (1-18) n'a généralement pas de solution analytique simple, car la fréquence de Väisälä $N(z)$ varie d'une façon arbitraire et ne peut pas être mise sous forme mathématique simple.

Néanmoins, beaucoup d'auteurs ont essayé de trouver des solutions analytiques à partir d'hypothèses relativement simples concernant la répartition verticale de la densité $\rho_0(z)$, suivant qu'elle est linéaire, ou qu'elle varie de façon exponentielle ou de façon hyperbolique, etc... (Cf. KRAUSS, 1966 ; ROBERTS, 1975).

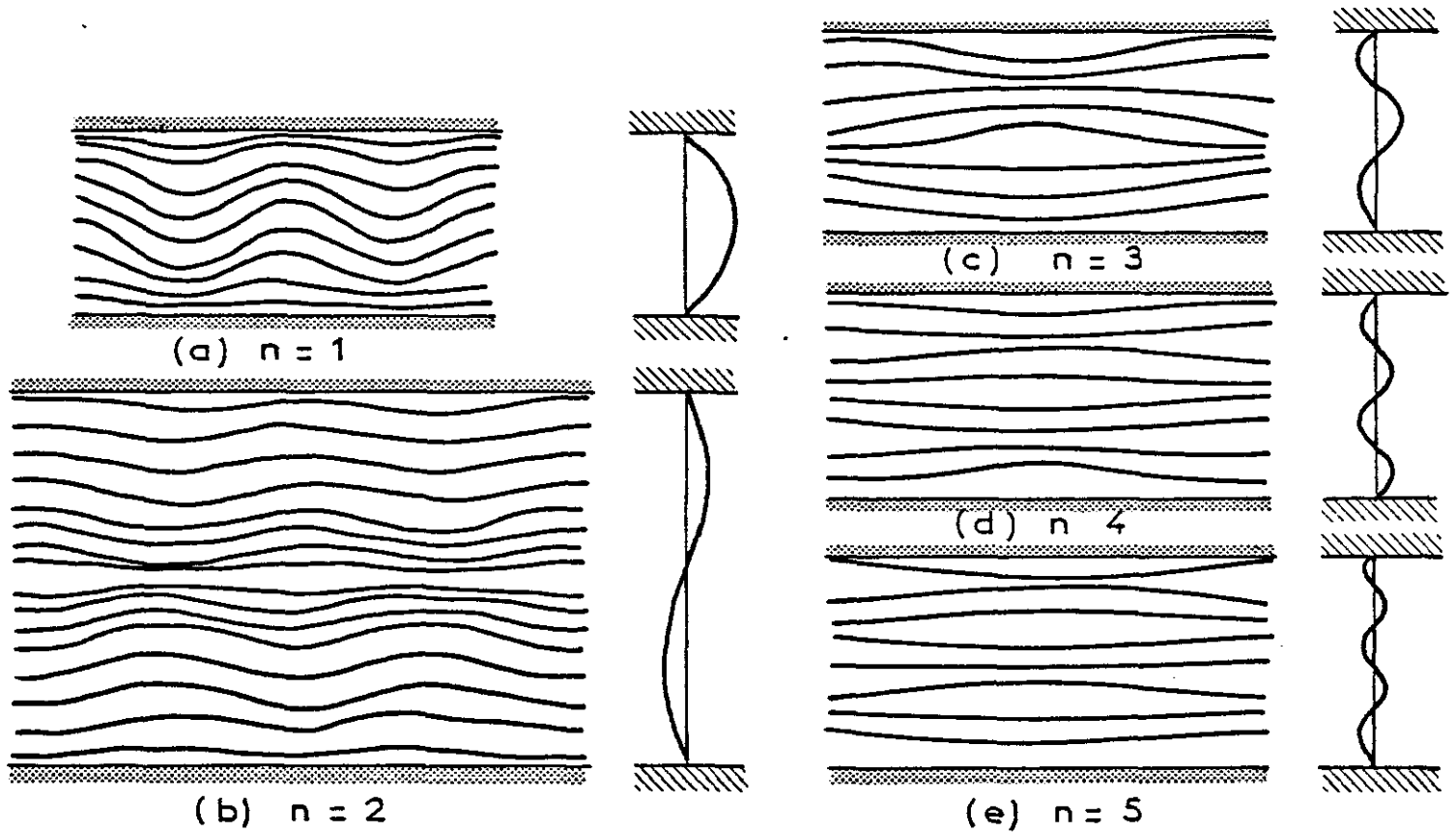


Fig. 29 : Profils des mouvements des ondes internes des cinq premiers modes (d'après ROBERTS, 1975).

On compare ces profils avec les schémas des amplitudes des vitesses verticales ajoutées à droite de chaque profil.

Parmi les nombreux modèles théoriques le modèle à fréquence de Väisälä constante semble très utile d'examiner ici.

En effet, il représente une bonne approximation pour un profil de densité linéaire ou exponentielle et surtout il est souvent utilisé pour un modèle mathématique simple des ondes internes.

1-1 Modèle à fréquence de Väisälä constante.

Soit la densité considérée exponentielle ;

$$\rho_0(z) = \rho_a e^{\frac{N^2}{g} z} \quad (2-1)$$

où ρ_a et N^2 étant constante.

Ce qui donne la fréquence de Väisälä constante. En effet :

$$N^2 = \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} = N^2 = \text{const.}$$

Si $\frac{N^2}{g} \ll 1$, le profil de densité exponentielle est très proche de celui de densité linéaire. En effet, si on développe (2-1) en série de Maclaurin et on se limite aux deux premiers termes on a :

$$\rho_a e^{\frac{N^2}{g} z} \approx \rho_a \left(1 + \frac{N^2}{g} z \right)$$

Le profil de densité linéaire est donc une première approximation du profil de densité exponentielle (Roberts, 1975).

La solution générale de (1-18) peut s'écrire donc :

$$W(z) = \alpha e^{iRk_h z} + \beta e^{-iRk_h z} = \alpha e^{ik_z z} + \beta e^{-ik_z z}$$

où α et β étant des constantes complexes arbitraires k_z étant la composante verticale du vecteur du nombre d'onde (\vec{k}) et défini par :

$$k_z = Rk_h = \sqrt{\frac{N^2 - \sigma^2}{\sigma^2 - f^2}} k_h \quad (2-2)$$

qui est une relation de dispersion.

Avec la condition au fond, on a :

$$\alpha = -\beta$$

$$\text{et } W(x) = 2i\alpha \sin(k_z z) \quad (2-3)$$

Si on applique la condition à la surface on a :

$$k_z = \frac{n\pi}{h}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2-4)$$

On obtient ainsi la solution de l'amplitude de vitesse verticale des ondes internes de Nième Mode :

$$W_n(z) = 2i\alpha_n \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right)$$

Par la figure ci-contre on montre la répartition verticale de W_n pour les trois premiers modes.

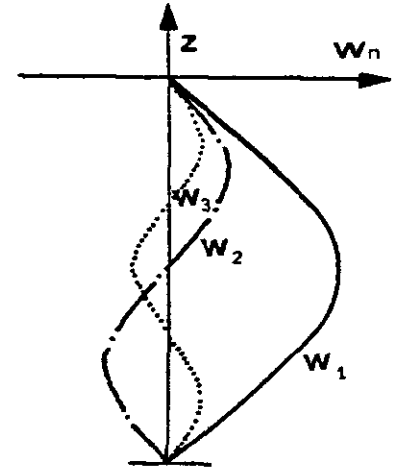


Fig. 30 : Fonctions propres pour les trois premiers modes des ondes internes de fréquence de Väisälä $N(z)$ constante (d'après ROBERTS, 1975).

1-2. Equations de vitesse horizontale, de la pression en fonction de $W(z)$.

Comme le cas de vitesse verticale, on suppose que les fluctuations de vitesse horizontale (u, v) et de pression (p') dues aux ondes internes peuvent être mises sous forme de produit de fonctions variables séparées :

$$\left. \begin{aligned} u &= U(z) e^{i\Sigma} \\ v &= V(z) e^{i\Sigma} \\ p' &= P(z) e^{i\Sigma} \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

où $\Sigma = (k_x \cdot x + k_y \cdot y - \sigma t)$

Avec les relations (2-5) les équations (1-10), (1-11) et (1-7) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} -i\omega u - fv + \frac{ik_x}{\rho_0} p' &= 0 \\ -i\omega v + fu + \frac{ik_y}{\rho_0} p' &= 0 \end{aligned} \quad ik_x u + ik_y v = -\frac{\partial w}{\partial z}$$

Après avoir fait quelques manipulations mathématiques à partir des trois équations précédentes, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} u &= \left(\frac{ik_x \sigma - fk_y}{\sigma k_h^2} \right) \frac{dW(z)}{dz} e^{i\Sigma} \\ v &= \left(\frac{fk_x + ik_y \sigma}{\sigma k_h^2} \right) \frac{dW(z)}{dz} e^{i\Sigma} \\ p' &= \frac{i\rho_0 (\sigma^2 - f^2)}{\sigma k_h^2} \frac{dW(z)}{dz} e^{i\Sigma} \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

Il est intéressant à remarquer que les amplitudes de vitesse horizontale et de pression sont fonctions du gradient vertical de $W(z)$. Et en conséquence, connaissant des valeurs de $W(z)$, on peut évaluer ainsi théoriquement les amplitudes relatives de vitesse horizontale et de pression des ondes internes.

1-3. Caractéristiques de la propagation des ondes internes.

La solution (2-3) peut être interprétée comme la partie imaginaire d'une fonction complexe:

$$W_0 e^{ik_z \cdot z}$$

où $W_0 = 2\alpha$ est une amplitude constante.

on a donc :

$$w(z) = W(z) e^{i(k_x x + k_y y - \sigma t)} = W_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{I} - \sigma t)} \quad (2-7)$$

où $\vec{I} = (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z)$ étant le vecteur de position.

(2-7) représente l'équation d'une onde plane, ce qui implique d'ailleurs que les ondes internes dans un fluide de stratification linéaire sont des ondes planes. (Roberts, 1975).

En effet, le front d'onde à l'instant t_0 est donné par :

$$(\vec{k} \cdot \vec{I} - \sigma t_0) = \text{const.}$$

qui est une équation d'une famille de plans perpendiculaires au vecteur d'onde \vec{k} . Avec le temps ces plans déplacent avec une vitesse $c = \frac{\sigma}{k}$ dans la direction de \vec{k} , la vitesse de phase est donc parallèle à \vec{k} et défini par:

$$\vec{c} = \frac{\sigma \cdot \vec{k}}{k^2} = \frac{\sigma}{k^2} (\vec{i}k_x + \vec{j}k_y + \vec{k}k_z) = \vec{i}c_x + \vec{j}c_y + \vec{k}c_z \quad (2-8)$$

et la vitesse de groupe \vec{c}_g est définie par :

$$\vec{c}_g = \frac{\partial \sigma}{\partial \vec{k}} = \vec{i} \frac{\partial \sigma}{\partial k_x} + \vec{j} \frac{\partial \sigma}{\partial k_y} + \vec{k} \frac{\partial \sigma}{\partial k_z} = \vec{i} c_{g_x} + \vec{j} c_{g_y} + \vec{k} c_{g_z} \quad (2-9)$$

Si on suppose le mouvement de petite période ou $\sigma \gg f$, la relation de dispersion (2-2) se simplifie :

$$\frac{\sigma}{N} = \frac{k_h}{k} = \cos \theta \quad (2-10)$$

où θ est l'angle entre le vecteur du nombre d'onde \vec{k} et le plan horizontal (Fig. 31) et est définie dans les limites :

$$|\theta| < \frac{\pi}{2} \quad \text{car } N > \sigma > 0$$

Si on applique (2-10) à (2-8) et à (2-9), on a :

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \left(\frac{Nk_h}{k^3} k_x, \frac{Nk_h}{k^3} k_y, \frac{Nk_h}{k^3} k_z \right) \\ \vec{c}_g &= \left(\frac{Nk_z^2}{k^3 k_h} k_x, \frac{Nk_z^2}{k^3 k_h} k_y, \frac{-Nk_h}{k^3} k_z \right) \end{aligned} \quad (2-11)$$

ce qui implique :

$$\vec{c} \cdot \vec{c}_g = 0 \quad (2-12).$$

Si on résume les caractéristiques de la propagation des ondes internes,

- Elles propagent dans le sens bien déterminé par leur fréquences (σ) et la stratification de la mer considérée (N).

(cf. (2.10))

- La vitesse de groupe est perpendiculaire à la vitesse de phase.

(cf. (2-12))

- Mais elle se sont situées dans le même plan vertical car :

$$\frac{c_{gy}}{c_{gx}} = \frac{c_y}{c_x} = \frac{k_y}{k_x} \quad (\text{Roberts, 1975}).$$

- Les composantes horizontales de \vec{c} et de \vec{c}_g sont dans le même sens tandis que les composantes verticales sont opposées avec les mêmes grandeurs. (cf. (2-11)).

Si on exprime les vitesses horizontales par des ondes planes comme (2-7) : $u = U_0 \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{l} - \sigma t)}$; $v = V_0 \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{l} - \sigma t)}$

et les applique à l'équation de continuité ($\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$) on obtient :

$$\vec{k} \cdot \vec{V} = 0$$

Qui implique que :

- Les mouvements des particules fluides sont perpendiculaires à la propagation des phases. Autrement dit , ils sont parallèles à la vitesse de groupe. (Turner(1973), Leblond & Mysak(1978)) ce qui affirme aussi que l'énergie se propage avec la vitesse de groupe. On schématise par la figure les divers caractéristiques mentionnées précédemment.

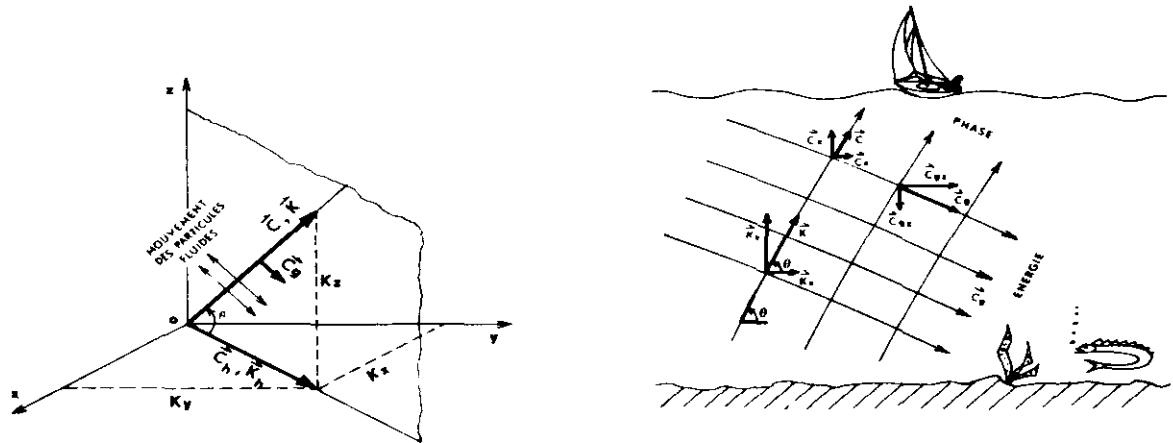


Fig. 31 : Schématisation des vitesses de phase et de groupe.

On a déjà constaté d'après (2-10) que la direction de la propagation des ondes internes est fonction de σ et de N . Il est très intéressant d'examiner deux cas spéciaux :

- Si $\sigma = N$

On a $\alpha^0 = 0$ et $K_z = 0$. Les mouvements des particules fluides sont verticaux et les ondes internes propagent horizontalement ce qui est en accord avec la définition de la fréquence de Väisälä, fréquence naturelle d'une particule fluide déplacée verticalement.

(Turner, 1973).

- Si $\sigma \rightarrow 0$

On a $\alpha^0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ et $K_h \rightarrow 0$. Les mouvements des particules fluides sont horizontaux et en phase sur toute ligne horizontale.

La propagation des phases est alors verticale.

Il est évident que la propagation des ondes internes dans la nature se situe entre deux limites extrêmes cités plus haut. Mowbray et Rarity ont bien vérifié expérimentalement la relation de dispersion (2-10) . Ils ont montré aussi que les phases se propagent perpendiculairement à l'énergie (C_g). (Fig. 32).

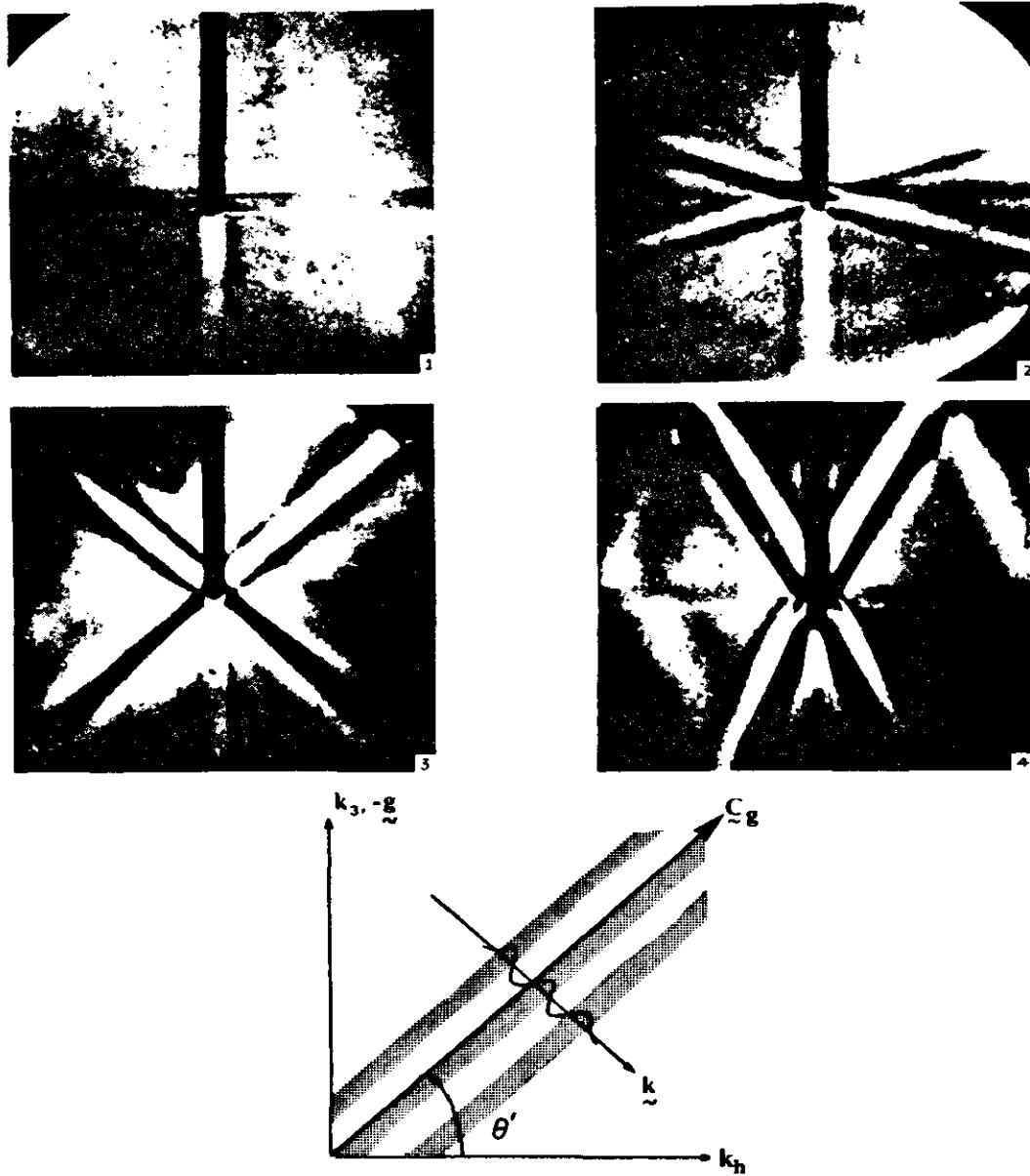


Fig. 32 . Schlieren pictures of the phase configuration of internal gravity waves. A side view of the undisturbed fluid is shown in (1) and patterns corresponding to increasing forcing frequencies appear in the following sequence: (2) $\omega/N = 0.318$; (3) $\omega/N = 0.615$; (4) $\omega/N = 0.900$.

The X-shaped figures seen in these pictures are rays, emanating from a source attached to the bottom of the rigid vertical bar visible as a dark line. The alternation of light and dark bands along these rays represent wave crests, propagating across the ray as sketched in the bottom panel and in a manner similar, except for the direction of propagation, to that illustrated in Fig. 8.2. (From Mowbray and Rarity, 1967.) (d'après LEBLOND et MYSAK, 1978) .

2. Solutions Numériques.

2-1. Intégration numérique par une méthode de Runge-Kutta.

L'intégration numérique de l'équation différentielle (1-18) associée aux conditions aux limites (1-20) et (1-26) peut être faite à l'aide de la méthode de Runge-Kutta.

Parmi les nombreuses méthodes pour la solution approximative des équations différentielles, la méthode de Runge-Kutta est connue comme une méthode efficace étant convergente et stable. Les formules fondamentales de cette méthode sont données par la suite (Scheid, 1968).

Etant données les équations différentielles simultanées de premier ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dW}{dz} = f_1 (z, W, U) \\ \frac{dU}{dz} = f_2 (z, W, U) \end{array} \right.$$

On découpe l'axe z en nombre fini convenable (n) avec le pas $h_0 (=h/n)$. Connaissant les valeurs initiales $W(z_1)$ et $U(z_1)$ les formules s'écrivent pour (i + 1) ième valeurs : (Fig. 33)

$$W_{i+1} = W_i + \frac{1}{6} (l_1 + 2l_2 + 3l_3 + l_4)$$

$$U_{i+1} = U_i + \frac{1}{6} (m_1 + 2m_2 + 3m_3 + m_4)$$

$$\begin{aligned} \text{Où } l_1 &= h_0 \cdot f_1 (z_i, W_i, U_i) \\ m_1 &= h_0 \cdot f_2 (z_i, W_i, U_i) \\ l_2 &= h_0 \cdot f_1 (z_i + 1/2 h_0, W_i + 1/2 l_1, U_i + 1/2 m_1) \\ m_2 &= h_0 \cdot f_2 (z_i + 1/2 h_0, W_i + 1/2 l_1, U_i + 1/2 m_1) \\ l_3 &= h_0 \cdot f_1 (z_i + 1/2 h_0, W_i + 1/2 l_2, U_i + 1/2 m_2) \\ m_3 &= h_0 \cdot f_2 (z_i + 1/2 h_0, W_i + 1/2 l_2, U_i + 1/2 m_2) \\ l_4 &= h_0 \cdot f_1 (z_i + h_0, W_i + l_3, U_i + m_3) \\ m_4 &= h_0 \cdot f_2 (z_i + h_0, W_i + l_3, U_i + m_3) \end{aligned}$$

Dans notre cas, l'équation différentielle (1-18) peut être décomposé en équations différentielles simultanées de premier ordre.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dW}{dz} = U = f_1(U) \\ \frac{dU}{dz} = -R^2(z) \cdot k_h^2 W = f_2(z, W) \end{array} \right.$$

avec $R^2(z) = \frac{N^2(z) - \sigma^2}{\sigma^2 - f^2}$

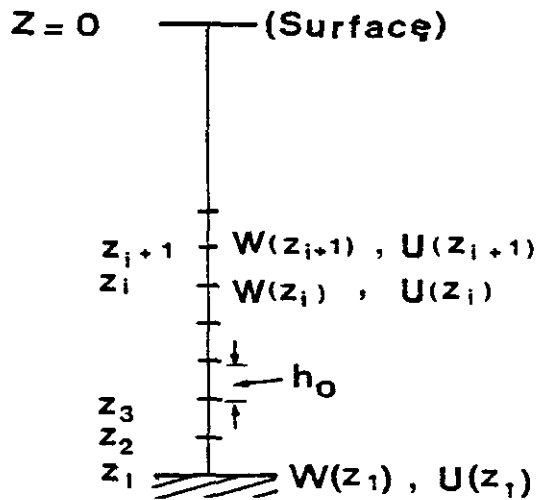


Fig. 33

Par la méthode de Runge-Kutta citée plus haut, on calcule W et U :

$$W_{i+1} = W_i + \frac{1}{6} (l_1 + 2 l_2 + 2 l_3 + l_4)$$

$$U_{i+1} = U_i + \frac{1}{6} (m_1 + 2 m_2 + 2 m_3 + m_4)$$

où

$$l_1 = h_0 \cdot f_1(U_i)$$

$$m_1 = h_0 \cdot f_2(z_i, W_i)$$

$$l_2 = h_0 \cdot f_1(U_i + 1/2 m_1)$$

$$m_2 = h_0 \cdot f_2(z_i + 1/2 h_0, W_i + 1/2 l_1)$$

$$l_3 = h_0 \cdot f_1(U_i + 1/2 m_2)$$

$$m_3 = h_0 \cdot f_2(z_i + 1/2 h_0, W_i + 1/2 l_2)$$

$$l_4 = h_0 \cdot f_1(U_i + m_3)$$

$$m_4 = h_0 \cdot f_2(z_i + h_0, W_i + l_3)$$

Les valeurs initiales sur le fond sont données :

$$W(z_1) = 0 \text{ et } U(z_1) = \text{quelconque.}$$

Comme on cherche dans ce calcul les valeurs relatives au lieu des valeurs absolues, le choix arbitraire de la dérivée de la vitesse verticale au fond $U(z_1)$ n'est pas important. Ce qui implique que le choix arbitraire de $U(z_1)$ ne modifie pas les valeurs propres k_h (Mazé, 1973).

Connaissant $N(z)$ à partir des valeurs moyennes de densité $\rho_0(z)$ et pour une valeur donnée de σ et de f , les solutions de W et de U peuvent être trouvées pour une infinité de valeurs du nombre d'onde horizontal k_h .

On porte dans l'équation une valeur convenable de premier mode k_1 et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne pour une valeur de k_1 une fonction $W(z)$ qui répond à la condition de surface ($W \approx 0$, pour $z=0$) avec une précision convenable ($\pm 10^{-2}$ par exemple).

$U(z)$ étant proportionnel à la vitesse horizontale (Cf (2-6)), on obtient ainsi à partir du calcul numérique les amplitudes relatives des vitesses verticales (W_n) et horizontales (U_n) des ondes internes de Nième mode ainsi que les nombres d'onde horizontales (k_h) correspondante.

2.2. Application Pratique

A. Calcul des modes propres.

Pour cet exemple on utilise les mesures hydrologiques faites dans les stations TSF 9 et TSF 13.

On est parti de la répartition des différents paramètres hydrologiques (S, T, σ_t) dans les stations situées presque au même endroit mais effectuées durant deux saisons différentes, saison froide (TSF 9) et saison chaude (TSF 13) et on les compare (pour les caractéristiques des différentes saisons marines, voir la Généralité).

Le calcul pratique de la fréquence de Väisälä a été fait approximativement de la manière suivante :

$$N(z) = \frac{g}{1 + \overline{\sigma}_t(z) \times 10^{-3}} \cdot \frac{\Delta \overline{\sigma}_t}{\Delta z} \quad (\text{avec } \Delta z = 2.5 \text{ mètres})$$

où $\overline{\sigma}_t(z)$ représente des valeurs moyennes de Sigma-T.

Pour le manque des valeurs de $\overline{\sigma}_t$ au-dessous de 40 m jusqu'au fond (55m) on a fait une extrapolation linéaire.

Ensemble des résultats graphiques du calcul numérique de W_n et de U_n pour les marées internes M2 ($T = 12.42$ heures) sont montrés dans la figure 34.

On remarque un contraste très marqué entre deux stations :

- Dans le cas de TSF 13, la variation de la densité moyenne est assez linéaire.

Hormis la couche superficielle la fréquence de Väisälä se répartit donc d'une valeur constante avec une période correspondante de 4 minutes environ. On remarque que les amplitudes relatives (normalisées par rapport aux valeurs extrêmes) des vitesses verticales et horizontales des différents modes montrent une répartition assez symétrique par rapport à la mi - profondeur, ce qui est très analogue au modèle théorique à densité linéaire. (cf. Fig.30).

- Au contraire, dans la station TSF 9, le gradient maximum de densité étant situé en couche superficielle, la répartition de la fréquence de Väisälä est assez différente de la station précédente.

Son maximum apparaît dans la thermocline (au niveau de 10 m environ) avec une période correspondante de 3.5 Minutes.

La répartition verticale des vitesses verticales et horizontales des différents modes sont très asymétriques par rapport à la mi-profondeur.

Il faut remarquer toutefois que les amplitudes des vitesses verticales et horizontales que l'on a calculées ne sont pas des valeurs réelles mais seulement des valeurs relatives.

Et les contributions des différents modes pour les mouvements des ondes internes se détermineront par une analyse des observations.

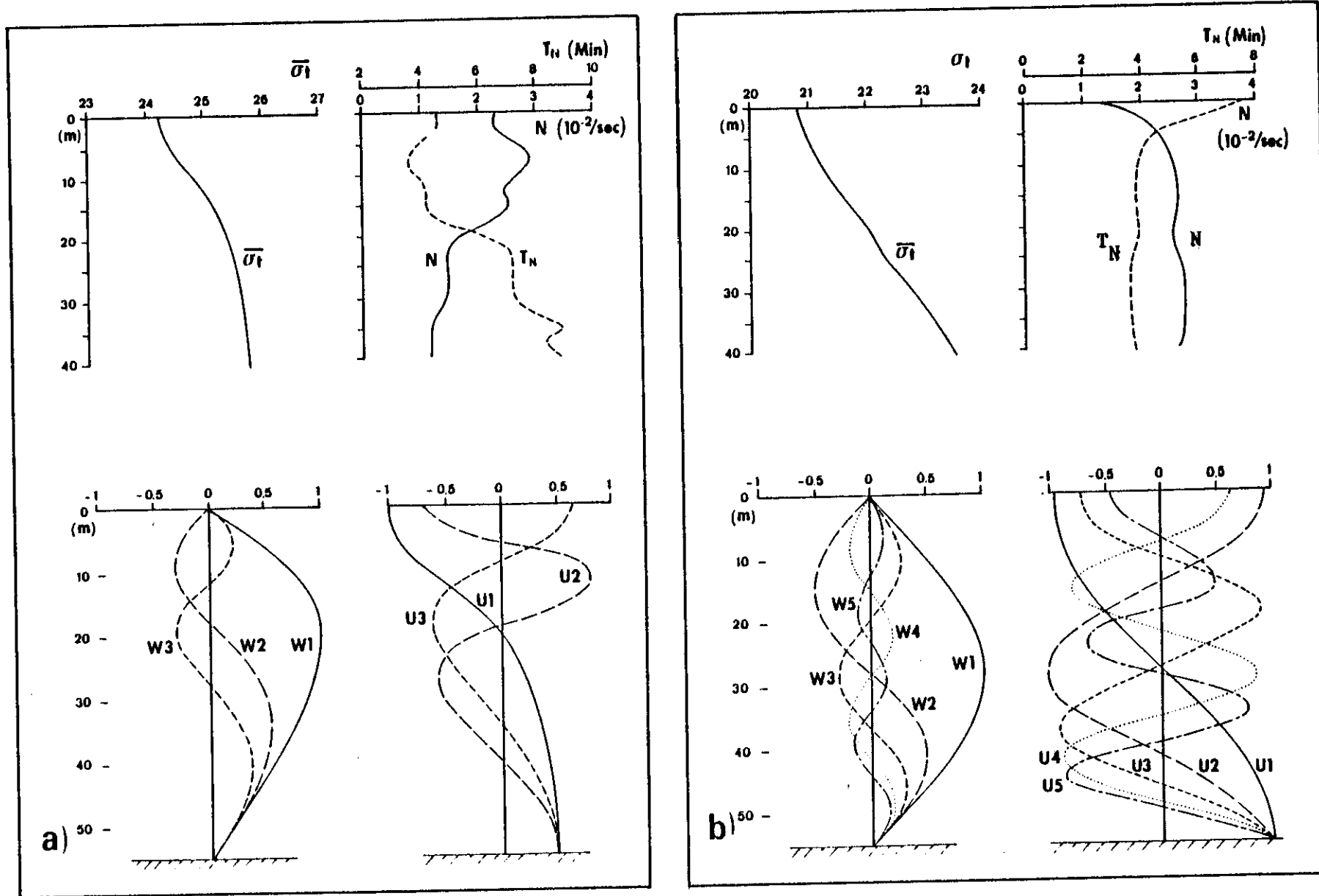


Fig. 34 : Répartition verticale de σ_t moyen, de la fréquence de Väisälä (N), de la période de Väisälä (T_N), des amplitudes relatives des vitesses verticales (W_n) et des vitesses horizontales (U_n) normalisées par rapport aux valeurs extrêmes : a) pour la saison froide (TSF 9) et b) pour la saison chaude (TSF 13).

B. Décomposition d'une mesure des courants
(Barotrope , Barocline , Quasi-permanent).

Avant d'entrer dans le calcul des contributions des modes, il est nécessaire d'extraire les courants baroclines dus aux ondes internes d'une mesure des courants.

On suppose qu'une mesure des courants est composée par :

- des courants barotropes* associés à la marée,
- des courants quasi-permanents qui varient selon la saison ou par l'ajustement géostrophiques,
- des courants baroclines* aux ondes internes. On obtient schématiquement les courants baroclines : courants baroclines = mesure des courants- courants quasi permanents- courants barotropes.

Primo, les courants quasi-permanents peuvent être éliminés par une soustraction des valeurs moyennes pour certains cycles de marée en chaque niveau des mesures des courants.

Secundo, les courants barotropes peuvent être éliminés par une soustraction des valeurs moyennes suivant la verticale à chaque instant donné des courants résultants précédemment déterminés.

Cette opération implique que le débit total du aux ondes internes est nul :

$$\int_0^h u(z) dz = 0$$

Qui n'est pas difficile à vérifier. En effet :

$$\int_0^h u(z) dz \propto \int_0^h U_n dz = \int_0^h dW_n = 0$$

* On utilise ici les mots 'barotrope' et 'barocline' pour spécifier respectivement les courants homogène et variant suivant la verticale.

Les fig. 36,37 montrent les courants barotropes et baroclines aux différents niveaux ainsi déterminés.

Dans les mêmes figures on montre les courants quasi-permanents et les variations heure par heure des courants baroclines sur la verticale. La figure 35 montre les amplitudes des coefficients de Fourier et leurs phases de l'onde M₂ des courants barotropes (U_T , V_T) et baroclines (U_C , V_C).

