

206  
Rectif. Colation

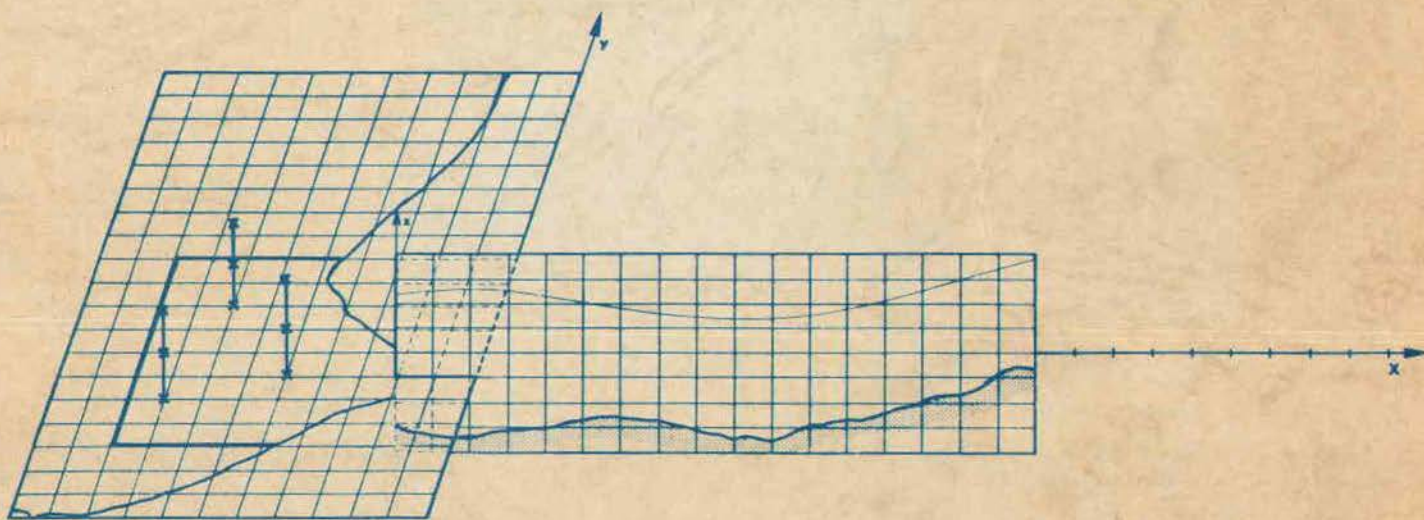
UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

Faculté des Sciences et Techniques

LABORATOIRE D'OCEANOGRAPHIE PHYSIQUE

# ETUDE DE L'ESTUAIRE DE LA SEINE

MODELISATION NUMERIQUE DES PHENOMENES PHYSIQUES



par

Jean Claude **SALOMON**  
Chargé de Recherches au C.N.R.S.

et

Pierre **LE HIR**  
Ingénieur de Recherches

IFREMER-DERO/EL



0EL03936



L'estuaire de la Seine. ( Document Port Autonome du Havre.)

## TABLE DES MATIERES

### I - INTRODUCTION

### II - POSITION MATHEMATIQUE DU PROBLEME

- A - Equations de base
- B - Approche de la modélisation tridimensionnelle
- C - Modèles bidimensionnels en plan horizontal
- D - Modèles bidimensionnels en plan vertical (page 25)
- E - Modèles unidimensionnels
- F - Modèles pour le long terme

### III - CONTRAINTES AUX LIMITES ET COEFFICIENTS D'ECHANGE

- A - Contrainte au fond
- B - Contrainte à la paroi
- C - Contrainte à la surface
- D - Coefficients d'échange
- E - Mesure du coefficient de dispersion horizontal

### IV - MODELES MATHEMATIQUES DE L'ESTUAIRE DE LA SEINE

- A - Choix d'un programme de modélisation
- B - Modèle de l'estuaire extérieur
- C - Modèle unidimensionnel de l'estuaire amont (page 153)
- D - Modèle bidimensionnel de l'estuaire moyen (page 162)
- E - Modèle tridimensionnel de l'estuaire extérieur

### V - CONCLUSION

---

## I - INTRODUCTION

Les zones côtières, et les estuaires en particulier, fournissent au bien-être de l'homme et à son activité économique une aide très appréciable. Contrairement au milieu terrestre pauvre en eau, et au milieu marin pauvre en éléments nutritifs, les estuaires riches de ces deux constituants sont un lieu de vie privilégié. On connaît le rôle de frayère et de nurserie qu'ils jouent pour de très nombreuses espèces.

Ces estuaires sont actuellement utilisés comme collecteurs des rejets industriels et domestiques. Bien que ces rejets lorsqu'ils sont convenablement traités et dilués ne soient pas obligatoirement néfastes, il est de première utilité de pouvoir juger de leurs effets selon leur nature, leur localisation et leur importance, pour ne pas mettre en danger la vie très intense qui règne dans ces régions.

Les estuaires possèdent pour l'activité humaine un autre intérêt considérable : celui de constituer un abri naturel et une voie de pénétration vers l'intérieur du continent très intéressant grâce à la surélévation du niveau de l'eau sous l'effet de la marée, et des courants souvent intenses qui l'accompagnent et augmentent la profondeur en érodant les fonds. Il n'est donc pas étonnant que la plupart des grands ports soient situés sur des estuaires.

Pourtant, malgré l'intérêt qu'ils présentent, les phénomènes estuariens ont longtemps échappé à tout traitement théorique, sinon pour leur aspect qualitatif, et l'on avait généralement recours, pour les étudier, à une analyse expérimentale poussée. Plus tard, l'augmentation des activités portuaires a motivé un gros effort de compréhension et de simulation des phénomènes physiques dont ils sont le siège. Effort principalement orienté vers les problèmes de navigation. C'est ainsi que sont nés les modèles physiques, puis peu après l'apparition des calculateurs électroniques, les modèles mathématiques. Aujourd'hui l'expansion industrielle, portuaire et urbaine est susceptible d'entrer en conflit avec d'autres secteurs d'activité liés à la richesse biologique du milieu ou au tourisme et il devient nécessaire d'appréhender les phénomènes estuariens dans leur ensemble.

Cette nécessité est particulièrement aigue en ce qui concerne l'estuaire de la Seine, exutoire vers la mer de 40 % de l'activité économique nationale, de 15 millions de personnes et de 20 % de la superficie des terres agricoles (SAUM programme d'étude, 1977).

Dans son aspect actuel cet estuaire reflète fortement une série d'aménagements réalisés par l'homme, dont les conséquences n'ont pas toujours été complètement évaluées. Le besoin se fait aujourd'hui sentir d'examiner les problèmes qui s'y posent d'une manière nouvelle qui prenne en compte la totalité des intérêts mis en jeu.

Cette nouvelle politique d'aménagement qui a guidé la définition du programme d'étude du SAUM de l'estuaire de la Seine, et qui doit aboutir à une véritable gestion du milieu naturel et de sa qualité se devait de faire appel aux techniques modernes d'investigation, et notamment aux modèles mathématiques. Ces modèles, outre l'apport immédiat de connaissance du milieu qu'il procurent, laisseront à la disposition des aménageurs des outils de gestion de l'estuaire qui dépasseront le cadre temporel de cette étude.

#### MODELES PHYSIQUES - MODELES MATHÉMATIQUES

Les modèles physiques, abondamment utilisés dans le passé bénéficient actuellement de beaucoup d'expérience, ils fournissent une bonne visualisation des phénomènes, mais sont handicapés par leur taille, et leur conception figée qui se traduisent par un coût élevé, et un manque de souplesse dans leur utilisation. Certains effets dus aux distorsions d'échelle ne peuvent être éliminés, les mesures n'y sont pas toujours faciles et quelques facteurs extérieurs tels que l'effet du vent et la force de Coriolis ne sont reproductibles qu'au prix d'exploits techniques. Les difficultés présentées par ces modèles sont encore d'une autre importance lorsque l'on s'intéresse non plus à l'aspect physique du système mais aux phénomènes biologiques. On voit mal comment y reproduire les interactions biochimiques extrêmement complexes qui conditionnent la qualité de l'eau.

Les modèles mathématiques présentent également des inconvénients ; ils ne peuvent encore reproduire correctement certains phénomènes mathématiquement mal analysés tels que la circulation dans les trois dimen-

sions ou des processus sédimentologiques ou biochimiques mal connus, et demandent également un investissement initial important. Au stade du fonctionnement, par contre, ils sont très bon marché, leurs résultats numériquement très précis sont reproductibles, ils se conservent sans aucun problème et peuvent être tenus à jour pour accompagner l'évolution de la zone géographique étudiée, et améliorés conjointement au progrès des connaissances. On y inclut sans grande difficulté la force de Coriolis ou l'effet d'entraînement par le vent et ils paraissent être les seuls à pouvoir traiter du système extrêmement complexe des lois physiques, chimiques et biochimiques, qui commandent la vie de l'estuaire, pour peu que l'on sache leur trouver une expression mathématique. Ce sont enfin des outils d'analyse et de compréhension extrêmement puissants, capables en séparant les effets propres à chaque cause, de démontrer une série de processus très complexes, dont un modèle physique ne pourrait donner qu'une image globale. Ils sont en ce sens des outils de recherche autant que d'application.

#### PRECEDENTS MODELES DE L'ESTUAIRE DE LA SEINE

L'estuaire de la Seine a depuis longtemps déjà été l'objet de la sollicitude des "Modélisateurs". La Société Grenobloise d'Etudes et d'Applications hydrauliques a effectué à son propos un travail considérable, et de pionnier, en réalisant dès les années 1950/56 un premier modèle réduit. Nombre d'aménagements de la voie navigable y ont été étudiés, telles les digues basses à l'aval de Nonfleur.

En 1967 un second modèle physique a été construit par SOGREAH, accompagné de plusieurs modèles mathématiques dont le rôle était de dégrossir les problèmes et les solutions envisageables pour diminuer le coût de fonctionnement du modèle physique, outil central des études. Ces modèles mathématiques ont consisté en un modèle du secteur large qui couvrait la moitié Est de la Manche dans un système de coordonnées cylindriques, ainsi qu'un modèle d'emprise plus restreinte (figure 2) fonctionnant à partir des résultats du plus grand, et permettant de fixer la limite aval du modèle réduit.

Un autre modèle mathématique de détail concernant la même zone déjà représentée par le modèle réduit a été construit pour rationaliser le fonctionnement du modèle physique. Sa particularité est de posséder des

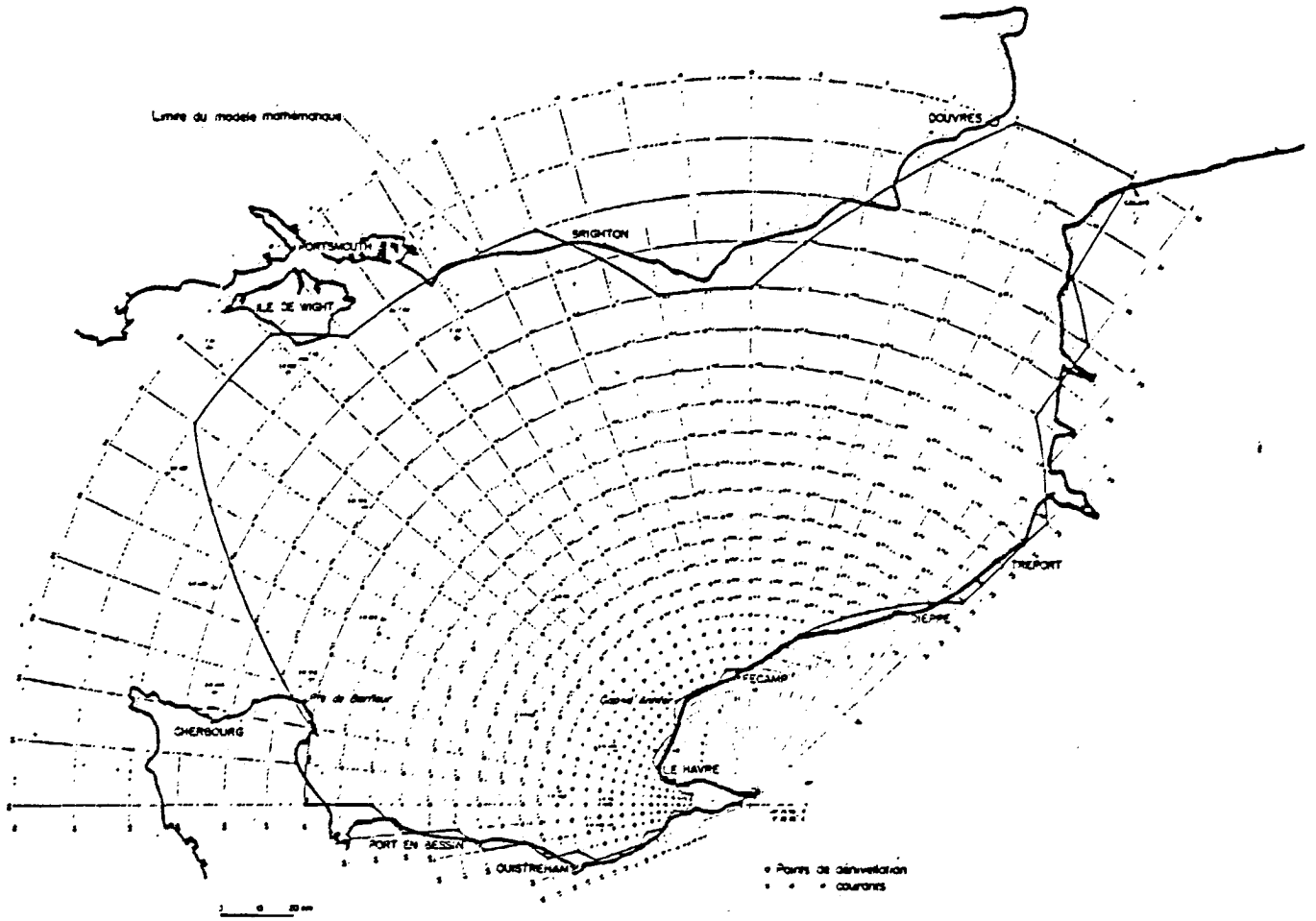


Figure 1 : Grille de calcul du modèle numérique de grande emprise SOGREA

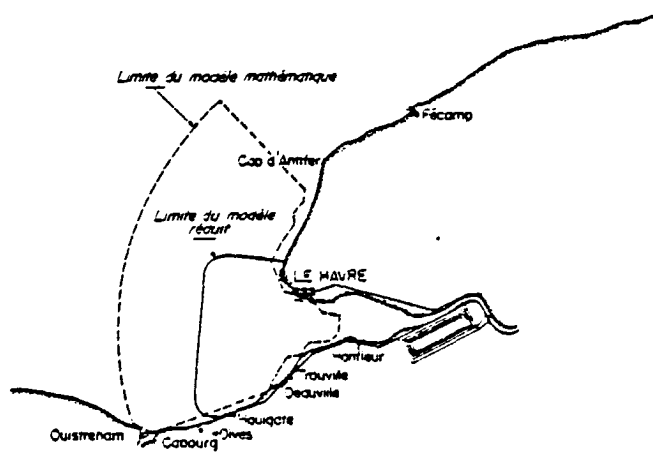


Figure 2 : Limites du modèle mathématique et du modèle physique SOGREA

mailles de dimension variable, autorisant une meilleure description des phénomènes dans le secteur d'intérêt ; le chenal du port de Rouen et ses abords immédiats. Parmi les modifications de l'estuaire qui ont été étudiées sur ces modèles citons la digue de la rive Nord, et le dérasement des fonds à l'engainement du chenal.