On remarque que les composantes N - S des courants sont constitués principalement par les courants baroclines.

L'allure générale des variations des courants baroclines et la différence des phases de 180 degré environ entre la couche superficielle et inférieure semblent suggérer une contribution principale du premier mode des ondes internes semi-diurne.

On déterminera plus tard les contributions exactes des différents modes aux variations des courants baroclines semi-diurnes.

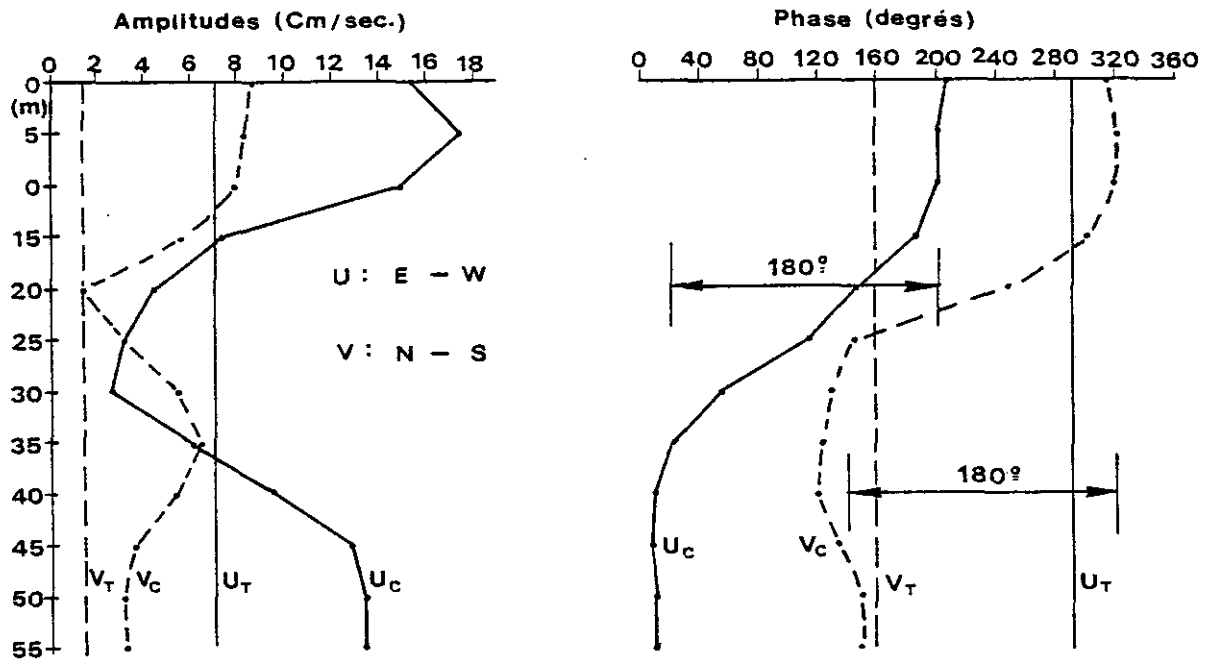
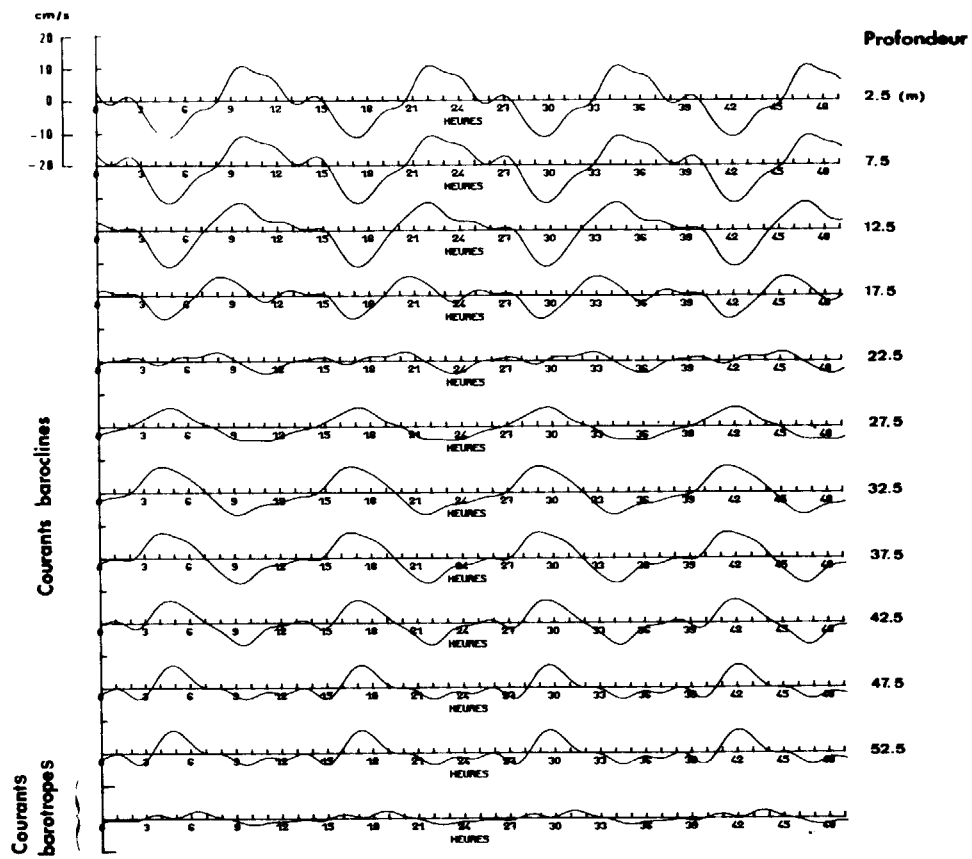
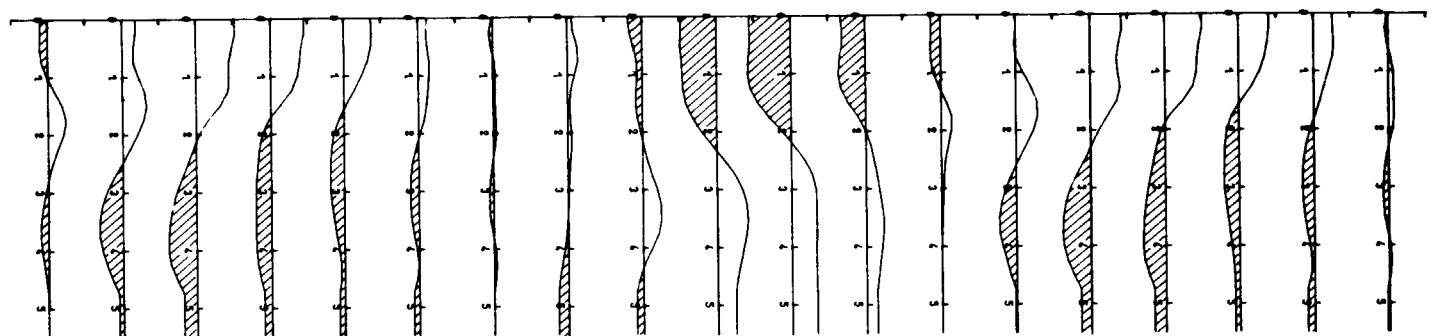
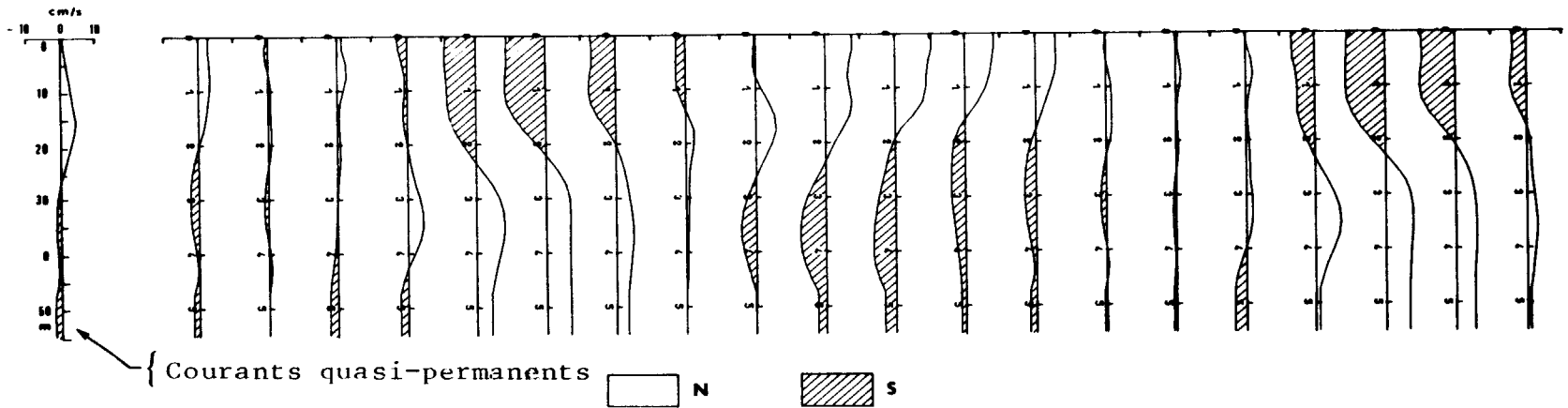


Fig. 35 : Amplitudes des coefficients de FOURIER et leurs phases de l'onde M₂ des courants barotropes (U_T , V_T) et baroclines (U_C , V_C) (TSF 13).

Composante N_5



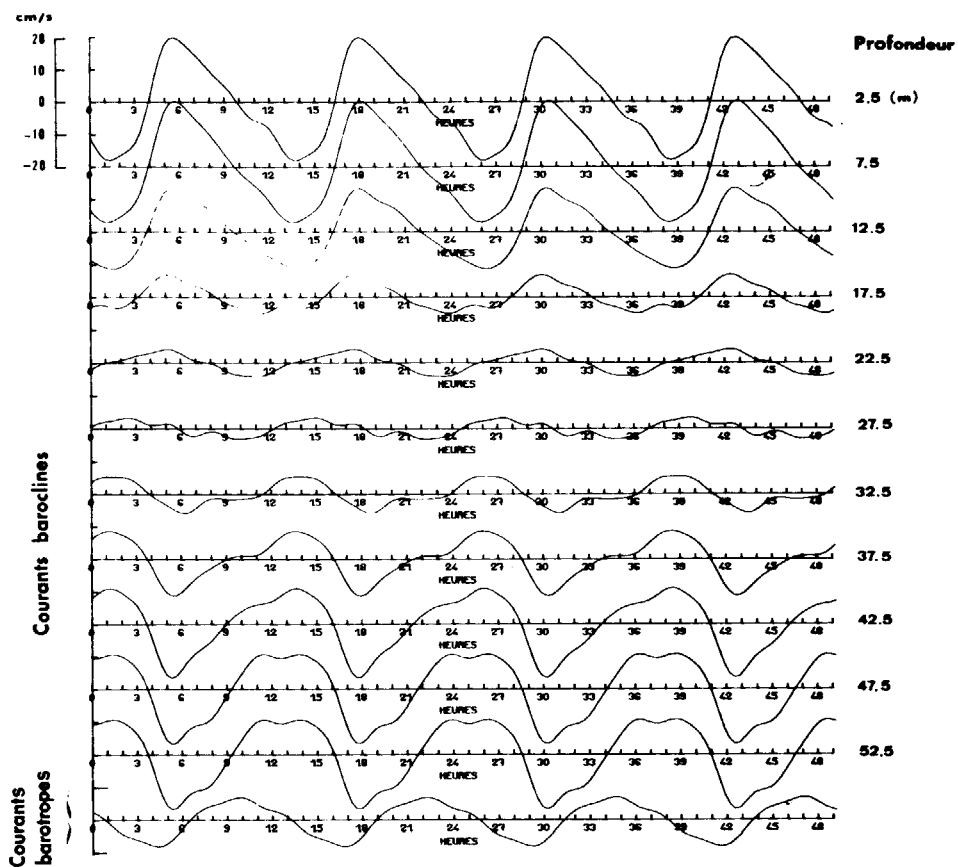
(courants baroclines à différents niveaux et courants barotropes).



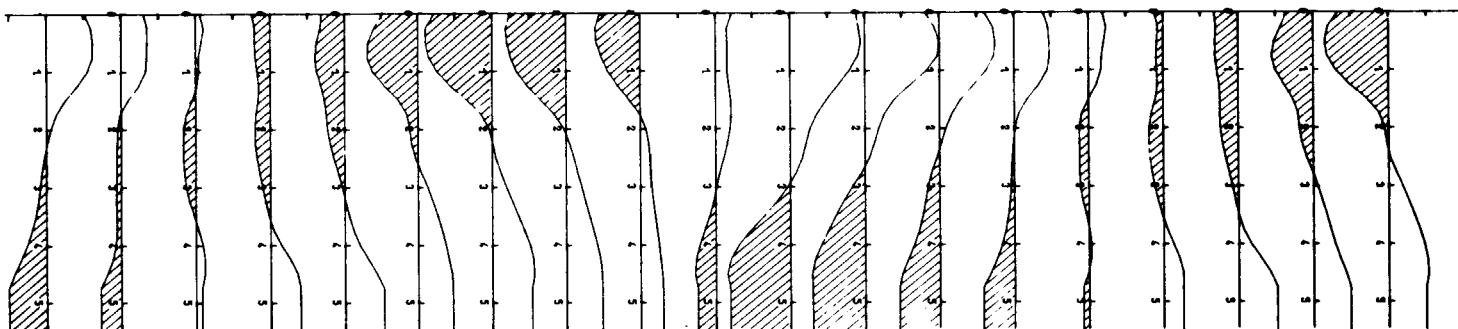
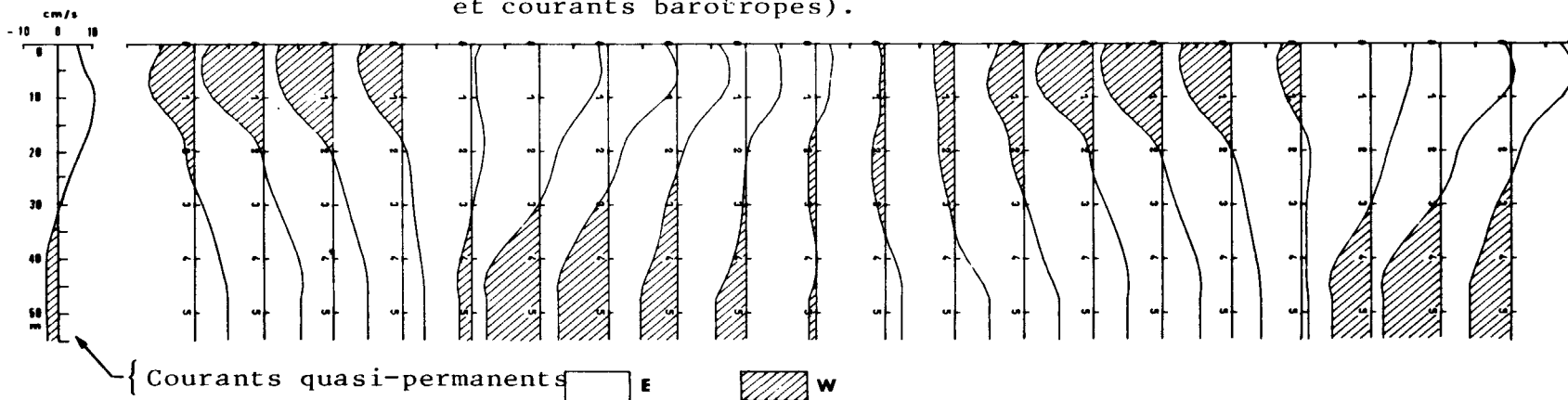
(variations heure par heure des courants baroclines sur la verticale).

Fig. 36 : Décomposition des courants Nord-Sud (TSF 13.).

Composante E-W



(courants baroclines aux différents niveaux et courants barotropes).



(variations heure par heure des courants baroclines sur la verticale)

Fig. 37 : Décomposition des courants Est-Ouest (TSF 13).

C. Calcul des contributions des différents modes.

Si $W(z, t)$ et $U(z, t)$ représentent respectivement des déplacements verticaux des isopycnes (ou des isothermes) et des variations des courants baroclines dus aux ondes internes d'une fréquence donnée σ_0 , on peut les exprimer par les séries de Fourier :

$$W(z, t) = a_w(z) \cos \sigma_0 t + b_w(z) \sin \sigma_0 t$$

$$U(z, t) = a_u(z) \cos \sigma_0 t + b_u(z) \sin \sigma_0 t$$

où a_w , b_w , a_u et b_u sont des coefficients de Fourier calculés à partir des mesures.

Toute combinaison linéaire de solutions élémentaires est une solution de l'équation linéaire des ondes internes.

On peut donc représenter les amplitudes des vitesses verticales et horizontales des ondes internes par une combinaison linéaire des différents modes (Krauss , 1966). En effet :

$$\left(\begin{array}{l} a_w(z) = \sum A_n W_n(z) \\ b_w(z) = \sum B_n W_n(z) \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{l} a_u(z) = \sum C_n U_n(z) \\ b_u(z) = \sum D_n U_n(z) \end{array} \right)$$

où A_n , B_n , C_n , et D_n étant les coefficients de contribution des différents modes.

L'orthogonalité des fonctions propres W_n et les conditions aux limites nous conduit à une relation intéressante (Morse (1953); Krauss (1966)):

$$\left. \begin{array}{l} \int_0^h W_m(z) \cdot W_n(z) \cdot R^2(z) dz = \begin{cases} 0 & ; m \neq n \\ Ew^2 & ; m = n \end{cases} \\ \int_0^h \frac{dW_m}{dz} \cdot \frac{dW_n}{dz} dz = \int_0^h U_m \cdot U_n dz = \begin{cases} 0 & ; m \neq n \\ Eu^2 & ; m = n \end{cases} \end{array} \right\} \quad (2-13)$$

$$\text{où } Ew^2 = \int_0^h W_n^2 R^2(z) dz \quad ; \quad Eu^2 = \int_0^h U_n^2 dz$$

En utilisant (2.13) on peut évaluer les coefficients A_n , B_n , C_n , et D_n .
En effet :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{Ew^2} \int_0^h a_w(z) \cdot W_n(z) \cdot R^2(z) dz \\ B_n &= \frac{1}{Ew^2} \int_0^h b_w(z) \cdot W_n(z) \cdot R^2(z) dz \\ C_n &= \frac{1}{Eu^2} \int_0^h a_u(z) \cdot U_n(z) dz \\ D_n &= \frac{1}{Eu^2} \int_0^h b_u(z) \cdot U_n(z) dz \end{aligned} \quad (2-14)$$

Mais en réalité il est extrêmement difficile d'obtenir les coefficients de Fourier des mouvements verticaux (a_w , b_w). En effet la poursuite des isothermes ou des isopycnes en gardant les profondeurs moyennes constantes n'est pas toujours évidente et surtout quand il s'agit de la couche superficielle ou près du fond où il existe souvent la disparition ou la discontinuité des isolignes.

De plus il n'y a pas de bons moyens d'éliminer les effets des courants quasi-permanents et des courants barotropes qui peuvent nous conduire parfois aux fausses interprétations des ondes internes.

Tandis que les coefficients de Fourier des courants baroclines peuvent être obtenus facilement et les coefficients C_n et D_n peuvent être calculés à partir de (2-14) si on dispose une mesure des courants presque continues de surface jusqu'au fond.

Pour la station TSF 13, comme il y a des mesures des courants tous les 2.5 mètres de surface jusqu'au 47.5 mètres (fond. 55m) on a utilisé (2.14) pour C_n et D_n .

Pour le manque de données pour 50 m, 52.5 m et 55 m on utilise des valeurs de 47.5 mètres.

On montre dans le tableau 5, les coefficients C_n et D_n ainsi que ses amplitudes $\sqrt{C_n^2 + D_n^2}$ pour les composantes E-W et N-S des ondes internes M2.

Sur la figure 38 on compare les grandeurs relatives des amplitudes de plusieurs modes.

		Modes				
		1	2	3	4	5
E - W	Coef.					
	C_n	14.42	- 1.15	1.11	- 0.73	- 0.72
	D_n	3.54	- 2.81	1.36	0.25	- 0.32
	$\sqrt{C_n^2 + D_n^2}$	14.85	3.04	1.76	0.77	0.79
N - S	C_n	-4.70	2.81	-0.39	-0.64	0.24
	D_n	4.68	-2.75	-1.49	0.60	0.04
	$\sqrt{C_n^2 + D_n^2}$	6.69	3.93	1.54	0.88	0.24

TABLEAU 5

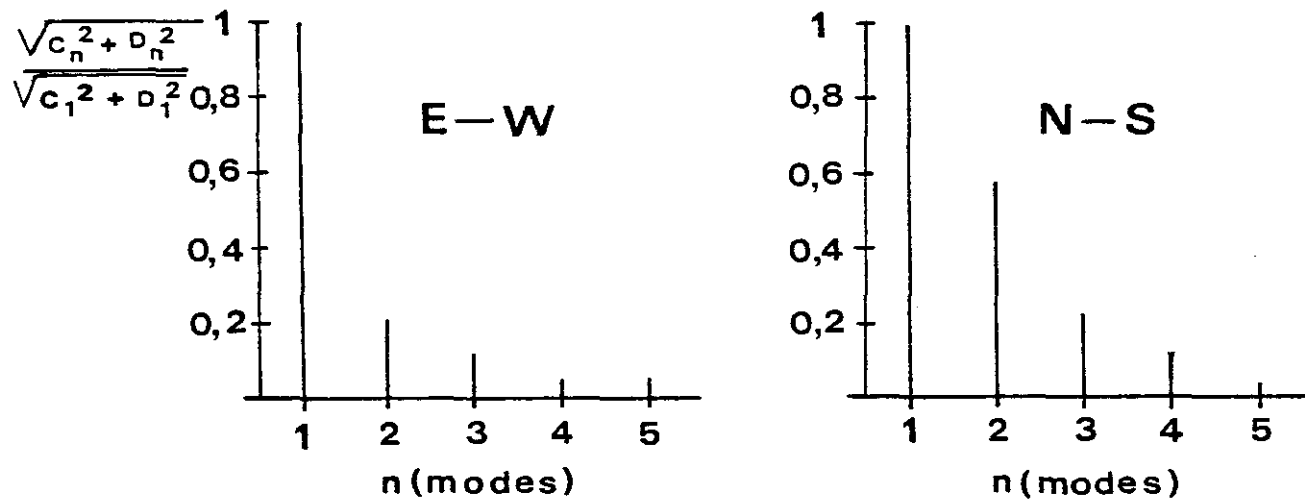


Fig. 38 : Grandeurs relatives des amplitudes de plusieurs modes.

Dans les courants E-W., la composante semi-diurne ($\frac{1}{T}$) est nettement supérieure aux autres fréquences dans toutes les couches d'eau, tandis que dans les courants N-S. elle a presque même ordre grandeur que la composante quart-diurne ($\frac{2}{T}$) dans la couche intermédiaire (15- 25 m) et dans la couche inférieure (45 - 55 m).

Ce qui est dû vraisemblablement aux faibles valeurs des courants dans ces couches et en conséquence à l'instabilité de mesure des courants. Autrement dit le rapport du bruit / signal est très élevé dans ces couches. Ce qui nous amène peut-être aux valeurs importantes des coefficients C_n et D_n dans les hauts modes dans les courants N-S.

Dans les tableaux 6, 7, 8 et 9, on montre les contributions des différents modes ($C_n U_n$ et $D_n U_n$) et compare les sommes des contributions des modes ($\sum C_n U_n$ et $\sum D_n U_n$) avec les coefficients de Fourier (A_u et D_u).

Dans le tableau 10, on compare les amplitudes ($\sqrt{(\sum C_n U_n)^2 + (\sum D_n U_n)^2}$) et les phases ($\tan^{-1} \frac{\sum D_n U_n}{\sum C_n U_n}$) avec les amplitudes ($\sqrt{a_u^2 + b_u^2}$) et les phases ($\tan^{-1} \frac{b_u}{a_u}$) obtenues par l'analyse de Fourier.

On constate que l'assimilation d'un courant barocline semi-diurne par les ondes internes est très satisfaisante. Ce qui peut nous autoriser à dire que la théorie linéaire des ondes internes peut être servie en bonne première approximation pour les courants baroclines dus aux ondes internes.

Prof.	$C_1 U_1$	$C_2 U_2$	$C_3 U_3$	$C_4 U_4$	$C_5 U_5$	$\Sigma C_n U_n$	$a_u (z)$
0	-13.82	- 1.08	- 0.82	- 0.46	0.34	-15.84	-13.79
5	-13.54	- 0.99	- 0.67	- 0.31	0.17	-15.34	-16.07
10	-12.12	- 0.54	0.01	0.27	- 0.38	-12.76	-13.84
15	- 9.56	0.12	0.76	0.61	- 0.35	- 8.42	- 7.41
20	- 6.26	0.75	0.99	0.22	0.32	- 3.98	- 3.65
25	- 2.55	1.13	0.53	- 0.43	0.47	- 0.85	- 1.41
30	1.89	1.16	- 0.39	- 0.61	- 0.28	1.77	1.99
35	6.12	0.78	- 1.01	0	- 0.56	5.33	5.54
40	9.74	0.14	- 0.88	0.63	0.23	9.86	9.13
45	12.17	- 0.46	- 0.18	0.48	0.63	12.64	12.19
50	13.83	- 0.96	0.71	- 0.28	- 0.08	13.22	13.19
55	14.85	- 1.15	1.11	- 0.73	- 0.72	13.36	13.19

TABLEAU 6 : Contribution des différents modes ($C_n U_n$) et comparaison de leur somme ($\Sigma C_n U_n$) avec les coefficients de Fourier (a_u).
(courants E-W, TSF 13).

Prof.	$D_1 U_1$	$D_2 U_2$	$D_3 U_3$	$D_4 U_4$	$D_5 U_5$	$\Sigma D_n U_n$	$b_u (z)$
0	- 3.39	- 2.64	- 1.01	0.13	0.15	- 6.76	- 5.37
5	- 3.33	- 2.41	- 0.82	0.09	0.08	- 6.39	- 6.60
10	- 2.98	- 1.33	0.02	- 0.08	- 0.17	- 4.54	- 5.33
15	- 2.35	0.30	0.94	- 0.17	- 0.16	- 1.44	- 1.04
20	- 1.54	1.83	1.22	- 0.06	0.14	1.59	2.29
25	- 0.63	2.76	0.65	0.12	0.21	3.11	2.81
30	0.46	2.83	- 0.48	0.17	- 0.13	2.85	2.77
35	1.50	1.91	- 1.25	0	- 0.25	1.91	2.31
40	2.39	0.35	- 1.09	- 0.18	0.10	1.57	1.64
45	2.99	- 1.12	- 0.22	- 0.14	0.28	1.79	1.65
50	3.40	- 2.34	0.87	0.08	- 0.03	1.98	2.17
55	3.54	- 2.81	1.37	0.25	- 0.32	2.03	2.17

TABLEAU 7 : Contribution des différents modes ($D_n U_n$) et comparaison de leur somme ($\Sigma D_n U_n$) avec les coefficients de Fourier (b_u) (courants E-W, TSF 13).

Prof.	$C_1 U_1$	$C_2 U_2$	$C_3 U_3$	$C_4 U_4$	$C_5 U_5$	$\Sigma C_n U_n$	$a_u (z)$
0	4.506	2.637	0.285	- 0.402	- 0.113	6.463	6.53
5	4.417	2.409	0.232	- 0.271	- 0.056	6.729	6.53
10	3.95	1.327	- 0.005	0.239	0.126	5.637	6.10
15	3.118	- 0.297	- 0.266	0.533	0.117	3.205	3.04
20	2.041	- 1.834	- 0.345	0.195	- 0.107	- 0.05	0.51
25	0.833	- 2.759	- 0.184	- 0.378	- 0.156	- 3.724	- 2.6
30	- 0.616	- 2.829	0.136	- 0.541	0.093	- 3.757	- 3.64
35	- 1.994	- 1.905	0.352	0	0.187	- 3.36	- 3.56
40	- 3.175	- 0.349	0.306	0.557	- 0.076	- 2.737	- 2.85
45	- 3.97	1.117	0.062	0.426	- 0.209	- 2.574	- 2.57
50	- 4.51	2.339	- 0.246	- 0.243	0.025	- 2.635	- 2.76
55	- 4.70	2.811	- 0.385	- 0.641	0.239	- 2.676	- 2.76

TABLEAU 8 : Contribution des différents modes ($C_n U_n$) et comparaison de leur somme ($\Sigma C_n U_n$) avec les coefficients de Fourier (a_u). (courants N-S, TSF 13).

Prof.	$D_1 U_1$	$D_2 U_2$	$D_3 U_3$	$D_4 U_4$	$D_5 U_5$	$\Sigma D_n U_n$	$b_u (z)$
0	- 4.488	- 2.579	1.101	0.374	- 0.021	- 5.614	- 6.00
5	- 4.399	- 2.356	0.897	0.252	- 0.011	- 5.617	- 5.25
10	- 3.936	- 1.298	- 0.019	- 0.222	0.024	- 5.45	- 5.07
15	- 3.106	0.290	- 1.027	- 0.496	0.022	- 4.317	- 4.75
20	- 2.033	1.793	- 1.332	- 0.181	- 0.020	- 1.773	- 1.34
25	- 0.829	2.698	- 0.712	0.352	- 0.029	1.48	1.76
30	0.614	2.766	0.527	0.504	0.017	4.428	4.30
35	1.987	1.863	1.359	0	0.035	5.244	5.28
40	3.163	0.341	1.184	- 0.518	- 0.014	4.156	4.54
45	3.954	- 1.093	0.240	- 0.396	- 0.039	2.666	2.56
50	4.493	- 2.287	- 0.953	0.226	0.005	1.484	1.52
55	4.685	- 2.779	- 1.489	0.596	0.045	1.088	1.52

TABLEAU 9 : Contribution des différents modes ($D_n U_n$) et comparaison de leur somme ($\Sigma D_n U_n$) avec les coefficients de Fourier (b_u) (courants N-S, TSF 13).

N - S				E - W				Prof.
Valeurs calculées		Valeurs mesurées		Valeurs calculées		Valeurs mesurées		
Amplitudes	Phases	Amplitudes	Phases	Amplitudes	Phases	Amplitudes	Phases	
8.56	319.0°	8.87	317.4	17.22	203.1°	14.80	201.3°	0
8.77	320.1	8.38	321.2	16.62	202.6	17.37	202.3	5
7.84	316.0	7.93	320.3	13.54	199.6	14.83	201.1	10
5.38	306.6	5.64	302.6	8.54	189.7	7.48	188.0	15
1.77	268.4	1.43	249.2	4.28	158.2	4.31	147.9	20
4.01	158.3	3.14	145.9	3.22	105.3	3.14	116.6	25
5.81	130.3	5.63	130.2	3.35	58.2	3.41	54.3	30
6.23	122.6	6.37	124.0	5.66	19.7	6.00	22.6	35
4.98	123.4	5.36	122.1	9.98	10.2	9.28	10.2	40
3.71	134.0	3.63	135.1	12.77	8.1	12.94	7.3	45
3.02	150.6	3.15	151.2	13.37	8.5	13.37	9.3	50
2.89	157.9	3.15	151.2	13.51	8.6	13.37	9.3	55

TABLEAU 10

Comparaison entre les valeurs calculées par la recombinaison des modes internes :

$$\text{amplitudes} : \sqrt{(\sum C_n U_n)^2 + (\sum D_n U_n)^2}$$

$$\text{phases} : \text{Tan}^{-1} \frac{\sum D_n U_n}{\sum C_n U_n}$$

et les valeurs mesurées par l'analyse de Fourier des courants

baroclines :

$$\text{amplitudes} : \sqrt{a_u^2 + b_u^2}$$

$$\text{phases} : \text{Tan}^{-1} \frac{b_u}{a_u}$$

D - EFFETS DES COURANTS PERMANENTS SUR LES ONDES INTERNES

Les variations de profondeur des isothermes de la station TSF 13 (Cf. Fig. 14) semblent être très curieuses si on tient compte de la prédominance du premier mode dans les courants baroclines. En effet, d'après le calcul des modes, les vitesses verticales des ondes internes du premier mode (W1) se répartissent symétriquement par rapport à la mi-profondeur où il existe la valeur maximale et s'annulent aux extrémités (Cf. Fig. 34 b). Or, les variations de profondeur des isothermes de la figure 14 ne correspondent guère à ce schéma théorique mais elles sont plutôt dominantes dans la couche inférieure. Les variations importantes peuvent se trouver jusqu'au fond. Cette figure ne confirme pas l'origine des phénomènes par les ondes internes selon le schéma théorique précédent.

Cependant, nous avons trouvé une raison qui semble assez raisonnable pour expliquer ces phénomènes par les ondes internes. En effet, THORPE (1978) a montré théoriquement et expérimentalement, que le cisaillement des courants permanents peut faire déplacer verticalement les positions du maximum des vitesses verticales des ondes internes. On démontre que le mouvement des ondes internes en présence d'un courant permanent peut être représenté par l'équation du type de TAYLER-GOLDSTEIN (Cf. THORPE (1978) et voir aussi LEBLOND et MYSAK (1978)) :

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{N^2}{(C-\bar{U})^2} - k^2 + \frac{\bar{U}''}{C-\bar{U}} \right) \psi = 0$$

où

$\bar{U}(z)$ étant le courant permanent ;

ψ étant une fonction de courant avec $u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$ et $w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$

C étant la vitesse de phase et k étant le nombre d'onde en x

Pour l'océan de fond horizontal l'équation précédente représente le problème des valeurs propres pour la fonction propre $\psi(z, C)$, avec la valeur propre correspondante C.

THORPE (1978) a trouvé numériquement la solution de l'équation en tenant compte d'un courant permanent de gradient vertical constant ($\bar{U}' = \text{const.}$) et d'une densité linéaire ($N = \text{const.}$). La figure 40 représente l'ensemble

des résultats des amplitudes normalisées de l'onde ($\eta = \psi / (C - \bar{U})$) du premier mode pour différentes valeurs du nombre de RICHARDSON ($Ri = N^2 / \bar{U}'^2$). On voit bien dans cette figure que l'effet du courant permanent fait déplacer le maximum de l'élévation vers le bas lorsque le sens de propagation d'onde coïncide avec celui du courant de la couche inférieure.

Dans le cas contraire, il se produit dans la couche supérieure. On remarque aussi que cette déviation s'accroît avec le cisaillement du courant permanent. Si le cisaillement est nul ($Ri = \infty$) ; on retrouve le schéma classique d'onde interne du premier mode.

Dans le cas de la station TSF 13, le nombre de RICHARDSON est de l'ordre de 30 dans la couche intermédiaire. (Cf. le courant moyen de la composante E-W de la figure 18). Cette valeur de nombre de RICHARDSON nous permettra dans la figure 40, d'avoir une courbe assez semblable au profil vertical des excursions maximales des isothermes de la station TSF 13, on remarque que le sens de propagation de l'onde va ici d'Est en Ouest. Ce qui semble indiquer que les ondes viennent du côté du Trou-sans-Fond.

Les variations importantes de profondeur des isothermes près du fond à la station TSF 13 peuvent être ainsi expliquées. Ce n'est qu'une première tentative de mise en valeur de l'importance de l'effet du courant permanent sur les variations de profondeur des isothermes. Une étude plus complète sera l'objet de notre prochaine étude.

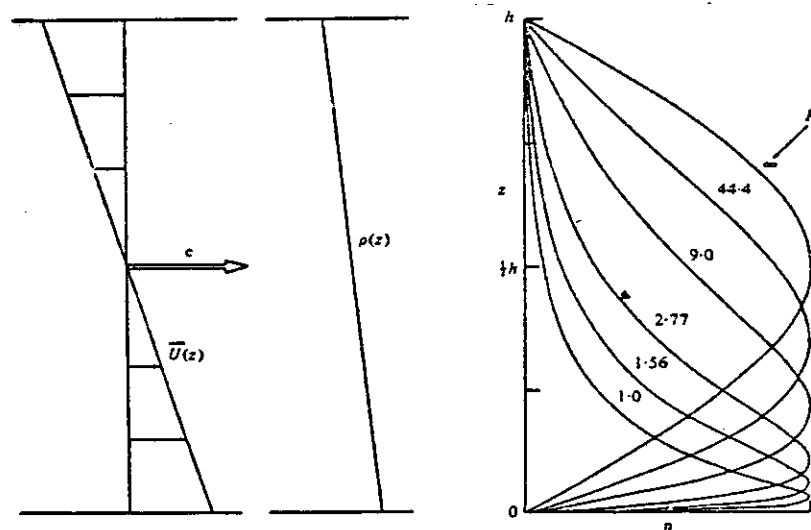


Fig. 40 : Distribution verticale des amplitudes des ondes internes des premiers mode en présence d'un courant permanent $\bar{U}(z)$, de différents nombres de Richardson (Ri) (d'après THORPE, 1978).

E. Détermination de l'axe privilégié de la propagation des marées internes.

Si les courants baroclines ne sont pas alternatifs ils varient autour d'un axe d'énergie maximum défini par un axe ox pour que la relation suivante soit satisfaite (Fig. 41)

$$\overline{u'v'} = 0$$

où le bar signifie la moyenne arithmétique.

Avec les relations suivantes :

$$u' = u \cos \theta + v \sin \theta ; v' = v \cos \theta - u \sin \theta$$

On obtient l'angle d'un axe d'énergie maximum :

$$\theta = \frac{1}{2} \text{Tan}^{-1} \left(\frac{2 \overline{uv}}{\overline{u^2} - \overline{v^2}} \right)$$

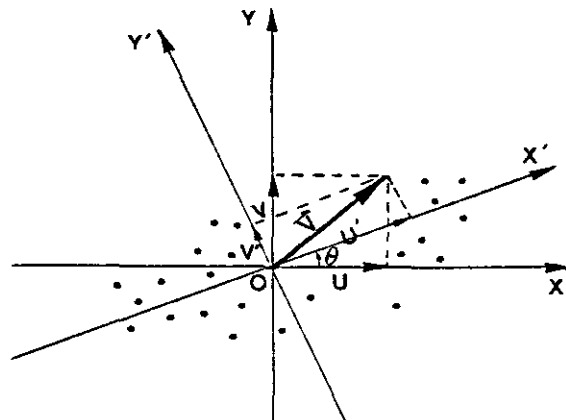


Fig. 41

On montre par la figure 42, la répartition verticale de θ et on les compare avec celle d'énergie des courants ($\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$).

On constate que dans la couche superficielle et inférieure l'énergie est relativement forte et θ varie très peu autour de valeur moyenne de -16 degrés Tandis que dans la couche intermédiaire où il y a des énergies relativement faibles θ devient très instable.

On considère donc que θ dans la zone intermédiaire est insignifiant (entre deux lignes horizontales discontinues de la figure).

On compare aussi θ avec les orientations des grands axes des courants baroclines M2. On remarque que la répartition verticale de θ et les orientations des grands d'axe des ellipses sont très voisines sauf dans la couche intermédiaire et que les vitesses sont en même ordre de grandeur dans deux cas. Ce qui peut signifier que la composante semi-diurne est prédominante et qu'elle peut représenter, en première approximation, les courants baroclines dus aux marées internes.

On considère donc $\theta = -16^\circ$ comme un angle de l'axe privilégié de la propagation des marées internes semi-diurne.

Cet angle θ n'est pas perpendiculaire à la topographie du fond au point de mesure mais il est presque perpendiculaire à la topographie du canyon sous-marin trou sans fond et il fait face à la côte.

Ce qui signifie peut-être que l'origine possible des marées internes pour la station TSF 13 est le trou sans fond et que les ondes se propagent vers la côte.

On reviendra plus tard pour les mécanismes possibles de génération et de propagation des marées internes sur une topographie variable.

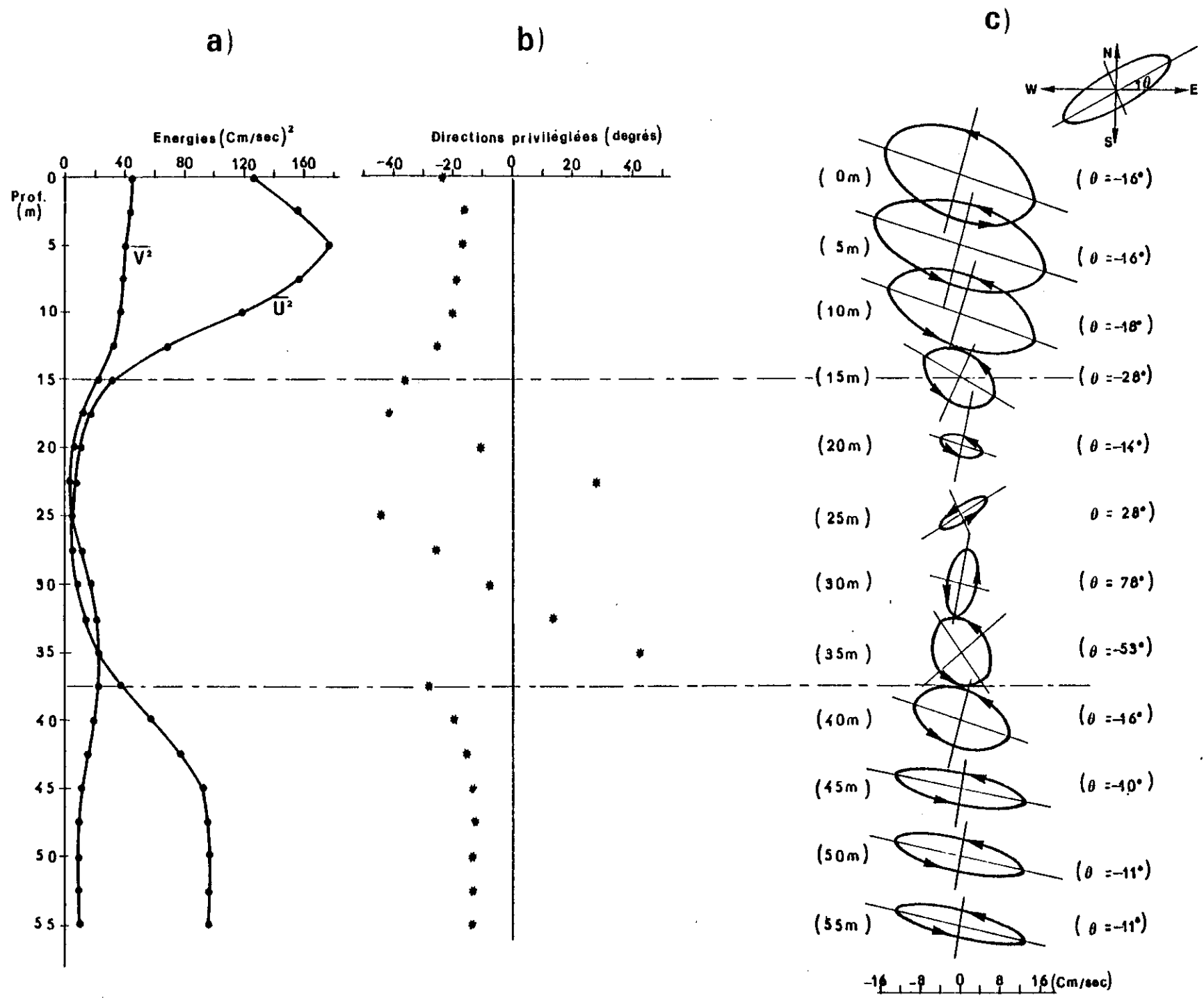


Fig. 42 : Répartition verticale ; a) des énergies de courants ($\overline{U^2}$, $\overline{V^2}$) - b) des angles d'un axe d'énergie maximum (θ) et c) des ellipses des courants baroclines M2.

2-3. CONCLUSIONS

D'après divers résultats graphiques et numériques, on peut tirer certaines conclusions intéressantes :

- les saisons marines affectent considérablement les variations de la structure hydrologique ainsi que les modes propres des ondes internes (Cf. Fig. 34). Mais malheureusement, on ne dispose pas des mesures de courant pour la station TSF 9 et la comparaison détaillée avec la station TSF 13 pour ce qui concerne les contributions des différents modes aux variations baroclines des courants n'est pas réalisable.

Mais pour la station TSF 13 :

- la répartition verticale des densités moyennes est assez linéaire et les vitesses verticales et horizontales des différents modes des ondes internes se répartissent symétriquement par rapport à la mi-profondeur. Ce qui est très analogue au modèle théorique à densité linéaire.

- les variations importantes de profondeur des isothermes près du fond de la station TSF 13 semblent être dues à l'influence du cisaillement du courant permanent sur les ondes internes. Il est souhaitable de tenir compte du courant permanent lors d'une prochaine étude plus rigoureuse des ondes internes.

- en ce qui concerne le calcul des contributions des différents modes aux ondes internes, les mesures de courant semblent être plus aptes que celles de température et de salinité bien que ces derniers montrent mieux visuellement les fluctuations verticales des mouvements des ondes internes.

- les courants baroclines semi-diurnes sont prédominants et peuvent être représentatifs des courants baroclines des marées internes.

- les courants baroclines semi-diurnes sont constitués principalement par le premier mode. Le deuxième mode devient non négligeable pour la composante N-S. Mais ceci est discutable du fait que le bruit de fond est important dans les courants N-S.

- l'assimilation des courants baroclines par les modes propres est très satisfaisante et la théorie linéaire des ondes internes semble valable pour les marées internes au moins en première approximation.

- L'axe privilégié de la propagation des marées internes est perpendiculaire à la topographie du canyon sous-marin trou-sans-fond et se dirige vers la côte. Ce qui implique le trou-sans-fond est l'origine vraisemblable de la genèse des marées internes pour la station TSF 13.

III - 3. ESSAI DE SYNTHÈSE SUR DIFFÉRENTS MODÈLES DE LA GÉNÉRATION ET
DE LA PROPAGATION DES MAREES INTERNES AVEC LE FOND VARIABLE

SOMMAIRE

Introduction	111
1. Modèle du plateau continental	113
1.1. Equations fondamentales	113
1.2. Solution générale	114
1.3. Conditions aux limites	115
1.4. Modèle de Wunch	116
1.5. Modèle de Prinsenbergh	119
A - Description générale du modèle	
B - Equations des ondes internes sur le plateau continental	
C - Equations des ondes internes dans la région océanique	
D - Equations des ondes de marée de surface	
E - Amplitudes modales des vitesses verticales des ondes internes	
F - Calculs pratiques des fonctions H_k , G_w , H_{kn} et G_{wm}	
1.6. Application pour le plateau continental ivoirien	131
A - Calcul pratique des amplitudes modales B_w	
B - Résultats graphiques du calcul des marées internes.	
1.7. Discussion sur le modèle et conclusions	141
2. Modèle de Canyon sous-marin Trou-sans-Fond.	144
2.1. Hypothèses fondamentales et mise en équations	144
2.2. Intégrations des équations	149
A - Domaine d'intégration	
B - Intégration dans la zone I	
C - Intégration dans les zones II et III	
2.3. Interprétation des résultats et conclusions	154

III.3 - ESSAI DE SYNTHÈSE SUR DIFFÉRENTS MODÈLES DE LA GÉNÉRATION ET DE LA PROPAGATION DES MAREES INTERNES AVEC LE FOND VARIABLE

Introduction

Les ondes internes de période de marée sont observées dans différentes régions de l'océan mondial : dans des baies, des fjords, des eaux côtières, sur le plateau continental et aussi en plein océan. Néanmoins, la plupart d'entre elles ont été trouvées dans des régions côtières.

Les marées internes observées au large ont, en général, des amplitudes moins importantes et des longueurs d'onde beaucoup plus longues par rapport à celles qui sont trouvées en eau côtière et il semble qu'elles deviennent indiscernables si on s'éloigne assez loin de la côte.

Les récents développements de la technique de photographie aérienne par satellite ont permis de localiser des lignes de crêtes des marées internes et semblent montrer la génération privilégiée des marées internes sur le plateau continental. D'après diverses photographies de satellite, APEL (1975) a confirmé que les ondes se propagent du large vers la côte perpendiculairement à la topographie du fond et que les longueurs d'onde diminuent avec les profondeurs.

Un mécanisme très probable de la génération des marées internes, en accord avec les observations et les propriétés citées plus haut, est celui de l'interaction de la marée externe ^x avec la topographie du fond.

De nombreuses études sur ce sujet ont été faites depuis le début du siècle. Un des premiers théoriciens, ZEILON, explique ainsi la génération des marées internes :

"Le mouvement de marée externe sur une topographie du fond crée un gradient horizontal de densité dans l'océan stratifié, ce qui est instable et en conséquence engendre des ondes internes de même fréquence" (BAINES, 1973).

^xOn utilise ici le mot "marée externe" qui exprime l'onde barotrope de marée pour le différencier de "marée interne".

Parmi les études suivantes, il faut citer celles de MAGAARD (1962, citée dans KRAUSS, 1966), RATTRAY (1960, 1969), SANDSTROM (1962, 1966), WUNCH (1968), CAVANIE (1969, 1972, 1973), PRINSEBERG (1971, 1974, 1975), BAINES (1971, 1973), LEE et BEARDSLEY (1974), etc...

De nombreux et divers modèles théoriques ont été établis pour expliquer et calculer les marées internes. Mais, en réalité, les phénomènes naturels sont beaucoup plus compliqués que ceux décrits par la théorie.

Dans notre région d'études, outre la rupture de pente entre plateau et pente continentale l'existence du canyon sous-marin "Trou-sans-Fond" qui débute au ras de la côte et entaille profondément le plateau continental, semble influencer les mesures hydrologiques et courantologiques devant Abidjan.

Dans l'étude que nous allons présenter, deux modèles théoriques ont été examinés afin d'expliquer certains mécanismes possibles de génération et de propagation des marées internes observées dans cette région :

- l'un sur le plateau continental de pente constante avec une discontinuité de pente entre le plateau continental et la plaine abyssale ; ce modèle est une adaptation de celui de PRINSEBERG (1971, 1974, 1975).

- l'autre sur le canyon sous-marin Trou-sans-Fond, fondé sur le modèle de CAVANIE (1969) qui a expliqué la gènèse des ondes internes engendrées sur le seuil de Gibraltar par les courants de marée.

1. Modèle du plateau continental :

Le modèle de PRINSEBERG sera utilisé pour expliquer la g n se et la propagation des marées internes devant Abidjan. Le modèle s'est lui-même fondé sur le modèle précédent de WUNCH (1968). Ces deux modèles utilisent les mêmes équations fondamentales que nous allons résumer brièvement avant d'exposer le modèle lui-même.

1.1 - Equations fondamentales

L'équation des perturbations de vitesse verticale linéarisée dues aux ondes internes dans un fluide non visqueux et en faisant l'approximation de BOUSSINESQ a été donnée par (Cf. 1-16) :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 w) + N^2 \nabla_h^2 w + f^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (3-1)$$

Le mouvement du fluide est supposé bi-dimensionnel en x et z et non divergent ($\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$) ; il existe alors une fonction de courant ψ telle que :

$$u = - \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{et} \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3-2)$$

Les lignes $\psi = \text{const.}$ sont des lignes de courant, (3-1) s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla_{xz}^2 \psi + N^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + f^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = 0$$

où :

$$\nabla_{xz}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Une des solutions est donc :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla_{xz}^2 \psi + N^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + f^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (3-3)$$

Si on suppose un mouvement périodique en temps :

$$\psi = \Psi (x, z) e^{i\sigma t}$$

(3-3) devient :

$$\psi_{zz} - \frac{1}{S^2} \psi_{xx} = 0 \quad (3-4)$$

où S est la pente caractéristique et définie par :

$$S^2 = \frac{\sigma^2 - f^2}{N^2 - \sigma^2} = \frac{1}{R^2}$$

Si $\sigma \gg f$, en utilisant la relation de dispersion (2-10) on a :

$$S = \pm \cot \hat{\theta}$$

qui est perpendiculaire à la propagation des phases ($\pm \tan \theta$). Autrement dit, S est la direction sur laquelle l'énergie se propage.

1.2. Solution générale :

Si $S^2 > 0$, l'équation aux dérivées partielles (3-4) devient hyperbolique dans les coordonnées d'espace, ce qui est le cas des ondes internes car $N > \sigma > f$. Dans le cas du fond variable, la méthode de la séparation des variables n'est plus applicable (cf. annexe A). Mais si $S = \text{const.}$ (ou bien $N = \text{const.}$), la solution générale peut être trouvée en faisant le changement de variables :

$$Sx - z = X \quad \text{et} \quad Sx + z = Y$$

(3-4) devient :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} = 0$$

On trouve que $\frac{\partial \psi}{\partial Y}$ est une solution de Y seul et ψ est la somme d'une fonction de X et d'une fonction de Y :

$$\psi = F(X) + G(Y) = F(Sx - z) + G(Sx + z) \quad (3-5)$$

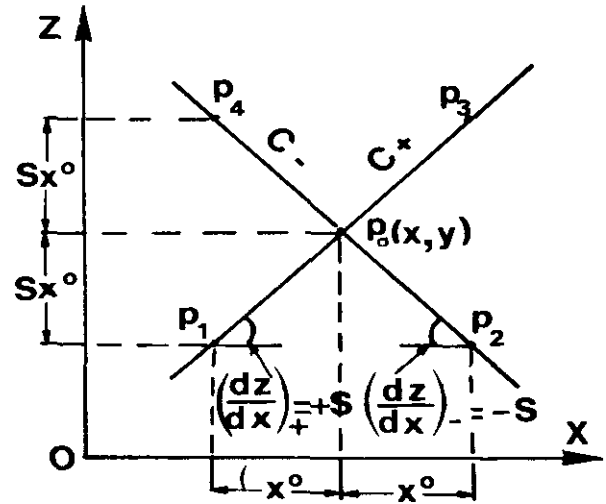
où F et G sont des fonctions arbitraires qui peuvent être déterminées de manière à remplir des conditions aux limites du problème considéré.

Il est évident que le premier terme F de (3-5) est le même au point $p_0(x, z)$ qu'aux points $p_1(x-x^0, z-Sx^0)$ et $p_3(x+x^0, z+Sx^0)$ (Fig. 43) car :

$$F(Sx - z) = F(S(x \pm x^0) - (z \pm Sx^0))$$

Tout ensemble des points $\{(x \pm x^0), (z \pm Sx^0)\}$ pour tous les x^0 décrit une ligne dont la pente $(\frac{dz}{dx})$ est $+S$ et tout au long de cette ligne on a les mêmes propriétés du type de F. De la même manière, les mêmes propriétés du type de G se trouvent sur la ligne de pente $-S$ ($p_2 - p_0 - p_4$) (ABBOTT, 1966). On peut dire aussi que ces lignes sont des chemins de propagation de toutes les perturbations ou caractéristiques, elles sont définies par :

Fig. 43



si $\frac{dz}{dx} > 0$; C+ caractéristique

$\frac{dz}{dx} < 0$; C- caractéristique

On peut appliquer cette méthode à l'étude de la propagation d'une perturbation localisée sur le rebord du plateau continental. Supposons maintenant que le système est initialement au repos sauf au point p_0 (fig.44).

Une partie des perturbations ayant leur origine au point p_0 et qui se propagent vers la côte ou vers le large suivant les caractéristiques passant par p_0 en se réfléchissant entre la surface et le fond.

La construction graphique (fig. 44) en tenant compte de la figure 43 montre plus clairement comment les choses se passent.

1.3 Conditions aux limites :

Si on néglige les variations de la surface libre dues aux ondes internes, on peut considérer que la surface et le fond sont eux-mêmes des lignes de courant ($\psi = \text{constante}$). Sans perdre la généralité, on peut désigner $\psi = 0$ pour les conditions aux limites :

$$\psi = 0 \text{ pour } z = 0 \text{ et } z = H(x) \text{ étant le fond}$$

où $H(x)$ représente la fonction du fond.

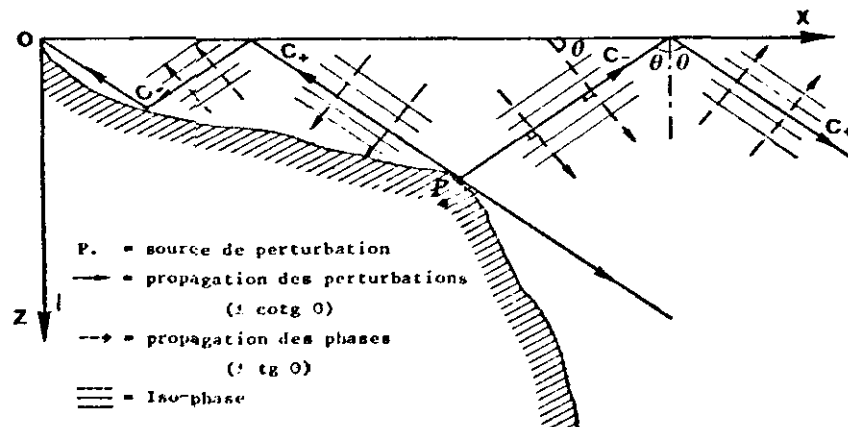
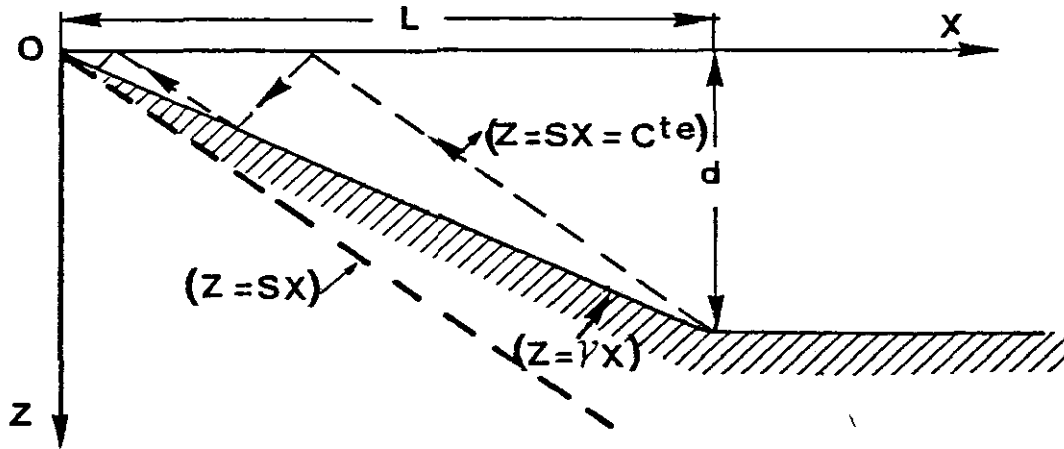


Fig. 44 : Schématisation de la propagation d'une perturbation localisée (P_0) vers la côte et vers le large.

1.4. Modèle de WUNCH :

WUNCH (1968) a étudié la génération et la propagation des ondes internes sur une plage de pente constante à partir d'une plaine abyssale au fond horizontal (nous changeons la direction de l'axe vertical du modèle de WUNCH en raison de la concordance avec notre système d'axe).



Les équations du fond s'écrivent :

$$\begin{aligned} z &= \gamma x && \text{pour } 0 \leq x \leq L \\ z &= d && \text{pour } x > L \end{aligned}$$

$\gamma = \frac{d}{L}$ étant la pente de la plage, L étant sa largeur et d étant sa profondeur maximale.

Sur la plage, l'équation (3-4) n'est pas séparable. Si on ne considère que le cas de N = constante, on aura une solution générale de (3-5) :

$$\psi = F(Sx - z) + G(Sx + z)$$

Parmi les solutions, il a trouvé deux séries de solutions utilisables :

$$\begin{aligned} \psi_A &= \sin(p \ln(Sx + z)) - \sin(p \ln(Sx - z)) \\ &= 2 \cos\left(\frac{p}{2} \ln(S^2 x^2 - z^2)\right) \cdot \sin\left(\frac{p}{2} \ln\left(\frac{cx + z}{cx - z}\right)\right) \\ \psi_B &= -\cos(p \ln(Sx + z)) + \cos(p \ln(Sx - z)) \\ &= 2 \sin\left(\frac{p}{2} \ln(S^2 x^2 - z^2)\right) \cdot \sin\left(\frac{p}{2} \ln\left(\frac{Sx + z}{Sx - z}\right)\right) \end{aligned}$$

où $P = \frac{2n\pi}{\ln\left(\frac{S + \gamma}{S - \gamma}\right)}$ avec $n = 1, 2, 3, \dots$

qui satisfont les conditions aux limites
 $\psi_A = \psi_B = 0$ pour $z = 0$ et $z = \gamma x$

Les vitesses horizontales et verticales de la solution A s'écrivent :

$$\begin{aligned} u_A &= -\frac{\partial \psi_A}{\partial z} = \left(-\frac{P}{Sx+z} \cos(p \ln(Sx+z)) - \frac{P}{Sx-z} \cos(p \ln(Sx-z)) \right) \cdot e^{-i\sigma t} \\ w_A &= \frac{\partial \psi_A}{\partial x} = \left(\frac{S \cdot P}{Sx+z} \cos(p \ln(Sx+z)) - \frac{S \cdot P}{Sx-z} \cos(p \ln(Sx-z)) \right) \cdot e^{-i\sigma t} \end{aligned}$$

Ce modèle n'est valable que pour le cas où la pente de caractéristique S est plus grande que celle du fond (γ). Autrement dit si $S < \gamma$, on aura une singularité de logarithme, car les pentes de caractéristique et du fond sont toujours positives dans notre système d'axe.

Si nous résumons schématiquement :

- Si $\gamma < S$: subcritique et on aura une propagation des ondes vers la côte. Suivant le critère de BAINES (1971), ceci correspond à la topographie de "Bosse plate" (Flat bump topography) ;
- $\gamma = S$: critique et la singularité apparaît ;
- $\gamma > S$: super-critique, l'onde ne peut pas pénétrer dans le plateau continental et se réfléchit vers le large. Ceci correspond à la topographie de "Bosse raide" (Steep bump topography).

Les amplitudes dans le champ de vitesses augmentent avec $\frac{1}{S\chi \pm z}$ au fur et à mesure que l'on s'approche de la côte ($\chi \rightarrow 0$, $z \rightarrow 0$). Ces amplitudes ont une singularité au sommet de la plage.

WUNCH a montré graphiquement (figure 45), les variations modales des vitesses (U_A, W_A) pour différentes pentes de caractéristiques. On peut remarquer sur ces images :

- Les vitesses verticales ne sont plus négligeables près du fond et sur le fond lui-même et les champs de vitesses s'accroissent au fur et à mesure que la pente caractéristique s'approche de celle du fond.
- Dans le cas d'un fond horizontal, les vitesses verticales de l'onde interne de Nième mode sont nulles au fond, à la surface libre et en (N-1) points sur la verticale (fig.29).
Dans le cas du fond variable, les vitesses verticales ne sont pas nulles sur le fond d'une part, et d'autre part, sur une verticale, le nombre de points où la vitesse verticale s'annule n'est plus égale à (N-1).
- L'augmentation de l'amplitude et la diminution de longueur d'onde à l'approche de la côte est très visible (fig.45d). La diminution de l'amplitude pour les petites valeurs de χ est due à l'approche du fond.

Physiquement, l'augmentation indéfinie de l'amplitude du champ de vitesse près de la côte et l'apparition d'une singularité au sommet de la plage peuvent être expliquées, en tenant compte d'une perte d'énergie due au frottement (spécialement près du fond où il y a un très grand gradient de vitesses) et des facteurs non-linéaires, par exemple des déformations et des déferlements éventuels des ondes internes dans une région de faible profondeur.

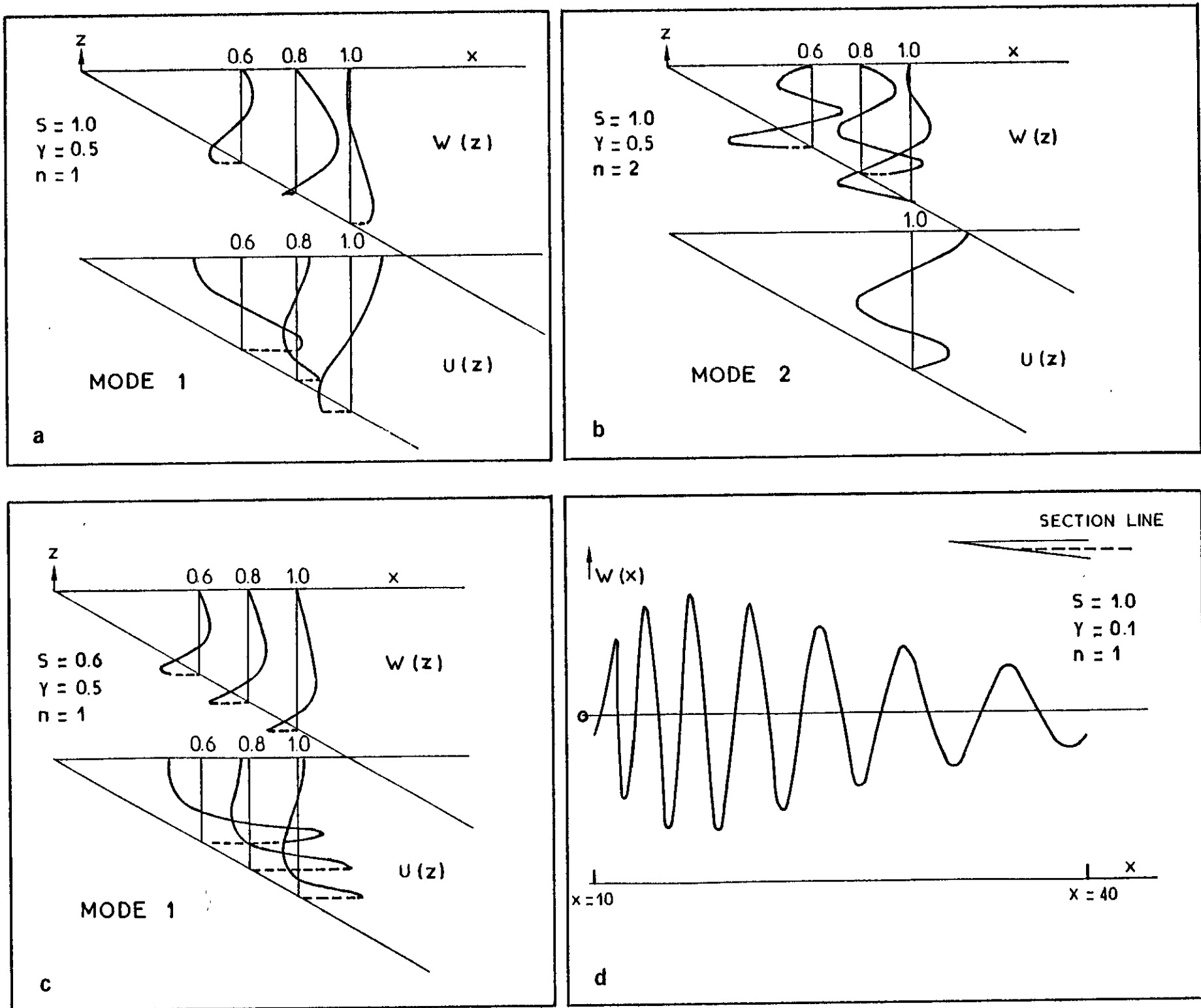
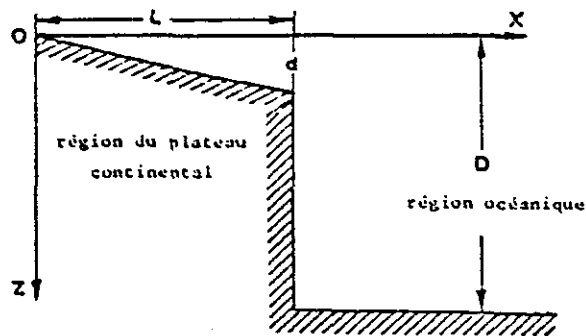


Fig. 45 : a), b), c) : variations modales (n) des vitesses (u, w) pour différentes pentes de caractéristiques (S) d'un modèle de fond variable (γ) ; d) : vitesse verticale sur un plan horizontal pour le mode 1 (d'après WUNCH, 1968).

1.5. Modèle de PRINSENBURG :

Basé sur l'idée de WUNCH et combinant les théories fondamentales de RATTRAY (1960, 1969), PRINSENBURG (1971, 1974, 1975) a concrétisé le modèle de la génération et de la propagation des marées internes.

La topographie du fond du modèle est différente de celui de WUNCH ; au lieu de faire une connection directe entre le plateau continental et la plaine abyssale, on a introduit un talus continental schématisé par une verticale entre les deux régions.



A - Description générale du modèle :

"La génération des marées internes dans une région côtière dépend du couplage entre la marée externe et la marée interne due principalement à la variation apparente de profondeur, mais aussi elle est influencée par une distribution locale des propriétés océanographiques" (RATTRAY, 1960).