Tous ces modèles mathématiques construits par la SOGREAH concernent essentiellement la circulation instantanée (en terme de niveaux et de courants intégrés sur la verticale), mais le dernier modèle de détail a également été appliqué aux problèmes de transits sédimentaires en permettant le calcul de la "sollicitation au transport". De même pour un autre modèle unidimensionnel de la Seine Maritime, utilisé pour étudier les ensablements observés dans le secteur Honfleur-Tancarville.

Parmi cet inventaire de modèles appliqués à l'estuaire de la Seine, mentionnons encore un modèle de la Seine Maritime mis au point par J. LACOTE (1971) afin d'évaluer le volume de matériaux à draguer dans diverses hypothèses d'approfondissement du chenal de navigation ; modèle repris et étendu par J.C. SALOMON (1976) pour l'étude des ensablements observés en amont de Honfleur.

#### RÉALISATIONS PROJÉTÉES PAR LE S.A.U.M.

Dans le cadre actuel des études entreprises en 1978, devant aboutir à l'élaboration du S.A.U.M., l'objectif poursuivi est très vaste, il s'agit de simuler un maximum de composantes du "système estuarien", à savoir : les phénomènes hydrodynamiques (courants et hauteurs d'eau), la convection et la dispersion de substances en solution, certains aspects des phénomènes sédimentologiques et si possible, la qualité de l'eau et la production biologique primaire.

On s'accorde fréquemment à classer les modèles selon leur stade de réalisme en termes de modèles descriptifs, explicatifs ou prévisionnels. Il va de soi que compte tenu de l'état de la science et de l'expérience très variable pour chacun des types de modèles mentionnés plus haut, le stade auquel on peut espérer parvenir sera très différent. La modélisation des phénomènes dynamiques instantanés devra conduire à des prédictions meilleu-



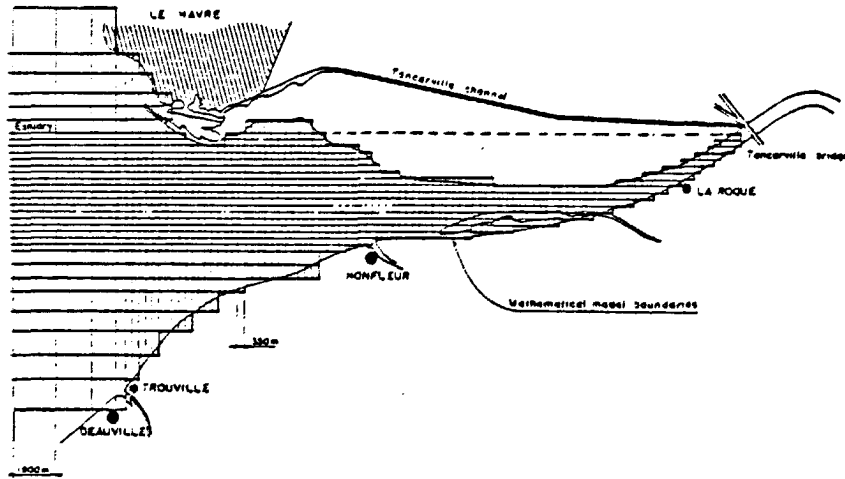


Figure 3 : Modèle de détail SOGREAH

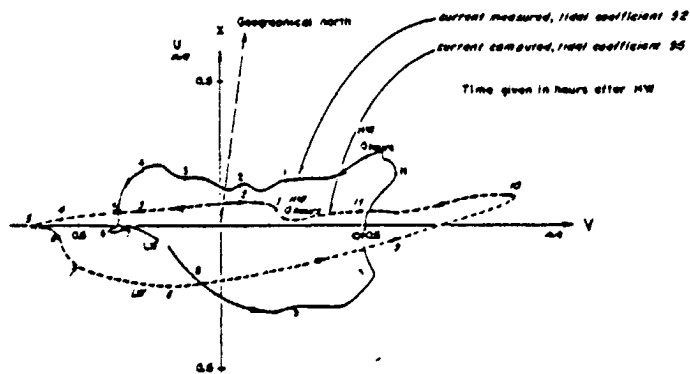


Figure 4 : Comparaison entre mesure en nature et résultat du modèle de détail SOGREAH

res que ce qui a pu être fait par le passé. Les phénomènes de convection - dispersion ne pourront atteindre le stade prédictif que dans les secteurs de l'estuaire où la circulation à long terme sera obtenue avec une bonne précision. La partie sédimentologique peut espérer atteindre le stade explicatif, de même le modèle de l'oxygène dissous, quant à la simulation des premiers échelons biologiques, trop d'incertitudes règnent à ce sujet lors de l'initialisation des programmes d'étude pour juger si le stade descriptif pourra être atteint, ou bien si l'on en restera à ce propos à l'exercice de recherche.

Le présent mémoire concerne la mise au point des modèles de circulation, de dispersion et d'accumulations turbides dans l'estuaire de la Seine, ainsi qu'une première analyse des résultats obtenus. Le véritable objet de cette étude, à savoir l'utilisation de ces modèles à des fins d'interprétation et de gestion de l'estuaire, n'étant qu'à peine abordé ici fait l'objet de rapports distincts.

## II - POSITION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

### A - EQUATIONS DE BASE

Les équations qui régissent le mouvement du fluide traduisent les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement dans le champ de la pesanteur.

#### 1 - Loi de conservation de la masse

Le principe fondamental que constitue la loi de conservation de la masse exprime que la masse d'un élément de fluide dont les limites se déplacent, demeure constante au cours de ce mouvement. Ceci s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{dM}{dt} = 0$$

M : masse de la particule en mouvement

t : temps

soit encore :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\mu_i \rho)}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

que l'on notera :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0$$

$\rho$  : masse volumique

V : vecteur vitesse de composante  $\mu_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  sur les 3 axes  $x_i$

#### 2 - Loi de conservation de la quantité de mouvement

Il s'agit de la relation fondamentale de la dynamique encore appelée second principe de Newton, et qui exprime que le taux de variation de la quantité de mouvement d'une particule, au cours du temps, est égal à la somme des forces qui s'exercent sur cette particule, ce qui se traduit par la relation :

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + 2\rho\Omega \wedge V + \nabla \cdot \rho V V = -\nabla \pi + \rho F + \mu \nabla^2 V \quad (2)$$

- $2\Omega \wedge V$  : accélération de Coriolis  
 $\Omega$  : vecteur de rotation terrestre  
 $\pi$  : pression  
 $F$  : résultante des forces extérieures (pesanteur, forces d'origine astronomique, etc...)  
 $\mu$  : viscosité moléculaire

### 3 - Notations en valeurs moyennes

Les nombres de Reynolds atteints par la circulation en mer ou en estuaire sont extrêmement élevés, ce qui caractérise des écoulements fondamentalement turbulents :

Nombre de Reynolds : 
$$R = \frac{V D \rho}{\mu}$$

où D est une dimension de la veine liquide, perpendiculaire au vecteur vitesse.

Une application numérique aux conditions de circulation en estuaire ( $V = 1$  m/s ;  $D = 10$  m) conduit à un nombre de Reynolds de  $10^7$ , soit de l'ordre de 1 000 fois le seuil des mouvements turbulents.

Outre ces mouvements aléatoires que nous limiterons ici à des périodes de l'ordre de une à quelques minutes, les courants en estuaire sont constitués de composantes périodiques à basse fréquence telles la marée et toutes ses composantes, les cycles fluviaux, météorologiques, etc... et généralement d'un terme continu.

Les modèles actuels ne peuvent prétendre traiter de la vitesse instantanée et reproduire tous ces phénomènes. Force est donc de séparer les processus aléatoires rapides des phénomènes cohérents à plus longue période qui nous intéresseront ici.

On écrira :

$$V = \bar{V} + V'$$

$$\rho = \bar{\rho} + \rho'$$

tels que  $\bar{V}$  et  $\bar{\rho}$  soient la moyenne de  $V$  et  $\rho$  sur une période  $\theta$ . La période  $\theta$  est grande devant celle des fluctuations mais petite par rapport à la constante de temps caractéristique du comportement du système.  $\theta$  pourra être de l'ordre de quelques minutes (1 à 10) en estuaire, mais notablement plus en mer ouverte où existent des turbulences de très grande longueur d'onde.

Soit donc à exprimer les équations (1) et (2) à l'aide des composantes à basse fréquence du mouvement. Pour cela considérons une variable  $q$ , pouvant représenter  $V$  ou  $\rho$ .

$$q = \bar{q} + q'$$

avec

$$\bar{q} = \frac{1}{\theta} \int_{\theta} q dt$$

et

$$\int_{\theta} q' dt = 0$$

On peut alors exprimer les intégrales suivantes :

$$\int_{\theta} \frac{\partial q'}{\partial t} dt = 0 \qquad \frac{1}{\theta} \int_{\theta} \frac{\partial q}{\partial t} dt = \frac{\partial \bar{q}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\theta} \int_{\theta} q_1 q_2 dt = \frac{1}{\theta} \int_{\theta} (\bar{q}_1 + q'_1)(\bar{q}_2 + q'_2) dt$$

$$= \bar{q}_1 \bar{q}_2 + \frac{1}{\theta} \int_{\theta} q'_1 q'_2 dt = \bar{q}_1 \bar{q}_2 + \overline{q'_1 q'_2}$$

Cette méthode de passage des valeurs instantanées aux valeurs moyennes permet d'écrire les relations (1) et (2) sous la forme :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\rho} \bar{V} + \nabla \cdot (\overline{\rho' V'}) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + 2 \Omega \wedge \bar{V} + \nabla \cdot \bar{V} \bar{V} = - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \bar{\pi} + \bar{F} + \frac{\mu}{\bar{\rho}} \nabla^2 \bar{V} - \overline{\nabla \cdot V' V'} \quad (4)$$

Le dernier terme de l'équation (3) sera le plus souvent négligé, en effet :

$$V'p' \approx 10^{-4} \bar{p} \bar{V}$$

et l'équation de la conservation de la masse s'écrit sous la forme :

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla(\bar{\rho} \bar{V}) = 0 \quad (5)$$

On considérera très généralement que l'eau de mer est incompressible, c'est-à-dire :

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = -\bar{V} \cdot \nabla \bar{\rho}$$

d'où l'équation de la continuité en volume :

$$\nabla \bar{V} = 0 \quad (6)$$

En fait, le passage à l'équation (6) fait intervenir plus que l'hypothèse d'incompressibilité, car outre la pression, la densité de l'eau de mer est fonction de la salinité et de la température :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial \pi} \frac{d\pi}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{dS}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{dT}{dt}$$

En plus de l'incompressibilité  $\frac{\partial \rho}{\partial \pi} = 0$ , il faut donc considérer avec Boussinesq, que les dérivés de la masse volumique sont négligeables, excepté lorsqu'elles sont multipliées par l'accélération de la pesanteur.

Les deux derniers termes de l'équation (4) représentent la dispersion de la quantité de mouvement du fait de la viscosité moléculaire et des fluctuations turbulentes de la vitesse.

Ces deux termes sont généralement regroupés en un seul :

$$\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \bar{V} - \nabla \cdot \overline{V'V'} = N \nabla^2 \bar{V}$$

Le terme  $N$  appelé viscosité turbulente, est ici exprimé de manière analogue à la viscosité moléculaire. On observe en fait que pour des nombres de Reynolds aussi élevés que ceux qui concernent les écoulements en mer et en estuaire, la diffusion de la quantité de mouvement par la turbulence, est de très loin prépondérante. Celle-ci ayant des caractéristiques différentes selon les directions, on est amené à définir la viscosité turbulente sous forme d'un tenseur  $[N]$ .

Nota : pour simplifier l'écriture la notation valeur moyenne sur le temps " $\bar{\quad}$ " sera désormais sous-entendue.

#### 4 - L'approximation quasi-statique

Considérons la composante verticale de l'équation (4) : les forces extérieures d'origine luni-solaire sont négligeables devant la force de la pesanteur ( $< 10^{-7}$  g). On écrira donc :

$$\frac{\partial w}{\partial t} - 2\omega u \cos \varphi + \nabla \cdot (N w) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi}{\partial z} - g$$

$$+ \frac{\partial (N_{zx} \frac{\partial w}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial (N_{zy} \frac{\partial w}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial (N_{zz} \frac{\partial w}{\partial z})}{\partial z}$$

$u$ ,  $v$  et  $w$  sont les trois composantes de la vitesse selon les axes du trièdre direct  $(0, x, y, z)$ , où  $Oz$  est dirigé verticalement et positivement vers le haut.

$\varphi$  : latitude du lieu

$\omega$  : fréquence angulaire de rotation terrestre.

Or, en mer comme en estuaire, les vitesses verticales sont très inférieures aux vitesses horizontales, on simplifie donc généralement cette équation en écrivant qu'il y a équilibre hydrostatique, c'est-à-dire :

$$g = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi}{\partial z}$$

Sous toutes ces hypothèses généralement admises pour la circulation estuarienne, le système d'équations (3) et (4) s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u u)}{\partial x} + \frac{\partial (u v)}{\partial y} + \frac{\partial (u w)}{\partial z} - f v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi}{\partial x} =$$

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial (N_{xx} \frac{\partial u}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial (N_{xy} \frac{\partial u}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial (N_{xz} \frac{\partial u}{\partial z})}{\partial z} \right) \quad (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} + fu + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(N_{yx} \frac{\partial v}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(N_{yy} \frac{\partial v}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial(N_{yz} \frac{\partial v}{\partial z})}{\partial z} \right) \quad (8)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial z} = \rho g \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

$$f = 2w \sin \varphi$$

Cette expression très complexe des tensions de Reynolds est le plus souvent trop délicate à utiliser, compte tenu du peu d'informations disponibles à leur égard. On la simplifiera donc parfois en ne distinguant les coefficients de turbulence que selon l'axe vertical et le plan horizontal :

$$N_{xy} = N_{yx} = N_{yy} = N_{xx} = N_h$$

$$N_{xz} = N_{yz} = N_v$$

Les équations (7) à (10) définissent le mouvement des particules fluides, pourvu que soit connu le champ de densité. Celui-ci est fonction, dans le cas général, de la salinité, de la température, et éventuellement de la quantité de matière en suspension ou en solution.

La figure 5 reproduit les variations de la densité en fonction de la salinité et de la température.

On y note que un écart de salinité de 5 ‰ entraîne une variation relative de densité de 0,004 correspondant également à une différence de température de 20°.