Une variation brusque de la topographie du fond engendre quelque sorte d'inégalité dans le champ de courants de la marée externe. Le mouvement interne sera exprimé de façon à compenser cette inégalité.

Or, le courant réel est supposé être composé de courants de marée externe de courants dus aux ondes internes.

La condition de continuité entre les composantes horizontales et verticales de la vitesse à la frontière entre les deux régions, s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{matrix} \text{I} & \text{I} & \text{II} & \text{II} \\ \text{U}_{\text{int}} + \text{U}_{\text{surf}} = \text{U}_{\text{int}} + \text{U}_{\text{surf}} \end{matrix} \quad \text{pour } \left\{ \begin{array}{l} x = L \\ 0 \leq z \leq d \end{array} \right. \quad (3-6)$$

$$\begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{II} & \text{II} \\ \text{W}_{\text{int}} + \text{W}_{\text{surf}} = \text{W}_{\text{int}} + \text{W}_{\text{surf}} \end{matrix} \quad \text{pour } \left\{ \begin{array}{l} x = L \\ 0 \leq z \leq d \end{array} \right. \quad (3-7)$$

Le long du talus, la composante horizontale de la vitesse est nulle :

$$\begin{matrix} \text{II} & \text{II} \\ \text{U}_{\text{int}} + \text{U}_{\text{surf}} = 0 \end{matrix} \quad \text{pour } \left\{ \begin{array}{l} x = L \\ d < z \leq D \end{array} \right. \quad (3-8)$$

où les indices I et II désignent respectivement la région du plateau continental et la région océanique, et les abréviations "int" et "surf" signifient respectivement les contributions des marées internes et des marées externes.

Les perturbations (ou ondes internes), ainsi engendrées se propagent vers la côte et vers le large avec des intensités maximales sur des lignes caractéristiques. En conséquence, l'énergie disparaît continuellement de la région côtière sous forme d'ondes internes et par ce fait, la même quantité d'énergie doit être alimentée par la marée externe (RATTRAY, 1960).

Comme nous le verrons plus tard, les amplitudes des marées internes dépendent de :

- l'amplitude de la vitesse verticale de la marée externe ;
- la configuration du fond (ou du rapport de d/D) ;
- la répartition de densité (en effet, du rapport de S/γ et S étant une fonction de la fréquence de VÄISÄLÄ).

D'après PRINSEBERG *et al* (1975), les mouvements internes sur le plateau continental sont supposés être composés seulement d'ondes progressives vers la côte. Ceci s'explique du fait que les ondes, réfléchies par une bosse raide près de la côte se dissipent complètement par frottement sur le fond avant d'arriver sur le rebord continental. Ce qui est en accord avec la conclusion de LEBLOND (1966) : "le taux d'atténuation des marées internes est suffisamment élevé pour n'avoir pas des systèmes d'ondes stationnaires".

B - Equations des ondes internes sur le plateau continental ^I (U_{int}, W_{int}) :

Basé sur les équations de WUNCH décrites plus haut, PRINSEBERG (1971, 1974, 1975) a généralisé les équations des ondes internes pour un plateau continental de pente constante.

Les équations obtenues s'expriment sous une forme plus compacte en utilisant les nombres complexes. On normalise les équations de WUNCH en divisant (Sx±z) par d. Les conditions aux limites (ψ = 0 pour z = 0 et z = γx) ne sont pas changées par cette normalisation.

Les fonctions de courant du Nième mode des ondes internes sont données par :

$$\psi_n = \frac{d B_n}{i S P_n} \left(e^{-i P_n \ln \left(\frac{Sx+z}{d} \right)} - e^{-i P_n \ln \left(\frac{Sx-z}{d} \right)} \right) \cdot e^{-i \sigma t} \quad (3-9)$$

Les vitesses horizontales et verticales des ondes internes sont :

$$U^n(x, z, t) = - \dot{\psi}_z^n = \frac{B_n}{S} \left(\frac{e^{-iP_n \ln \left(\frac{Sx+z}{d} \right)}}{\frac{Sx+z}{d}} + \frac{e^{-iP_n \ln \left(\frac{Sx-z}{d} \right)}}{\frac{Sx-z}{d}} \right) e^{-i\sigma t} \quad (3-10)$$

$$W^n(x, z, t) = \dot{\psi}_x^n = - B_n \left(\frac{e^{-iP_n \ln \left(\frac{Sx+z}{d} \right)}}{\frac{Sx+z}{d}} - \frac{e^{-iP_n \ln \left(\frac{Sx-z}{d} \right)}}{\frac{Sx-z}{d}} \right) e^{-i\sigma t} \quad (3-11)$$

B_n étant l'amplitude modale de la vitesse verticale des ondes internes,

et $\sqrt{i} = -1$; $P_n = \frac{2n\pi}{\ln \left(\frac{S+\gamma}{S-\gamma} \right)}$

Toute superposition linéaire de solutions élémentaires est une solution de l'équation des ondes internes. On est ainsi conduit à représenter le champ de courants dûs aux ondes internes par les séries :

$$\dot{\psi}, U, W = \sum_{n=1}^{\infty} (\dot{\psi}_n, U_n, W_n) \quad (3-12)$$

On peut réécrire (3-9) sous forme plus compacte :

$$\dot{\psi}^n = \frac{d \cdot B_n}{i S P_n} (e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2})$$

avec :

$$\theta_1 = - P_n \ln \left(\frac{Sx+z}{d} \right) - \sigma t$$

$$\theta_2 = - P_n \ln \left(\frac{Sx-z}{d} \right) - \sigma t$$

qui peuvent être considérés comme les phases des ondes progressives 1 et 2 dont les nombres d'ondes sont :

$$\text{Onde 1 : } (k_x, k_z)_1 = \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x}, \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) = \left(- \frac{S P_n}{Sx+z}, - \frac{P_n}{Sx+z} \right)$$

$$\text{Onde 2 : } (k_x, k_z)_2 = \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x}, \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \right) = \left(\frac{-S P_n}{Sx-z}, \frac{P_n}{Sx-z} \right)$$

et les longueurs d'ondes sont :

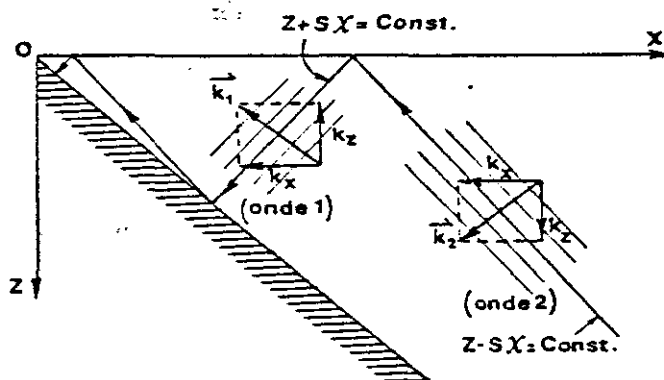
$$\text{Onde 1 : } (L_x, L_z)_1 = \left(- \frac{2\pi(Sx+z)}{S P_n}, - \frac{2\pi(Sx+z)}{P_n} \right)$$

$$\text{Onde 2 : } (L_x, L_z)_2 = \left(- \frac{2\pi(Sx-z)}{S P_n}, \frac{2\pi(Sx-z)}{P_n} \right)$$

On peut remarquer quelques propriétés très intéressantes concernant ces deux ondes progressives :

- En conséquence de la définition de la topographie de bosse plate, le domaine du modèle est limité verticalement $0 \leq z < Sx \cdot P_n$ et S étant toujours positives, les signes des composantes de χ du nombre d'ondes des deux ondes sont négatives, c'est-à-dire que deux ondes propagent vers la côte.

L'onde 1 est dirigée vers le haut, tandis que l'onde 2 l'est vers le bas. Les directions de propagation des ondes ($\frac{k_z}{k_x}$) sont respectivement $\frac{1}{S}$ et $-\frac{1}{S}$. Autrement dit, les deux ondes se propagent respectivement dans le sens perpendiculaire de $-S$ et de S qui sont des directions de propagation de l'énergie des ondes.



- Les nombres d'ondes augmentent indéfiniment au fur et à mesure que l'on s'approche de la côte ($\frac{x \rightarrow 0}{z \rightarrow 0}$) tandis que les longueurs d'ondes diminuent linéairement. La diminution de longueurs d'ondes est en très bon accord avec les nombreuses mesures faites dans la nature.
- Dans le cas du fond horizontal, le débit moyen dû aux ondes internes dans une section verticale en chaque instant donné est nul. Ce qui est aussi vrai dans le cas du fond incliné, en effet :

$$\int_z U(x, z, t) dz = \sum_n \int U^n dz \Big|_{x=x_0, t=t_0}^{z=\gamma x_0} = \sum_n \frac{B_n e^{i\sigma t_0}}{i c P_n} \left(e^{-i P_n \ln\left(\frac{S x_0 - z}{d}\right)} - e^{-i P_n \ln\left(\frac{S x_0 + z}{d}\right)} \right) = 0$$

car pour $z = \gamma x$

$$e^{-i P_n \ln\left(\frac{c x + z}{d}\right)} - e^{-i P_n \ln\left(\frac{c x - z}{d}\right)} = e^{-i P_n \ln\left(\frac{c + \gamma}{d}\right) x} - e^{-i P_n \ln\left(\frac{c - \gamma}{d}\right) x} = -2 \sin\left(\frac{P_n}{2} \ln\left(\frac{c^2 - \gamma^2}{d}\right) x^2\right) \sin\left(\frac{P_n}{2} \ln\left(\frac{S + \gamma}{S - \gamma}\right)\right) - 2i \cos\left(\frac{P_n}{2} \ln\left(\frac{S^2 - \gamma^2}{d^2}\right) x^2\right) \sin\left(\frac{P_n}{2} \ln\left(\frac{S + \gamma}{S - \gamma}\right)\right) = 0$$

d'où on tire une relation très utilisable pour $x = L$:

$$e^{-i P_n \ln\left(\frac{S}{\gamma} + 1\right)} = e^{-i P_n \ln\left(\frac{S}{\gamma} - 1\right)} \quad (3-13)$$

La condition de flux nul sur la verticale permettra, dans le cas pratique, de séparer la composante du courant due aux ondes internes dans les mesures de courants, si ces mesures ont été faites en continu de la surface jusqu'au fond.

- La formule générale de la vitesse verticale sur le fond variable peut s'écrire :

$$W(z = H) = U(z = H) \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + V(z = H) \cdot \frac{\partial H}{\partial y}$$

où $H(x,y)$ représente le fond.

Dans un modèle à deux dimensions (x-z) et pour un fond de pente constante ($\frac{\partial H}{\partial x} = \gamma$), la relation précédente devient :

$$W(z = \gamma x) = \gamma \cdot U(z = \gamma x)$$

Pour ce qui concerne les vitesses verticales des ondes internes, cette relation est bien adaptée avec (3-10), (3-11) et (3-13).

Dans le cas réel, les vitesses horizontales ont différentes composantes, par exemple des courants barotropes dus à la marée, des courants permanents, des courants baroclines dûs aux ondes internes et des courants de vent, etc..

Il faut donc être très prudent dans l'interprétation des isothermes près du fond en présence des différents courants et d'une pente du fond non négligeable.

II

C - Equations des ondes internes dans la région océanique (Uint, II
Wint) :

Dans le cas du fond horizontal, les solutions de l'équation (3-4) ($\psi_{zz} - \frac{1}{S^2} \psi_{xx} = 0$) peuvent être trouvées par une méthode de séparation des variables.

Avec S constant, nous cherchons des solutions de ψ qui soient de la forme :

$$\psi = \eta(z) e^{ik_x x} \quad (3-14)$$

où η est une fonction arbitraire de z

(3-4) devient :

$$\frac{d^2 \eta}{dz^2} + \frac{k_x^2 \eta}{S^2} = 0$$

d'où :

$$\eta = \alpha e^{i \frac{k_x z}{S}} + \beta e^{-i \frac{k_x z}{S}}$$

où α et β sont des constantes complexes arbitraires.

En introduisant η à (3-14), nous obtenons :

$$\psi = \left(\alpha e^{i \frac{k_x z}{S}} + \beta e^{-i \frac{k_x z}{S}} \right) e^{ik_x x}$$

Si on impose à ψ les conditions aux limites :

- en surface :

$$\psi_z = 0 = 0$$

d'où on obtient : $\alpha = -\beta$

- au fond :

$$\psi_z = D = 2i\alpha \sin \frac{k_x D}{S} e^{ik_x x} = 0$$

d'où on obtient :

$$k_x = \frac{Sm\pi}{D} \quad \text{avec } m = 1, 2, 3, \dots$$

Les fonctions de courant des ondes internes de Nième mode s'écrivent donc :

$$\psi_m = \alpha_m \sin \frac{m\pi z}{D} \cdot e^{i\left(\frac{Sm\pi x}{D} - \sigma t\right)}$$

Les vitesses horizontales et verticales sont respectivement :

$$U_m = \frac{i\phi_m}{c} \cos \frac{m\pi z}{D} \cdot e^{i\left(\frac{Sm\pi}{D} x - \sigma t\right)}$$

$$W_m = \phi_m \sin \frac{m\pi z}{D} \cdot e^{i\left(\frac{Sm\pi x}{D} - \sigma t\right)}$$

où ϕ_m est l'amplitude modale de la vitesse verticale des ondes internes dans la région océanique. Elle est définie par : $\phi_m = \frac{iSm\pi\alpha_m}{D}$

I II I II
D - Equations des ondes de marée externe (U_{surf} , U_{surf} , W_{surf} , W_{surf})

On schématise l'onde de marée externe sur le plateau continental comme une onde stationnaire. Ce qui est une bonne approximation de l'onde de marée externe, si le domaine d'étude se limite à la marge continentale.

On part des équations hydrodynamiques simplifiées pour un océan homogène ($\rho = \text{const.}$), non-visqueux et de deux dimensions ($\chi-z$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3-15)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3-16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3-17)$$

L'équation de continuité (3-17) suggère une fonction de courant $\psi(\chi, z, t)$ telle que :

$$u = - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3-18)$$

En éliminant p dans (3-15) et (3-16) et en introduisant (3-18), nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (3-19)$$

Parmi les solutions de (3-19), nous retiendrons celles qui ont des caractéristiques de l'onde stationnaire du type :

$$\psi = \Omega(z) \sin k_x \cdot e^{-i\sigma t} \quad (3-20)$$

où Ω est une fonction arbitraire de z , k est le nombre d'ondes en x et σ est la vitesse angulaire de l'onde de marée externe.

Ayant une longueur d'onde de marée externe (l'ordre de grandeur de 10^4 km) beaucoup plus grande que la longueur d'un plateau continental (l'ordre de grandeur de 10^1 à 10^2 km), on peut faire une première approximation de (3-20) :

$$\dot{\psi} = \Omega(z) kx e^{-i\sigma t} \quad (3-21)$$

En appliquant (3-21) à (3-19) nous obtenons :

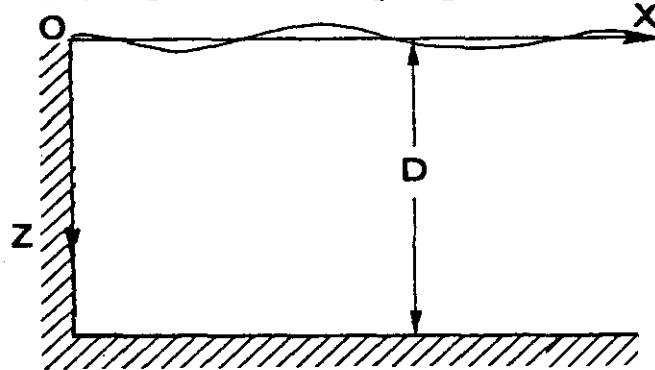
$$\dot{\psi} = (\alpha z + \beta) kx e^{-i\sigma t}$$

où α et β sont des constantes arbitraires qui peuvent être déterminées de façon à satisfaire les conditions aux limites.

1er cas : pour un océan de fond horizontal (Usurf, Wsurf) II II

L'imperméabilité des parois impose les conditions aux limites ; les fonctions de courant y sont nulles :

$$\dot{\psi} = 0 \quad \text{pour } \begin{cases} x = 0 \\ 0 \leq -z \leq D \end{cases} \quad \text{et pour } \begin{cases} x \geq 0 \\ z = D \end{cases}$$



d'où $\alpha = -\frac{\beta}{D}$

La fonction de courant s'écrit donc : $\dot{\psi} = A \left(1 - \frac{z}{D}\right) x \cdot e^{-i\sigma t}$

avec $A = k \cdot \beta$

Les vitesses horizontales et verticales sont respectivement :

$$u = \frac{A}{D} x e^{-i\sigma t}$$

$$w = A \left(1 - \frac{z}{D}\right) e^{-i\sigma t}$$

2ème cas : sur le plateau continental de pente constante (γ) I I

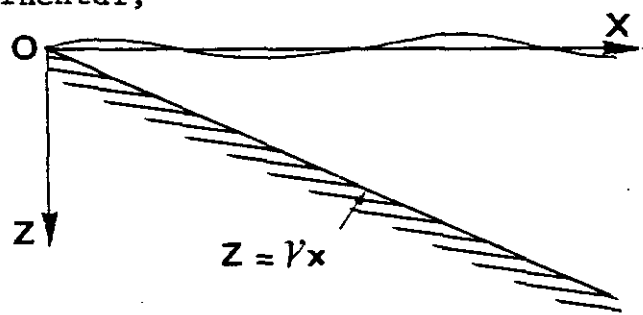
(Usurf, Wsurf) :

Sur le fond du plateau continental,

la fonction de courant est nulle :

$$\dot{\psi} = 0 \quad \text{pour } \begin{cases} x \geq 0 \\ z = \gamma x \end{cases}$$

d'où $\alpha = -\frac{\beta}{\gamma x}$



$$\begin{cases} \psi = A \left(1 - \frac{z}{\gamma x}\right) x e^{-i\sigma t} \\ u = \frac{A}{\gamma} e^{-i\sigma t} \quad ; \quad w = A e^{-i\sigma t} \end{cases}$$

où A est l'amplitude de la vitesse verticale de marée externe sur le plateau continental.

E - Amplitudes modales des vitesses verticales des ondes internes (B_n et ϕ_m) :

Les amplitudes modales des vitesses verticales des ondes internes sont obtenues par une résolution des équations implicites (3-6), (3-7) et (3-8).

Avant le détail des calculs, on résume brièvement les systèmes de courant sur le plateau continental et au large (tableau 11). Les champs de courant dus aux ondes internes sont représentés par la somme des différents modes.

SUR LE PLATEAU CONTINEN- TAL (I)	Onde interne	$\hat{\psi}_I$	$-\frac{id}{S} \sum_n \frac{B_n}{P_n} \left(e^{-iP_n \ln\left(\frac{Sx+z}{d}\right)} - e^{-iP_n \ln\left(\frac{Sx-z}{d}\right)} \right) e^{-i\sigma t}$
		U_{int}^I	$\frac{1}{S} \sum_n B_n \left(\frac{e^{-iP_n \ln\left(\frac{Sx+z}{d}\right)}}{\frac{Sx+z}{d}} + \frac{e^{-iP_n \ln\left(\frac{Sx-z}{d}\right)}}{\frac{Sx-z}{d}} \right) e^{-i\sigma t}$
		W_{int}^I	$-\sum_n B_n \left(\frac{e^{-iP_n \ln\left(\frac{Sx+z}{d}\right)}}{\frac{Sx+z}{d}} - \frac{e^{-iP_n \ln\left(\frac{Sx-z}{d}\right)}}{\frac{Sx-z}{d}} \right) e^{-i\sigma t}$
	Onde de surface (marée externe)	ψ_I	$A \left(1 - \frac{z}{\gamma x}\right) x \cdot e^{-i\sigma t}$
		U_{surf}^I	$\frac{A}{\gamma} e^{-i\sigma t}$
		W_{surf}^I	$A e^{-i\sigma t}$
AU LARGE (II)	Onde interne	$\hat{\psi}_{II}$	$\frac{-iD}{S\pi} \sum_n \frac{\phi_m}{m} \sin \frac{m\pi z}{D} e^{i\left(\frac{Sm\pi x}{D} - \sigma t\right)}$
		U_{int}^{II}	$\frac{i}{S} \sum_m \phi_m \cos \frac{m\pi z}{D} e^{i\left(\frac{Sm\pi x}{D} - \sigma t\right)}$
		W_{int}^{II}	$\sum_n \phi_m \sin \frac{m\pi z}{D} e^{i\left(\frac{Sm\pi x}{D} - \sigma t\right)}$
	Onde de surface (marée externe)	ψ_{II}	$A \left(1 - \frac{z}{D}\right) x \cdot e^{-i\sigma t}$
		U_{surf}^{II}	$\frac{A}{D} x e^{-i\sigma t}$
		W_{surf}^{II}	$A \left(1 - \frac{z}{D}\right) e^{-i\sigma t}$

TABLEAU 11

Les relations (3-6), (3-7) et (3-8) peuvent s'écrire sous forme explicite :

$$- \text{ pour } 0 \leq z \leq d : AS \left(\frac{L}{D} - \frac{l}{\gamma} \right) + i \sum_m \phi_m \cos \frac{m\pi z}{D} e^{\frac{iSm\pi L}{D}} =$$

$$\sum_n B_n \left(\frac{e^{-iP_n \ln \left(\frac{SL+z}{d} \right)}}{\frac{SL+z}{d}} + \frac{e^{-iP_n \ln \left(\frac{SL-z}{d} \right)}}{\frac{SL-z}{d}} \right) \quad (3-22)$$

$$- \frac{Az}{D} + \sum_m \phi_m \sin \frac{m\pi z}{D} e^{\frac{iSm\pi L}{D}} = - \sum_n B_n \left(\frac{e^{-iP_n \ln \left(\frac{SL+z}{d} \right)}}{\frac{SL+z}{d}} - \frac{e^{-iP_n \ln \left(\frac{SL-z}{d} \right)}}{\frac{SL-z}{d}} \right) \quad (3-23)$$

- pour $d < z \leq D$

$$\frac{ASL}{D} + i \sum_m \phi_m \cos \frac{m\pi z}{D} e^{\frac{iSm\pi L}{D}} = 0 \quad (3-24)$$

Etant donné les fonctions :

$$f(\pm z) = \sum_w B_w e^{-iP_w \ln \left(\frac{SL \pm z}{d} \right)}$$

les coefficients B_w peuvent être trouvés (annexe B)

$$B_w = \frac{1}{\ln \Delta} \int_0^d \left(\frac{f(z)}{SL+z} e^{iP_w \ln \left(\frac{SL+z}{d} \right)} + \frac{f(-z)}{SL-z} e^{iP_w \ln \left(\frac{SL-z}{d} \right)} \right) dz$$

où

$$\Delta = \frac{S + \gamma}{S - \gamma}$$

Les deux termes entre parenthèses de l'équation précédente peuvent être obtenus facilement avec (3-22) et (3-23). En effet :

$$- \text{ premier terme : } \frac{1}{2d} \left((3-22) - (3-23) \right) \cdot e^{iP_w \ln \left(\frac{SL+z}{d} \right)}$$

$$- \text{ deuxième terme : } \frac{1}{2d} \left((3-22) + (3-23) \right) \cdot e^{iP_w \ln \left(\frac{SL-z}{d} \right)}$$

Après avoir fait quelques manipulations mathématiques, nous obtenons :

$$B_w = A \cdot G_w + \sum_m \phi_m \cdot G_{wm} \quad (3-25)$$

où les fonctions G_w et G_{wm} sont données par :

$$G_w = \frac{1}{2d \ln \Delta} \int_{-d}^d \left(\frac{SL+z}{D} - \frac{S}{\gamma} \right) e^{iP_w \ln \left(\frac{SL+z}{d} \right)} dz$$

$$G_{wm} = \frac{i}{2d \ln \Delta} \int_{-d}^d e^{\frac{im\pi(SL+z)}{D}} \cdot e^{iP_w \ln \left(\frac{SL+z}{d} \right)} dz$$

De la même manière, on peut exprimer l'amplitude modale des ondes internes au large (ϕ_m). En effet :

$$\int_0^d (3-22) \cdot \cos \frac{k\pi z}{D} dz + \int_d^D (3-24) \cdot \cos \frac{k\pi z}{D} dz$$

On a :

$$i \sum_m e^{\frac{iS_m \pi L}{D}} \cdot \phi_m \int_0^D \cos \frac{m\pi z}{D} \cos \frac{k\pi z}{D} dz = \frac{ADS}{k\pi\gamma} \sin \frac{k\pi d}{D}$$

$$+ d \sum_n B_n \int_{-d}^d \frac{e^{-iP_n \ln \left(\frac{SL+z}{d} \right)}}{SL+z} \cos \frac{k\pi z}{D} dz$$

En nous appuyant sur la formule générale :

$$\int_0^T \cos \frac{\ell\pi z}{T} \cos \frac{n\pi z}{T} dz = \begin{cases} 0 & \text{pour } \ell \neq n \\ \frac{T}{2} & \text{pour } \ell = n \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$\phi_k = A H_k + \sum_n B_n H_{kn} \quad (3-26)$$

où les fonctions H_k et H_{kn} sont :

$$H_k = - \frac{2iS}{k\pi\gamma} \sin \frac{k\pi d}{D} e^{\frac{-ik\pi SL}{D}}$$

$$H_{kn} = \frac{-2id}{D} e^{\frac{-ik\pi SL}{D}} \int_{-d}^d \frac{e^{-iP_n \ln \left(\frac{SL+z}{d} \right)}}{SL+z} \cos \frac{k\pi z}{D} dz$$

En combinant (3-25) et (3-26), nous obtenons deux systèmes d'équations linéaires pour les amplitudes modales des ondes internes sur le plateau continental et au large :

$$B_w = A \cdot G_w + A \sum_m H_m \cdot G_{wm} \cdot \sum_n B_n \sum_m H_{mn} G_{wm} \quad (3-27)$$

$$\phi_k = A H_k + A \sum_n H_{kn} \cdot G_n + \sum_m \phi_m \sum_n G_{nm} H_{kn} \quad (3-28)$$

Développant (3-27) sous forme plus explicite :

$$\begin{aligned} - A (G_1 + \sum_m H_m G_{1m}) &= (\sum_m H_{m1} G_{1m} - 1) B_1 + \sum_m H_{m2} G_{1m} \cdot B_2 \dots \sum_m H_{mk} G_{1m} \cdot B_k \\ - A (G_2 + \sum_m H_m G_{2m}) &= \sum_m H_{m1} G_{2m} \cdot B_1 + (\sum_m H_{m2} G_{2m} - 1) B_2 \dots \sum_m H_{mk} G_{2m} \cdot B_k \\ &\vdots \\ - A (G_k + \sum_m H_m G_{km}) &= \sum_m H_{m1} G_{km} \cdot B_1 + \sum_m H_{m2} G_{km} \cdot B_2 \dots (\sum_m H_{mk} G_{km} - 1) B_k \end{aligned} \quad (3-29)$$

Si on désigne par :

$$X \equiv \begin{bmatrix} (\sum_m H_{m1} G_{1m} - 1) \sum_m H_{m2} G_{1m} \dots \sum_m H_{mk} G_{1m} \\ \sum_m H_{m1} G_{2m} (\sum_m H_{m2} G_{2m} - 1) \dots \sum_m H_{mk} G_{2m} \\ \vdots \\ \sum_m H_{m1} G_{km} \qquad \qquad \qquad (\sum_m H_{mk} G_{km} - 1) \end{bmatrix}$$

$$B \equiv \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_k \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y \equiv \begin{bmatrix} G_1 + \sum_m H_m G_{1m} \\ G_2 + \sum_m H_m G_{2m} \\ \vdots \\ G_k + \sum_m H_m G_{km} \end{bmatrix}$$

Le système d'équations linéaires (3-29) s'écrira en notation matricielle :

$$- AY = XB$$

on en déduit :

$$B = - AX^{-1}Y \qquad (3-30)$$

connaissant les matrices X et Y, on peut évaluer ainsi théoriquement les amplitudes des modales des ondes internes sur le plateau continental.

De la même manière, nous pouvons obtenir les amplitudes modales des ondes internes au large (ϕ_m).

F - Calculs pratiques des fonctions H_k , G_w , H_{kn} et G_{wm} :

En pratique, les solutions analytiques des fonctions H_{kn} et G_{wm} ne sont pas possibles. Néanmoins, on peut obtenir des solutions approximatives avec une précision convenable, soit par une méthode d'intégration numérique, soit par intégrations successives par parties.

Dans ce dernier cas, la précision du calcul dépend du nombre de termes qu'on a intégrés. En effet, nous avons obtenu une précision de 10^{-4} avec quinze premiers termes.

Tandis que la fonction G_w peut être résolue analytiquement après avoir fait certaines manipulations mathématiques. Le détail de ces calculs est donné en annexe.

Nous rappelons brièvement ci-dessous les quatre fonctions ainsi déterminées :

$$H_k = - \frac{2i}{k\pi} \frac{S}{\gamma} \sin \left(k\pi \frac{d}{D} \right) e^{-ik\pi \frac{S}{\gamma}} \cdot \frac{d}{D}$$

$$G_w = \frac{S}{\gamma} e^{iP_w \ln \Delta} \left(\frac{d}{D} \frac{(\ln \Delta - i w \pi)}{(w^2 \pi^2 + \ln^2 \Delta)} - \frac{(\ln \Delta - 2i w \pi)}{(4w^2 \pi^2 + \ln^2 \Delta)} \right)$$

$$G_{wm} = \frac{e^{iP_w \ln \Delta}}{2m\pi d / D \ln \Delta} \sum_l \frac{(-1)^{l+1} \left(\frac{d}{D} - i w \pi \right)^l (\alpha^l e^{i m \pi \frac{d}{D}} - \beta^l e^{i m \pi \frac{d}{D}})}{\Pi(l + iP_w)}$$

$$H_{kn} = \frac{2d}{DP_n} e^{-i(k\pi \frac{S}{\gamma} \frac{d}{D} + P_n \ln \Delta)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{k\pi d}{D} \sum_t \frac{(-1)^{t+1} (k\pi d / D)^{2t-2} (\alpha^{2t-2} - \beta^{2t-2})}{\Pi(2t-2 - iP_n)} \\ + \sin \frac{k\pi d}{D} \sum_t \frac{(-1)^{t+1} (k\pi d / D)^{2t-1} (\alpha^{2t-1} + \beta^{2t-1})}{\Pi(2t-1 - iP_n)} \end{array} \right\}$$

où $\alpha = \frac{S}{\gamma} + 1$; $\beta = \frac{S}{\gamma} - 1$; $\Delta = \frac{\alpha}{\beta}$

et le symbole $\Pi(n+A)$ désigne le produit suivant :

$$(1 + A) \cdot (2 + A) \cdot \dots \cdot (n + A)$$

Nous remarquons que les fonctions H_k , G_w , G_{wm} et H_{kn} sont des fonctions de $\frac{S}{\gamma}$ et de $\frac{d}{D}$ qui sont respectivement le rapport de pente caractéristique à celle du plateau continental et le rapport de profondeur maximum du plateau continental à celle de la plaine abyssale.

1.6. Application au plateau continental ivoirien :

Etant donné les fréquences des ondes internes σ et d'inertie f , la pente caractéristique S varie suivant la fréquence de Väisälä N ; car sa définition est :

$$\sqrt{\frac{\sigma^2 - f^2}{N^2 - \sigma^2}}$$

En effet, la pente caractéristique S diminue pendant la saison chaude où N augmente, tandis qu'elle augmente pendant la saison froide où la mer devient peu stratifiée. Devant Abidjan, elle varie entre 0.005 et 0.015 environ pour les marées internes semi-diurnes M2.

A titre d'essai d'application du modèle pour le plateau continental ivoirien, on choisit les paramètres suivants :

$$d = 100 \text{ m}$$

$$\gamma = \frac{d}{L} = \frac{1}{150}$$

$$D = 3 \text{ km}$$

$$\frac{d}{D} = \frac{1}{30}$$

$$S = 0.01$$

$$L = 15 \text{ km}$$

$$\frac{S}{\gamma} = 1.5$$

A - Calcul pratique des amplitudes modales B_w :

Les amplitudes modales des ondes internes sur le plateau continental B_w peuvent être obtenues en résolvant l'équation matricielle (3-30). On montre, en priorité, dans la figure 46 les variations des modules des fonctions complexes H_k , G_w , G_{wm} , H_{km} en fonction de nombre des modes. On remarque que les fonctions convergent en général, au fur et à mesure que le nombre de modes augmente.

Le calcul des éléments des matrices X et Y de (3-30) ne peut être réalisable qu'approximativement en tenant compte du nombre fini des modes. Dans notre cas, nous nous sommes limités à trente modes.

Les éléments de la matrice X ayant des valeurs négligeables (de l'ordre de 10^{-2}), sauf les éléments de l'axe principal qui sont voisins de -1 . On peut faire une première approximation pour la matrice inverse de X :

$$X^{-1} = -1$$

Sinon, on doit faire un énorme calcul, au risque d'avoir des valeurs erronées, de la matrice inverse de X en nombre complexe pour une faible précision des valeurs de B_w .

Tous les calculs concernant les marées internes étant rapportés à A qui est l'amplitude de la vitesse verticale de la marée externe sur le plateau continental, il est commode de prendre l'unité comme valeur de A . Il suffit donc de calculer les éléments de la matrice Y pour les amplitudes modales B_w .

On montre dans la figure 46, les variations de Y en fonction de modes. On constate que ces variations ne sont importantes que pour les premiers modes. On remarque aussi que la fonction G_w est très voisine de celle de Y et qu'on peut utiliser G_w en remplaçant B_w , si on désire un calcul rapide sans perdre beaucoup sur la précision.

B - Résultats graphiques du calcul des marées internes :

Connaissant les amplitudes modales B_w , on peut calculer les fonctions du courant ($\hat{\psi}_I$), les vitesses verticales (W_{int}^I) et horizontales (U_{int}^I) dues aux marées internes sur le plateau continental (cf. tableau 11).

En effet, les calculs ont été faits pour chaque instant donné en utilisant trente modes.

Dans les figures 47 à 52 on présente quelques résultats graphiques des lignes de courant dues à la marée externe (ψ_I), dues aux marées internes ($\hat{\psi}_I$) et dues à la somme de deux ondes précédentes ($\psi_I + \hat{\psi}_I$) respectivement pour les instants

$$\sigma t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi$$

Les lignes de courant de marée externe sont des droites parallèles au fond. Ce qui reflète le fait que la schématisation de l'onde de marée externe sur le plateau continental est l'onde stationnaire de longueur d'onde infinie.

Au contraire, les lignes de courant des marées internes font des boucles suivant les lignes caractéristiques et les intensités augmentent à l'approche de la côte. Les lignes de courant résultant sont représentés par la somme des deux.

On indique les mouvements des particules d'eau par les flèches.

Comme prévu, les perturbations engendrées au rebord continental (en bas à droite des figures) se propagent suivant les lignes caractéristiques :

Près du talus (partie droite des figures), les courants de marée externe dominant pour toute la colonne d'eau avec une faible apparition des perturbations suivant les caractéristiques près du fond.

A l'approche de la côte, les effets de marées internes deviennent de plus en plus nettes et les courants de marées internes dominant en faisant dévier complètement les lignes de courant de marée externe (partie gauche des figures). On voit bien ici l'apparition des contre-courants près du fond.

La concentration des lignes de courant s'accroît au fur et à mesure que l'on s'approche de la côte. La côte elle-même est un point de singularité du modèle. Mais en réalité, cette accumulation infinie d'énergie à la côte peut s'expliquer physiquement par une perte d'énergie due à la viscosité de l'eau ou due au frottement sur le fond qui peut entraîner la déformation et le déferlement éventuel des marées internes.

Il est intéressant de remarquer qu'il y a des zones successives de convergence et de divergence dans le système du courant des marées internes.

Les zones de convergence peuvent se traduire par des slicks de surface qui sont vraisemblablement dus soit aux réfléchissements différentiels de la surface de mer, soit à l'accumulation de plancton ou des débris ou d'huile sur la surface de la mer, soit à la concentration d'énergie d'onde capillaire dans la zone de convergence. L'apparition de slicks est donc une bonne indication indirecte d'une présence des ondes internes sous l'eau (APEL, 1975).

Par les figures 53 et 54, on montre respectivement les courants horizontaux et verticaux de marée interne sur plusieurs verticales aux instants $\sigma T = 0$ et $\sigma T = \pi$

Les valeurs sont rapportées aux courants de marée externe qui ont des valeurs maximales aux instants précités. Les courants de marée externe s'écoulent vers le large à l'instant $\sigma t = 0$ tandis qu'ils s'écoulent vers la côte à l'instant $\sigma T = \pi$.

On voit ici beaucoup plus clairement la propagation d'énergie suivant les caractéristiques le long desquelles les valeurs maximales des courants apparaissent.

Comme on a vu dans les figures des lignes de courant, les courants dus aux ondes internes sont faibles par rapport aux courants de marée externe dans la partie droite du plateau continental, sauf à la proximité des caractéristiques. Les courants de marées internes s'accroissent de plus en plus et peuvent dépasser plusieurs fois les courants de marée externe près de la côte.

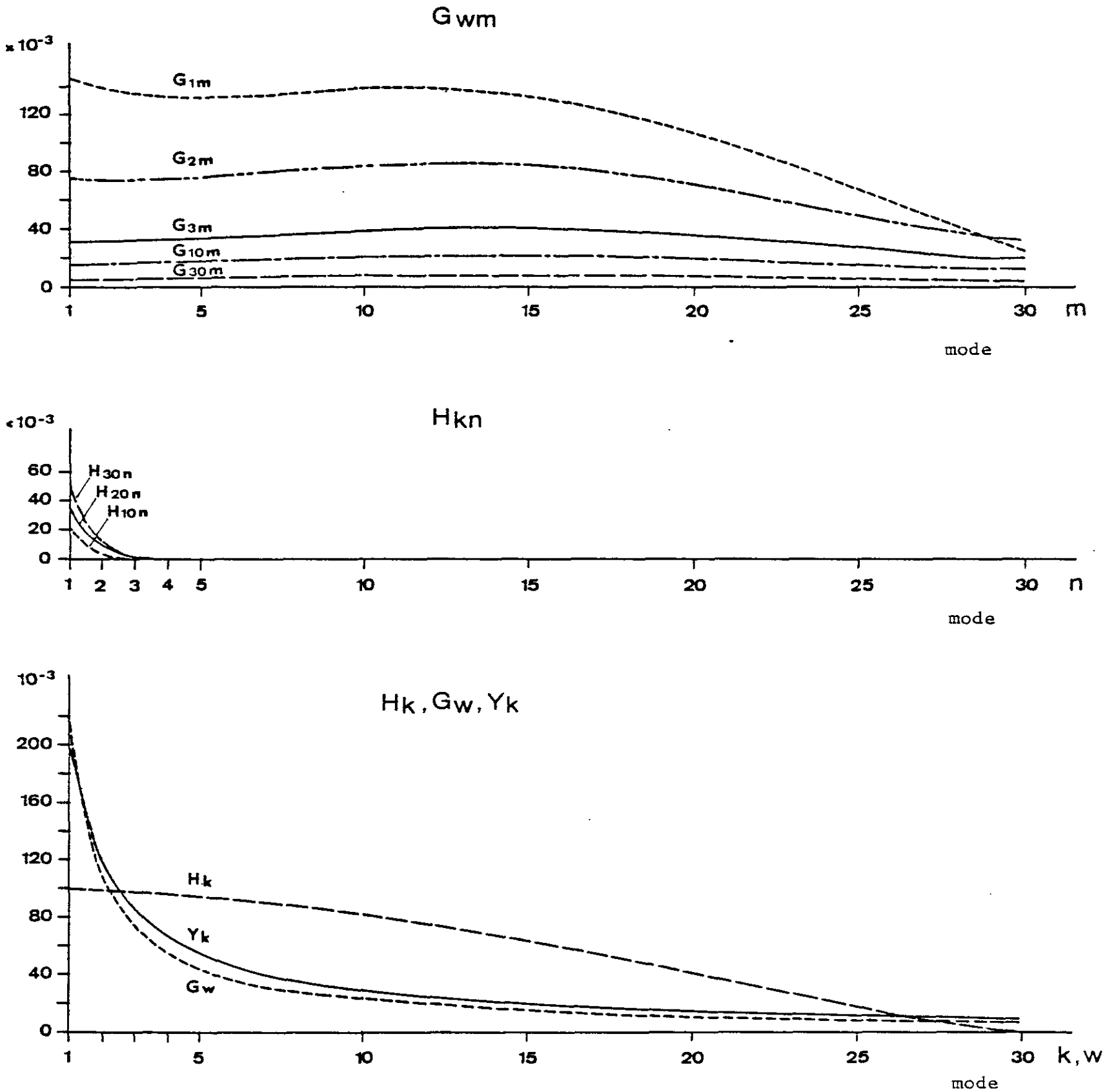


Fig. 46 : Variations des modules des fonctions complexes G_{wm} , H_{kn} , H_k , G_w , Y_k en fonction du nombre des modes.

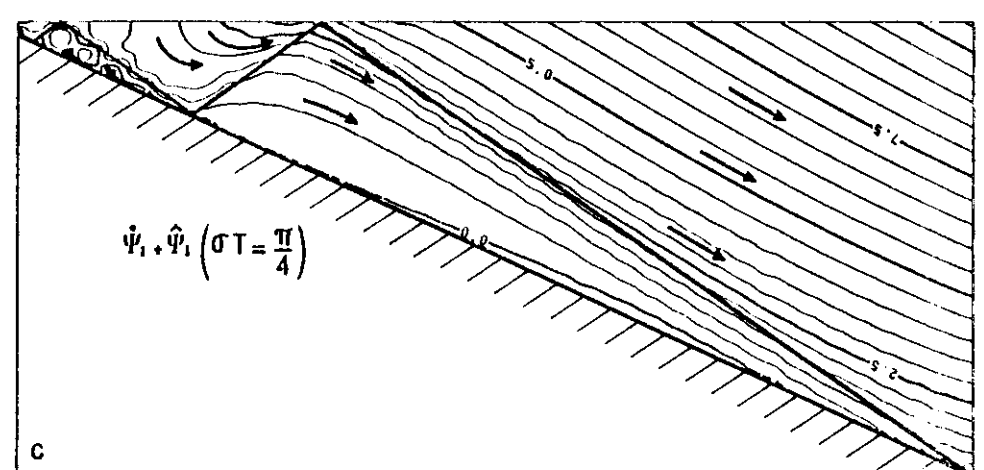
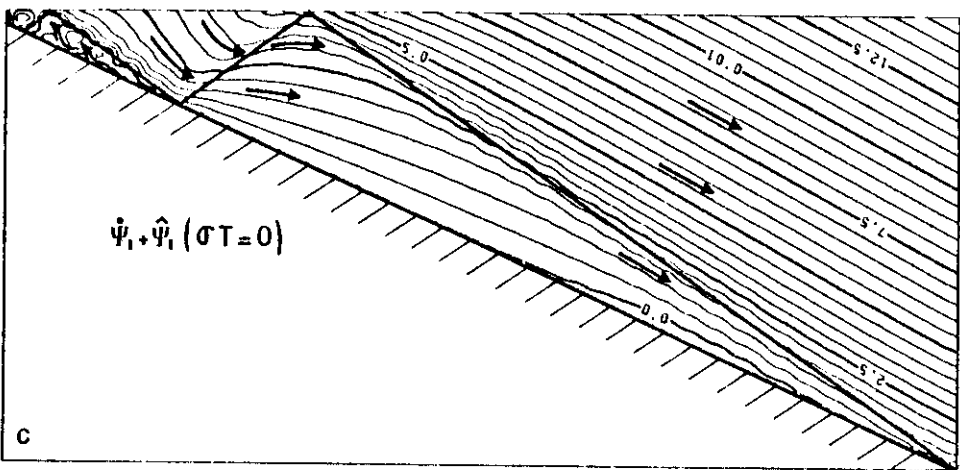
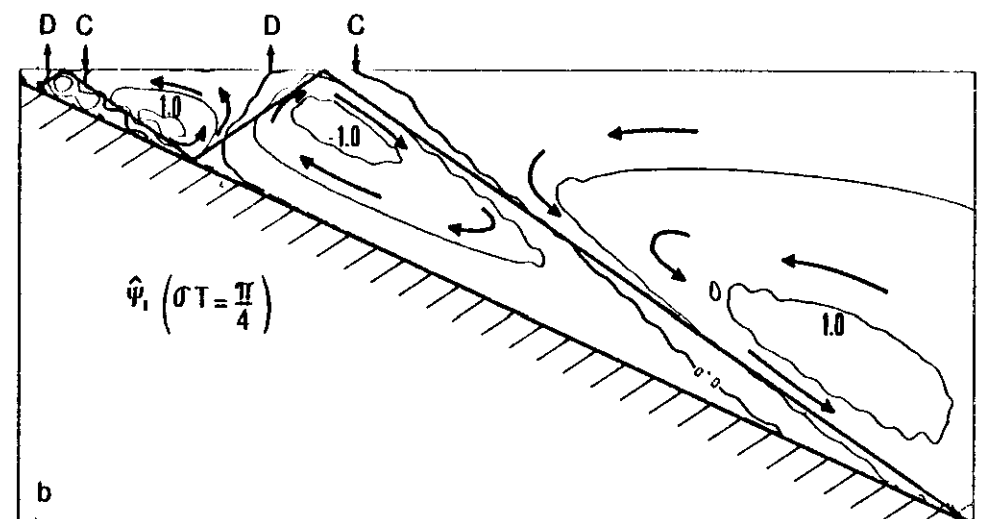
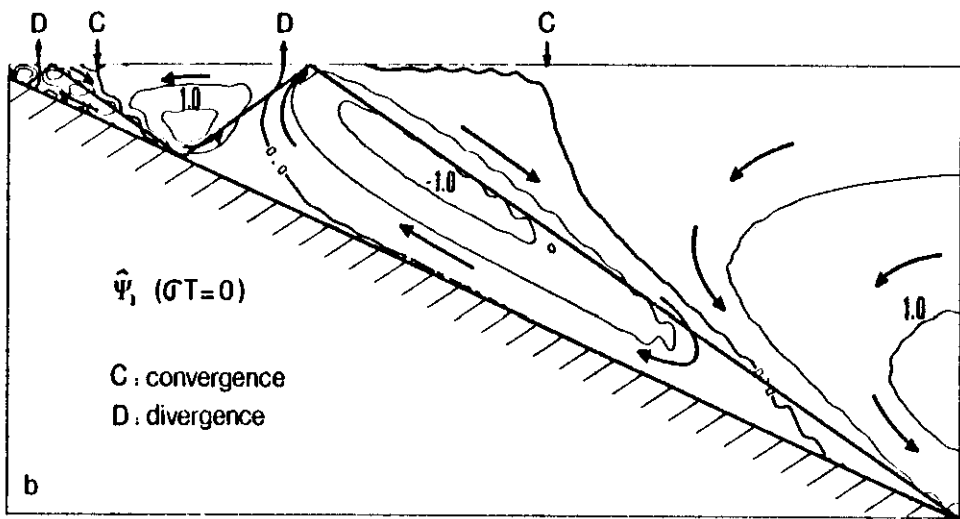
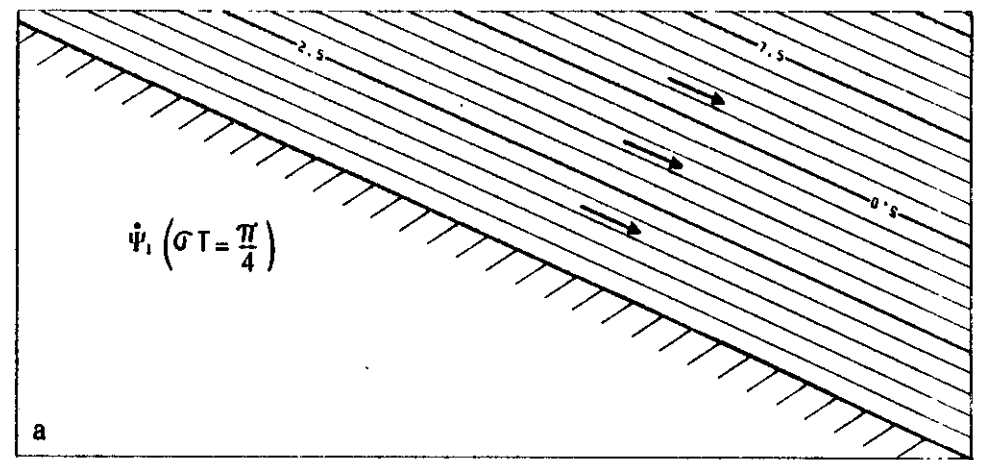
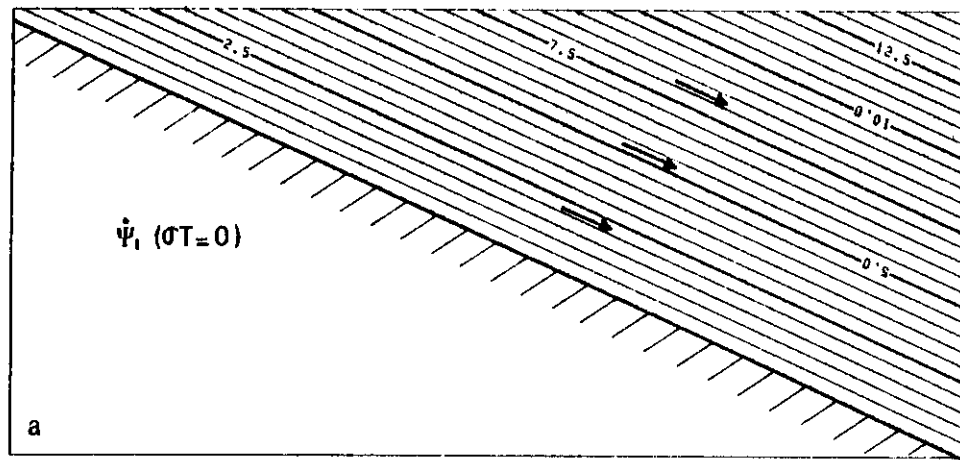


Fig. 47 et 48 : Lignes de courants dues a) aux marées externes ; b) aux marées internes ; c) à la somme des deux.

Fig. 49

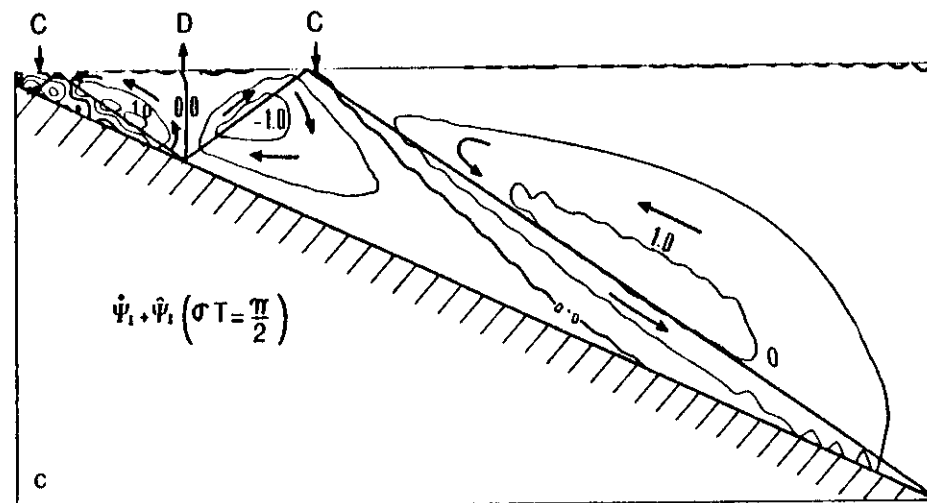
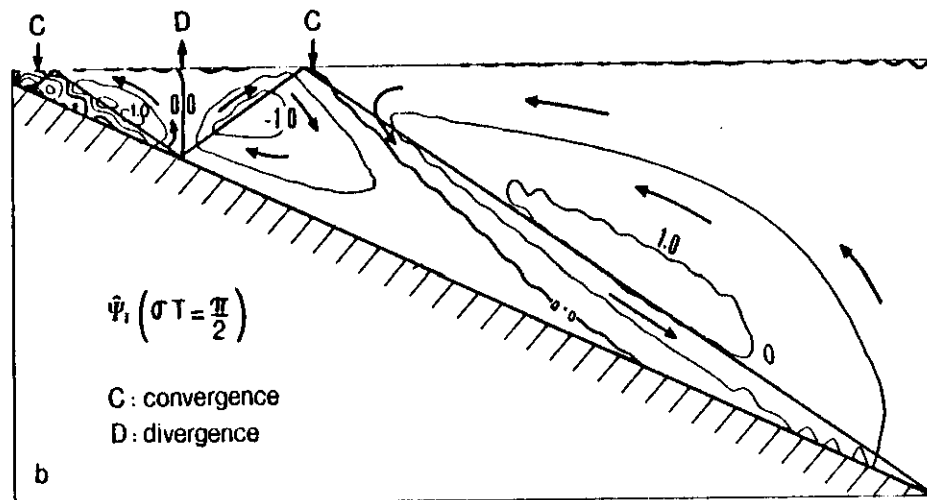
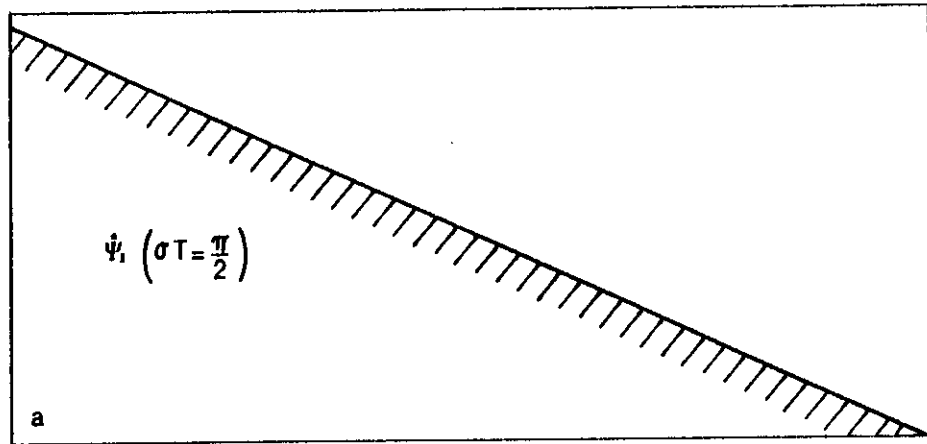


Fig. 50

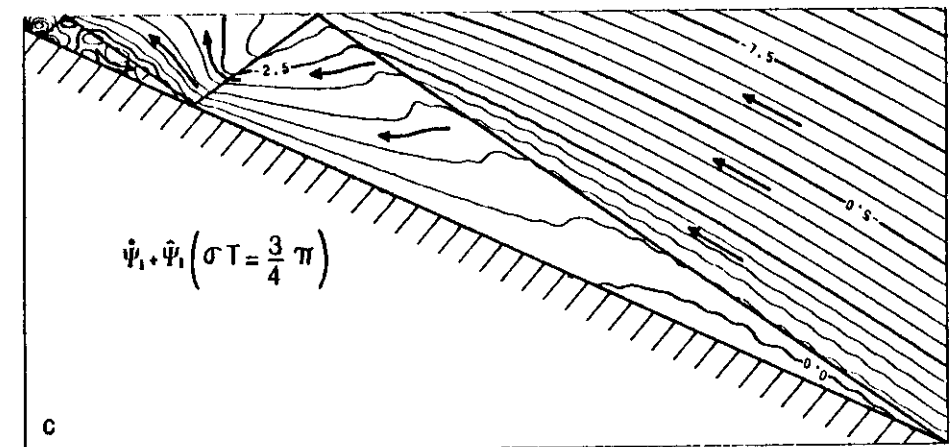
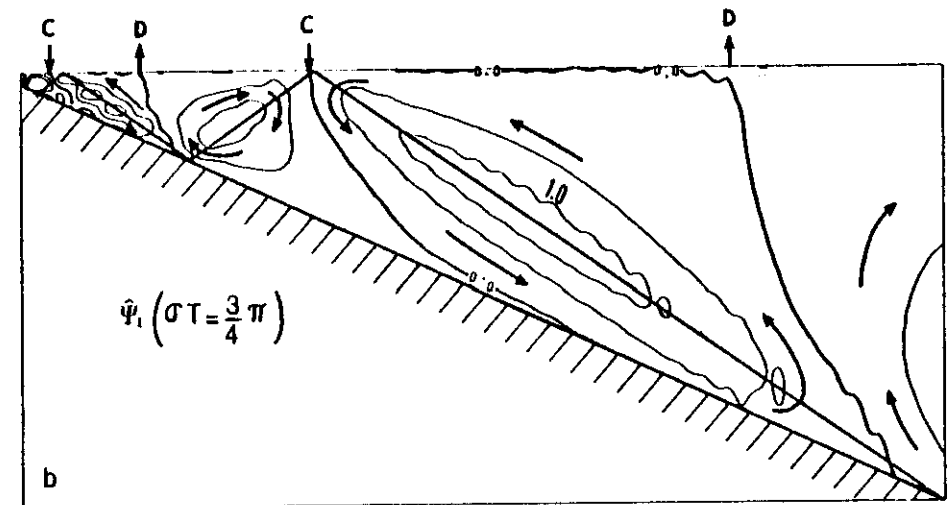
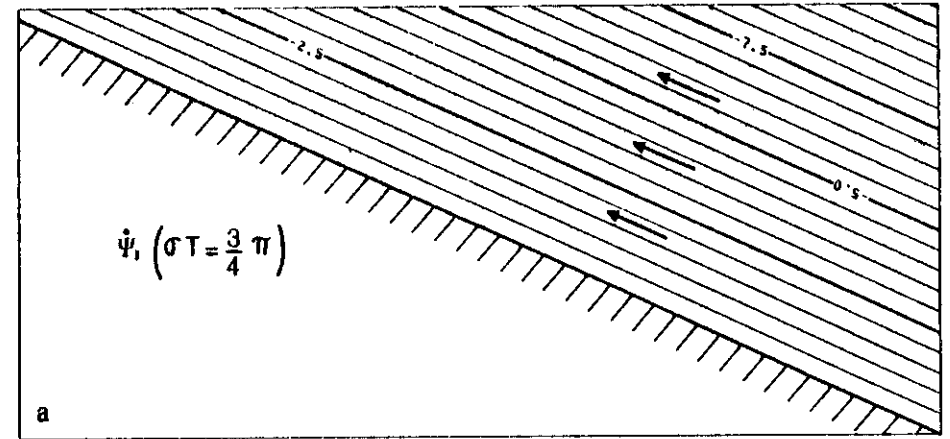


Fig. 49 et 50 : Lignes de courants dues a) aux marées externes ; b) aux marées internes ; c) à la somme des deux.

Fig. 51

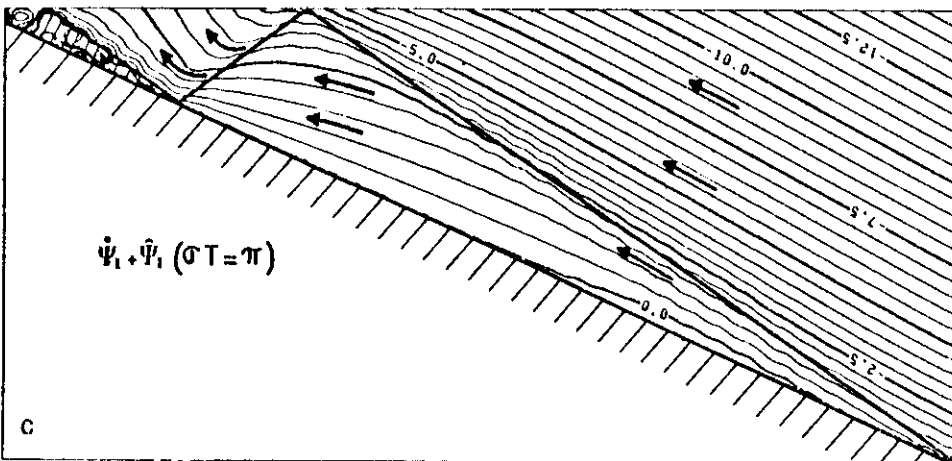
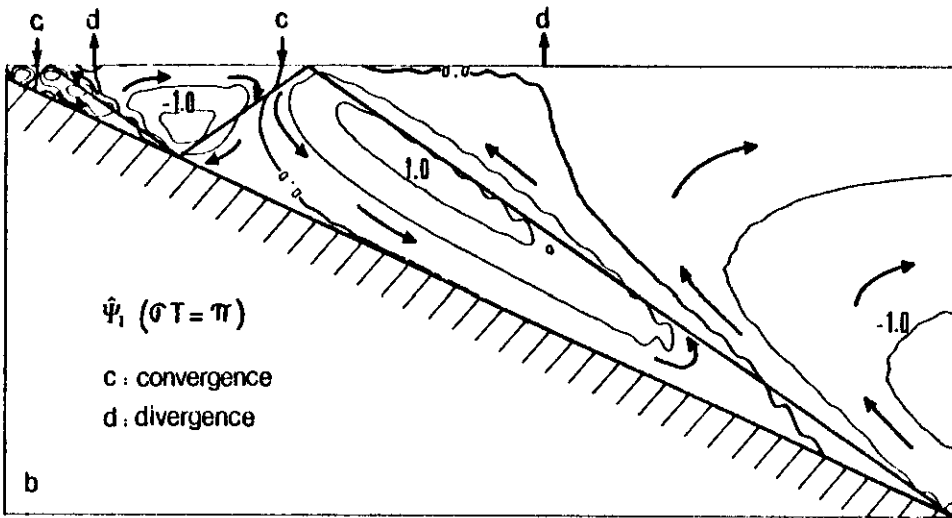
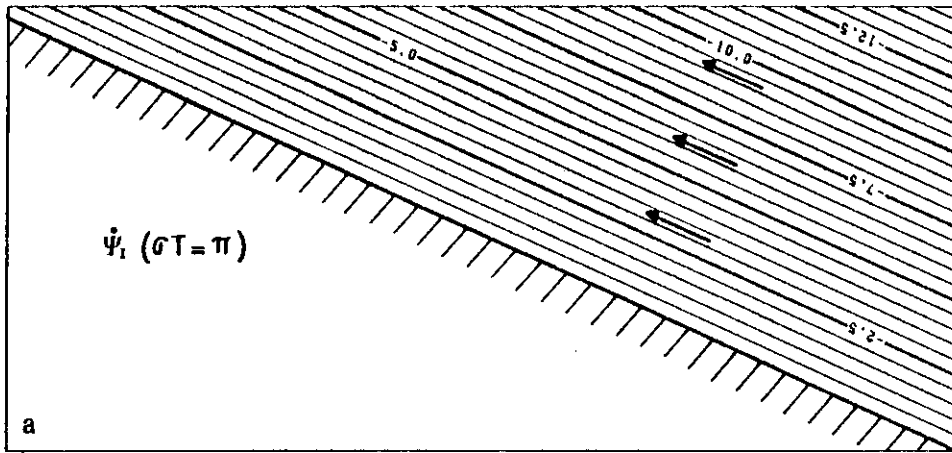


Fig. 52

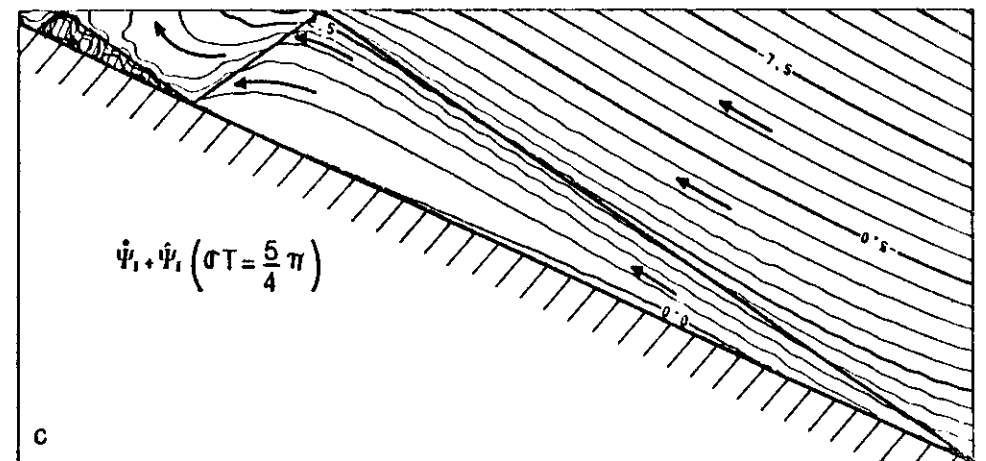
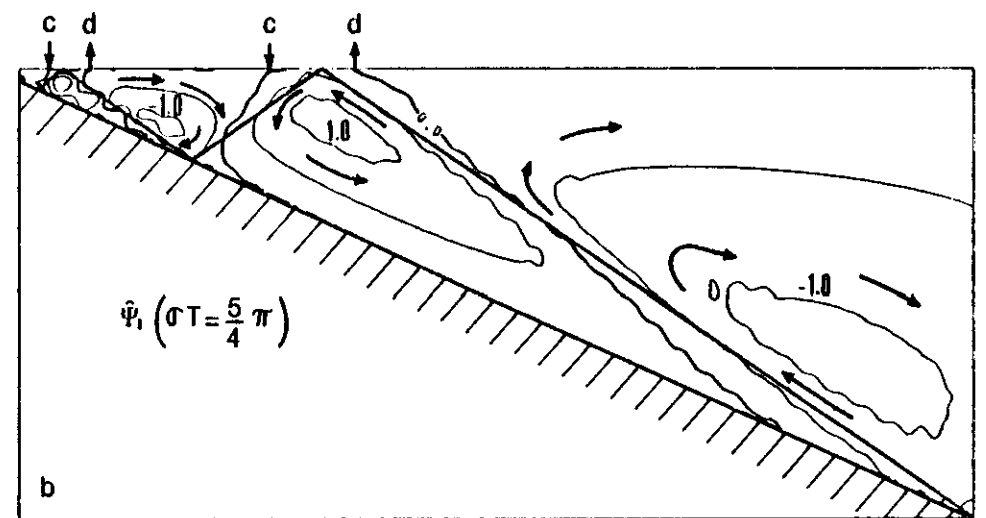
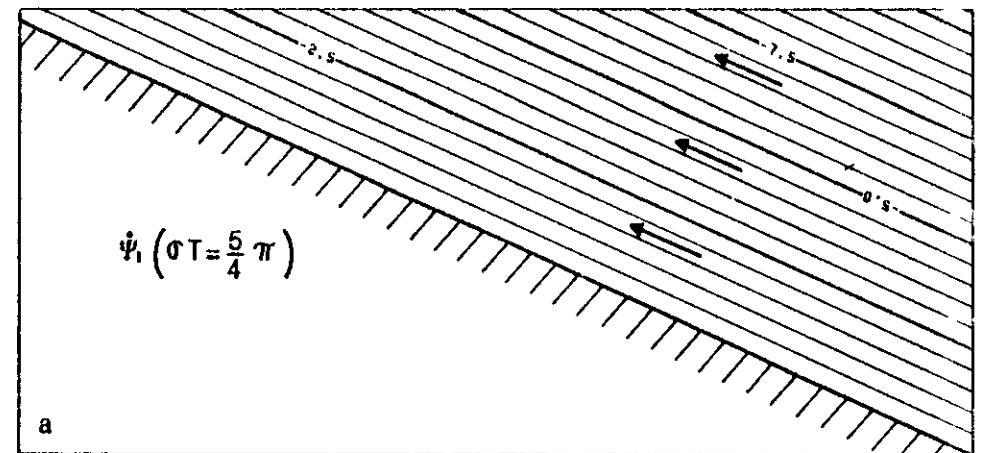


Fig. 51 et 52 ; Lignes de courants dues a) aux marées externes ; b) aux marées internes ; c) à la somme des deux.