En estuaire, du fait des grandes variations de salinité, on se limitera généralement à une expression de l'équation d'état de la forme :

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha S)$$

$\rho_0$  : masse volumique de l'eau douce

$S$  : salinité

$\alpha \neq 0.78$



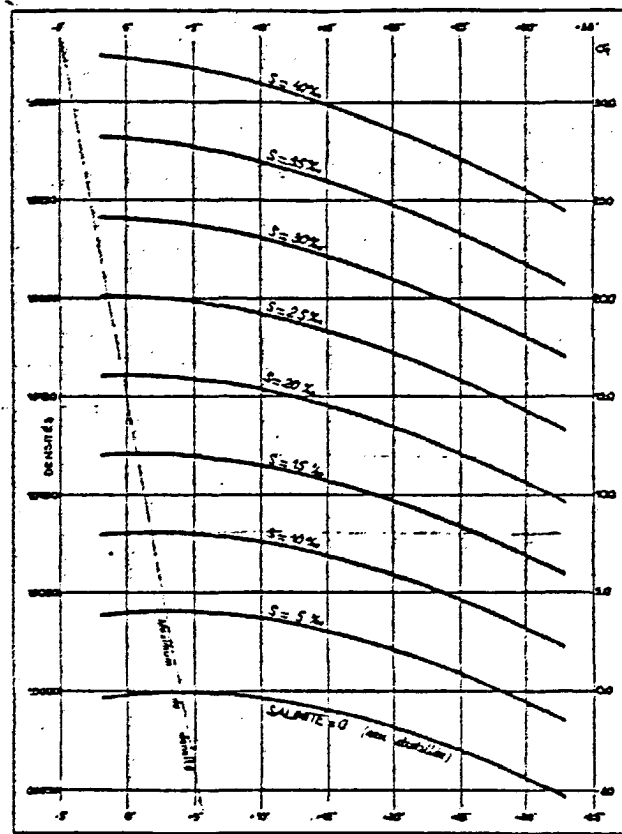


Figure 5 : Densité selon température et salinité .

Le système des équations (7) à (10) ne pourra donc être résolu que si on lui adjoint l'équation de conservation de la masse, appliquée au sel, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = - \nabla \cdot (V s) + D \Delta s$$

D : coefficient de diffusion moléculaire

Considérons comme précédemment la moyenne de cette expression sur un intervalle de temps de l'ordre de la minute :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = - \nabla \cdot (\bar{v} \Delta) - \nabla \cdot (v' \Delta') + D \Delta$$

Compte tenu de l'équation de continuité, et en introduisant la diffusion turbulente K, il vient :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} + \frac{\partial(\mu \Delta)}{\partial x} + \frac{\partial(v \Delta)}{\partial y} + \frac{\partial(w \Delta)}{\partial z} - \frac{\partial(K_x \frac{\partial \Delta}{\partial x})}{\partial x} - \frac{\partial(K_y \frac{\partial \Delta}{\partial y})}{\partial y} - \frac{\partial(K_z \frac{\partial \Delta}{\partial z})}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

La notation valeur moyenne "—" est ici sous entendue.

Cette équation se généralise immédiatement à une substance quelconque de concentration C, éventuellement non conservative, en ajoutant les termes  $r_p$  et  $r_s$  :

$r_s$  (terme source) : accroissement de la masse de substance considérée par unité de volume et de temps.

$r_p$  (terme puit) : diminution de la masse par unité de volume.

d'où :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(\mu C)}{\partial x} + \frac{\partial(v C)}{\partial y} + \frac{\partial(w C)}{\partial z} - \frac{\partial(K_x \frac{\partial C}{\partial x})}{\partial x} - \frac{\partial(K_y \frac{\partial C}{\partial y})}{\partial y} - \frac{\partial(K_z \frac{\partial C}{\partial z})}{\partial z} + r_s - r_p = 0 \quad (13)$$

On peut introduire de la même manière la température T, en exprimant le bilan de la quantité de chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(\mu T)}{\partial x} + \frac{\partial(v T)}{\partial y} + \frac{\partial(w T)}{\partial z} - \frac{\partial(K'_x \frac{\partial T}{\partial x})}{\partial x} - \frac{\partial(K'_y \frac{\partial T}{\partial y})}{\partial y} - \frac{\partial(K'_z \frac{\partial T}{\partial z})}{\partial z} = 0 \quad (14)$$

Les coefficients de diffusion de la chaleur sont différents des coefficients de diffusion des substances dissoutes, sauf pour ce qui concerne la diffusion horizontale, si on néglige les phénomènes de convection.

La charge en sédiments transportés en suspension s'exprime également par une relation de même forme que les précédentes, mais comportant en plus un terme de décantation sous l'effet de la vitesse de chute des particules :

$$\frac{\partial(W_s C_s)}{\partial z}$$

### Notion de modèle numérique

L'ensemble des équations (7-8-9-10-12-13) qui décrivent le comportement de l'élément liquide et des substances en solution ou en suspension forme un système aujourd'hui insoluble dans le cas général. Pour utiliser ce système on devra effectuer un certain nombre de simplifications relatives à la géométrie des bassins et à la forme des côtes, ou bien des hypothèses qui concernent les lois physiques et se traduiront dans l'expression même des équations. Moyennant un nombre de simplifications et d'hypothèses assez considérable, on pourra effectuer une résolution analytique, mais l'intérêt présenté par cette solution s'en trouvera fortement limité.

En réalité, les estuaires et les zones littorales en général, ont une importance économique et humaine telle que l'on recherchera des solutions qui soient aussi proches qu'il est possible des phénomènes réels, pour permettre de traiter les problèmes d'aménagement ; navigation, prises d'eau, rejets, etc...

Cherchant à ne faire qu'un minimum d'hypothèses simplificatrices, on devra recourir à des solutions numériques et non plus analytiques. On construira ainsi des modèles numériques, généralement nommés modèles mathématiques.

On appellera modèle, le programme de calcul qui représente la suite des opérations nécessaires pour résoudre le problème posé, c'est-à-dire ici la propagation de la marée et la dispersion d'éléments dissous.

Laissant de côté (provisoirement) toute considération sur la technique numérique de résolution du système d'équations précédent, les paragraphes qui suivent (IIB à II F) ont pour but de montrer comment au fil des simplifications il est possible de parvenir à des systèmes plus simples et mieux adaptés aux problèmes que l'on se propose de résoudre.

### B - APPROCHE DE LA MODELISATION TRIDIMENSIONNELLE

Le système d'équations précédent, même après les quelques hypothèses simplificatrices déjà énoncées, est un système actuellement très difficilement soluble. Les résolutions qui ont pu en être faites apparaissent criticables aux yeux des physiciens compte tenu de la schématisation souvent grossière des limites du domaine d'intégration (fond, rives, surface libre), de la méconnaissance des conditions aux limites ouvertes, et de l'expression simpliste donnée aux coefficients d'échange turbulent; encore que sur ce dernier point des progrès très sensibles aient été réalisés récemment.

L'ingénieur et le physicien sont alors conduits à simplifier encore le système précédent en "moyennant" les variables sur l'une, au moins, des coordonnées, construisant ainsi les modèles bidimensionnels ou unidimensionnels qui seront détaillés plus loin.

Une manière d'approcher un véritable modèle tridimensionnel est d'ailleurs de multiplier le nombre des plans de calcul, chacune de ces "couches" correspondant à un modèle à deux dimensions. Plusieurs auteurs ont adopté cette technique : LEENDERTSE (1975, 1978), ABBOT et al. (1975), BACKAUS (1978). En dehors du cas d'écoulements constitués de couches physiquement individualisées, une telle approche de la nature en marches d'escalier ne peut être crédible qu'en multipliant le nombre de couches, ce qui conduit à nouveau à des modèles extrêmement complexes et coûteux auxquels on fera les mêmes objections qu'aux modèles véritablement tridimensionnels.

Une autre façon d'envisager l'étude de la propagation d'une onde longue par faible profondeur est de considérer que les termes de dispersion et de convection de la quantité de mouvement dans un plan horizontal, sont du fait de gradients horizontaux peu élevés, généralement très inférieurs aux termes semblables relatifs à l'axe vertical. D'où l'idée d'appréhender la structure verticale des phénomènes en ne faisant intervenir que le temps et la coordonnée verticale. On est ainsi conduit, en découplant les variations horizontales et verticales de la circulation, à combiner un modèle à deux dimensions en plan horizontal et un modèle à une dimension selon la verticale, pour représenter la circulation dans les trois dimensions (NIZOUL, 1979).

Ce raisonnement séduisant est toutefois à considérer avec précautions dans les cas où, soit par le fait d'une propagation par faible hauteur d'eau sur une longue distance, soit par le fait de la proximité de la côte, par la juxtaposition de plusieurs masses d'eau bien individualisées, ou pour toute autre raison, les termes d'advection horizontale ne sont plus négligeables.

L'estuaire de la Seine présentant ces particularités, il n'est pas justifiable de découpler complètement les deux calculs. L'extension sur la verticale du modèle en plan horizontal doit être conduit non pas localement, mais de manière globale sur l'ensemble de la zone d'étude.

#### Extension vers la dimension verticale, d'un modèle bidimensionnel en plan horizontal

La méthode présentée ici fait appel aux équations des fluctuations de vitesse par rapport à leur moyenne sur la verticale. Le principe du calcul consiste à soustraire membre à membre les équations en valeurs moyennes sur la verticale (équations 31 et 32 ci-après, encore appelées équations de Saint Venant), des équations en valeurs ponctuelles (équations de Navier Stokes).

Contrairement aux hypothèses nécessaires à l'établissement des équations des modèles à deux dimensions en plan horizontal, aucune supposition n'est faite ici sur la structure verticale des densités, qui s'écrit donc :

$$\pi(z) = P_a + \int_z^{\xi} \rho g dz$$

où  $P_a$  est la pression atmosphérique

$\xi$  : côte de la surface

$$\text{d'où : } \frac{\partial \pi}{\partial x} = \frac{\partial P_a}{\partial x} + \frac{\partial \int_z^{\xi} \rho g dz}{\partial x}$$

Compte tenu de cette relation, et négligeant les termes de diffusion turbulente horizontale, les équations du mouvement (7) à (10) peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} - f v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \int_z^{\xi} \rho g dz}{\partial x} - \frac{\partial (N_v \frac{\partial u}{\partial z})}{\partial z} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial vu}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} + f u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \int_z^{\xi} \rho g dz}{\partial y} - \frac{\partial (N_v \frac{\partial v}{\partial z})}{\partial z} = 0 \quad (17)$$

Les équations en valeurs moyennes sur la verticale (31, 32 et 33) seront établies plus loin (§ II c).

Les équations des fluctuations de vitesse s'obtiennent par soustraction membre à membre des équations (16) et (31), ainsi que (17) et (32). On obtient le système suivant :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - f \tilde{v} = A_x + G_x - \frac{\tau_{xz} - \tau_{fx}}{\rho H} + \frac{\partial (N_v \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z})}{\partial z} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + f \tilde{u} = A_y + G_y - \frac{\tau_{zy} - \tau_{fy}}{\rho H} + \frac{\partial (N_v \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z})}{\partial z} \quad (19)$$

avec :  $A_i$  terme d'inertie spatiale

$$A_i = (\tilde{u} + U) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x} + (\tilde{v} + V) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y} + \tilde{u} \frac{\partial (U_i)}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial (U_i)}{\partial y} + w \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial z} - \frac{1}{H} \frac{\partial \int_{-h}^{\xi} \tilde{u}_i \tilde{u} dz}{\partial x} - \frac{1}{H} \frac{\partial \int_{-h}^{\xi} \tilde{u}_i \tilde{v} dz}{\partial y}$$

$G_i$  = terme de densité

$$G_i = \frac{g}{\rho} \left( \frac{1}{H} \int_{-h}^{\xi} \frac{\partial (\int_z^{\xi} \rho dz)}{\partial x_i} dz - \frac{\partial (\int_z^{\xi} \rho dz)}{\partial x_i} \right)$$

$$x_i = \begin{cases} x \\ y \end{cases}$$

$\tilde{u}$   
 $\tilde{v}$  : composantes de la différence entre vitesse locale et moyenne des vitesses sur la verticale

Les termes  $A_i$  et  $\zeta_{fi}$  sont déterminés en fonction du courant moyen (chapitre IV), tandis que la densité est calculée à partir de la salinité et, éventuellement de la température, par l'équation d'état.

La connaissance du courant moyen calculé par un modèle bidimensionnel en plan horizontal, complétée par la résolution des équations (18) et (19) (modèle vertical) permet de déterminer la vitesse horizontale en tout point.

La vitesse verticale est alors calculée à partir de l'équation de continuité (10).

C - MODELES BIDIMENSIONNELS EN PLAN HORIZONTAL

(espace de calcul x,y,t)

Ces modèles sont aujourd'hui bien connus pour avoir fréquemment été utilisés et avoir conduit à des résultats très fructueux. Les ingénieurs sont en effet souvent confrontés à des problèmes pour lesquels la structure verticale des courants ne présente pas un grand intérêt. Pour les problèmes de navigation ou de génie maritime notamment, on se contentera du niveau de la surface libre et d'une valeur du courant moyen sur une certaine épaisseur d'eau, généralement près de la surface.

On cherchera donc, chaque fois que cela est possible, à reproduire des phénomènes moyens sur la hauteur d'eau, ce qui se fera avec d'autant plus de réalisme que l'estuaire, ou la zone littorale concernée, sera mieux mélangé.

Soit donc à intégrer sur la verticale, les équations (7) à (14).

On définit U et V de la façon suivante :

$$U = \frac{1}{\zeta + h} \int_{-h}^{\zeta} v \, dz \qquad V = \frac{1}{\zeta + h} \int_{-h}^{\zeta} v \, dz$$

$\zeta$  : cote de la surface

$-h$  : cote du fond

$H = \zeta + h$  : hauteur d'eau totale

Soit  $\tilde{u}$  l'écart entre la valeur locale  $u$  et la valeur moyenne  $U$ . La définition est analogue pour  $\tilde{v}$

$$u = U + \tilde{u}$$

$$v = V + \tilde{v}$$

Compte tenu de la règle de Leibnitz :

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial u}{\partial x} \, dz = \frac{\partial \int_{-h}^{\zeta} u \, dz}{\partial x} - u(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + u(-h) \frac{\partial (-h)}{\partial x}$$



et de l'expression de la vitesse verticale en surface :

$$w(\xi) = u(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} + v(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

L'intégration sur la hauteur d'eau de l'équation de la continuité conduit à la nouvelle relation :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial(HU)}{\partial x} + \frac{\partial(HV)}{\partial y} = 0$$

L'intégration selon la verticale, entre les côtes  $-h$  et  $\xi$ , des équations (7) et (8) conduit alors aux expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - fV + g \frac{\partial \xi}{\partial x} + g \frac{H}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ + \frac{1}{H} \left[ \frac{\partial \tilde{u}^2 dz}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u} \tilde{v} dz}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \int \frac{\partial \tilde{\tau}_{xx}}{\partial x} dz - \frac{1}{\rho} \int \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial y} dz \right] + \frac{\tilde{\tau}_{xz}(\xi) - \tilde{\tau}_{xz}(-h)}{H\rho} = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + fU + g \frac{\partial \xi}{\partial y} + g \frac{H}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \\ + \frac{1}{H} \left[ \frac{\partial \tilde{v}^2 dz}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u} \tilde{v} dz}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \int \frac{\partial \tilde{\tau}_{yz}}{\partial y} dz - \frac{1}{\rho} \int \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial x} dz \right] + \frac{\tilde{\tau}_{yz}(\xi) - \tilde{\tau}_{yz}(-h)}{H\rho} = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Le terme de gradient horizontal de pression a été développé ici en supposant que la masse volumique était constante sur toute verticale ( $\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$ ) et aucun gradient de pression atmosphérique.

Outre les tensions de Reynolds ( $\tilde{\tau}$ ), introduites lors de l'opération "moyenne sur un petit intervalle de temps", les expressions précédentes renferment des termes supplémentaires de forme comparable à celle des premiers à l'exception du fait que les fluctuations de vitesse sont relatives à une valeur moyenne sur la verticale, et sont intégrées le long de cet axe vertical.

Pour respecter l'analogie de Boussinesq, on notera donc ces termes de dispersion de la quantité de mouvement, au moyen d'un tenseur de

cisaillement  $[N_{cis}]$ , tel que les termes soulignés (en 31 et 32) puissent s'écrire :

$$\frac{\partial(N_{cis\ xx} \frac{\partial U}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(N_{cis\ xy} \frac{\partial U}{\partial y})}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(N_{cis\ yx} \frac{\partial V}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(N_{cis\ yy} \frac{\partial V}{\partial y})}{\partial y}$$

Les valeurs de  $N_{cis}$  peuvent se déduire de la mesure de la structure verticale des courants.

#### Application numérique

On a pu observer (SALOMON, 1976) que la structure verticale des courants, dans les estuaires de la Loire ou de la Seine suivait assez bien des fonctions de la forme :

$$u = \frac{V^*}{K} \text{Log} \frac{z}{z_0} \quad \text{avec} \quad z_0 \approx 1 \text{ cm}$$

$$\text{ou bien} \quad u = a z^{\alpha^*} \quad \text{avec} \quad \alpha^* \approx 0,25$$

Pour une hauteur d'eau totale de 15 m et un courant moyen de 1 m/s, les expressions précédentes conduisent à des valeurs des tensions latérales de cisaillement de l'ordre de 0,3 MKS, tandis que la tension de cisaillement verticale exercée sur le fond ( $\rho V^{*2}$ ) est d'environ 4 MKS, soit plus de dix fois supérieure.

D'une manière générale, ces termes intervenant par leurs dérivées selon les axes latéraux x et y, seront donc négligés par rapport au terme qui fait intervenir la dérivée dans le sens vertical : on ne conservera que les tensions de frottement en surface et au fond.

On observera toutefois que si ces termes sont le plus souvent négligeables, du fait des gradients horizontaux faibles les coefficients de cisaillement proprement dits atteignent des valeurs bien supérieures aux coefficients de cisaillement vertical.

$$N_{\text{vis } xx} \frac{\partial U}{\partial x} = 0,3 \text{ MKS} \quad \Rightarrow \quad N_{\text{vis } xx} \approx 3000 \text{ M.K.S.}$$

$$\left( N_z \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{z=-h} = 4 \text{ MKS} \quad \Rightarrow \quad N_z \approx 0,1 \text{ M.K.S. } (z=7m)$$

Par ailleurs, on mentionnera plus loin que pour des raisons de stabilité numérique, il est souvent utile d'ajouter aux équations (31) et (32), un terme dit de pseudo-viscosité. La forme donnée à ce terme (NAU, NAV), qui a pour but de contribuer à dissiper l'énergie à haute fréquence du système, trouve sa justification dans les termes de viscosité et de cisaillement qui viennent d'être négligés.

A l'issue de ces développements, le système d'équations décrivant la partie dynamique des modèles à deux dimensions (plus le temps), intégrés sur la verticale est alors le suivant :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - fV + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + g \frac{H}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\tau_{xx} - \tau_{yx}}{H} = 0 \quad (33)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + fU + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + g \frac{H}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\tau_{xy} - \tau_{yx}}{H} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(HU)}{\partial x} + \frac{\partial(HV)}{\partial y} = 0 \quad (35)$$

### Formalisme du transport

Un autre formalisme peut être donné à ce système, qui fait intervenir non plus la vitesse moyenne sur la verticale, mais son intégrale, c'est-à-dire le transport Q :

$$Q_x = U \cdot H$$

$$Q_y = V \cdot H$$

Il vient :

$$\frac{\partial(Q_x)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\frac{Q_x^2}{H}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{Q_x Q_y}{H}\right)}{\partial y} - fQ_y + gH \frac{\partial \zeta}{\partial x} + g \frac{H^2}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \tau_{xx} - \tau_{yx} = 0 \quad (36)$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial t} + \frac{\partial \left( \frac{Q_x Q_y}{H} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \frac{Q_y^2}{H} \right)}{\partial y} + f Q_x + g H \frac{\partial \xi}{\partial y} + g \frac{H^2}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \tau_{xy} - \tau_{yx} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial (Q_x)}{\partial x} + \frac{\partial (Q_y)}{\partial y} = 0 \quad (38)$$

### Formalisme de LEENDERTSE

LEENDERTSE (1970) a publié une approche légèrement différente de la précédente, pour exprimer les termes supplémentaires qui apparaissent lors de l'intégration sur la verticale des équations de Navier - Stokes :

soient :

$$u = U (1 + \varepsilon(z))$$

$$v = V (1 + \varepsilon(z))$$

$\varepsilon$ , tel que  $\int_{-h}^{\xi} \varepsilon(z) dz = 0$

En répétant les intégrations précédentes et en introduisant le terme  $\beta$

$$\beta = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\xi} (1 + \varepsilon^2(z)) dz$$

il vient :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \beta \left( U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) - f V + g \frac{\partial \xi}{\partial x} + g \frac{H}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + (\beta - 1) \frac{U}{H} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\tau_{yx} - \tau_{xy}}{H} = 0 \quad (39)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \beta \left( U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) + f U + g \frac{\partial \xi}{\partial y} + g \frac{H}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + (\beta - 1) \frac{V}{H} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\tau_{xy} - \tau_{yx}}{H} = 0 \quad (40)$$

Si la structure verticale des courants peut être approchée par une expression de la forme :  $u = a z^{\alpha^*}$ , il vient :

$$\beta = \frac{(\alpha^* + 1)^2}{2\alpha^* + 1}$$

### Application numérique

On a déjà cité que pour les estuaires de la Loire ou de la Seine, le terme  $\alpha^*$  valait environ 0,25 ; d'où  $\beta = 1,04$ . Ceci justifie les simplifications précédentes ( $\beta \approx 1$ ).

### Equation de conservation de la masse d'une substance en solution

Le système précédent (équations 33 à 35 ou 36 à 38) fait intervenir quatre inconnues : U (ou  $Q_x$ ), V (ou  $Q_y$ ), H et  $\rho$ , il ne pourra donc être résolu sans une relation supplémentaire. Cette relation est bien entendu l'équation d'état, qui en zone estuarienne pourra être limitée à une fonction de la salinité :

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha S) \quad (41)$$

Ce qui impose d'adjoindre l'équation d'advection-dispersion du sel (12) :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (uA)}{\partial x} + \frac{\partial (vA)}{\partial y} + \frac{\partial (wA)}{\partial z} - \frac{\partial (k_x \frac{\partial A}{\partial x})}{\partial x} - \frac{\partial (k_y \frac{\partial A}{\partial y})}{\partial y} - \frac{\partial (k_z \frac{\partial A}{\partial z})}{\partial z} = 0$$

Cette dernière relation, valable en valeurs locales doit également être intégrée sur la verticale. On procédera de la manière déjà exposée précédemment, en introduisant la valeur moyenne  $S$  :

$$S = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\zeta} s dz \quad s = S + \tilde{s}$$

En utilisant la formule de Leibnitz et l'expression de la vitesse verticale en surface, il vient :

$$\frac{\partial (HS)}{\partial t} + \frac{\partial (HUS)}{\partial x} + \frac{\partial (HVS)}{\partial y} + \frac{\partial ( \int_{-h}^{\zeta} (u\tilde{s} - k_x \frac{\partial A}{\partial x}) dz )}{\partial x} + \frac{\partial ( \int_{-h}^{\zeta} (v\tilde{s} - k_y \frac{\partial A}{\partial y}) dy )}{\partial y} = 0$$

que l'on écrira sous la forme simplifiée :

$$\frac{\partial (HS)}{\partial t} + \frac{\partial (HUS)}{\partial x} + \frac{\partial (HVS)}{\partial y} - \frac{\partial (HE_x \frac{\partial S}{\partial x})}{\partial x} - \frac{\partial (HE_y \frac{\partial S}{\partial y})}{\partial y} = 0 \quad (42)$$

où  $E_x$  et  $E_y$  sont les coefficients de dispersion pour le sel.

Cette expression renferme explicitement le transport (intégrale des vitesses sur la hauteur d'eau), et peut être simplifiée dans le but de la rendre homogène à (33) et (34).

On obtient une nouvelle formulation (43) mathématiquement équivalente à la précédente, qu'il faudra n'utiliser qu'avec prudence en résolution numérique, car elle ne possède pas les propriétés intégrales de (42).

$$\frac{\partial S}{\partial t} + U \frac{\partial S}{\partial x} + V \frac{\partial S}{\partial y} - \frac{1}{H} \frac{\partial (H E_x \frac{\partial S}{\partial x})}{\partial x} - \frac{1}{H} \frac{\partial (H E_y \frac{\partial S}{\partial y})}{\partial y} = 0 \quad (43)$$

#### Formalisme de LEENDERTSE

On peut reprendre à propos de la concentration en substance dissoute, la notation de LEENDERTSE :

posons  $\Delta(z) = S(1 + E_a(z))$

et  $\gamma = \frac{1}{H} \int_{-h}^z (1 + E E_a) dz$

il vient :

$$\frac{\partial (HS)}{\partial t} + \frac{\partial (HYUS)}{\partial x} + \frac{\partial (HYVS)}{\partial y} - \frac{\partial (H E_x^* \frac{\partial S}{\partial x})}{\partial x} - \frac{\partial (H E_y^* \frac{\partial S}{\partial y})}{\partial y} = 0 \quad (44)$$

où

$$E_x^* \frac{\partial S}{\partial x} = - \frac{1}{H} \int_{-h}^z k_x \frac{\partial \Delta}{\partial x} dz$$

$$E_y^* \frac{\partial S}{\partial y} = - \frac{1}{H} \int_{-h}^z k_y \frac{\partial \Delta}{\partial y} dz$$

L'expression (44) forme avec (35), (39), (40) et (41) un système complet, dont l'avantage par rapport au système (33), (34), (35), (41) et (42) devrait être une meilleure détermination des coefficients d'échange (quantité de mouvement et masse), pourvu que des observations préalables aient permis de connaître les fonctions  $\beta$  et  $\gamma$ . Il apparaît en fait que cette

condition est suffisamment contraignante pour que ce système n'ait pas été utilisé (à la connaissance de l'auteur), sinon en posant :

$$\gamma = \beta = 1$$

## D - MODELES BIDIMENSIONNELS EN PLAN VERTICAL

(Espace de calcul  $x, z, t$ )

Il est bien connu que l'eau de mer, en dehors de toute question de température est plus lourde, du fait de sa salinité, que l'eau fluviale. Elle pénètre donc dans l'estuaire de manière prépondérante sur le fond. L'eau douce suit un chemin contraire c'est-à-dire qu'elle progresse vers l'aval préférentiellement en surface. Il en résulte un schéma de circulation absolument fondamental de la dynamique des estuaires qui fait que, en s'éloignant de la mer, la vitesse résiduelle près du fond est orientée vers l'amont, puis vers l'aval, tandis qu'en surface elle est toujours orientée vers l'aval. L'importance de ce phénomène est caractérisé en première approximation par le rapport  $R_0$  du volume d'eau de mer pénétrant dans l'estuaire au cours du flot, au volume d'eau douce déversée dans l'estuaire pendant le même temps, depuis l'amont.

Aux valeurs élevées de  $R_0$  correspondent des marnages importants et/ou des débits d'eau douce faibles qui dénotent des estuaires bien mélangés, où le phénomène décrit plus haut est peu marqué.

Des valeurs faibles de  $R_0$  correspondent à des marées faibles et/ou des débits fluviaux importants, et révèlent des stratifications verticales marquées.

Un estuaire particulier est susceptible, au cours de l'année (crue, étiage, vive eau, morte eau) de passer de manière continue de l'une à l'autre de ces deux catégories (mélangé - stratifié).

Il va de soi que les modèles relatifs aux équations intégrées sur la verticale ne doivent concerner que des estuaires bien mélangés, dans le cas contraire on aura recours soit aux modèles tridimensionnels encore au stade expérimental, soit aux modèles bidimensionnels dans un plan vertical, en négligeant les gradients latéraux. Ces modèles seront donc d'autant mieux justifiés que la largeur de l'estuaire sera plus réduite et que les rives auront une géométrie régulière.

Négliger les gradients horizontaux de toute variable, conduira d'une manière analogue à ce qui vient d'être exposé pour les modèles à deux



dimensions en plan horizontal, à intégrer le système d'équations (7) à (12) sur la largeur, et à décrire les phénomènes par la valeur moyenne des variables d'une rive à l'autre.

On posera donc :

$$U = \frac{1}{b-a} \int_a^b u \, dy$$

$$W = \frac{1}{b-a} \int_a^b w \, dy$$

$$\vec{u}' = u - U$$

$$\vec{w}' = w - W$$

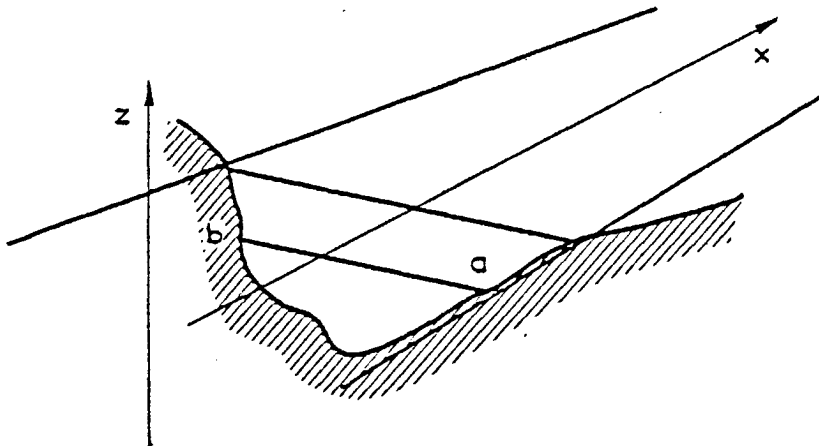


Figure 6

Soient  $\varphi_a = 0$  et  $\varphi_b = 0$  les équations des coordonnées des berges. Ces rives étant imperméables matérialisent des lignes de courant, c'est-à-dire que le produit scalaire du vecteur vitesse et du vecteur unitaire perpendiculaire aux berges doit être nul.

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \varphi = 0$$

avec :  $\varphi_a = y - a(x, z)$

$$\varphi_b = y - b(x, z)$$

$$\vec{V}(u, v, w)$$

Il vient :

$$v_a = u \frac{\partial a}{\partial x} + w \frac{\partial a}{\partial z}$$

$$v_b = u \frac{\partial b}{\partial x} + w \frac{\partial b}{\partial z}$$

De la même manière, l'imperméabilité du fond implique :

$$w_f = u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y}$$

et la vitesse verticale en surface :  $w_s$

$$w_s = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

On intègre alors les équations (7) à (12) sur la largeur en utilisant les relations précédentes et la règle de LEIBNITZ.