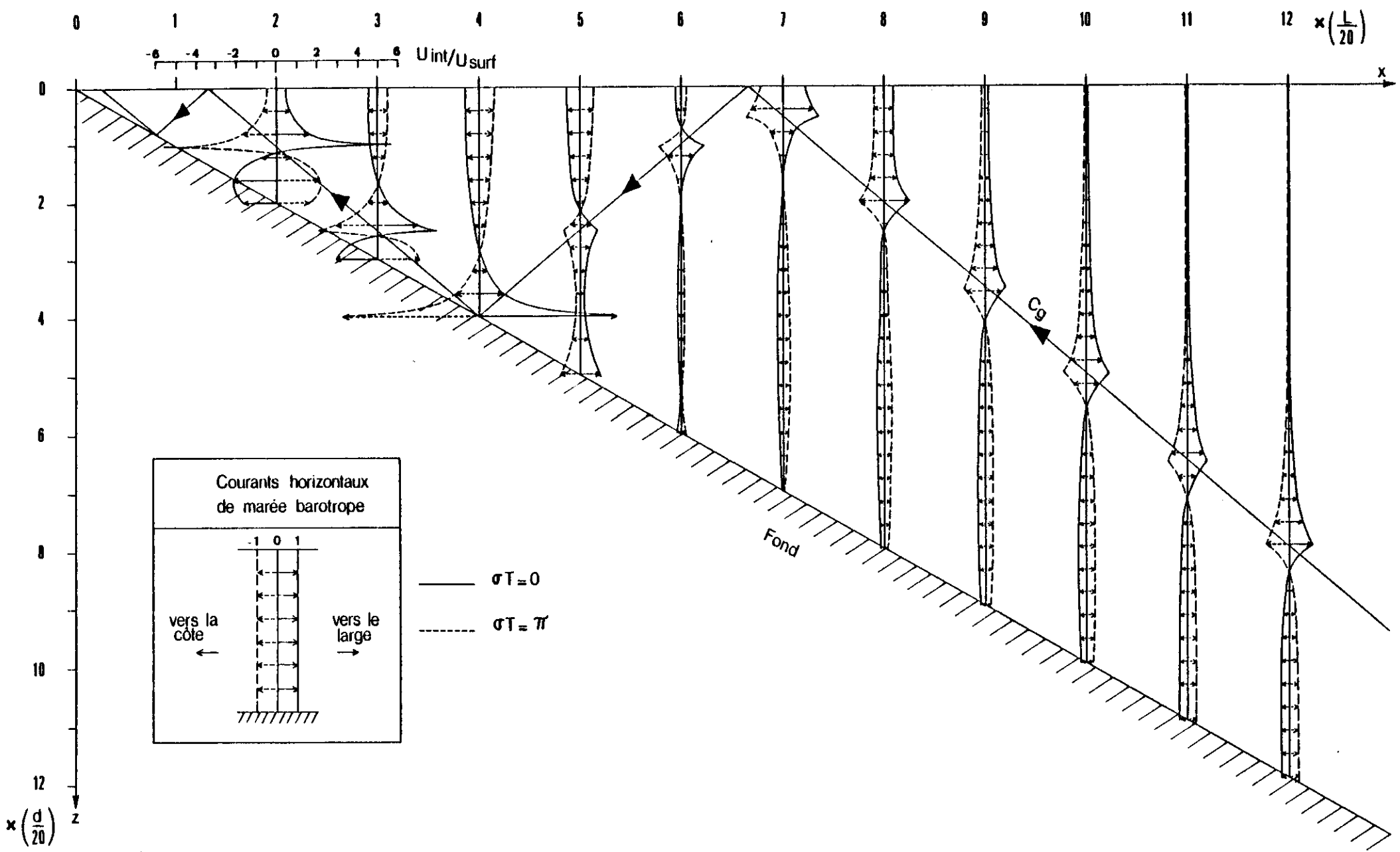


Fig. 53 : Valeurs relatives des courants horizontaux des marées internes (U_{int}) par rapport aux courants des marées externes (U_{surf}) sur plusieurs verticales aux instants $\sigma T = 0$ et $\sigma T = \pi$.

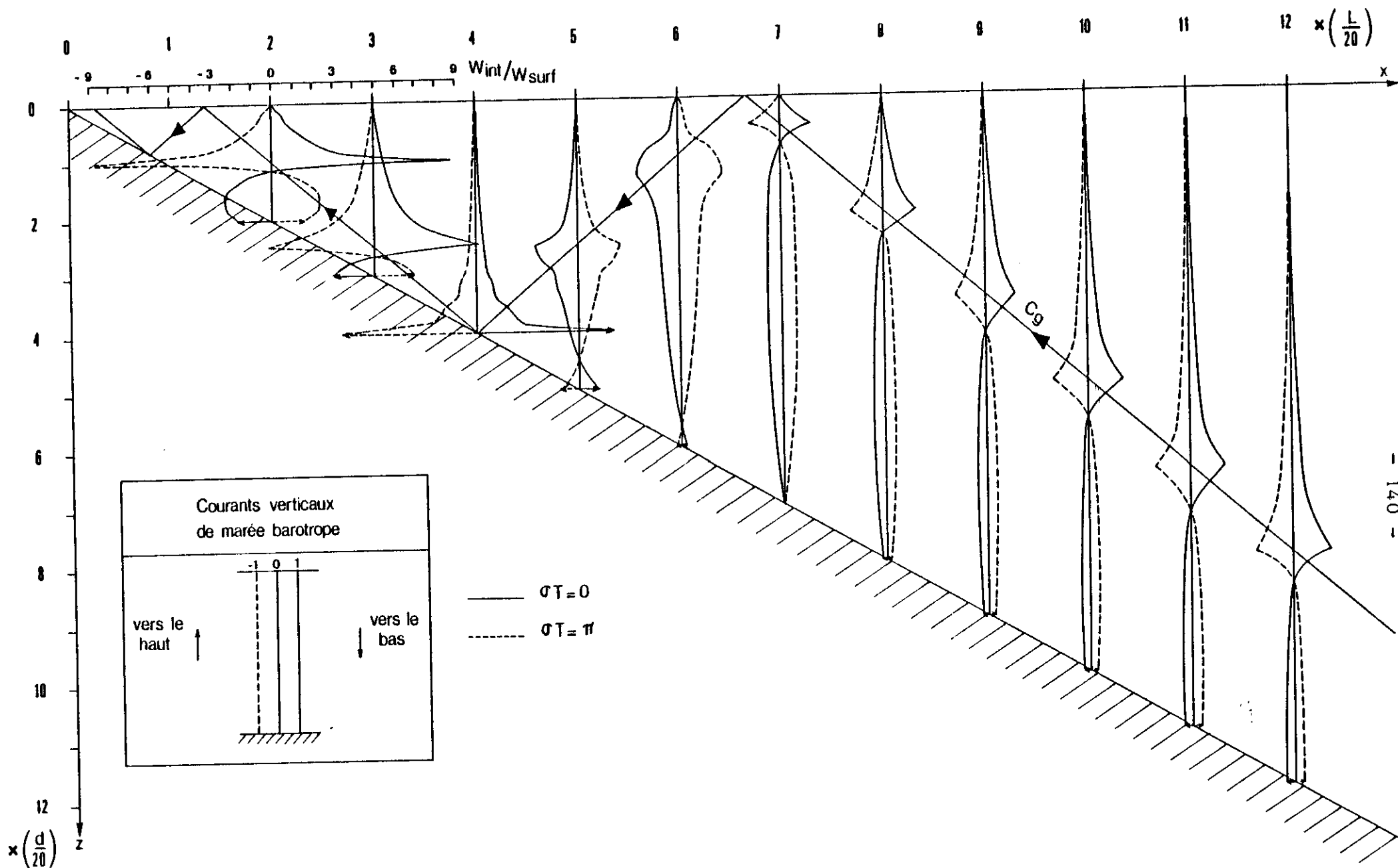


Fig. 54 : Valeurs relatives des courants verticaux des marées internes (W_{int}) par rapport aux courants des marées externes (W_{surf}) sur plusieurs verticales aux instants $\sigma T = 0$ et $\sigma T = \pi$.

1.7. Discussion sur le modèle et conclusion :

A part le mécanisme général de la génération et de la propagation des marées internes sur le plateau continental, il n'est pas toujours évident de comparer directement le modèle avec les mesures dans la nature. Cela proviendra de plusieurs causes dans notre cas :

- a) Les mesures hydrologiques et courantologiques faites sur le plateau continental devant Abidjan sont sporadiques dans le temps et dans l'espace. Autrement dit, on manque de données simultanées et bien réparties géographiquement pour pouvoir faire une réelle comparaison avec le modèle.
- b) La majorité des mesures dont on dispose a été faite près du Canyon sous-marin Trou-sans-Fond. Il est très probable qu'il y a des effets particuliers du Trou-sans-Fond pour les marées internes devant Abidjan. Cela a été déjà commenté au cours de l'analyse des modes propres, mais le modèle du plateau continental ne peut pas s'appliquer directement pour le canyon sous-marin. Néanmoins, on peut emprunter l'idée fondamentale du modèle. Ainsi la discontinuité dans le système de courant provoquée par la variation brutale de la topographie de Trou-sans-Fond engendre des ondes internes qui peuvent se propager vers la côte suivant le schéma exposé dans le modèle. On schématise plus clairement par la figure 55 l'idée que l'on vient de décrire.

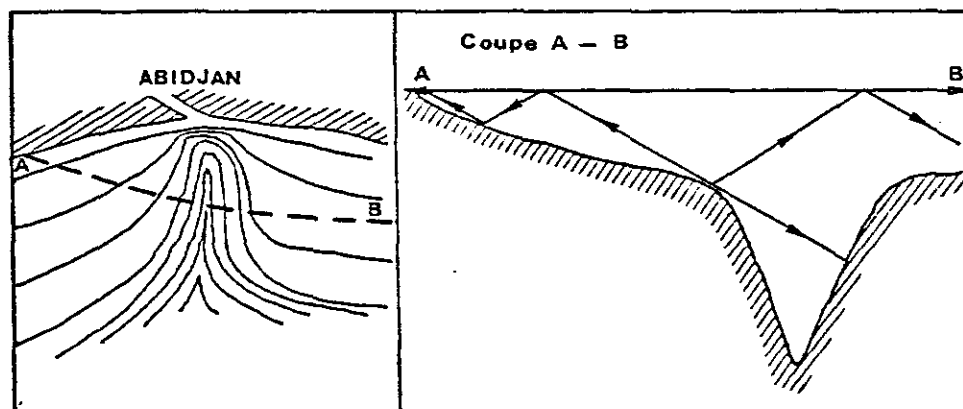


Fig. 55 : Schématisation du mécanisme possible de génération et de propagation des marées internes par le Trou-sans-Fond.

Avec les idées précédentes, si on regarde maintenant quelques résultats graphiques des variations hydrologiques, on peut trouver certaines similitudes avec le modèle.

Par exemple dans la figure 56,

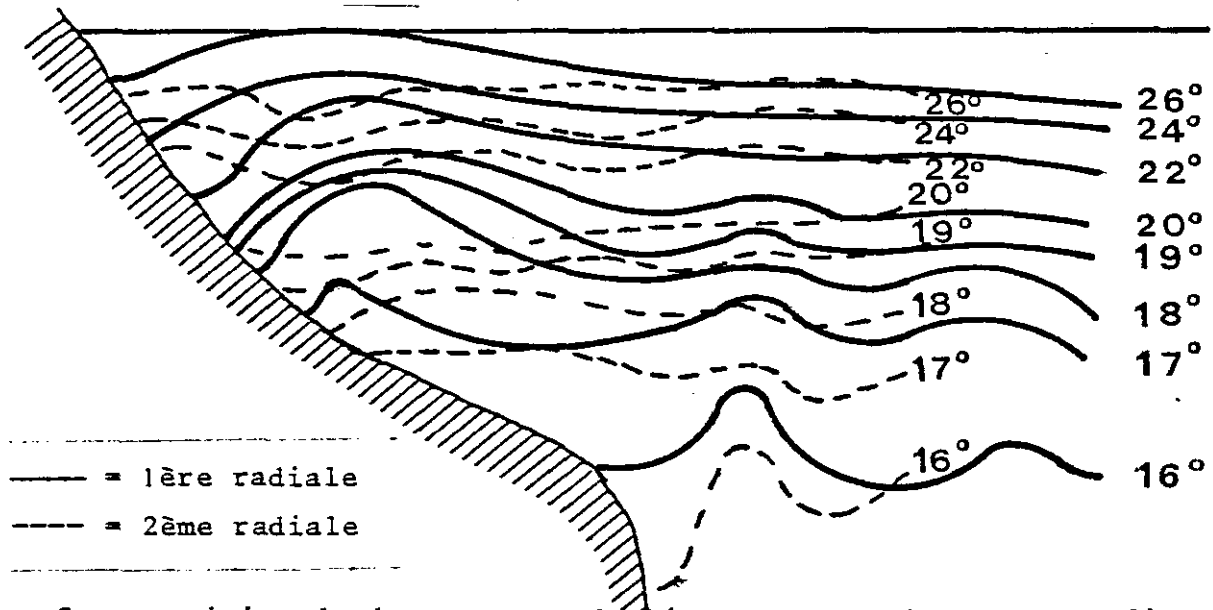


Fig. 56 : Superposition de deux coupes des isothermes suivant les radiales I et II de la figure 7 effectuées avec un décalage de 6 h environ (Cf. Fig. 21)

- au voisinage du talus, les variations remarquables des isothermes sont visibles seulement près du fond. On trouvera le même phénomène dans la fig. 9, qui a été faite pour les mesures sur la pente de Trou-sans-Fond.

Ce phénomène est vraisemblablement dû à la remontée et la descente des masses d'eau par une poussée du courant de marée externe suivant le fond à forte pente. On comprendra mieux cela avec les images des lignes de courant au-dessus de la pente continentale (partie droite de la figure 57).

- si on s'éloigne du talus vers la côte, les variations des isothermes remontent de plus en plus vers la surface avant d'arriver au voisinage de la côte où les variations importantes des isothermes se répartissent sur presque toute la colonne d'eau. On peut le voir aussi dans les mesures faites près de la côte TSF12, TSF13 et TSF9 (fig. 15, 14 et 10).

Si on considère les figures 9 et 10, on constate que les fluctuations de grande amplitude des isothermes ne se trouvent pas au niveau de la thermocline. D'après le modèle, la stratification de la mer affecte seulement les chemins de parcours de l'énergie des marées internes. Les marées internes de grandes amplitudes se trouveront donc le long des caractéristiques, mais pas dans la zone de thermocline contrairement à ce qu'on imagine souvent !

Sur la pente continentale, on observe généralement des variations énormes des isothermes près du fond (plus de 50 mètres dans le cas de TSF1). Mais il ne serait pas prudent d'attribuer ces fluctuations aux marées internes. En effet, près du talus, les mouvements liés aux marées internes sont très faibles par rapport à ceux de la marée externe. En particulier, le long de la pente continentale, le courant de marée externe peut modifier considérablement les niveaux des différentes masses d'eau. Il est donc plus logique de considérer les fluctuations des isothermes comme dues à l'advection du courant de marée externe le long de la pente continentale. Au contraire, près de la côte où les mouvements des marées internes prédominent, il est souhaitable d'analyser les courants pour déterminer l'existence et les caractéristiques des marées internes.

D'après les diverses remarques précédentes, il semble que le modèle du plateau continental puisse assez bien rendre compte des marées internes observées devant Abidjan au moins d'une façon qualitative.

Il serait cependant souhaitable, dans un avenir proche :

- d'étudier la dissipation d'énergie sur la pente près de la côte ;
- de tracer les variations temporelles des isothermes ou des isohalines en tenant compte des vitesses verticales et horizontales calculées par le modèle et de comparer avec les observations dans la nature ;
- d'étendre cette étude à celle de la propagation des marées internes au large ;
- de compléter le modèle en tenant compte des courants quasi-permanents et des effets du Trou-sans-Fond pour que le modèle puisse être plus adapté aux mesures faites devant Abidjan.

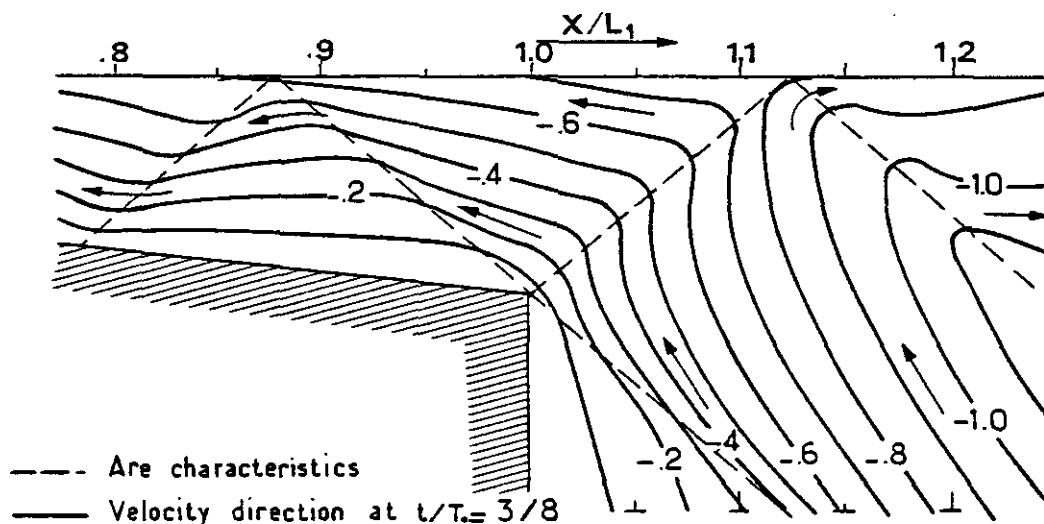


Fig. 52 : Lignes de courants au voisinage du talus continental (d'après PRESENBERG, 1971).

2 - Modèle de canyon sous-marin Trou-sans-Fond

=====

Il nous semble que, outre les variations saisonnières hydrologiques et courantologiques dans le Golfe de Guinée, l'existence du canyon sous-marin "Trou-sans-Fond" complique encore plus les régimes dynamiques sur le plateau continental devant Abdijan. Ceci avait été prévu au cours de l'analyse des modes propres.

Il paraît utile d'examiner si la variation topographique du Trou-sans-Fond a des effets sur le système de courants de marée dans cette région.

Le problème analogue a été étudié par CAVANIE (1969) dans son modèle à deux dimensions et à deux couches pour examiner la g n se des marées internes sur le seuil de Gibraltar par l'action des courants de marées. En se basant sur les hypothèses des ondes longues (vitesses et accélérations verticales négligeables) et sur l'approximation de BOUSSINESQ, il a mis en évidence des oscillations périodiques de l'interface à la fréquence de marée. La résolution du système hyperbolique d'équations aux dérivées partielles non linéaires qui caractérise les écoulements dans un système à deux couches, a été faite par une intégration numérique des équations en utilisant la méthode de caractéristiques.

Nous empruntons l'idée générale et les équations fondamentales du modèle de CAVANIE pour l'appliquer à titre d'essai au Trou-sans-Fond.

2.1 - Hypothèses fondamentales et mise en équations

Le modèle envisagé est constitué de deux couches superposées de fluides homogènes, incompressibles et non visqueux (fig. 58) ; avec :

$$\rho_1, \quad u_1(x,t), \quad p_1(x,z,t) \quad \text{pour } 0 \leq z < h_1$$

$$\rho_2, \quad u_2(x,t), \quad p_2(x,z,t) \quad \text{pour } h_1 < z \leq h_2$$

où $h_1(x,t)$ et $h_2(x)$ étant respectivement une fonction de l'interface et du fond.

On suppose que la variation de la surface libre due aux ondes de surface et aussi aux ondes internes est négligeable et on représente la surface par un plafond rigide horizontal (\overline{AB}).

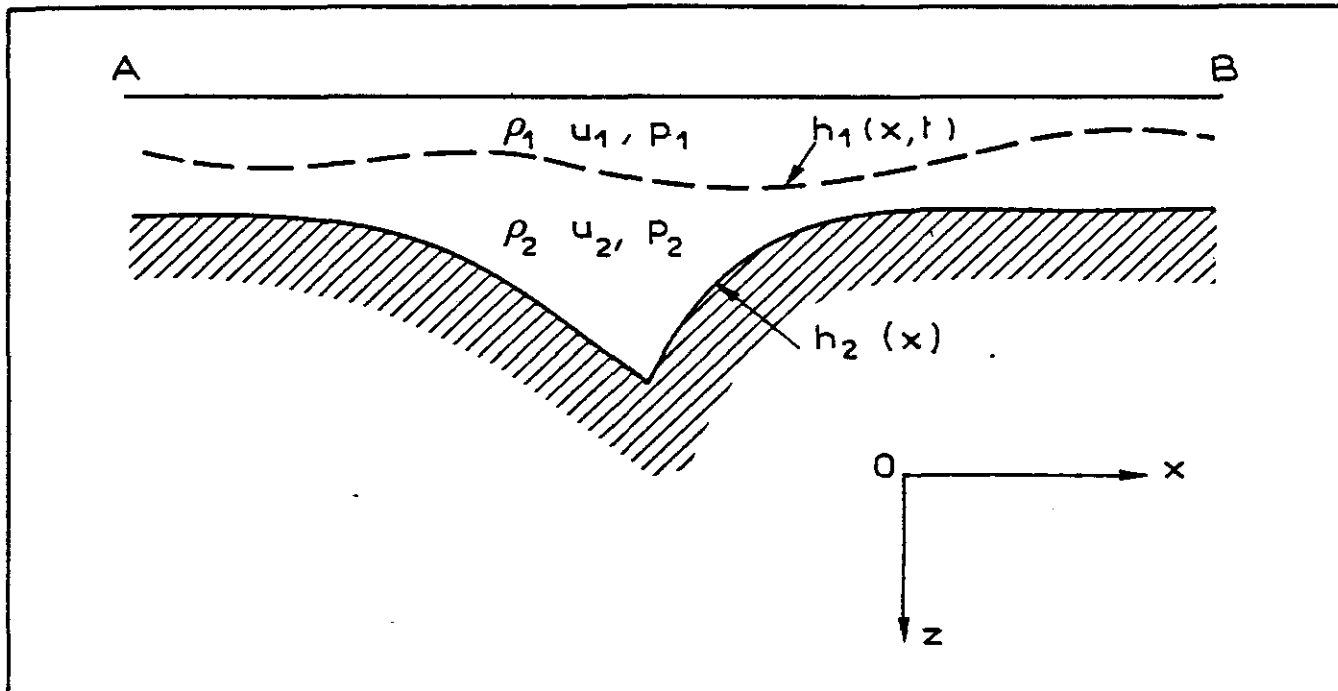


Fig. 58 : Schématisation d'un écoulement sur le Trou-sans-Fond.

Les écoulements considérés sont tels que les vitesses et les accélérations verticales des particules fluides sont négligeables, ce qui revient à supposer la pression hydrostatique.

Si, en plus, on néglige la force de frottement, les équations exprimant la conservation de la quantité de mouvement et de la masse dans les deux couches s'écrivent :

- pour la couche supérieure

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} \quad (4-1)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial (h_1 u_1)}{\partial x} = 0$$

$$p_1 = p_0(x, t) + \rho_1 g z \quad (4-2)$$

où p_0 est la pression à la surface \overline{AB} .

Inférieure

- pour la couche supérieure

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial x} \quad (4-3)$$

$$\frac{\partial(h_2 - h_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left((h_2 - h_1)u_2 \right) = - \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left((h_2 - h_1)u_2 \right) = 0$$

$$p_2 = p_0(x,t) + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g (z - h_1) \quad (4-4)$$

Si on applique (4-2) et (4-4) à (4-1) et (4-3), les écoulements possibles vérifient alors le système suivant de quatre équations aux dérivées partielles données par CAVANIE (1969) :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_0}{\partial x} \quad (4-5)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_0}{\partial x} + g \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2} \frac{\partial h_1}{\partial x} \quad (4-6)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial (h_1 u_1)}{\partial x} = \geq 0 \quad (4-7)$$

$$- \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left((h_2 - h_1) u_2 \right) = 0 \quad (4-8)$$

Si on élimine $\frac{\partial h_1}{\partial t}$ entre (4-7) et (4-8) et ensuite si on intègre en x, on a :

$$u_1 h_1 + u_2 (h_2 - h_1) = d(t) \quad (4-9)$$

où d(t) étant le débit total qui ne dépend que du temps (t).

En éliminant p_0 entre (4-5) et (4-6), et en faisant l'hypothèse de BOUSSINESQ, c'est-à-dire, en négligeant le terme de $\left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \right)$ sauf dans le terme de gravité g, on obtient :

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} g \frac{\partial h_1}{\partial x} \quad (4-10)$$

Le but de ce travail est de déterminer les trois fonctions inconnues u_1 , u_2 et h_1 à partir des équations (4-7), (4-9) et (4-10) en spécifiant les quatre paramètres ρ_1 , ρ_2 , h_2 et d.

Si les équations différentielles de l'écoulement peuvent se réduire aux équations quasi-linéaires aux dérivées partielles de premier ordre, des fonctions de deux variables indépendantes et si le système d'équations est "hyperbolique", une bonne résolution mathématique peut être obtenue par la méthode des "caractéristiques" (Voir l'annexe D).

Pour ce faire, on applique les transformations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} V^{*2} &= \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \right) g H_0 \quad ; \quad X = x H_0^{-1} \quad ; \quad T = t H_0^{-1} \cdot V^* \\ h_1 (X, T) &= \frac{H_0 \cdot H (X)}{2} (1 - C (X, T)) \quad ; \quad h_2 (X) = H_0 H (X) \\ d(T) &= D(T) \cdot V^* \cdot H_0 \quad ; \quad u_2 = u_1 + V (X, T) \cdot V^* \end{aligned} \right\} (4-11)$$

où H_0 représente une profondeur caractéristique de l'écoulement, et son choix est arbitraire. (4-9) s'écrit alors :

$$DV^* H_0 = u_1 \cdot \frac{H_0 \cdot H}{2} (1 - C) + (u_1 + V \cdot V^*) \left(H_0 \cdot H - \frac{H_0 \cdot H (1 - C)}{2} \right)$$

d'où :

$$u_1 (X, T) = \frac{DV^*}{H} - \frac{V \cdot V^* (1 + C)}{2} \quad (4-12)$$

$$u_2 (X, T) = \frac{DV^*}{H} + \frac{V \cdot V^* (1 - C)}{2} \quad (4-13)$$

Avec les transformations (4-11) et des relations (4-12) et (4-13), les équations (4-7) et (4-10) peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial C}{\partial T} + \left(\frac{D}{H} - CV \right) \frac{\partial C}{\partial X} + \left(\frac{1 - C^2}{2} \right) \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{V}{2H} (1 - C^2) \frac{dH}{dX} = 0 \quad (4-14)$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} + \frac{\partial V}{\partial X} \left(\frac{D}{H} - CV \right) + \frac{\partial C}{\partial X} \left(\frac{H - V^2}{2} \right) - \left(\frac{VD}{H^2} + \frac{1 - C}{2} \right) \frac{dH}{dX} = 0 \quad (4-15)$$

On obtient ainsi un système d'équations aux dérivées partielles de premier ordre dont les variables dépendants (C, V), les variables indépendants (T, X) et les paramètres (H, D) sont des nombres sans dimensions.

En se basant sur l'hypothèse d'un écoulement hyperbolique et en supposant un mouvement harmonique simple du type suivant :

$$\left. \begin{aligned} C &= \sin \alpha (X,T) \\ V &= \sqrt{H(X)} \cdot \sin \beta (X,T) \end{aligned} \right\} \quad (4-16)$$

CAVANIE (1969) a obtenu finalement, deux couples d'équations caractéristiques correspondantes à (4-14) et (4-15) : (pour le développement détaillé, voir l'annexe D).

- Pour les caractéristiques C+ :

$$\frac{dX}{dT} + = \frac{D}{H} - \sqrt{H} \sin \alpha \sin \beta + \frac{1}{2} \sqrt{H} \cos \alpha \cos \beta \quad (4-17)$$

$$\frac{d(\alpha + \beta)}{dT} + = - \frac{\tan \beta}{2H} \frac{dH}{dX} \left(\frac{dX}{dT} + - \frac{2D}{H} - \left(\frac{1 - \sin \alpha}{\sin \beta} \right) \sqrt{H} + \cos \alpha \cos \beta \sqrt{H} \right) \quad (4-18)$$

- Pour les caractéristiques C- :

$$\frac{dX}{dT} - = \frac{D}{H} - \sqrt{H} \sin \alpha \sin \beta - \frac{1}{2} \sqrt{H} \cos \alpha \cos \beta \quad (4-19)$$

$$\frac{d(\beta - \alpha)}{dT} - = - \frac{\tan \beta}{2H} \frac{dH}{dX} \left(\frac{dX}{dT} - - \frac{2D}{H} - \left(\frac{1 - \sin \alpha}{\sin \beta} \right) \sqrt{H} - \cos \alpha \cos \beta \sqrt{H} \right) \quad (4-20)$$

La deuxième équation de chaque couple d'équations précédentes n'est valable que lorsque la première équation est satisfaite. Toute solution de cet ensemble donnera des valeurs $\alpha(X,T)$ et $\beta(X,T)$ ainsi que $C(X,T)$ et $V(X,T)$ par (4-16).

On obtiendra finalement les trois inconnues $u_1(X,T)$, $u_2(X,T)$ et $h_1(X,T)$ à partir de (4-11), (4-12) et (4-13).

2.2 - Intégration des équations

A - Domaine d'intégration

On remarque dans les équations (4-18) et (4-20) que $(\alpha+\beta)_+$ et $(\beta-\alpha)_-$ sont constants lorsque la pente du fond $\frac{dH}{dX}$ est nulle. Autrement dit, la perturbation ne sera née que dans la zone du fond variable et elle se propage de part et d'autre du rebord du canyon sous-marin. Ceci est analogue au modèle du plateau continental cité plus haut.

Le domaine d'intégration se limite donc, dans le plan X-T, par la zone hachurée entre deux courbes caractéristiques (C_+ et C_-) qui séparent les zones calmes de la zone perturbée partant de part et d'autre de la perturbation initiale (M,N) (fig. 59).

L'intégration étant particulièrement simple dans la zone du fond horizontal, on fait séparément les intégrations dans la zone de naissance de la perturbation (zone I) et dans les zones où elle se propage (zones II et III).

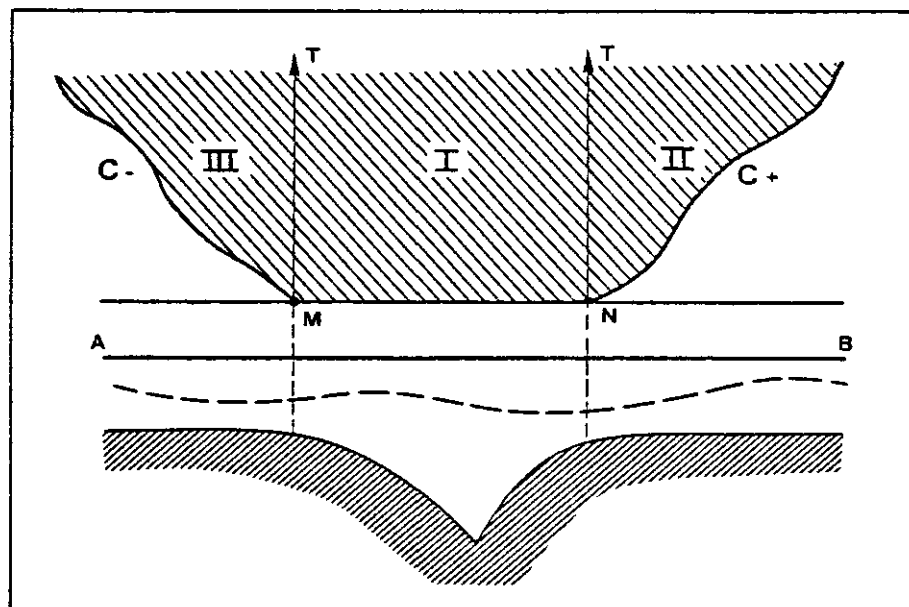


Fig. 59 : Domaine d'intégration.

B - Intégration dans la zone I

Méthode utilisée

Pour la commodité du calcul par l'ordinateur et pour faciliter l'interprétation des résultats, on adopte la méthode exposée par ABBOTT (1966).

On découpe le domaine d'intégration en mailles équidistantes en temps (ΔT) et en distance (ΔX) (fig. 60).

On suppose que le système est suffisamment linéaire et que les pentes des caractéristiques restent constantes sur un intervalle de temps ΔT assez petit.

On projette les deux droites caractéristiques C_+ et C_- du point $P(i,j)$ avec leurs pentes déterminées par les conditions au point $P'(i,j-1)$, coupant l'axe X aux points Q et R.

Connaissant les valeurs α et β aux noeuds des mailles au temps $(j-1)$, on interpole les valeurs α et β sur les points Q et R.

Partant de α et β aux points Q et R, ainsi déterminés et en faisant l'intégration (4-18) et (4-20) on obtient α et β au point P. Ce qui est une première approximation.

Une amélioration pour les valeurs α et β au point P peut être obtenue par itérations successives de la manière suivante :

On détermine d'abord les nouvelles pentes caractéristiques au point P en faisant la moyenne entre les pentes déterminées par les conditions au point P (α, β déterminés précédemment) et celles déterminées par les conditions aux points Q et R.

Par le même procédé on trouve les meilleurs points Q' et R' à partir desquels on retrouve la meilleure approximation pour les valeurs α et β au point P. Ainsi, par la suite on peut calculer les valeurs α et β sur tous les noeuds de maille du temps j lorsque les α et β sont connus dans toutes les sections à

l'instant précédent, parce qu'il s'agit des conditions initiales fixées.

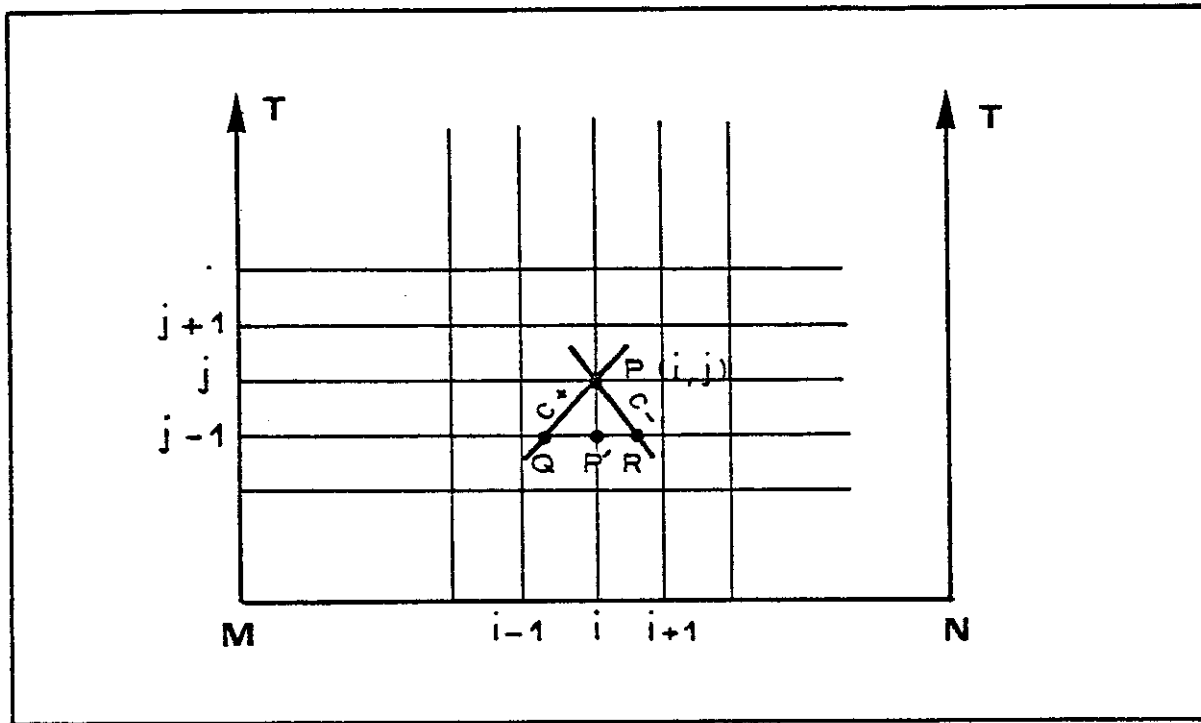


Fig. 60

Conditions initiales

Le profil de l'interface peut être influencé par les formes du premier instant ($T = 0$) et si ces profils initiaux changent toutes les interfaces changent aussi.