L'équation de continuité (10) se transforme en la nouvelle expression :

$$\frac{\partial(BU)}{\partial x} + \frac{\partial(BW)}{\partial z} = 0 \quad (45)$$

$B = b - a$  est la largeur

Les différents termes de l'équation dynamique (7) se développent comme suit :

$$\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t} dy = \frac{\partial \int_a^b u dy}{\partial t} - u_b \frac{\partial b}{\partial t} + u_a \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial(BU)}{\partial t}$$

$$\int_a^b \frac{\partial(u^2)}{\partial x} dy = \frac{\partial \int_a^b u u dy}{\partial x} - u u_b \frac{\partial b}{\partial x} + u u_a \frac{\partial a}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial(BU^2)}{\partial x} + \frac{\partial \int_a^b \bar{u}^2 dy}{\partial x} - u u_b \frac{\partial b}{\partial x} + u u_a \frac{\partial a}{\partial x}$$

$$\int_a^b \frac{\partial \pi}{\partial x} dy = g B \bar{\rho} \frac{\partial \xi}{\partial x} + g B (\xi - z) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x}$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\xi - z} \int_z^\xi \rho dz$$

$$\int_a^b \frac{\partial(N_{xx} \frac{\partial u}{\partial x})}{\partial x} dy = \frac{\partial(B N_{xx} \frac{\partial u}{\partial x})}{\partial x} - \left(N_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x}\right)_b + \left(N_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial x}\right)_a$$

$$\int_a^b \frac{\partial(N_{xz} \frac{\partial u}{\partial z})}{\partial z} dy = \frac{\partial(B N_{xz} \frac{\partial u}{\partial z})}{\partial z} - \left(N_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial b}{\partial z}\right)_b + \left(N_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial a}{\partial z}\right)_a$$

d'où la nouvelle relation :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(BU)}{\partial t} + \frac{\partial(BU^2)}{\partial x} + \frac{\partial \int_a^b \bar{u}^2 dy}{\partial x} - \left(\bar{u} \bar{u} \frac{\partial b}{\partial x}\right)_b + \left(\bar{u} \bar{u} \frac{\partial a}{\partial x}\right)_a + \frac{\partial(BUW)}{\partial z} \\ & + \frac{\partial \int_a^b \bar{u} \bar{w} dy}{\partial z} - \bar{u} \bar{w}_b \frac{\partial b}{\partial z} + \bar{u} \bar{w}_a \frac{\partial a}{\partial z} + B \frac{\bar{\rho}}{\rho} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial x} + g B (\bar{\gamma} - \bar{\gamma}) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} - \frac{\partial(B N_{xx} \frac{\partial u}{\partial x})}{\partial x} \\ & - \frac{\partial(B N_{xz} \frac{\partial u}{\partial z})}{\partial z} + \left(N_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x}\right)_b - \left(N_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial x}\right)_a + \left(N_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial b}{\partial z}\right)_b - \left(N_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial a}{\partial z}\right)_a \\ & + \left(N_{xy} \frac{\partial u}{\partial y}\right)_b - \left(N_{xy} \frac{\partial u}{\partial y}\right)_a = 0 \end{aligned}$$

Celle-ci se simplifie en définissant avec la même analogie de BOUSSINESQ, déjà évoquée :

$$\int_a^b \bar{u}^2 dy - B N_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} = -B \alpha_x \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\int_a^b \bar{u} \bar{w} dy - B N_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} = -B \alpha_z \frac{\partial U}{\partial z}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(BU)}{\partial t} + \frac{\partial(BU^2)}{\partial x} + \frac{\partial(BUW)}{\partial z} + g B \frac{\bar{\rho}}{\rho} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial x} + g B (\bar{\gamma} - \bar{\gamma}) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} - \frac{\partial(B \alpha_x \frac{\partial U}{\partial x})}{\partial x} \\ & - \frac{\partial(B \alpha_z \frac{\partial u}{\partial z})}{\partial z} + N_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial x} + \left[N_{xy} \frac{\partial u}{\partial y}\right]_a^b \\ & - \left(N_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial b}{\partial z}\right)_b + \left(N_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial a}{\partial z}\right)_a = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

Les trois derniers termes de cette équation représentent la contribution des gradients transversaux et verticaux de vitesse, au frottement sur les berges ( $\tau_{xy} + \tau_{xz}$ )<sub>b</sub> et ( $\tau_{xy} + \tau_{xz}$ )<sub>a</sub>. On pourra, soit les exprimer par une fonction de la vitesse (et non de ses dérivées), soit les négliger si la largeur B est grande et les rives assez lisses.

Equation de conservation de la masse de sel

L'intégration de l'équation (12) se fait comme il a été détaillé plus haut ; il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(BS)}{\partial t} + \frac{\partial(BUS + \int_a^b \tilde{w} \tilde{s} dy)}{\partial x} + (u_s)_a \frac{\partial a}{\partial x} - (u_s)_b \frac{\partial b}{\partial x} + [v_s]_a^b - (v_s)_b \frac{\partial b}{\partial z} + (w_s)_a \frac{\partial a}{\partial z} \\ & + \frac{\partial(WBS + \int_a^b \tilde{w} \tilde{s} dy)}{\partial y} - \frac{\partial(\int_a^b k_x \frac{\partial s}{\partial x} dy)}{\partial x} + (k_x \frac{\partial s}{\partial x})_b \frac{\partial b}{\partial x} - (k_x \frac{\partial s}{\partial x})_a \frac{\partial a}{\partial x} - [k_y \frac{\partial s}{\partial y}]_a^b \\ & - \frac{\partial(\int_a^b k_z \frac{\partial s}{\partial z} dy)}{\partial z} + (k_z \frac{\partial s}{\partial z})_b \frac{\partial b}{\partial z} - (k_z \frac{\partial s}{\partial z})_a \frac{\partial a}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

Cette équation se simplifie en utilisant l'imperméabilité des limites latérales vis à vis de l'eau (termes d'ordre 3 à 7) et vis à vis du sel :  $\nabla \cdot \vec{KVS} = 0$  (termes d'ordre 10, 11, 12, 14 et 15). On définit  $K_x$  et  $K_y$  par les relations :

$$\int_a^b (\tilde{w} \tilde{s} - k_z \frac{\partial s}{\partial z}) dy = -B K_z \frac{\partial S}{\partial z}$$

et

$$\int_a^b (\tilde{w} \tilde{s} - k_x \frac{\partial s}{\partial x}) dy = -B K_x \frac{\partial S}{\partial x}$$

d'où

$$\frac{\partial(BS)}{\partial t} + \frac{\partial(BUS)}{\partial x} + \frac{\partial(BWS)}{\partial y} - \frac{\partial(B K_x \frac{\partial S}{\partial x})}{\partial x} - \frac{\partial(B K_z \frac{\partial S}{\partial z})}{\partial z} = 0 \quad (47)$$

Equation d'état

Cette équation est bien sur invariante :

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha S) \quad (48)$$

Le système obtenu (45), (46), (47) et (48) comporte 5 inconnues :  $U, W, \zeta, \rho$  et  $S$ . Il ne peut donc être résolu qu'en le complétant par un cinquième relation qui devrait correspondre à l'intégration sur la largeur, de l'équation du mouvement selon  $Oz$ . Du fait de l'hypothèse de pression hydros-

statique, celle-ci est devenue sans intérêt, on la remplacera donc par l'intégrale, sur la verticale de l'équation de continuité (45).

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial(BU)}{\partial x} dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial(BW)}{\partial z} dz = 0$$

En développant cette relation et en utilisant la formule de LEIBNITZ et l'expression de la vitesse verticale en surface, il vient :

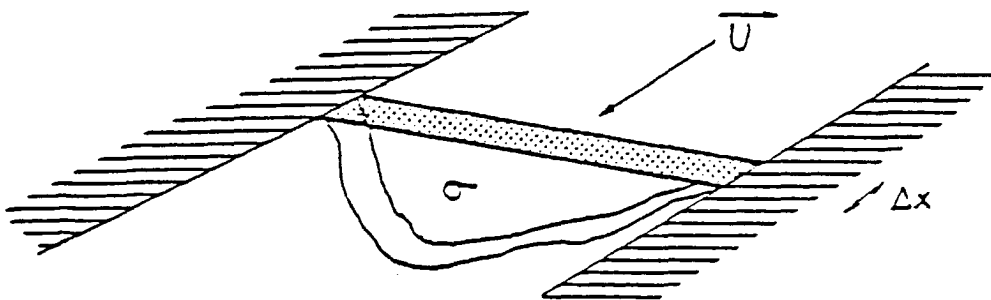
$$\frac{\partial \int_{-h}^{\zeta} BU dz}{\partial x} + B \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad (49)$$

Les équations (45) à (49) forment alors le système complet relatif aux modèles bidimensionnels intégrés sur la largeur.

E - MODELES UNIDIMENSIONNELS(plan de calcul  $x,t$ )

Les équations hydrodynamiques relatives aux écoulements unidimensionnels en estuaire ont l'énorme avantage sur les systèmes qui ont été passés en revue jusqu'ici, de permettre une résolution relativement simple. Sont concernés dans ce paragraphe, les estuaires bien mélangés ou assez bien mélangés, dont la largeur est peu importante. Compte tenu des forts marnages observables sur le littoral français, ces conditions sont assez fréquemment remplies et ce type de modèle est d'un emploi très commun, particulièrement pour les problèmes liés à la navigation. Toute grandeur intervenant dans la description des phénomènes sera exprimée ici par sa moyenne sur une section droite de l'écoulement.

S'agissant d'exprimer les équations de conservation de la quantité de mouvement, de la masse d'eau, ou d'une substance dissoute, en termes de valeurs moyennes dans une section perpendiculaire aux rives, on pourra procéder par intégration du système (7) à (12) sur les axes  $y$  et  $z$ . Cette opération étant assez lourde, ainsi qu'on a pu en juger à propos des modèles à deux dimensions, on préférera ici établir directement les équations concernées en appliquant la loi de conservation de la masse, et le second principe de Newton, d'une façon macroscopique. On raisonnera non plus sur une particule infinitésimale, mais sur un élément de volume compris entre deux sections de l'estuaire, où la vitesse sera supposée uniforme. On introduira ensuite, l'effet des variations de vitesse dans les sections, que l'on aurait mis en évidence directement par la démarche employée précédemment.



### Conservation de la masse d'eau

Soit  $\sigma$  la surface d'une section droite de l'écoulement, et  $U$  la vitesse dans cette section. Considérons la "tranche" d'épaisseur  $\Delta x$ , et de section  $\sigma$ . Sa masse  $\Delta M$ , vaut :

$$\Delta M = \rho(x) \sigma(x) \Delta x = \rho \Delta V$$

Au cours de l'intervalle de temps  $\Delta t = t_2 - t_1$ , cette tranche est susceptible de se déformer et de se déplacer, tout en respectant la relation :  $\frac{d(\Delta M)}{dt} = 0$

On négligera ici les variations de masse dues à une variation de la densité, par rapport aux effets du déplacement et de la déformation de la tranche d'eau.

L'épaisseur de cette tranche d'eau varie entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  depuis  $\Delta x_{t_1}$  à  $\Delta x_{t_2} = \Delta x_{t_1} + \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x (t_2 - t_1)$

il vient : 
$$\frac{d(\Delta M)}{dt} = \Delta x \left( \frac{\partial(\sigma\rho)}{\partial t} + U \frac{\partial(\sigma\rho)}{\partial x} + \sigma\rho \frac{\partial U}{\partial x} \right)$$

d'où la relation :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial(\sigma U)}{\partial x} = 0 \quad (50)$$

### Conservation du moment

Le second principe de Newton exprime que le taux de variation de la quantité de mouvement du volume considéré  $\Delta V$  est égal à la somme des forces extérieures agissant sur cet élément :

$$\frac{d(\Delta M U)}{dt} = F$$

soit :

$$\frac{d(\rho \sigma U \Delta x)}{dt} = \sum F_x$$

Les forces extérieures sont les forces de pression sur les sections droites, et les forces de contact avec le fond :

$$\sum F_x = \rho g \sigma \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x + \tau \mathcal{P} \Delta x$$

$\mathcal{P}$  : périmètre mouillé

$$\frac{d(\rho \sigma U \Delta x)}{dt} = \rho \Delta x \left( \frac{\partial(\sigma U)}{\partial t} + U \frac{\partial(\sigma U)}{\partial x} + \sigma U \frac{\partial U}{\partial x} \right)$$

d'où la relation :

$$\frac{\partial(\sigma U)}{\partial t} + \frac{\partial(\sigma U^2)}{\partial x} + g \sigma \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\tau \mathcal{P}}{\rho} = 0$$

que l'on peut encore simplifier en utilisant l'équation de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\tau \mathcal{P}}{\rho \sigma} = 0 \quad (51)$$

Nota 1 : on n'a fait intervenir ici dans l'expression des forces de pression sur les sections droites, que la composante due à la dénivellation de la surface. Il conviendrait en fait d'ajouter un terme supplémentaire dû au gradient horizontal de salinité. Ce terme est très difficile à exprimer dans le cas de sections droites de forme quelconque, mais se simplifie dans le cas de sections rectangulaires, où il vaut alors

$$\frac{g H}{2 \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

L'équation du mouvement s'écrit donc :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{g H}{2 \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\tau \mathcal{P}}{\rho \sigma} = 0 \quad (52)$$

Cette dernière correction rarement effectuée, n'est pourtant pas négligeable, une évaluation numérique simple montre que la surélévation des niveaux qu'elle entraîne dans l'estuaire intérieur vaut :

$$\Delta \xi \approx \frac{H \alpha}{2} \Delta S$$



Ceci représente une différence de niveau de 14 cm par rapport à la valeur calculée sans tenir compte de la différence de salinité entre l'amont et l'aval ( $H = 10$  m,  $\rho_{\text{mer}} = 1028$ ).

Nota 2 : lorsque du fait d'importantes irrégularités de forme des sections, la vitesse ne pourra être considérée comme uniforme, on introduira dans l'équation du mouvement des coefficients de correction des termes d'inertie, en cherchant à conserver la quantité de mouvement et l'énergie cinétique qui traversent à un instant donné la section  $\sigma$ .

La quantité de mouvement traversant un élément de surface  $d\sigma$  a pour expression :

$$u \cdot dm = \rho u^2 d\sigma$$

soit, par intégration sur la section

$$U^2 \sigma = \iint_{\sigma} u^2 d\sigma = \alpha_1 U^2 \sigma \quad \text{ou} \quad U = \frac{1}{\sigma} \iint_{\sigma} u d\sigma$$

De même, le flux d'énergie cinétique traversant la section  $\sigma$  a pour expression :

$$\iint_{\sigma} dm \frac{u^2}{2} = \frac{\rho}{2} \iint_{\sigma} u^3 d\sigma = \alpha_2 U^3 \sigma$$

L'équation du mouvement se modifie comme suit :

$$\alpha_1 \frac{\partial U}{\partial t} + \alpha_2 U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + g \frac{H}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\tau \sigma}{\rho \sigma} = 0 \quad (53)$$

Pratiquement, l'introduction des termes supplémentaires  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  complique énormément l'étalonnage, et cette expression est rarement utilisée. Par contre, lorsque les sections sont nettement caractérisées par une partie profonde (chenal) où le courant est important, et une partie peu profonde (vasières latérales, bancs immergés...) qui est assimilable à un champ d'inondation, on sépare dans l'équation (50) ces deux composantes :

$$\sigma_{\text{totale}} = \sigma_{\text{active}} + \sigma_{\text{passive}}$$

$$\frac{\partial(\sigma_{\text{active}} \cdot U)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{\text{totale}})}{\partial t} = 0 \quad (54)$$

### Equation d'advection - dispersion

Les relations précédentes forment un système incomplet ; il leur manque les équations d'état et d'advection - dispersion du sel, pour que soient définies les variations de la masse volumique.

L'équation de conservation d'une substance dissoute peut être établie directement en raisonnant sur la variation de la masse contenue dans la tranche d'eau de volume  $\Delta \text{Vol} = \sigma \Delta x$ . On peut également la déduire de l'équation générale (13) en distinguant la concentration moyenne  $C$  dans une section  $\sigma$ , et sa valeur locale  $c$  :

$$\begin{aligned} c &= C + c^* & c &= \frac{1}{\sigma} \iint_{\sigma} c \, d\sigma \\ u &= U + u^* \end{aligned}$$

Il vient :

$$\frac{\partial(\sigma c)}{\partial t} + \frac{\partial(\sigma U c)}{\partial x} + \frac{\partial(\iint_{\sigma} u^* c^* \, d\sigma)}{\partial x} - \frac{\partial(\sigma K_L \frac{\partial c}{\partial x})}{\partial x} = 0$$

Tout comme précédemment, on définit alors un terme de dispersion longitudinale qui regroupe à la fois les effets moléculaires, et les gradients horizontaux et verticaux :

$$\iint_{\sigma} u^* c^* \, d\sigma - \sigma K_L \frac{\partial c}{\partial x} = - \sigma K_L \frac{\partial C}{\partial x}$$

d'où l'équation suivante, utilisable pour la salinité, la concentration en éléments chimiques divers, éventuellement radioactifs, la D.B.O. et l'oxygène dissous, ou encore la turbidité. Dans ces dernières hypothèses des termes supplémentaires (sources ou puits) pourront également figurer dans cette équation pour traduire des réactions propres, des interactions internes, ou même des échanges au travers des limites lorsqu'il s'agira de modèles relatifs à des valeurs intégrées sur des éléments de volume.

$$\frac{\partial(\sigma c)}{\partial t} + \frac{\partial(\sigma U c)}{\partial x} - \frac{\partial(\sigma K_L \frac{\partial c}{\partial x})}{\partial x} = 0 \quad (55)$$

## F - MODELES POUR LE LONG TERME

Les développements présentés jusqu'ici concernaient des systèmes à 1, 2 (ou partiellement 3) dimensions spatiales, et pour lesquels la variable "temps" résultait d'une intégration sur une période de quelques minutes, éliminant ainsi ce que l'on avait considéré comme de la turbulence, et qui n'est pas concerné par ce rapport.

Du fait de la complexité des systèmes qui résultent de ces hypothèses, on peut être conduit si l'on ne s'intéresse qu'aux phénomènes à long terme, à intégrer les équations de NAVIER, non plus sur quelques minutes, mais sur des périodes plus longues (quelques jours par exemple). Les systèmes d'équations relatifs à ces modèles pour phénomènes à long terme (encore dits résiduels), ont la même forme que ceux qui ont été développés plus haut, seuls les coefficients d'échange (moment et masse), dont la signification physique a changée prendront des valeurs numériques différentes.

Dans le cadre de la présente étude de l'estuaire de la Seine, un modèle bidimensionnel de cette sorte n'a pas paru justifié, compte tenu de la mauvaise connaissance actuelle des conditions aux limites résiduelles \* et des coefficients d'échange correspondant, et surtout de ce que les mesures en nature effectuées très récemment montrent clairement une circulation tridimensionnelle impossible à reproduire de cette manière.

Un modèle en valeurs résiduelles a par contre été développé pour la Seine Maritime, dans l'hypothèse d'un écoulement unidimensionnel, pour être appliqué aux processus de dispersion (et de qualité de l'eau).

### Modèle unidimensionnel d'advection - dispersion, en valeurs résiduelles

Il s'agit, en utilisant la même méthode déjà abondamment explicitée (dite K.B.M.) d'intégrer l'équation (55) sur une période T longue devant la période de la marée.

$$\frac{\partial(\sigma C)}{\partial t} + \frac{\partial(\sigma UC)}{\partial x} - \frac{\partial(\sigma K_L \frac{\partial C}{\partial x})}{\partial x} = 0$$

---

\* L'intégration sur le temps, des résultats du modèle en valeurs instantanées de l'estuaire extérieur, a montré qu'une pente de la surface libre le long des limites, de l'ordre du millimètre par kilomètre, suffisait à induire une circulation résiduelle (intégrée sur la verticale) du même ordre de grandeur que le phénomène naturel.

On séparera partie "fluctuante" et partie "résiduelle" de chaque variable :

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_r + \sigma' \\ U &= U_r + U' \\ C &= C_r + C'\end{aligned}$$

Notons " $\overline{\quad}$ ", l'opération moyenne temporelle :

$$\overline{q} = q_r = \frac{1}{T} \int_0^T q dt$$

On fait ici généralement une hypothèse simplificatrice qui n'est malheureusement pas toujours vérifiée dans un estuaire à fort marnage, tel que la Seine, à savoir :

$$\sigma' \ll \sigma_r$$

$$C' \ll C_r$$

Sous cette hypothèse, il vient :

$$\frac{\partial(\overline{\sigma_r C_r})}{\partial t} + \frac{\partial(C_r(\overline{\sigma_r U_r} + \overline{\sigma' U'}))}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{\sigma_r (K_L \frac{\partial C'}{\partial x} + U' C')})}{\partial x} = 0$$

ce que l'on exprime sous la forme déjà décrite :

$$\frac{\partial \sigma_r C_r}{\partial t} + \frac{\partial(C_r \overline{\sigma_r U_r})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{\sigma_r K_{Lr} \frac{\partial C_r}{\partial x}})}{\partial x} = 0 \quad (56)$$

Cette équation établie dans un but de simplification pour ne pas s'encombrer de termes inutiles au problème étudié, possède l'inconvénient d'être difficilement fiable aux phénomènes observables, sauf campagnes de mesures de très longue durée permettant d'accéder aux valeurs moyennes (Cr notamment). Il est donc d'usage, pour les modèles de qualité de l'eau qui nous intéresseront à propos de la Seine Maritime, de conserver la même forme d'équation, et de l'appliquer aux valeurs instantanées observables à un moment défini de la marée, généralement l'étale de jusant (ou bien la basse mer).

On écrit donc :

$$\frac{\partial(\overline{\sigma_{BM}} C_{BM})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\sigma_{BM}} (C_{BM} U_F - K_{LBM} \frac{\partial C_{BM}}{\partial x}))}{\partial x} = 0 \quad (57)$$

où toutes les quantités sont exprimées lors de la basse mer, exceptée la vitesse  $U_F$  définie comme le quotient du débit fluvial par la section à basse mer.

Il va de soi que cette formule est mathématiquement injustifiable, et que seuls les résultats malgré tout relativement corrects (semble-t-il) auxquels elle conduit, justifient son emploi.

### III - CONTRAINTES AUX LIMITES ET COEFFICIENTS D'ECHANGE

Le système d'équations (7) à (13) fait apparaître, du fait de l'intégration opérée sur le temps, des coefficients d'échanges turbulents qu'il faudra connaître pour pouvoir le résoudre. La difficulté apparaît ici, ces phénomènes à haute fréquence étant précisément exclus du modèle, les divers coefficients introduits pour en rendre compte de façon moyenne ne pourront faire intervenir que les grandeurs moyennes reproduites par le calcul.

LEENDERTSE (1978) a ainsi publié une simulation tridimensionnelle par modèle multi-couches, où l'énergie haute fréquence de la turbulence est représentée en tant que variable supplémentaire à l'aide d'une équation de la forme (12), des relations simples permettant alors d'évaluer les coefficients d'échange à partir de cette énergie.

La difficulté devient plus grande lorsque par intégration sur l'espace on introduit des termes de contrainte aux limites qui outre les coefficients d'échange précédents font intervenir des gradients dans la direction d'intégration, gradients donc impossibles à calculer.

C'est par exemple le cas de la tension de frottement sur le fond, dans un modèle intégré sur la verticale. On a vu plus haut que :

$$\tau_z = \rho N_{z3} \frac{\partial u}{\partial z}$$

après intégration sur  $z$ , cette expression n'est plus utilisable pour calculer  $\tau$ . On devra introduire ici des considérations supplémentaires, souvent empiriques, pour fermer le problème.

Cette difficulté apparaît également au cours de la résolution numérique, lorsque du fait d'un phénomène de couche limite non pris en compte par le modèle, une condition sur cette limite ne peut être exprimée simplement.

C'est le cas, ainsi qu'il sera exposé plus loin, de la contrainte sur le fond  $\tau$ , dans certains modèles en plan vertical où, bien que le terme  $\frac{\partial u}{\partial z}$  soit théoriquement calculable, on préférera utiliser une

expression différente mettant en jeu la vitesse hors de la couche limite, et non son gradient (qui plus est dans une zone délicate à modéliser).

La résolution des différents systèmes d'équations précédemment établis, implique donc le recours à des relations supplémentaires, basées sur des considérations de physique, qui seront détaillées ici.

### A - CONTRAINTE AU FOND

Les termes de cisaillement sur le fond ont été explicités précédemment (7) et (8), sous la forme :

$$\begin{aligned}\tau_{xz}(-h) &= -\rho u'w' = \rho N_{xz} \left( \frac{du}{dz} \right)_{-h} \\ \tau_{yz}(-h) &= -\rho v'w' = \rho N_{yz} \left( \frac{dv}{dz} \right)_{-h}\end{aligned}$$

Même dans l'hypothèse de l'existence d'une théorie de la turbulence satisfaisante, ces expressions ne pourraient être utilisées pour des modèles intégrés sur la verticale (une ou deux dimensions), puisque aucun gradient n'est calculable dans cette direction.

Diverses études en mer faisant appel soit à la mesure des fluctuations turbulentes de la vitesse  $u'$ ,  $v'$  et  $w'$ , soit à la mesure du profil vertical des courants, ont permis de vérifier qu'une relation simple entre l'effort sur le fond et la vitesse moyenne pouvait être adoptée, à savoir :

$$\tau = k (U^2 + V^2) \quad (56)$$

La théorie de PRANDTL fournit à cette formule une justification plus ou moins rigoureuse.

#### Théorie de PRANDTL

Pour relier les tensions de Reynolds, par leur définition, aux composantes moyennes d'un écoulement permanent, PRANDTL considère un mécanisme de turbulence très schématique où une particule en équilibre à la cote  $z$  du fond est animée d'une vitesse  $u(z)$ . Elle se déplace par turbulence jusqu'à la cote  $z + \Delta z$ , où la vitesse régnante est  $u(z + \Delta z) = u(z) + \frac{du}{dz} \Delta z$ . La différence de vitesse (dans le sens de l'écoulement)  $u' = \frac{du}{dz} \Delta z$  doit être parfaitement corrélée à la vitesse verticale  $w'$  qui a déplacé cette particule du niveau  $z$ , au niveau  $z + \Delta z$ , il s'en suit donc :

$$u'w' = - \left( \Delta z \cdot \frac{du}{dz} \right)^2 \quad \text{et puisque le mouvement est}$$

permanent :

$$\tau = \rho \left( \Delta z \cdot \frac{du}{dz} \right)^2$$



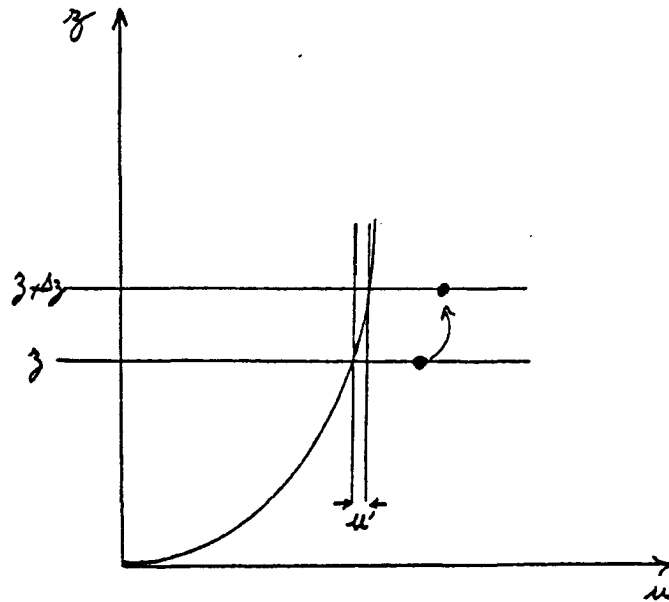


Figure 8

La longueur de mélange  $\Delta z$  devant s'annuler au fond ( $u = 0$ ), PRANDTL adopte la forme la plus simple :

$$\Delta z = K z$$

La constante sans dimension  $K$ , dite constante de KARMAN, déterminée empiriquement; vaut environ 0,4 dans le cas d'un écoulement non chargé mais diminue très fortement dans le cas d'éléments solides transportés en suspension.

d'où

$$\tau = \rho K^2 z^2 \left( \frac{du}{dz} \right)^2$$

Par des considérations de dimensions, PRANDTL définit alors la vitesse de frottement  $V^*$ , telle que :

$$\tau = \rho V^{*2} \tag{57}$$

Il s'en suit, par intégration :

$$u(z) = \frac{V^*}{K} \text{Log} \frac{z+z_0}{z_0} \tag{58}$$

où  $z_0$ , constante d'intégration telle que  $u = 0$  pour  $z = z_0$ , appelée épaisseur de rugosité du fond est reliée à la nature, et aux irrégularités de forme, du fond :

$$z_0 = \frac{D_{65}}{30,2 \eta}$$

$D_{65}$  : granulométrie des sédiments (65 % de particules plus fines)

$\eta$  : facteur de forme du lit (IPPEN, 1966).

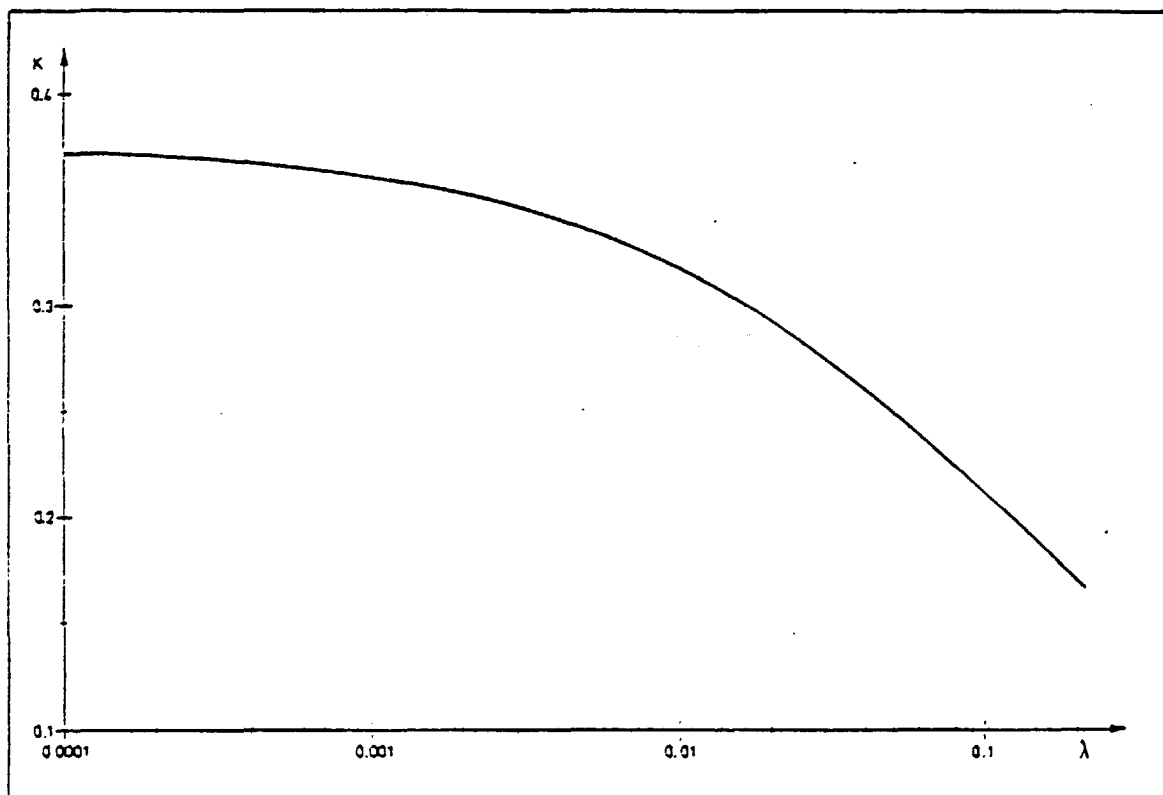


Figure 9 : Variation de la constante de KARMAN en fonction de la charge en sédiments.