Si on suppose que le débit total $d(T)$ varie sinusoïdalement avec la marée :

$$d(T) = \overset{\circ}{F} \sin \sigma T$$

$$D(T) = \frac{\overset{\circ}{F}}{V^* H_0} \sin \sigma T$$

σ étant la fréquence de marée et $\overset{\circ}{F}$ l'amplitude du débit total.

Les conditions initiales considérées correspondent aux deux couches au repos à l'instant $T = 0$:

$$V_1 = V_2 = D = 0$$

et à une interface horizontale à une immersion constante h_0 :

$$h_1(X, 0) = h_0$$

d'où :
$$\alpha(X,0) = \sin^{-1} \left(1 - \frac{2h_0}{H_0 \cdot H(X)} \right)$$

$$\beta(X,0) = 0 \quad (\text{Cf. (4-11) et (4-16)}).$$

Conditions aux limites

Aux extrémités du domaine d'intégration ($X = M$ et $X = N$), seule l'une des deux caractéristiques est utilisable et il faut y préciser les conditions.

Au dehors de ces extrémités, le fond étant horizontal, on a :

- sur l'axe M-T :

$$(\alpha + \beta)_+ = \alpha(M,0)$$

- sur l'axe N-T :

$$(\beta - \alpha) = -\alpha(N,0)$$

C - Intégration dans les zones II et III

Dans ces zones, $(\alpha + \beta)_+$ et $(\beta - \alpha)_-$ étant constants, les valeurs α et β restent constantes suivant les caractéristiques C_+ (pour la zone II) et C_- (pour la zone III).

Or, à partir du calcul précédent dans la zone I, on connaît les valeurs de α et β en tous points sur les axes M-T et N-T. Il suffira donc de calculer seulement le profil instantané de la propagation des perturbations dans ces deux zones.

Les vitesses de propagation d'une perturbation dans les zones II et III étant données respectivement par (4-17) et (4-19), on peut calculer la distance atteinte, au moment T_n , par une perturbation partant d'un point T_j :

Dans la zone II (Fig.61b) la distance X_{T_n} est :

$$X_{T_n} = - \frac{F}{V^* H_0 \cdot H \cdot \sigma} (\cos \sigma T_n - \cos \sigma T_j) + A_j (T_n - T_j)$$

où $A_j = - \sqrt{H} \sin \alpha \sin \beta + \frac{1}{2} \sqrt{H} \cos \alpha \cos \beta$

avec $\alpha = \alpha(N, T_j)$; $\beta = \beta(N, T_j)$

Si on répète le calcul en partant de tous les autres points de l'axe N-T et connaissant les valeurs α et β sur ces points on peut construire le profil instantané de la propagation des perturbations au moment T_n .

De la même manière, on a pour la zone III : (fig.61a)

$$X_{T_n} = - \frac{\overset{\circ}{F}}{V^* \cdot H_o \cdot H \cdot \sigma} (\cos \sigma T_n - \cos \sigma T_j) + B_j (T_n - T_j)$$

où $B_j = - \sqrt{H} \sin \alpha \sin \beta - \frac{1}{2} \sqrt{H} \cos \alpha \cos \beta$

avec $\alpha = \alpha(M, T_j)$; $\beta = \beta(M, T_j)$

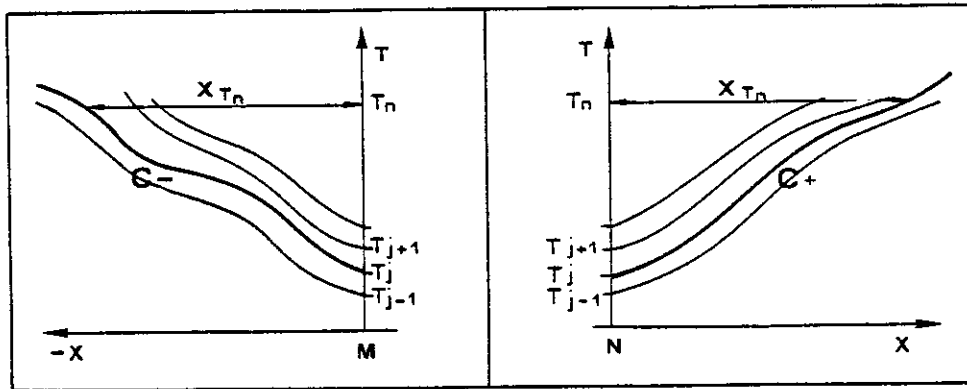


Fig. 61

2.3 - Interprétation des résultats et conclusion

Pour l'application pratique du modèle on schématise le Trou-sans-Fond (TSF) de la manière suivante (Voir figure 62).

$$Z_1 = Z_5 = 60 \text{ m} ; Z_2 = Z_4 = 120 \text{ m} ; Z_3 = 600 \text{ m}$$

$$L_1 = 6 \text{ km} ; L_2 = L_3 = 2,4 \text{ km} ; L_4 = 4,2 \text{ km}$$

Et les valeurs numériques utilisées pour différents paramètres sont les suivants :

$$\rho_1 = 1,024 \quad ; \quad \rho_2 = 1,026$$

$$h_1(X,0) = 20 \text{ m} \quad ; \quad \text{immersion initiale de l'interface}$$

$$H_0 = 60 \text{ m} \quad ; \quad \text{profondeur caractéristique}$$

$$Q = 10,2 \text{ (m}^3\text{/S)} \quad ; \quad \text{amplitude du débit total sur la verticale, par l'unité de largeur du canal.}$$

Ceci correspond à un débit du courant barotrope de 0,17 cm/s sur le fond horizontal de profondeur de 60 m (\overline{HI} , \overline{CD} dans la figure 62).

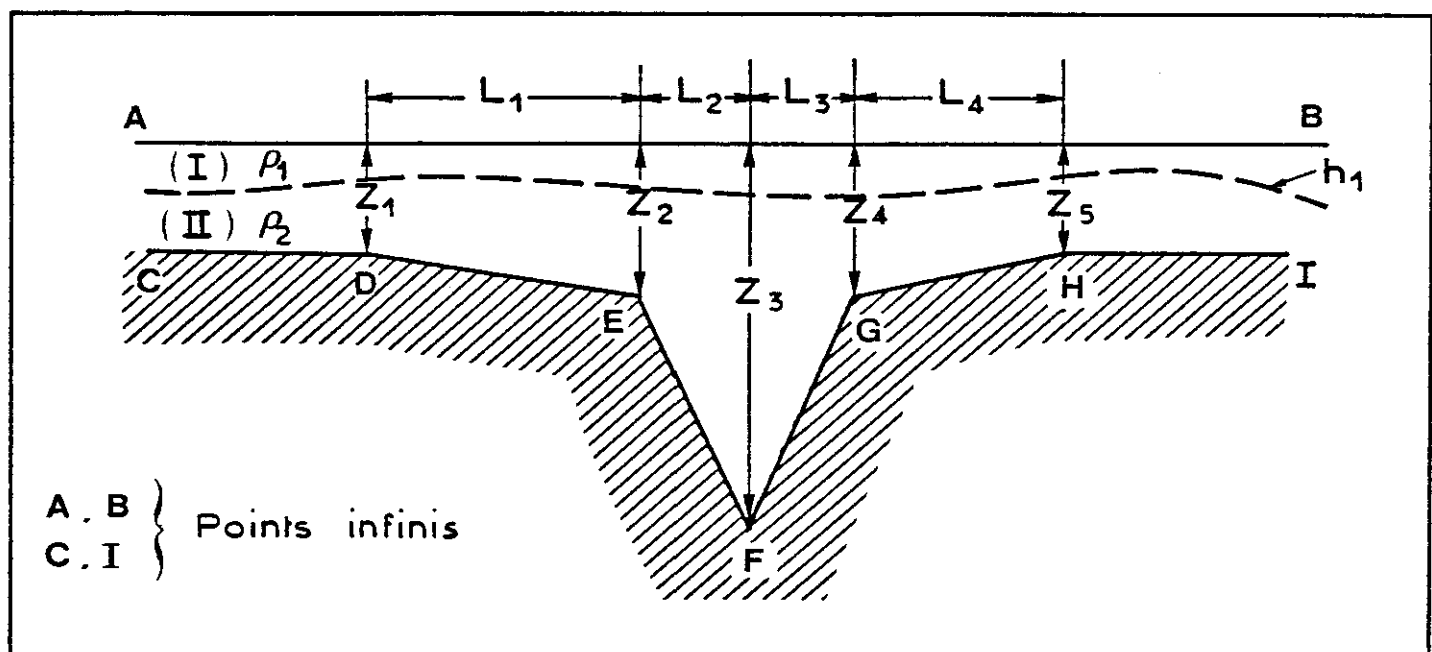


Fig. 62 : Schématisation du modèle TSF.

Pour des valeurs de $\overset{\circ}{F}$ légèrement supérieures à 10,2 la pente $\frac{dX}{dT} \pm$ de l'une des deux familles de courbes caractéristiques devient nulle au voisinage du point F et la méthode des caractéristiques n'est plus applicable.

Ce phénomène peut cependant être expliqué hydrodynamiquement par un passage de l'écoulement du "régime fluvial" au "régime torrentiel" (CAVANIE, 1969).

La figure 63 représente l'évolution de la forme de l'interface en fonction du temps. Un cycle de marée a été suffisant pour que les solutions du système caractéristique se stabilisent. Ce qui confirme la constatation de CAVANIE (1969) que les perturbations dans le système ne restent pas dans le domaine d'intégration I (voir fig.59) mais elles s'échappent de part et d'autre de celui-ci sous forme d'onde interne.

L'instant $\sigma T = 0$ ou π désigne le moment de mer étale et l'instant $\sigma T = \frac{\pi}{2}$ et l'instant $\sigma T = \frac{3}{2}\pi$ représentent ici les moments du maximum d'un courant de marée respectivement vers l'Est et l'Ouest. Dans la même figure, on présente l'évolution en fonction du temps de l'interface, des courants barotropes (V_m), baroclines (V_b) et résultants ($V_r = V_m + V_b$) aux embouchures des canaux horizontaux (points D, H de la figure 62) respectivement pour la couche supérieure (I) et inférieure (II).

On remarque premièrement que des perturbations dans l'interface sont nées aux bords du TSF et qu'elles se propagent de part et d'autre de celui-ci, sous forme d'onde interne dans les canaux de profondeur constante.

La vitesse moyenne de la propagation des fronts d'onde est de l'ordre de un noeud et la longueur d'onde de 22 kilomètres environ. On constate que cette valeur de vitesse de propagation est en très bon accord avec celle des ondes internes longues dans un modèle à deux couches de fluides dont la formule classique est donnée par (Cf. SVERDRUP, 1942):

$$c^2 = \frac{gh_1 (h_2 - h_1)}{h_2} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$$

ce qui nous donne dans notre exemple, une valeur de 50,5 cm/s.

Mais il apparait nettement une dissymétrie dans les profils de propagation des fronts d'ondes. En effet, la pente ascendante est plus raide que celle descendante et cette dissymétrie s'accroît au fur et à mesure que la distance parcourue (ou le temps de parcours) augmente. Enfin, on voit l'apparition du ressaut interne et donc de la limite de la validité de l'hypothèse hydrostatique alors que la pente du front dépasse la verticale. L'hypothèse de vitesse et d'accélération verticale négligeables n'est alors plus valable. (indiqué par les flèches dans la figure 63).

Ceci a été déjà prévu dans l'étude théorique de CAVANIE (1969) qui a mis en évidence la genèse de ressauts internes "directs" et "inversés" et a donné un critère simple qui indique lequel des deux types de ressaut risque de se produire dans des conditions particulières.

En effet, lorsque l'épaisseur de la couche supérieure est nettement plus petite que celle de la couche inférieure, la pente :

- se raidit avec le temps si $\frac{\partial h_1}{\partial X} < 0$

- s'atténue ou reste constante si $\frac{\partial h_1}{\partial X} \geq 0$

ce qui correspond au cas de ressaut inversé et aussi au notre.

Avec l'apparition des ressauts internes ce modèle simple hydrostatique perd alors sa signification physique et doit être remplacé par un modèle non-hydrostatique.

Le modèle non-hydrostatique tenant compte des termes non-linéaires et des accélérations verticales a été étudié par CAVANIE (1972, 1973) qui a mis en évidence la formation de trains d'ondes associés au front de l'onde.

Mais des complications mathématiques supplémentaires ne nous permettent pas de poursuivre dans cette voie et nous la laisserons à des études ultérieures.

Néanmoins, l'ensemble des résultats, bien qu'assez grossier, confirment clairement que l'action du courant de marée sur le TSF peut engendrer

des ondes internes de même période et qu'elles se propagent de part et d'autre de ce canyon sous-marin. Ce résultat s'accorde avec le modèle de CAVANIE (1969) qui a mis en évidence la genèse des marées internes par l'action du courant de marée sur le seuil du Détroit de Gibraltar.

Les figures 64 et 65 représentent les profils instantanés des courants baroclines dus aux ondes internes sur plusieurs sections du TSF en instant $\sigma T = 2\pi$, $2\pi + \frac{\pi}{2}$, $2\pi + \pi$ et $2\pi + \frac{3}{2}\pi$.

Les faibles valeurs dans la couche inférieure par rapport à celles dans la couche supérieure reflètent le débit total dû aux ondes internes sur une verticale (celui-ci est nul).

Il apparaît alternativement sur ces figures, des zones de convergence et de divergence dans le système de courants de la couche supérieure. Ceci peut probablement faire varier les amplitudes de la houle de courte période et faire apparaître des slicks en surface. Ce phénomène peut être analogue au modèle du plateau continental exposé précédemment.

Mais le modèle du TSF montre que les rapports des courants baroclines aux courants barotropes ne sont pas élevés. Ce qui n'est pas étonnant si on le compare avec le modèle du plateau continental : dans ce dernier cas, les perturbations ne sont pas importantes près du talus continental où elles sont générées mais elles deviennent prédominantes à l'approche de la côte par une accumulation d'énergie.

En revanche, dans le cas du TSF, les canaux étant horizontaux, et s'étendant indéfiniment, il n'y a aucun espoir d'avoir ni une telle accumulation d'énergie, ni des variations importantes dans le système des courants baroclines.

Néanmoins, des observations de courants baroclines importants par rapport aux courants barotropes (par exemple TSF 13) peuvent s'expliquer physiquement en tenant compte de la déviation de la propagation des ondes internes vers la côte avec une accumulation locale d'énergie près de la côte.

Ceci était déjà signalé au cours de la discussion du modèle du plateau continental (voir aussi la figure 55).

Cependant, le modèle simple du TSF n'est pas compatible avec une propagation de ce type. L'intérêt de ce modèle, bien qu'assez schématique, est de pouvoir fournir une explication qualitative de la g n se et de la propagation des marées internes par l'action du courant de marée sur le TSF.

Le test quantitatif de ce modèle nécessite des mesures simultanées sur plusieurs points de mesures de part et d'autre du TSF. Malheureusement, les mesures dont on dispose actuellement sont insuffisantes pour cette comparaison.

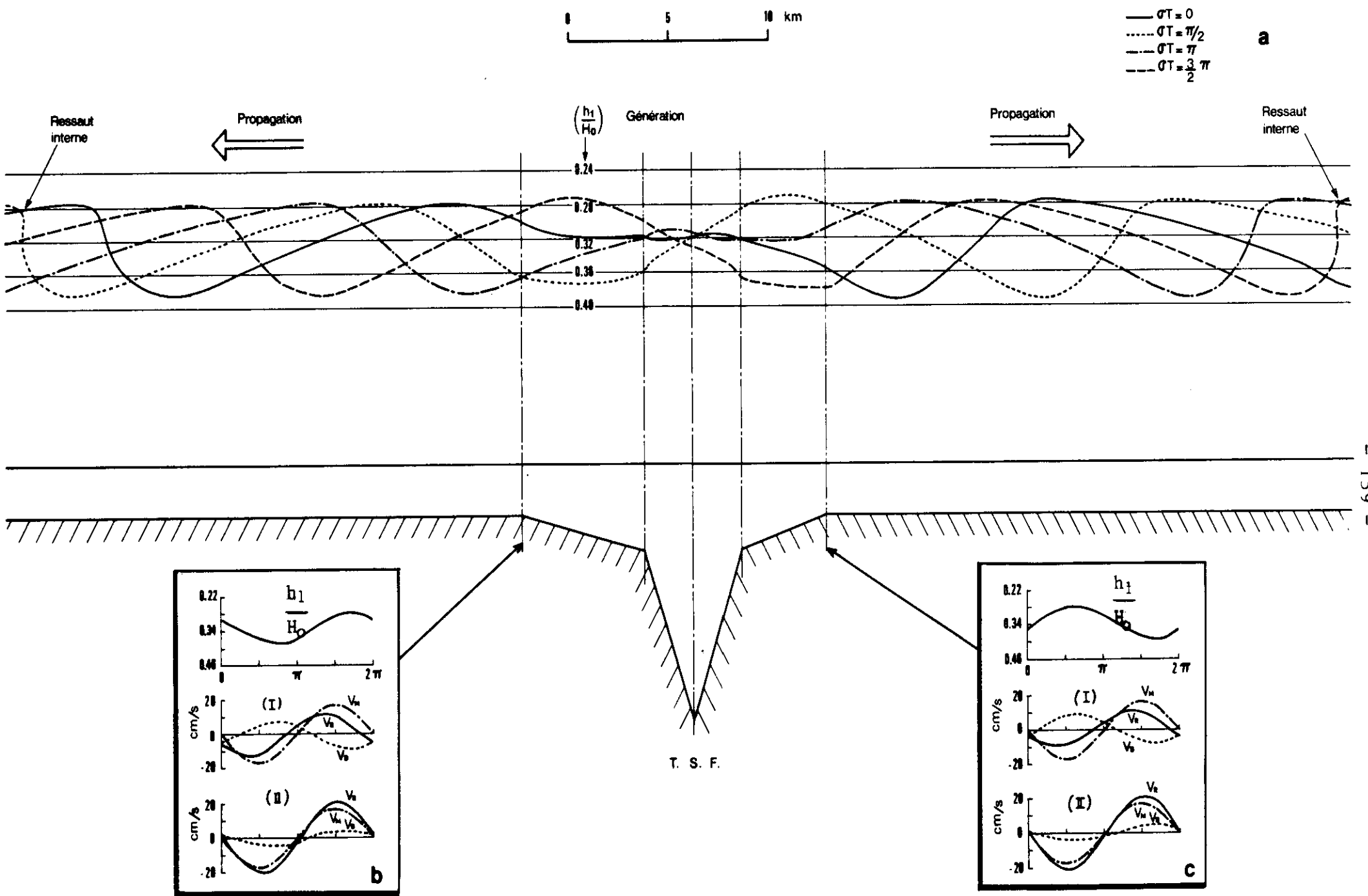


Fig. 63 : a) génération et propagation des marées internes d'après le modèle TSF ; b) et c) évolution en fonction du temps de l'interface $\frac{h_1}{H_0}$ des courants barotropes (V_M), baroclines (V_B) et résultants (V_R) avec $H_0 = 60$ m.

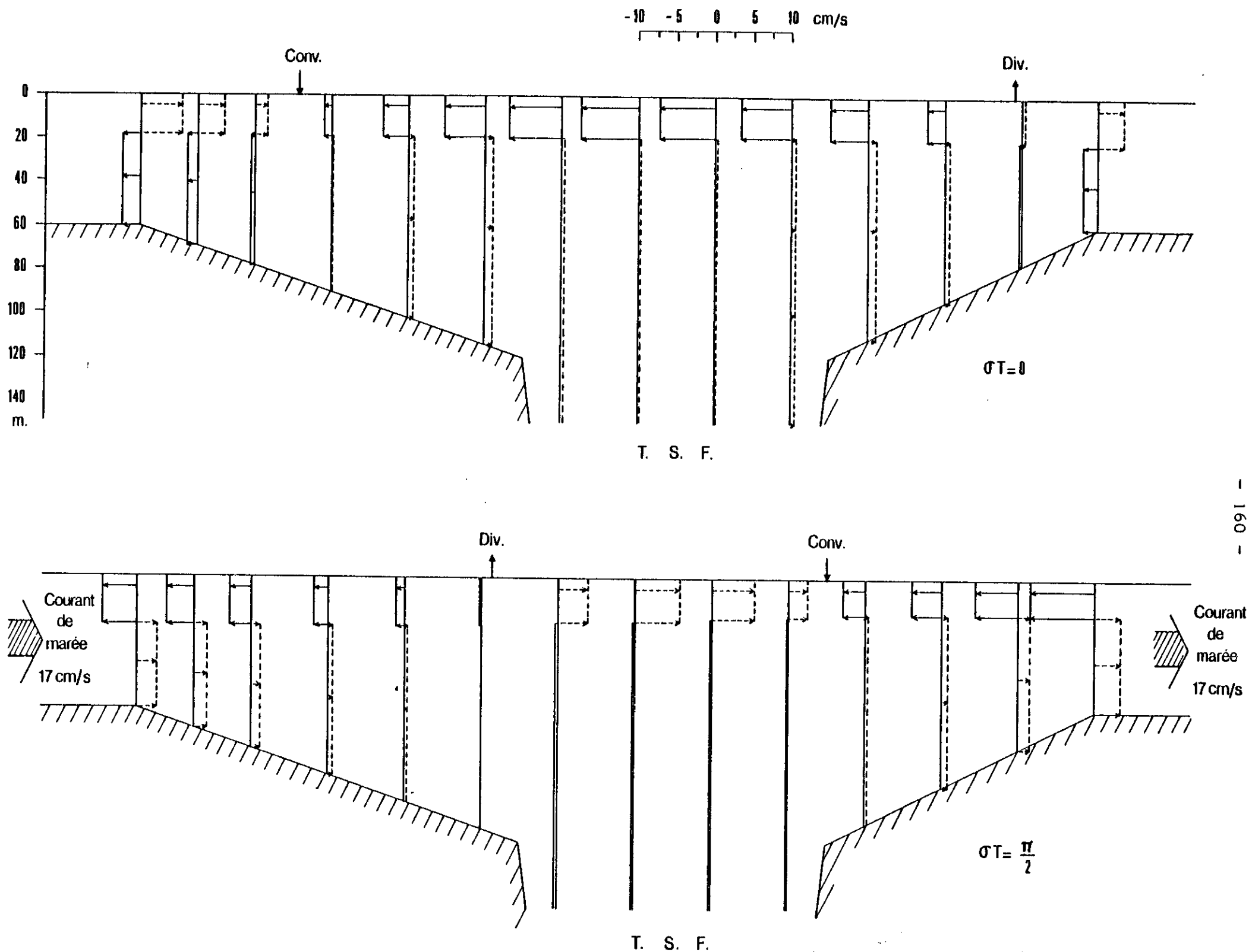


fig. 64 : Profils instantanés des courants baroclines d'après le modèle du TSF.

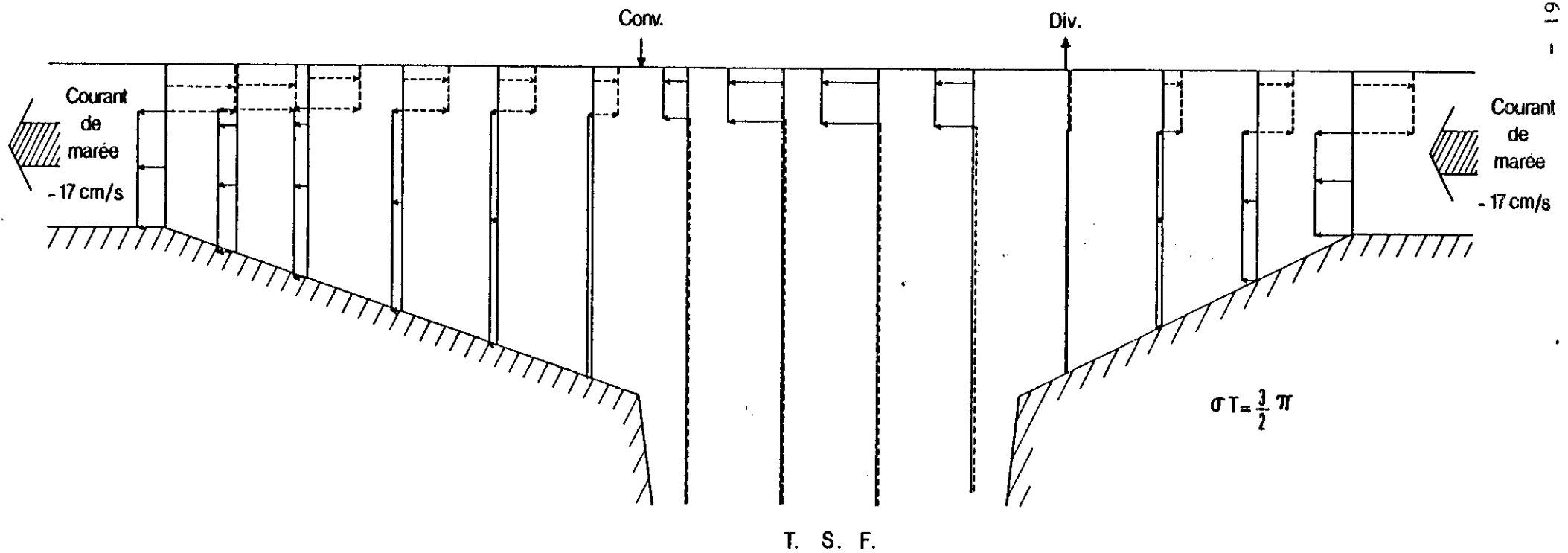
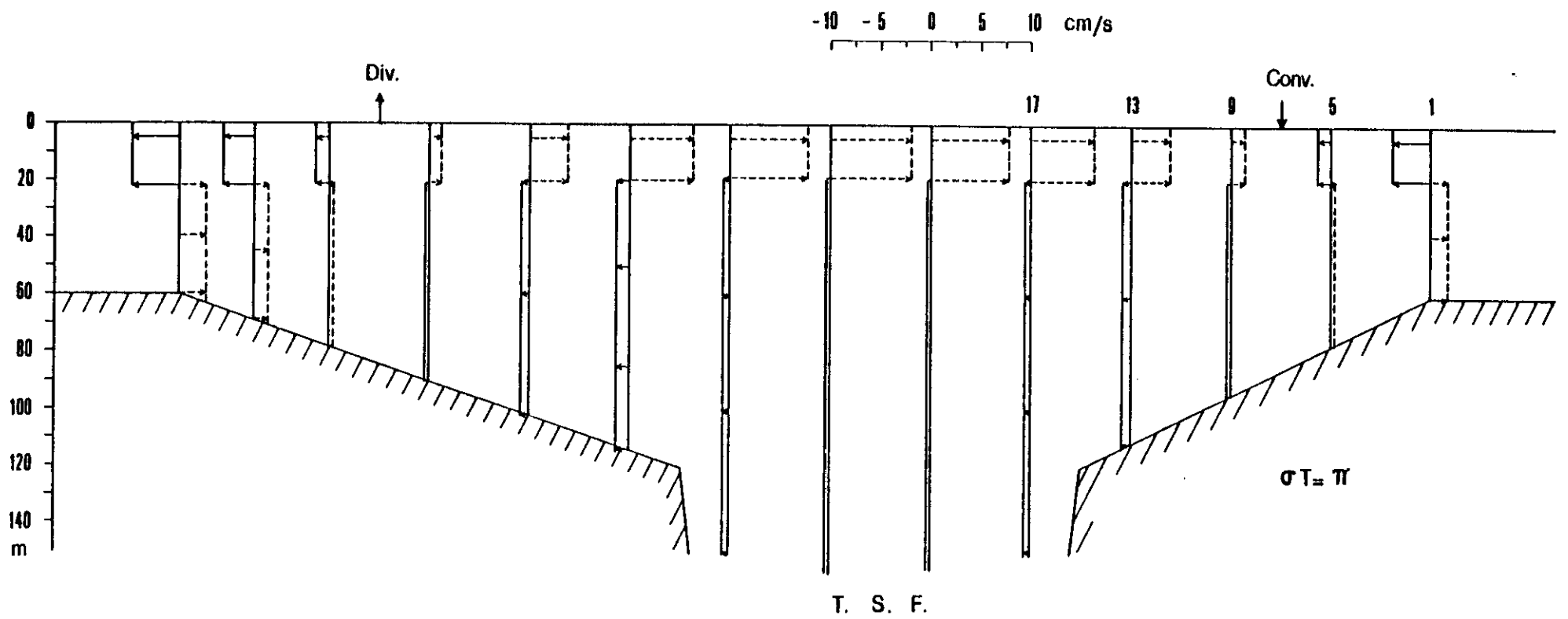


Fig. 65 : Profils instantanés des courants baroclines d'après le modèle du TSF.

CONCLUSIONS GENERALES

Dans cette étude, nous avons tenté de mieux comprendre les phénomènes physiques observés devant Abidjan en considérant deux objectifs principaux :

- la mise en évidence des ondes internes à la fréquence de marée à partir des observations hydrologiques et courantologiques ;
- l'explication des mécanismes possibles de leur génération et de leur propagation.

Les nombreux résultats graphiques et les différentes analyses entreprises nous ont conduits à montrer l'existence indiscutable de très importantes variations semi-diurnes dans la plupart des mesures de température, de salinité et de courant sur le plateau continental devant Abidjan.

Nous avons pu confirmer que ces phénomènes peuvent être engendrés par les différents facteurs physiques :

- les mouvements des marées internes ;
- les déplacements horizontaux des surfaces des isovaleurs des paramètres hydrologiques ;
- l'advection des différentes masses d'eau suivant la pente du fond par le courant de marée.

Nous avons remarqué que l'importance relative de chacun de ces trois facteurs varie suivant la saison marine et la position géographique. Les différents résultats graphiques et surtout l'analyse des courants de la station TSF 13 nous ont permis de confirmer l'existence des mouvements des marées internes durant la saison chaude. D'après les résultats de l'analyse des modes des courants baroclines de la station TSF 13, le premier mode des marées internes est prédominant. Pendant la saison froide, l'information précise pour cette évaluation n'est pas encore possible en toute rigueur, mais il est pratiquement certain que les marées internes sont moins importantes que pendant la saison chaude.

La région près de la côte est beaucoup plus favorable pour avoir des mouvements internes de grande amplitude que près du talus continental. Cependant, sur ce dernier l'effet de l'advection des différentes masses d'eau suivant la pente du fond joue un rôle prépondérant pour des grandes excursions des isothermes près du fond. Il est aussi très probable que les marées internes peuvent être engendrées par une variation abrupte de la topographie et qu'elle se propagent vers la côte.

L'effet de déplacement horizontal des différents paramètres hydrologiques par le courant de marée n'a pas été bien évalué à cause principalement, du manque des données synoptiques. Il est indispensable de connaître d'une façon précise la répartition horizontale des paramètres hydrologiques pour une étude plus rigoureuse des marées internes.

En ce qui concerne les mécanismes possibles de la g n se des marées internes, il a été prouvé par les deux modèles considérés qu'elles peuvent être générées par l'action du courant de marée non seulement sur le talus continental mais aussi sur le canyon sous-marin Trou-sans-Fond. La mise en évidence de la g n se des marées internes par le canyon sous-marin semble nouvelle et peut servir d'exemple pour une autre étude des marées internes dans une région identique.

Au point de vue qualitatif, le modèle du plateau continental semble bien rendre compte des mouvements des marées internes observés dans la région. La distribution des lignes de courant à un instant donné et leur évolution en fonction du cycle de la marée données par le modèle permettent une bonne compréhension de la dynamique de cette région.

Quant à l'application dans la nature, nous avons abandonné provisoirement le test quantitatif de ces deux modèles à cause du manque de données synoptiques suffisantes pour cette comparaison. En espérant pouvoir le réaliser dans une étude ultérieure nous nous sommes donc contentés ici de présenter ces deux mécanismes possibles de la génération et de la propagation des marées internes devant Abidjan.

Cette étude que nous avons entreprise n'est qu'une première étape de la connaissance des phénomènes des marées internes devant Abidjan.

Pour une meilleure connaissance du problème, il serait souhaitable de faire une campagne en mer bien étudiée et spécialement préparée pour l'étude des marées internes. Il faut noter que d'autres mesures des courants analogues à celles de la station TSF 13 parallèlement à des mesures des paramètres hydrologiques sont nécessaires.

BIBLIOGRAPHIE

- ABBOTT, M.B. (1966). An introduction to the Method of Characteristics. American Elsevier, New-York.
- APEL, J.R. *et al* (1975). Observations of oceanic internal and surface waves from the earth resources technology satellite. J. Geophys. Res. 80 (6).
- BAINES, P.G. (1971). The reflection of internal/inertial waves from bumpy surfaces. J. Fluid Mech. 46 (2).
- BAINES, P.G. (1973). The generation of internal tides by flat-bumps topography. Deep-Sea Res. 20.
- BAINES, P.G. (1974). The generation of internal tides over steep continental slopes. Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A, 277 (1263).
- BASS, J. (1968). Cours de Mathématiques II. Masson & Cie, Paris.
- BELL, T.H. Jr (1971). Numerical calculation of dispersion relations for Internal gravity waves. Naval Research Lab., Washington, D.C., NRL Rept. 7294.
- BENDAT, J. and A. PERSOL (1971). Random data analysis and measurements procedures. Wiley-Interscience, New-York.
- BINDEL, S. (1970). Mécanique des fluides incompressibles. E.N.S.T.A., Paris.
- BLACKMAN, R.B. and J.W. TURKEY (1958). The measurement of power spectra. Dover Publ., New-York.
- CACCHIONE, D.A. and C.I. WUNSCH (1974). Experimental study of internal waves over a slope. J. Fluid Mech. 66 (2).
- CAIRNS, J.L. (1967). Asymetry of internal tidal waves in shallow coastal waters. J. Geophys. Res. 72 (14).
- CAIRNS, J.L. (1968). Thermocline strength fluctuations in coastal waters. J. Geophys. Res. 73 (8).