En dehors de la théorie de PRANDTL, la relation (56) peut se démontrer dans le cas schématique d'un écoulement plan pénétrant depuis une zone où il n'existe pas de friction à la limite inférieure, dans une zone où cette force de contact à la paroi existe (figure 10).

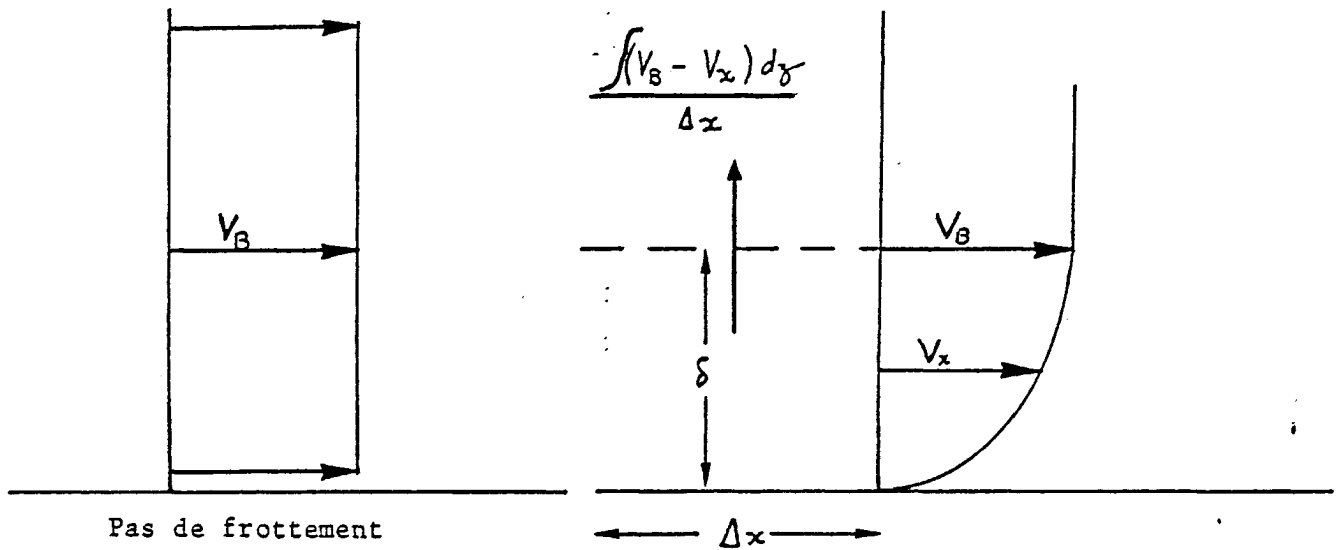


Figure 10

La vitesse diminue alors (voir figure 10) de la valeur  $V_B$  à la valeur  $V_x(z)$ , au long d'un parcours  $\Delta x$ .

Soit  $\delta$ , l'épaisseur de la couche limite où existe un gradient vertical de courant. La différence d'énergie cinétique du flux d'eau entrant, et du flux d'eau sortant du parallélépipède  $(\delta, \Delta x)$ , est alors :

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= \rho \left( V_B^2 \delta - \int_0^\delta V_x^2 dz - V_B \int_0^\delta (V_B - V_x) dz \right) \\ &= \rho V_B^2 \int_0^\delta q(z) (1 - q(z)) dz \end{aligned}$$

Cette variation d'énergie est équilibrée par le travail de la force de résistance sur le fond :

$$\mathcal{E}_f = \rho V_B^2 \frac{d \left( \int_0^\delta q(1-q) dz \right)}{dx}$$

Ce qui correspond bien à l'expression annoncée plus haut (56), toute la difficulté étant alors de préciser la valeur du coefficient  $k$ .

On donne généralement à cette expression une forme issue de la formule de CHEZY, établie à partir d'observations en rivière :

$$V = C \sqrt{H \frac{\partial \zeta}{\partial x}}$$

$C$  : coefficient de Chézy

L'équilibre entre force motrice et force de résistance s'écrit :

$$\tau_f = \rho g H \frac{\partial \zeta}{\partial x} = k V^2 = k C^2 H \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

et donc

$$\tau_f = \frac{\rho g V^2}{C^2}$$

#### Application numérique

$$C = 60 \Rightarrow \tau_f = 2,8 V^2$$

Une autre expression est également utilisée, l'expression de MANNING-STRICKLER :

$$\tau_f = \rho g V^2 k_n^{-2} H^{-\frac{1}{3}}$$

$k_n$  : coefficient de STRICKLER

$$k_n = C H^{-\frac{1}{6}}$$

Les valeurs numériques de  $k$  (ou de  $C$ , ou de  $k_n$ ) sont assez bien connues pour avoir été mesurées en mer ou en estuaire par de nombreux investigateurs.

On citera les observations de :

BOWDEN - FAIRBAIRN - HUGHES

$$C = 4 V_{1m}^2$$

STERNBERG

$$C = 3 V_{1m}^2$$

CHARNOCK et DRONKERS

$$C = 3,2 V_{max}^2$$

TAYLOR

$$C = 1,8 V^2$$

Une expression de ce coefficient  $k$  peut également être donnée comme application de la loi de RANDTL :

$$v = \frac{V^*}{K} \log \left( \frac{2 + \frac{z}{z_0}}{3} \right) \Rightarrow V \approx \frac{V^*}{K} \log \frac{H}{e z_0}$$

d'où 
$$\tau = \rho \left( \frac{k^2}{\log^2 \frac{H}{z_0}} \right) V^2$$

Une application numérique typique des estuaires ( $H \approx 10$  m. et  $z_0 \approx 0,5$  cm) conduit à :  $\tau = 3,6 V^2$

On constate que quelle que soit la formulation adoptée pour ce coefficient  $k$ , les valeurs numériques sont cohérentes et comprises dans une fourchette assez étroite. On peut donc fixer à priori par des considérations simples (sur la profondeur, les irrégularités de forme du fond, sa nature, etc....) des valeurs approximatives pour ce coefficient qui seront ensuite ajustées par essais successifs jusqu'à obtention d'une solution satisfaisante.

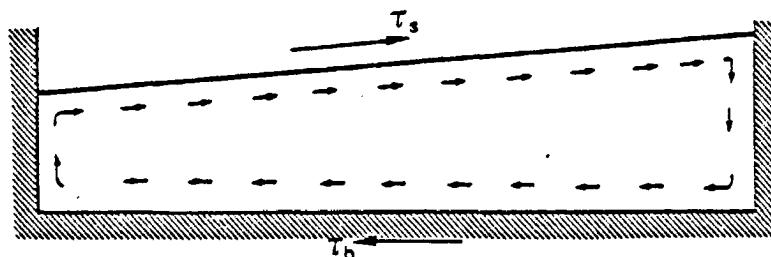
Signalons également que semblant suivre en cela HEAPS (1967) certains auteurs tels NIHOUL et RONDAY (1975) ajoutent à l'effort exercé sur le fond par le déplacement de l'eau, une fraction de l'effort exercé en surface par le vent, qui se transmettrait ainsi partiellement à travers l'écoulement :

$$\tau_f = k V^2 - m \tau_s$$

où  $m$ , de l'ordre de 0,1 à 0,5 dépend de la profondeur.

Ceci paraît effectivement justifié dans le cas où le frottement sur le fond est exprimé en fonction de la moyenne des vitesses sur la verticale, et où la profondeur est faible (en rapport à la profondeur d'Ekman). Dans ce cas, l'action du vent provoque un courant de retour près du fond, qui modifie la vitesse locale sans modifier la moyenne intégrée sur la hauteur (en première approximation), d'où la nécessité pour en tenir compte d'ajouter ce terme supplémentaire.

Figure 11 :



## B - CONTRAINTE A LA PAROI (SCHEMATISATION UNIDIMENSIONNELLE)

Dans le cas des écoulements qui nous concernent ici, la largeur de la veine d'eau (quelques centaines de mètres à quelques kilomètres) étant très supérieure à la dimension verticale (quelques mètres), la plus grande part de la contrainte exercée par les parois sera attribuable au frottement sur le fond, plus que sur les berges. L'expression générale du frottement pour les écoulements en plan horizontal sera donc également utilisée pour les écoulements unidimensionnels, on a d'ailleurs signalé plus haut que certaines expressions du frottement étaient en fait issues d'observations en rivière. On emploiera également les formules de CHEZY ou de MANNING-STRICKLER, en faisant intervenir le rayon hydraulique (équation 53) et non plus la hauteur d'eau.

Soit  $Fr$  la force de résistance, par unité de masse :

$$Fr = \frac{g |U|U}{C^2 R_H} \quad \text{formulation de CHEZY}$$

$$Fr = \frac{g |U|U}{k_s^2 R_H^{4/3}} \quad \text{formulation de MANNING-STRICKLER}$$

$R_H$  : rayon hydraulique

$$R_H = \frac{S}{P} \quad \begin{array}{l} \text{section d'écoulement} \\ \text{périmètre mouillé} \end{array}$$

Dans ce type d'écoulement, les coefficients de frottement sont susceptibles de variations plus considérables que pour les zones larges, selon la forme des sections, la nature du fond, les irrégularités de forme des berges (épis, enrochements, dunes hydrauliques, etc...) ou la hauteur d'eau notamment.

Ces coefficients peuvent être déterminés assez simplement à partir d'observations en nature, et résolutions des équations hydrodynamiques (51 - 54) en sens inverse de celui qui nous intéressera plus loin. Deux procédés permettent d'effectuer ce calcul.

. Le premier suppose la mesure (en fonction du temps) de la vitesse et des niveaux en deux ou trois points d'abscisse différente. On

calcule ainsi les termes  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial t}$

d'où par résolution de l'équation 51 (ou de 53 si on a également mesuré  $\rho(x)$ ) les valeurs numériques de la fonction  $\xi(\xi, u)$

Cette méthode, en théorie très simple, a le désavantage de conduire à des expériences en nature toujours aléatoires et couteuses, et sur un plan plus fondamental de raisonner sur des valeurs locales de la vitesse  $u$ , et non sur des moyennes dans la section d'écoulement  $U$ . Le passage de l'une à l'autre de ces grandeurs, peut conduire dans certaines conditions expérimentales à des erreurs importantes.

. Le second procédé utilise la méthode des cubatures, ce qui permet en résolvant l'équation de continuité (54) de s'affranchir de la mesure des courants et de donner accès directement à la vitesse intégrée  $V$ .

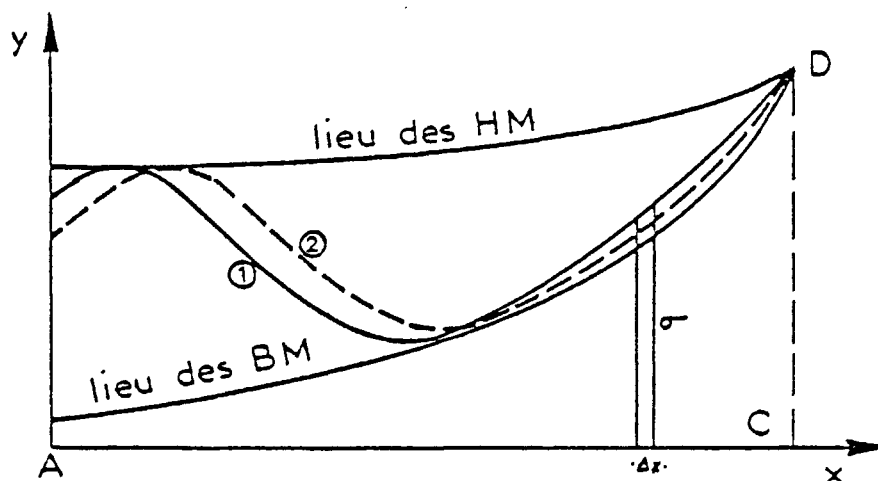


Figure 12

Soit une coupe "verticale—longitudinale" d'un estuaire (figure ci-avant) et la position de la surface libre à deux instants consécutifs.

L'application de l'équation de continuité à une tranche d'eau de section  $\sigma$  et d'épaisseur  $\Delta x$ , permet de connaître la différence de débit entre chacune des faces de la tranche d'eau considérée, pourvu que soit connue la courbe  $\sigma = f(\eta)$ . Celle-ci se déduit des relevés des sondages.

$$U_x^t \approx U_{x+\Delta x}^t - \frac{\Delta x}{\Delta t} \left( \frac{\sigma_x^{t+\Delta t}}{\sigma_x^t} - 1 \right)$$

Ce même calcul peut être effectué à la limite de propagation de la marée dynamique où la vitesse est connue par mesure du débit de la rivière, puis répété de proche en proche en descendant l'estuaire. On détermine ainsi les courants en tout point, puis par résolution de l'équation 51 (à chaque instant) le terme de frottement qui était le but de ces calculs. On constate alors que ce coefficient n'est pas constant, ce qui révèle l'inexactitude grossière de la paramétrisation habituelle de la fonction de frottement.

Cette technique a été appliquée à l'estuaire de la Loire par MAUVAIS (1973) qui par analyse statistique en avait ensuite déduit une relation empirique entre le coefficient de CHEZY et les caractéristiques géométriques de l'estuaire :

$$C = C_0(z) H^{-0,74} B^{-0,23} \left( \frac{e(H)}{H} \right)^{0,54} \left( \frac{\partial B}{\partial x} \right)^{0,03} \left( \frac{e(B)}{B} \right)^{0,024}$$

$e()$ : écart type

Une manière simple et rapide d'exploiter les résultats des calculs précédents (première ou deuxième méthode) pour calculer le coefficient de frottement, est de se situer à un instant où les dérivées spatiales et temporelles de la vitesse sont très faibles. A cet instant, généralement situé aux environs de la mi-jusant, on considèrera que le fleuve est en régime permanent et que la force de frottement équilibre le terme de gravité, d'où :



$$\mathcal{E} = \frac{U}{\left(R_w \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{1/2}}$$

$$k_n = \frac{U}{R_w^{2/3} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{1/2}}$$

### C - CONTRAINTE A LA SURFACE

La contrainte exercée à la partie supérieure de l'écoulement est généralement exprimée d'une manière très semblable à ce qui vient d'être exposé pour la contrainte sur le fond, par une fonction de la vitesse. Toutefois, le principe de continuité imposant que les cisaillements mer-air et air-mer soient identiques, on s'intéressera à la structure verticale de la vitesse du vent près de la surface de l'eau, et non à la vitesse de l'eau.