- CAVANIE, A. (1969). Sur la g n se et la propagation d'ondes internes dans un milieu à deux couches. Cah. Océanogr., 21 (9).
- CAVANIE, A. (1970). Modèle non-linéaire et non-hydrostatique appliqué à l'étude des fronts internes dans le détroit de Gibraltar. Cah. Océanogr. 23 (7).
- CAVANIE, A. (1972). Observations des fronts internes dans le détroit de Gibraltar pendant la campagne océanographique OTAN 1970 et interprétation des résultats par un modèle mathématique. Mémoires Soc. Roy. Sci. Li ge, 6 me série, T. II.
- CAVANIE, A. (1973). Etude non linéaire des ondes internes dans un milieu à deux couches fluides sans rotation. Rapp. Scient. Techn., CNEXO n  16.
- COX, C.S. and H. SANDSTROM (1962). Coupling of internal and surface waves in water of variable depth. J. Oceanogr. Soc., Japan, 20th Ann. Vol.
- DARBYSHIRE, J. (1970). The variation of the depth of a high salinity layer in the Celtic Sea. Deep-Sea Res., 17 (5).
- DIETRICH, G. (1963). General Oceanography. John Wiley & Sons, Inc., New-York.
- ..
- DUING, W. and D. JOHNSON (1972). High resolution current profiling in the Straits of Florida. Deep-Sea Res. 19.
- ..
- DUING, W. (1975). Synoptic studies of transients in the Florida current. J. Mar. Res., 33 (1).
- ETIENNE, A (1970). Etude spectrale des ondes internes et de la turbulence. Cah. Océanogr. 22.
- FEDOROV, K.N. (1978). The thermohaline finestructure of the Ocean. Pergamon Press, Oxford.
- FJELDSTAD, J.E. (1933). Interne wellen. Geofys. Publ. 10 (6).
- FJELDSTAD, J.E. (1964). Internal waves of tidal origin. Part 1. Theory and analysis of observations. Geofys. Publ. 25 (5).
- FONFONOFF, N.P. (1969). Spectral characteristics of internal waves in the ocean. Deep-Sea Res. 16 (Suppl.).
- FORRESTER, W.D. (1974). Internal tides in St Lawrence Estuary. J. Mar. Res. 32 (1).

- GONELLA, J. (1972). A rotary-component method for analysing meteorological and oceanographic vector time series. *Deep-Sea Res.*, 19.
- GONELLA, J. (1973). *Cours d'Océanographie Physique*. E.N.S.T.A., Paris.
- HALPERN, D. (1971a). Semidiurnal internal tides in Massachusetts Bay. *J. Geophys. Res.*, 76 (27).
- HALPERN, D. (1971b). Observations on short-period internal waves in Massachusetts Bay. *J. Mar. Res.* 29 (2).
- HANSEN, H. (1910). *Physical Oceanography and Meteorology*. Rept. "Michael Sars" North Atl. Deep-Sea Exped. I.
- HAURWITZ, B. (1948). The effect of ocean currents on internal waves. *J. Mar. Res.* 7 (3).
- HAYES, S.P. and D. HELPERN (1976). Observations of internal waves and coastal upwelling off the Oregon coast. *J. Mar. Res.* 34 (2).
- HOUGHTON, R.W. (1976). Circulation and hydrographic structure over the Ghana continental shelf during the 1974 Upwelling. *J. Phys. Oceanogr.* 6.
- KAMYKOWSKI, D. (1974). Possible interaction between phytoplankton and semi-diurnal internal tides. *J. Mar. Res.* 32 (1).
- HEUNECKE, K.H. (1973). On the observation of internal tides at the continental slope off the coast of Norway. "Meteor" *Forsch.-Ergebnisse A, Meteorol. Hydrol.* 12.
- KIELMAN, J. *et al* (1973). Currents and stratification in the Belt Sea and the Askona Basin during 1962-1968. *Kiel Meeresforsch.* 29 (2).
- KIELMAN, J. and W. DÜING (1974). Tidal and sub-inertial fluctuations in the Florida current. *J. Phys. Oceanogr.* 4.
- KRAUSS, W. (1966). *Methoden und Ergebnisse der Theoretischen Ozeanographie II, "Interne Wellen"*. Gebrüder Borntraeger, Berlin-Nikolassee.
- LACOMBE, H. (1965). *Courants de densité dans le Détroit de Gibraltar*. La Houille Blanche 1.
- LAFOND, E.C. (1962). Internal waves, Part 1. In, *The Sea*, vol. 1, M.N. Hill (Ed.). New York : Interscience.

- LEE, C.Y. and R.C. BEARDSLEY (1974). The generation of long nonlinear internal waves in a weakly stratified shear flow. *J. Geophys. Res.* 79 (3).
- LEBLOND, P.H. (1966). On the damping of internal gravity waves in a continuously stratified ocean. *J. Fluid. Mech.* 25 (1).
- LEBLOND, P.H. (1970). Internal waves in a fluid of finite Prandtl number. *Geophys. Fluid. Dyn.* 1.
- LEBLOND, P.H. and L.A. MYSAK (1978). *Waves in the Ocean*. Elsevier Oceanogr. Series 20, Elsev. Sci. Pub. Co.
- LE FLOC'H, J. (1970a). La circulation des eaux d'origine subtropicale dans la partie orientale de l'Atlantique équatoriale étudiée en relation avec les mesures faites à bord du N.O. "Jean Charcot" en mai 1968. *Cah. O.R.S.T.O.M., Sér. Océanogr.* 8 (3).
- LE FLOC'H, J. (1970b). Sur quelques observations de fluctuations de température et de vitesse de courant associées à des ondes internes à courte période ou à la turbulence. *Cah. Océanogr.* 22 (7).
- LEMASSON, L. et J.P. REBERT (1968). Observations de courants sur le plateau continental ivoirien. Mise en évidence d'un sous-courant. *Doc. Scient. C.R.O., Abidjan.*
- LEMASSON, L. et J.P. REBERT (1973a). Les courants marins dans le golfe ivoirien. *Cah. Océanogr.* 23 (17).
- LEMASSON, L. et J.P. REBERT (1973b). Circulation dans le golfe de Guinée. Etude de la région d'origine du sous-courant ivoirien. *Cah. O.R.S.T.O.M., Sér. Océanogr.* 11 (3).
- MAEDA, A. (1971). Phase velocity of semi-diurnal internal waves at ocean weather station T. *J. Oceanogr. Soc. Japan*, 27 (4).
- MAGAARD, L. and W.D. Mc KEE (1973). Semi-diurnal tidal currents at "Site D". *Deep-Sea Res.* 20.
- MARTIN, L. (1973). Morphologie, sédimentologie et paléogéographie au quaternaire récent du plateau continental ivoirien. Thèse de Doctorat ès-Sciences, Paris.
- MAZE, R. (1973). Recherche et étude de mouvements à période propre du domaine des ondes internes dans l'Iroise. Thèse de 3ème cycle, Brest.
- MORLIERE, A. (1970). Les saisons marines devant Abidjan. *Doc. Scient. C.R.O. Abidjan*, 1 (2).

- MORLIERE, A. et J.P. REBERT (1972). Etude hydrologie du plateau continental ivoirien. Doc. Scient. C.R.O. Abidjan, 3 (2).
- MOOERS, C.N.K. (1972). The mixed initial-boundary value problem for inertial internal waves in a wedge. Rapports et Procès-verbaux, Intern. Council Expl. Sea (Copenhagen), 162.
- MORSE, P.M. and H. FESHBACK (1953). Methods of theoretical physics, Part I. Mc Graw-Hill Book Co.
- N'GBESSO (1976). Marée en Côte d'Ivoire. E.P.S.H.O.M., Brest.
- PETRIE, B. (1975). M2 surface and internal tides on the Scotian shelf and slope. J. Mar. Res. 33 (3).
- PHILLIPS, O.M. (1977). The dynamics of the upper ocean. Cambridge Univ. Press.
- PICAUT, J. & J.M. VERSTRAETE (1977). Is the fifteen-day oscillation in the Guinea Gulf of tidal origine ? Fine Workshop, June 27-August 12, 1977, San Diego - California.
- PICAUT, J. and J.M. VERSTRAETE (1979). Propagation of a 14.7 day wave along the Northern coast of the Guinea Gulf. J. Phys. Oceanogr. 9.
- PRINSENBERG, S.I. (1971). Internal wave generation from a step like, constant slope continental shelf. Ph. D. dissertation Univ. Microfilms Intern., Michigan, U.S.A.
- PRINSENBERG, S.J. *et al* (1974). Generation and dissipation of coastal internal tides. Deep-Sea Res. 21.
- PRINSENBERG, S.J. and M. RATTRAY (1975). Effects of continental slope and variable Brunt-Väisälä frequency on the coastal generation of internal tides. Deep-Sea Res. 22.
- RATTRAY, M. (1960). On the coastal generation of internal tides. Tellus 12.
- RATTRAY, M. *et al* (1969). Generation of long internal waves at the continental slope. Deep-Sea Res., 16 (suppl.).
- REGAL, R.R. and C.I. WUNSCH (1973). M2 tidal currents in the Western North Atlantic. Deep-Sea Res. 20 (5).
- REID, J.L. (1956). Observations of internal tides in October 1950. Trans. Amer. Geophys. Un., 37 (3).

- RESCH, F.J. et M.A. BOURGUEL (1976). Analyse spectrale par méthodes numériques. I.M.S.T. Univ. d'Aix-Marseille II.
- ROBERTS, J. (1975). Internal gravity waves in the Ocean. Marcel Dekker, Inc., New-York.
- ROBINSON, I.S. (1973). Internal tides in the British shelf seas. Internal Report 28; I.C.O.T. Bidston Observatory Birkenhead Cheshire L 43 7 RA. England.
- SANDSTROM, H. (1966). The importance of topography in generation and propagation of internal waves. Ph. D. Dissertation, Univ. Microfilm Intern., Michigan, U.S.A.
- SHEID, F. (1968). Numerical Analysis (Schaum's outline series). Mc Graw-Hill Book Co.
- SCHOTT, F. (1977). On the energetics of baroclinic tides in the North Atlantic. Ann. Geophys. 33 (1/2).
- SIMON (1974). Calcul des constantes harmoniques de la marée. E.P.S.H.O.M., Brest.
- SINGLTON, R.C. (1969). An algorithm for computing the mixed radix Fast Fourier Transform. I.E.E.E. Trans. on Audio and Electroacustics, AU-17(2).
- SUBERVILLE, J.L. (1974). Ondes internes en fluide tournant ; contribution théorique et expérimentale. Univ. Grenoble. T
-
- SVERDRUP et al. (1942). The oceans, Prentice Hall
-
- THORPE, S.A. (1975). The excitation, dissipation and interaction of internal waves in the deep ocean. J. Geophys. Res. 80 (3).
- THORPE, S.A. (1978). On internal gravity waves in a accelerating shear flow. J. Fluid Mech. 88 (4).
- TURNER, J.S. (1973). Buoyancy effects in fluids. Cambridge Univ. Press. London.
- VARLET, F. (1958). Le régime de l'Atlantique près d'Abidjan. Etudes Eburnéennes, 7.
- WANG, D.P. *et al* (1977). Evidence for interior dissipation and mixing during a coastal upwelling event off Oregon. J. Mar. Res. 35 (4).
- WEINBERG, N.L. *et al* (1974). Internal tidal influence on deep-ocean acoustic ray propagation. J. Acoust. Soc. Am., 56 (2).

- WEIGAND, J.G. *et al* (1969). Effects of friction and surface tide angle of incidence on the coastal generation of internal waves. J. Mar. Res. 27 (2).
- WILLIAMS, K.G. (1976). Repeated profiling of microstructure lenses with a midwater float. J. Phys. Oceanogr. 6.
- WILMOT, W.L. (1972). Generation and dissipation of internal tides. Ph. D. Thesis, Univ. Microfilms Intern., Michigan, U.S.A.
- WINANT, C.D. (1974). Internal surges in coastal waters. J. Geophys. Res. 79 (30).
- WUNSCH, C.I. (1968). On the propagation of internal waves up a slope. Deep-Sea Res. 15.
- WUNSCH, C.I. (1975). Internal tides in the ocean. Reviews of Geophysics and Space Physics 13 (1).
- G.P.C.P. : General Purpose Contouring Program
Tech. Rept., CALCOMP, California, U.S.A.
- TIMSAN : Programme de l'analyse spectrale de la W.H.O.I. Documentation interne, Woods Hole Inst., U.S.A.

ANNEXE A

Validité de la méthode de séparation des variables (coordonnées) (d'après MORSE, 1953).

En vue de simplifier certains problèmes, il est préférable de choisir un système de coordonnées adapté aux limites. Supposons par exemple que ξ_1 et ξ_2 soient des coordonnées d'espace de telle sorte que l'une des surfaces $\xi_1 = \text{const}$ et $\xi_2 = \text{const}$. soit la surface de la limite.

La famille des surfaces $\psi = 0$ coïncide rarement avec la famille des surfaces $\xi_1 = \text{const}$. Dans le cas où elles coïncident, la solution doit avoir un facteur $F_1(\xi_1)$. Toutes les fois que $F_1(\xi_1)$ égal zéro, la surface correspondante $\psi = 0$ coïncide avec une des surfaces de coordonnées $\xi_1 = \text{const}$. Dans ce cas seulement et pour une surface simple de la limite, on peut séparer une partie des solutions, ayant leurs nodes (les surfaces $\psi = 0$) coïncidant avec la surface des coordonnées ξ_1 ou orthogonales à ces surfaces de coordonnées des différentes solutions.

Cette solution doit alors se mettre sous la forme d'un produit de deux fonctions, dépendant chacune respectivement d'une des coordonnées :

$$\psi = F_1(\xi_1) \cdot F_2(\xi_2)$$

Cependant, toute superposition linéaire de solutions élémentaires (la famille de solutions séparées) est une solution de l'équation aux dérivées partielles données.

Ces systèmes de coordonnées sont appelés *les systèmes de coordonnées séparables* pour l'équation et si les coordonnées adaptées à la surface de la limite du problème donné sont des coordonnées séparables, la limite sera une ligne $\xi = \text{const.}$, une des coordonnées séparables.

Si nous revenons maintenant dans notre cas des ondes internes, une seule limite possible pour que notre système de coordonnées rectangulaires soit un système de coordonnées séparables, sera le fond horizontal.

ANNEXE B

(cf. PRINSEBERG, 1971)

Etant donné une fonction $f(Y) = \sum_n B_n e^{-iP_n Y}$, les coefficients B_w sont donnés par :

$$B_w = \frac{1}{\ln \Delta} \int_{K_1 - \ln \Delta}^{K_1} f(Y) \cdot e^{iP_w Y} dY$$

$$\text{avec } P_n = \frac{2n\pi}{\ln \Delta} ; \Delta = \frac{S+r}{S-r} \quad \text{et } r = \frac{d}{L}$$

où K_1 étant une limite supérieure arbitraire d'intégration et $\ln \Delta$ étant un intervalle de l'intégration.

En faisant des substitutions :

$$Y = \ln \left(\frac{SL+z}{d} \right) \text{ et } K_1 = \ln K_2$$

En effet,

$$B_w = \frac{1}{\ln \Delta} \int f(Y) \frac{e^{iP_w \ln \left(\frac{SL+z}{d} \right)}}{SL+z} dz$$

dont la limite supérieure d'intégration est :

$$z = d \left(K_2 - \frac{S}{r} \right)$$

Or, en raison de la concordance du modèle elle doit être :

$$z = d \text{ pour } \chi = L$$

d'où nous obtenons :

$$K_2 = 1 + \frac{S}{r}$$

La limite inférieure d'intégration devient donc :

$$z = \frac{K_2 \cdot d}{\Delta} - SL = \frac{d}{\Delta} \left(1 + \frac{S}{r} \right) - SL = -d$$

Nous obtenons ainsi :

$$B_w = \frac{1}{\ln \Delta} \int_{-d}^d \sum_n B_n \frac{e^{-iP_n \ln \left(\frac{SL+z}{d} \right)} \cdot e^{iP_w \ln \left(\frac{SL+z}{d} \right)}}{SL+z} dz$$

qui peut être représenté sous la forme suivante :

$$B_w = \frac{1}{\ln \Delta} \int_0^d \sum_n B_n \left(\frac{e^{-iP_n \ln \left(\frac{SL+z}{d} \right)} \cdot e^{iP_w \ln \left(\frac{SL+z}{d} \right)}}{SL+z} + \frac{e^{-iP_n \ln \left(\frac{SL-z}{d} \right)} \cdot e^{iP_w \ln \left(\frac{SL-z}{d} \right)}}{SL-z} \right) dz$$

Les développements des fonctions G_w , G_{wm} et H_{kn} (cf. PRINSEBERG, 1971)

1) G_w :

En faisant un changement de variable :

$$Y = \ln\left(\frac{SL+z}{d}\right)$$

et en posant

$$\alpha = \frac{S}{r} + 1 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{S}{r} - 1$$

on a en effet :

$$G_w = \frac{1}{2\ln\Delta} \int_{\ln\beta}^{\ln\alpha} \left(\frac{d}{D} e^Y - \frac{S}{r} \right) e^{(iP_w + 1) Y} dY = \frac{1}{2\ln\Delta} \left(\frac{d}{D(iP_w + 2)} \right. \\ \left. \left(e^{iP_w \ln\alpha} \cdot e^{\ln\alpha^2} - e^{iP_w \ln\beta} \cdot e^{\ln\beta^2} \right) - \frac{S}{r(iP_w + 1)} \left(e^{iP_w \ln\alpha} \cdot e^{\ln\alpha} - e^{iP_w \ln\beta} \cdot e^{\ln\beta} \right) \right)$$

d'après (3-13) on a :

$$e^{-iP_w \ln\alpha} = e^{-iP_w \ln\beta}$$

ou bien

$$e^{iP_w \ln\alpha} = e^{iP_w \ln\beta}$$

G_w devient donc :

$$G_w = \frac{S}{r} \frac{1}{\ln\Delta} e^{iP_w \ln\alpha} \left(\frac{2d}{D(iP_w + 2)} - \frac{1}{(iP_w + 1)} \right) \\ = \frac{S}{r} e^{iP_w \ln\alpha} \left(\frac{d}{D} \frac{(\ln\Delta - iw\pi)}{(w^2\pi^2 + \ln^2\Delta)} - \frac{(\ln\Delta - 2iw\pi)}{(4w^2\pi^2 + \ln^2\Delta)} \right)$$

2) G_{wm} :

Nous allons nous appuyer sur les formules suivantes :

$$\int_e^{\pm iP_w \ln\left(\frac{SL+z}{d}\right)} dz = \frac{SL+z}{1 \pm iP_w} e^{\pm iP_w \ln\left(\frac{SL+z}{d}\right)}$$

$$\int \frac{SL+z}{1 \pm iP_w} e^{\pm iP_w \ln\left(\frac{SL+z}{d}\right)} dz = \frac{(SL+z)^2}{(1 \pm iP_w)(2 \pm iP_w)} e^{\pm iP_w \ln\left(\frac{SL+z}{d}\right)}$$

$$\int \frac{(SL+z)^n \cdot e^{\pm iP_w \ln\left(\frac{SL+z}{d}\right)}}{(1 \pm iP_w)(2 \pm iP_w)\dots(n \pm iP_w)} dz = \frac{(SL+z)^{n+1} e^{\pm iP_w \ln\left(\frac{SL+z}{d}\right)}}{(1 \pm iP_w)(2 \pm iP_w)\dots(n+1 \pm iP_w)}$$

Si nous faisons les intégrations successives par parties pour G_{wm} :

$$G_{wm} = \frac{ie \frac{iS\pi L}{D}}{2 \, d \ln \Delta} \int_{-d}^d e^{-\frac{im\pi z}{D}} \cdot e^{iP_w \ln \left(\frac{SL+z}{d} \right)} dz$$

$$= \left[\frac{ie \frac{im\pi(SL+z)}{D} \cdot e^{iP_w \ln \left(\frac{SL+z}{d} \right)}}{2 \, d \ln \Delta} \cdot \left(\frac{(SL+z)}{(1+iP_w)} - \frac{(SL+z)^2 \left(\frac{im\pi}{D} \right)}{(1+iP_w)(2+iP_w)} + \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots + \frac{(SL+z)^l \left(-\frac{im\pi}{D} \right)^{l-1}}{(1+iP_w)(2+iP_w)\dots(n+iP_w)} \right) \right]_{-d}^d$$

$$+ \frac{ie \frac{iS\pi L}{D}}{2 \, d \ln \Delta} \left(-\frac{im\pi}{D} \right)^l \int_{-d}^d \frac{(SL+z)^l \cdot e^{-\frac{im\pi z}{D}} \cdot e^{iP_w \ln \left(\frac{SL+z}{d} \right)}}{(1+iP_w)(2+iP_w)\dots(l+iP_w)} dz$$

On sait bien que le terme de l'intégration dans l'expression précédente devient négligeable pour l suffisamment grand.

Si on se limite aux l premiers termes et en utilisant (3-13) G_{wm} peut s'écrire :

$$G_{wm} = \frac{e^{iP_w \ln \alpha}}{2m\pi \frac{d}{D} \ln \Delta} \sum_l \frac{(-1)^{l+1} \left(\frac{d}{D} im\pi \right)^l \left(\alpha^l e^{im\pi \frac{d}{D} \alpha} - \beta^l e^{im\pi \frac{d}{D} \beta} \right)}{\Pi(l+iP_w)}$$

où le symbole $\Pi(l+iP_w)$ désigne le produit suivant :

$$(1+iP_w)(2+iP_w)\dots(l+iP_w)$$

3) H_{kn} :

De la même manière que le précédent ;

$$H_{kn} = \frac{-2id}{D} e^{-\frac{ik\pi SL}{D}} \int_{-d}^d \frac{e^{-iP_n \ln \left(\frac{SL+z}{d} \right)} \cdot \cos \left(\frac{k\pi z}{D} \right)}{SL+z} dz =$$

$$\left[\frac{2de^{-i\left(\frac{k\pi SL}{D} + P_n \ln\left(\frac{SL+z}{d}\right)\right)}}{D \cdot P_n} \left(\cos\left(\frac{k\pi z}{D}\right) + \frac{\frac{k\pi}{D} (SL+z) \cdot \sin\left(\frac{k\pi z}{D}\right)}{(1-iP_n)} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\left(\frac{k\pi}{D} (SL+z)\right)^2 \cos\left(\frac{k\pi z}{D}\right)}{(1-iP_n)(2-iP_n)} - \frac{\left(\frac{k\pi}{D} (SL+z)\right)^3 \sin\left(\frac{k\pi z}{D}\right)}{(1-iP_n)(2-iP_n)(3-iP_n)} - \frac{\left(\frac{k\pi}{D} (SL+z)\right)^4 \cos\left(\frac{k\pi z}{D}\right)}{(\quad)(\quad)(\quad)(\quad)} + \dots \right) \right] \cdot d$$

Si on se limite à $2t$ premiers termes et en tenant compte de (3-13) H_{kn} peut s'écrire :

$$H_{kn} = \frac{2d}{D \cdot P_n} e^{-i\left(k\pi \frac{S}{r} \cdot \frac{d}{D} + P_n \ln \alpha\right)} \cdot \left[\cos\left(\frac{k\pi d}{D}\right) \sum_{\tau} \frac{(-1)^{\tau+1} \left(\frac{d}{D} - k\pi\right)^{2\tau-2} (\alpha^{2\tau-2} - \beta^{2\tau-2})}{\Pi(2\tau-2-iP_n)} \right. \\ \left. + \sin\left(\frac{k\pi d}{D}\right) \sum_{\tau} \frac{(-1)^{\tau+1} \left(\frac{d}{D} - k\pi\right)^{2\tau-1} (\alpha^{2\tau-1} + \beta^{2\tau-1})}{\Pi(2\tau-1-iP_n)} \right]$$

Système caractéristique (cf. COURANT-FRIEDRICHS, 1948 ; ABBOTT, 1966)

1. Concept physique de caractéristique :

D'une manière générale, les caractéristiques sont des chemins de propagation de certaines quantités comme les formes géométriques (les véhicules sur la route par exemple) ou les perturbations physiques (surface hydraulique par exemple). Dans le domaine ondulatoire, elles sont des courbes selon lesquelles les énergies d'onde se propagent. Ces chemins de propagation peuvent être représentés non seulement en coordonnées de l'espace (x-z plan par ex.) mais aussi en coordonnées de l'espace et du temps (x-t plan par ex.).

2. Notions mathématiques des caractéristiques :

Une combinaison linéaire $af_k + bf_l$ de deux dérivées partielles d'une fonction $f(k,l)$ signifie le gradient de f dans une direction donnée par : $\frac{dk}{d\ell} = \frac{a}{b}$

Etant donné un système d'équations aux dérivées partielles de premier ordre dont les variables dépendantes et indépendantes sont respectivement ϕ, ψ et k, ℓ :

$$L_1 = A_1\phi_k + B_1\phi_\ell + C_1\psi_k + D_1\psi_\ell + E_1 = 0 \tag{D-1}$$

$$L_2 = A_2\phi_k + B_2\phi_\ell + C_2\psi_k + D_2\psi_\ell + E_2 = 0$$

où les coefficients $A_1, A_2, \dots, E_1, E_2$ sont des fonctions connues de k, ℓ, ϕ, ψ .

On considère maintenant les systèmes d'équations spécifiques dont les coefficients (A_i, \dots, E_i) sont des fonctions de k et ℓ seulement.

On cherche une combinaison linéaire $L = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$ pour que les gradients de ϕ et de ψ dans l'expression différentielle L soient de même direction.

Cette direction qui dépend non seulement des points k et ℓ , mais aussi des valeurs ϕ et ψ en ces points est dite caractéristique.

Supposons que cette direction est $\frac{dk}{d\ell}$, on a :

$$\frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}{\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2} = \frac{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2}{\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2} = \frac{dk}{d\ell} \tag{D-2}$$

Après avoir multiplié par dk et $d\ell$, L peut s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} L \cdot dk &= (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) d\phi + (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) d\psi + (\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2) dk = 0 \\ L \cdot d\ell &= (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) d\phi + (\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2) d\psi + (\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2) d\ell = 0 \end{aligned} \right\} \text{(D-3)}$$

où

$$\begin{aligned} d\phi &= \phi_k \cdot dk + \phi_\ell \cdot d\ell \\ d\psi &= \psi_k \cdot dk + \psi_\ell \cdot d\ell \end{aligned}$$

D'après (D-2) et (D-3), on a quatre équations linéaires homogènes pour λ_1 et λ_2 :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 (A_1 d\ell - B_1 dk) + \lambda_2 (A_2 d\ell - B_2 dk) &= 0 \\ \lambda_1 (C_1 d\ell - D_1 dk) + \lambda_2 (C_2 d\ell - D_2 dk) &= 0 \\ \lambda_1 (A_1 d\phi + C_1 d\psi + E_1 dk) + \lambda_2 (A_2 d\phi + C_2 d\psi + E_2 dk) &= 0 \\ \lambda_1 (B_1 d\phi + D_1 d\psi + E_1 d\ell) + \lambda_2 (B_2 d\phi + D_2 d\psi + E_2 d\ell) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(D-4)}$$

3. Écoulement hyperbolique :

Les déterminantes de tous les systèmes de deux équations de (D-4) doivent s'annuler. Avec deux premiers équations on a :

$$\begin{vmatrix} A_1 d\ell - B_1 dk & A_2 d\ell - B_2 dk \\ C_1 d\ell - D_1 dk & C_2 d\ell - D_2 dk \end{vmatrix} = 0$$

d'où :

$$a d\ell^2 - 2b dk \cdot d\ell + c dk^2 = 0 \quad \text{(D-5)}$$

où

$$a = (AC) \quad ; \quad 2b = (AD) + (BC) \quad ; \quad c = (BD)$$

et l'abréviation (XY) étant définie par : $(XY) = X_1 Y_2 - X_2 Y_1$

Si on définit la pente par $\xi = \frac{d\ell}{dk}$, (D-5) s'écrit :

$$a\xi^2 - 2b\xi + c = 0 \quad (\text{avec } a \neq 0, dk \neq 0)$$

Si :

$b^2 - ac < 0$; les directions caractéristiques réelles n'existent pas et les équations s'appellent "Elliptiques".

$b^2 - ac = 0$; une seule direction caractéristique existe et les équations s'appellent "parabolique".

$b^2 - ac > 0$; deux différentes directions caractéristiques existent et les équations s'appellent "hyperboliques"

L'écoulement qui satisfait cette dernière relation est dite "l'écoulement hyperbolique".

4. Pentes des caractéristiques :

Si l'écoulement considéré est hyperbolique, on a deux solutions différentes de (D-5) :

$$\left. \begin{aligned} \xi_+ (k, \ell) &= \frac{d\ell}{dk} = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} \\ \xi_- (k, \ell) &= \frac{d\ell}{dk} = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} \end{aligned} \right\} \quad (D-6)$$

Ce sont des équations différentielles ordinaires ayant une solution générale :

$$\ell = F(k, \Omega)$$

où Ω est une constante arbitraire d'intégration.

Cette relation peut être représentée par une courbe dans le plan (k, ℓ) et les fonctions ξ_+ et ξ_- de (D-6) représentent les pentes de deux famille de courbes caractéristiques désignées par c^+ et c^- .

5. Equations caractéristiques :

D'après la première et la troisième équation de (D-4) on a :

$$\left| \begin{array}{cc} A_1 d\ell - B_1 dk & A_2 d\ell - B_2 dk \\ A_1 d\phi + C_1 d\psi + E_1 dk & A_2 d\phi + C_2 d\psi + E_2 dk \end{array} \right| = 0$$

Avec : $\xi_{\pm} = \pm \frac{d\ell}{dk}$, on a :

$$\left. \begin{aligned} R d\phi + (a\xi_+ - S) d\psi + (K\xi_+ - M) dk &= 0 \\ R d\phi + (a\xi_- - S) d\psi + (K\xi_- - M) dk &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (D-7)$$

où $R = (AB)$, $S = (BC)$, $K = (AE)$, $M = (BE)$

A partir d'un système d'équations aux dérivées partielles (D-1), on a ainsi déduit deux équations différentielles ordinaires (D-7) qui ne sont, bien entendu, valables que sur les courbes caractéristiques c_+ et c_- dont les pentes sont définies par (D-6).

6. Application pratique au modèle :

Si on applique la méthode caractéristique aux équations (4-14) et (4-15), il suffit de changer les variables dépendantes et indépendantes de (D-1) :

$$\phi \rightarrow c, \quad \psi \rightarrow V, \quad k \rightarrow T, \quad \ell \rightarrow X$$

Les coefficients de (D-1) deviennent maintenant :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = 1 \\ B_1 = \frac{D}{H} - CV \\ C_1 = 0 \\ D_1 = \frac{1 - C^2}{H} \\ E_1 = V \left(\frac{1^2 - C^2}{2H} \right) \frac{dH}{dX} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A_2 = 0 \\ B_2 = \frac{H - V^2}{2} \\ C_2 = 1 \\ D_2 = \frac{D}{H} - CV \\ E_2 = - \left(\frac{VD}{H^2} + \frac{1-C}{2} \right) \frac{dH}{dX} \end{array} \right.$$

Les coefficients du système caractéristique sont :

$$a = 1 \quad ; \quad b = \frac{D}{H} - CV \quad ; \quad c = \left(\frac{D}{H} - CV \right)^2 - \left(\frac{H-V^2}{2} \right) \left(\frac{1-C^2}{2} \right)$$

$$R = \frac{H-V^2}{2} \quad ; \quad S = \frac{D}{H} - CV \quad ; \quad K = - \left(\frac{DV}{H^2} + \frac{1+C}{2} \right) \frac{dH}{dX}$$

$$M = - \left(\frac{D}{H} - CV \right) \left(\frac{VD}{H^2} + \frac{1-C}{2} \right) \frac{dH}{dX} - \frac{V \cdot (H-V^2) (1-C^2)}{4H} \frac{dH}{dX}$$

(D-6) et (D-7) peuvent s'écrire respectivement :

$$\frac{dX}{dT}_{\pm} = \frac{D}{H} - CV \pm 1/2 \left((H-V^2) (1-C^2) \right)^{1/2} \quad (D-8)$$

$$\left(\frac{H-V^2}{2} \right) \frac{dC}{dT}_{\pm} + \left(\frac{dX}{dT}_{\pm} - \left(\frac{D}{H} - CV \right) \right) \frac{dV}{dT}_{\pm} + \frac{dH}{dX} \cdot \left(\frac{VD}{H^2} + \frac{1-C}{2} \right)$$

$$\frac{dX}{dT}_{\pm} + \left(\frac{D}{H} - CV \right) \left(\frac{VD}{H^2} + \frac{1-C}{2} \right) + \frac{V \cdot (H-V^2) (1-C^2)}{4H} = 0 \quad (D-9)$$

avec :

$$\frac{dC}{dT}_{\pm} = \frac{\partial C}{\partial T} + \frac{\partial C}{\partial X} \cdot \frac{dX}{dT}_{\pm}$$

$$\frac{dV}{dT}_{\pm} = \frac{\partial V}{\partial T} + \frac{\partial V}{\partial X} \cdot \frac{dX}{dT}_{\pm}$$

Si on applique (D-8) à (D-9) on a :

$$\pm (H-V^2) \frac{dC}{dT}_{\pm} + \left((H-V^2) (1-C^2) \right)^{1/2} \frac{dV}{dT}_{\pm} - \frac{dH}{dX} \left((H-V^2) (1-C^2) \right)^{1/2} \left(\frac{VD}{H^2} + \frac{1-C}{2} \mp \frac{V}{2H} \left((H-V^2) (1-C^2) \right)^{1/2} \right) = 0 \quad (D-10)$$

Finalement, si on applique (D-16) à (D-8) et (D-10), on obtient les quatre équations (4-17), (4-18), (4-19) et (4-20).