La même formule de PRANDTL est généralement vérifiée :

$$u(z) = \frac{u^*(z)}{K} \log \frac{z}{z_0}$$

$$\tau_s = \rho_a u^{*2}$$

$u, v$  : vitesse du vent

$z_0$  : longueur de rugosité de la surface

$\rho_a$  : masse volumique de l'air

Cette dernière relation devrait permettre de calculer la tension de frottement à la surface en connaissant seulement la vitesse du vent à une seule cote, pour peu que soit connue la valeur de  $z_0$ . Or, à l'évidence ce terme fait intervenir des paramètres tels que la hauteur des vagues, leur cambrure, probablement la hauteur d'eau et la température, etc... De nombreuses expériences ont eu lieu à ce sujet pour préciser cette relation que l'on écrit généralement sous la forme :

$$\tau_s = \rho_a C_D u^2$$

où  $u$  est la vitesse du vent à 10 m de la surface de l'eau (hauteur approximative des anémomètres des navires).

Il n'est pas surprenant, puisque l'agitation de la surface est fonction de la vitesse du vent, que le terme  $C_D$  (c'est-à-dire en fait  $z_0$ ), soit lui-même fonction de la vitesse du vent.

WILSON (1960) a compilé de nombreux résultats de mesure de  $C_D$  qu'il a publié sous la forme de la table 1. Il en déduit les valeurs moyennes suivantes :

$$C_D = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ pour des vents faibles ( } U < 15 \text{ m/s)}$$

et

$$C_D = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ pour des vents forts ( } U > 25 \text{ m/s)}$$

Dans une brève revue bibliographique, RONDAY (1973) cite également les travaux de :

HASSE (1968)

$$C_D = 1,21 \cdot 10^{-3}$$

SMITH (1967, 1970, 1974)

$$C_D = \begin{cases} 1,03 \cdot 10^{-3} \\ 1,35 \cdot 10^{-3} \\ 1,20 \cdot 10^{-3} \end{cases}$$

D'autres relations plus complexes permettent de mieux ajuster la courbe empirique aux données expérimentales, c'est le cas de formules paraboliques utilisées par KEULEGAN, VAN DORN ou CLAYTON (in WILSON, 1960) qui ne seront pas utilisées ici :

$$\tau = \rho_a (A + B U + C U^2)$$

Il apparaît critiquable que les formules précédentes, sans doute adaptées à la mer ouverte, ne fassent pas intervenir la vitesse du courant. Il est pourtant parfaitement connu que l'état de la surface de la mer est fortement dépendant de la direction relative du vent et du courant. Dans le cadre de ce travail, nous avons tenté de rendre compte, au moins partiellement de ce phénomène en considérant la vitesse relative du vent par rapport à celle du courant, soit :

$$\tau_a = \rho_a C_D \left( (u - v)^2 + (v - v)^2 \right)$$

SURFACE WIND-STRESS MEASUREMENTS AND DERIVED STRESS COEFFICIENTS,  $C_d$

Authority	Experimental Locals	Method of Determination	Derived $C_d$ ( $\times 10^{-3}$ )	Range of Wind Speed $U_{10m}$ (mph)	Result adjusted to $U^2$ Law for light winds		Result adjusted to $U^2$ Law for strong winds	
					$C_d$ ( $\times 10^{-3}$ )	$U_{10m}$ (mph)	$C_d$ ( $\times 10^{-3}$ )	$U_{10m}$ (mph)
1. Colding [1876]	Baltic Sea	Water level	2.6	20-70	-	-	2.6	20-70
2. Ekman [1905]	Baltic Sea	Water level	2.5	-	-	-	2.5	strong
3. Showman [1923]	Baltic Sea	Wind profile	0.9-2.6	<7	0.9	7	-	-
4. Rossby and Montgomery [1935]	Buzzards Bay, Mass.	Wind profile	0.4-1.2	4-14	0.8	<10	-	-
5. Palmén & Laurila [1938]	Gulf of Bothnia	Water level	2.4-3.0	22-40	-	-	2.4	>45
6. Bruus [1940]		(cf. Roll [1955]) Wind profile	2.3-1.5 0.7-2.2	4-14 11-20	1.9	10	2.2	20
7. Hellstrom [1941]	Various lakes, seas	Water level	7.3U <sup>0.82</sup> (U in cm/s)	0-70	2.1	10	1.5	50
8. Overturn, et. al. [1942]		Review-analysis	2.6	mod- strong	-	-	2.5	mod- strong
9. Schalkwijk [1947]	North Sea	Water level	2.6	isset-up formula	-	-	2.6	strong
10. Roll [1948]	North Sea tidal flats	Wind profile	1.1-0.9	7-22	1.1	10	-	-
11. Hela [1948]	Baltic Sea	(cf. Francis [1954]) Wind profile	2.1-1.8	25-52	-	-	1.8	45
12. Neumann [1948]	Gulf of Sornia, etc.	Review-analysis	90 U <sup>0.7</sup> (U in cm/s)	various	4.2	10	2.0	45
13. Durs [1950]	Laboratory	Wind profile	0.3-0.8	5-22	0.4	light	-	-
14. Francis [1951]	Laboratory	Water level	0.5-2.3	0-70	0.6	10	2.5	45
15. Kuusjari [1951]	Laboratory	Water level	1.1-2.9	0-56	1.1	light	2.6	strong
16. Langner [1951]		Analysis	2.6	strong	-	-	2.5	strong
17. Seville [1952]	L. Choctohoc, Fla.	Water level	2.5	strong	-	-	2.5	strong
18. Sheppard, Charcock and Francis [1952]	N. Atlantic	Geostrophic wind	2.0	10-35	2.0	light	2.0	35
19. Johnson and Rice [1952]	Laboratory	Water level	1.7-3.0	52-68	-	-	2.5	60
20. Sheppard & Omar [1952]	N. Atlantic	Geostrophic wind	0.3-1.8	7-28	0.5	10	-	-
21. van Dorn [1953]	Outdoor pond	Water level	1.0-2.9	0-30	1.0	10	2.9	strong
22. Reid & Clayton [1953]	Gulf of Mexico	Water level	1.9-6.2	14-30	1.9	15	4.0	30
23. Kuusjari [1953]	Lake Erie	Water level	2.5	19-46	-	-	2.5	>30
24. Harman, Mizusawa and Moss [1953]	Laboratory	Wind profile	0.7-1.6	15-52	0.5	15	1.5	45
25. Hellstrom [1953]	Ringsjoberg Fjord	Water level	7.7 U <sup>0.82</sup>	0-70	2.3	10	1.8	45
26. Francis [1954]		Review	0.0013U (U in cm/s)	various	0.6	10	2.6	45
27. Kvervold [1954]		Review-analysis	2.2	any	2.2	light	2.2	strong
28. Roll [1955]		Review	0.8-2.0	3-33	0.5	10	2.5	45
29. Sibul [1955]	Laboratory	Wind profile	0.6 U <sup>0.82</sup> (U in ft/sec)	12-43	1.1	10	1.5	45
30. Hay [1955]	(at) Hemides	Wind profile	1.6-2.4	15-28	1.6	15	2.6	45
31. Charcock [1955]		Analysis	0.3-1.2	8-25	0.9	light	1.6	45
32. Caroyannas [1955]	Lough Neagh, Ireland	Water level	3.5-3.2	2-25	1.9	light	-	-
33. Neumann [1956]		Review	90 U <sup>0.7</sup> (U in cm/s)	various	4.2	10	2.0	45
34. Moore & Laird [1956]	Laboratory	Shear meas & wind profile	8.9 U <sup>0.75</sup> (U in ft. sec)	15-52	3.4	15	2.1	45
35. Charcock, Francis and Sheppard [1956]	Virgin Islands	Geostrophic wind	1.2	10	1.2	10	-	-
36. Clayton [1956]	Gulf of Mexico	Water level	1.7 (1-10 <sup>3</sup> U <sup>0.82</sup> ) (U in cm/s)	0-26	(6.2)	10	2.9	45
37. Deacon, Sheppard, and Webb [1956]	Port Phillip Bay, Australia	Wind profile	1.0-2.4	10-32	1.0	light	2.4	>25
38. Hunt [1956]	Lake Hefner, Okla.	Wind Profile	4.0 [1 - 45 - 16.8 (2 - 0.2)U] <sup>0.82</sup> (U in cm/sec)	-	-	-	3.3	45 [(2 - 0.2)U]
39. Charcock & Crease [1957]		Review	2.5	strong	-	-	2.5	strong
40. Farrer [1957]	L. Oksechooc, Fla.	Wind profile	1.9	strong	-	-	1.9	strong
41. Neuman [1958]		Review-analysis	3.4	strong	-	-	3.4	strong
42. Hunt [1959]	L. Hefner, Okla.	Wind profile	3.2 [1 - 45 - 16.8 (2 - 0.2)U] <sup>0.82</sup> (U in cm/sec)	-	-	-	2.9	45 [(2 - 0.2)U]
43. Francis [1959]		Review	1.0-2.4	10-70	1.0	10	2.4	>30
44. Fischer [1959]	North Sea	Analysis	(storm surge calculations)	-	-	-	1.5	45
45. Hayami & Kumashi [1959]	Laboratory	Wind profile	1.1-6.2	5-48	1.2	10	2.1	45
46. Brocas [1959]	North & Baltic Seas	Wind profile	1.5	5-32	1.5	light	1.5	moderate
47. Priestley [1959]		Review	0.9-2.4	10-35	0.9	10	2.4	>25
Average of 1 to 47					1.49	light	1.37	strong
Standard Deviation					0.43		0.56	

\* Calculated from modified Karman-Prandtl Equation.  
 † Computed from geostrophic-draw wind relationship.

— Results adjusted to winds at 10 m level by Karman-Prandtl Equation  
 — This result includes temperature of air  $t_a$  (°C) & of sea,  $t_s$ , according to which instability induces lower wind stress  $\tau$  (°)

Table 1 ( d'après WILSON - 1960 )

## D - COEFFICIENTS D'ÉCHANGE

On a exposé plus haut (chapitre II) que partant d'un système d'équations insoluble de manière analytique, on était amené à définir successivement de nouveaux coefficients dits de diffusion turbulente (en éliminant les composantes à haute fréquence), puis de dispersion au fur et à mesure de la simplification de système initial par intégration sur les coordonnées spatiales.

Il semble impossible de donner une expression exacte à ces coefficients (masse et quantité de mouvement) puisque leur définition les rend unique en traduisant des caractéristiques physiques propres à chaque secteur géographique. Nous considérerons ici le cas d'écoulements par faible profondeur, pour lesquels la turbulence est essentiellement générée par frottement à la paroi. Dans ce cas, l'échelle des tourbillons turbulents est limitée dans le sens vertical, par la hauteur d'eau, de sorte que se fondant sur les considérations d'analyse dimensionnelle, on exprimera ces coefficients d'échange turbulent au moyen de la vitesse de frottement  $V^*$  déjà définie, et de la hauteur d'eau  $H$ .

### Mélange vertical

Par rapprochement de la définition de la vitesse de frottement (théorie de PRANDTL) et de celle des coefficients de mélange (BOUSSINESQ) :

$$u = \frac{V^*}{K} \operatorname{Log} \left( \frac{z + z_0}{z_0} \right)$$

$$\tau = \rho N_z \frac{du}{dz} \approx \tau_0 \left( 1 - \frac{z}{H} \right)$$

il vient :

$$N_z = K z V^* \left( 1 - \frac{z}{H} \right)$$

En dehors de toute stratification, une fluctuation de concentration est proportionnelle à une fluctuation de vitesse et donc le coefficient de diffusion turbulente pour la matière est égal au précédent ;

$$K_z = N_z$$

Cette distribution verticale est parabolique, de valeur extrême  $N_{z\text{maxi}} = 0,1 H V^*$ , et de valeur moyenne :  $N_{z\text{moy}} = 0,067 H V^*$  ; relation assez bien vérifiée expérimentalement.

Une autre relation peut être proposée à l'aide de la théorie de ZAGUSTIN (in SALOMON, 1972) :

$$N_z = K_z = \frac{KH}{3} V^* \sqrt{1 - \frac{z}{H} \left( 1 - \left( 1 - \frac{z}{H} \right)^3 \right)}$$

Cette expression conduit à des valeurs numériques proches de la précédente ; le maximum est obtenu à  $z = 0,477 H$  et vaut  $N_{z\text{maxi}} = 0,083 H V^*$ .

### Effet d'une stratification

En présence d'un gradient vertical de densité, la stabilité du milieu s'oppose aux échanges verticaux de masse et de quantité de mouvement. Les coefficients  $N_z$  et  $K_z$  ont alors des valeurs moindres que précédemment, mais dans des proportions inégales. On attribue à la capacité des fluctuations de pression de transmettre un flux de moment mais non de masse, le fait que  $N_z$  devienne alors supérieur à  $K_z$ .

De manière analogue au raisonnement que l'on effectue à propos des sédiments transportés en suspension, en multipliant le coefficient de dispersion de la quantité de mouvement par un terme  $\beta$  ( $\beta < 1$ ) qui décroît avec la charge de l'écoulement, et la taille des sédiments en suspension, on corrigera les valeurs précédentes de  $N_z$  et de  $K_z$  par un facteur multiplicatif faisant intervenir le quotient du taux de variation d'énergie potentielle par celui de la dissipation d'énergie turbulente : Rf.

$$Rf = \frac{g \overline{\rho' w'}}{\rho \overline{u' w'} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}} < 1$$

Nombre de Richardson  
pour le flux

ou encore le nombre de Richardson, sous sa forme habituelle :

$$Ri = \frac{g \frac{\partial \rho}{\partial z}}{\rho \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2} = \frac{N_z}{K_z} Rf$$

On utilise le plus souvent des relations de la forme :

$$N_z = N_0 + N_1 (1 + a Ri)^b$$

$$K_z = K_0 + K_1 (1 + a' Ri)^{b'}$$

Les valeurs numériques des paramètres intervenant dans ces expressions seront discutées plus loin (paragraphe IV), citons seulement l'ordre de grandeur des coefficients qui expriment l'effet de la stratification :

$$a \approx 7 \quad b \approx -0,25$$

$$a' \approx 1 \quad b' \approx -1,75$$

Remarque : Le nombre de Richardson, tel qu'il est défini plus haut est parfois difficile à appréhender par la mesure, puisque faisant intervenir les gradients verticaux de la masse volumique et de la vitesse. Par ailleurs, il suppose que l'énergie turbulente est produite et dissipée simultanément au même endroit, supposition difficile à adopter, notamment lorsque le gradient vertical de vitesse est nul, et que pourtant le milieu demeure turbulent. Pour ces raisons, on lui préfère souvent la notion de "nombre de Richardson global", qui se réfère aux caractéristiques moyennes de l'écoulement :

$$Ri = g \frac{H \Delta \rho}{U^2 \rho}$$

$$U = \frac{1}{H} \int_{-h}^3 u dz \quad \Delta \rho = \rho(-2) - \rho(3)$$

Cette dernière formulation présente en outre l'intérêt vis à vis de la modélisation numérique de ne pas avoir l'effet déstabilisant de la précédente, du fait du rapport de gradients verticaux, toujours délicats à calculer avec précision.

Mélange horizontal

On se réfère généralement aux travaux de Elder, qui en étendant la théorie de Taylor établie à propos de l'écoulement dans un tube ( $K = 10.R.V^*$ ) aux écoulements uniformes permanents et infinis en a déduit la relation suivante, applicable dans le sens du courant :

$$K = 5,93 H V^*$$

Cette formule s'écrit encore :

$$K = 5,93 \frac{HUVg}{c}$$

Dans la direction perpendiculaire au courant la dispersion est plus faible :

$$K = 0,23 HV^* = 0,23 \frac{HUVg}{c}$$

En utilisant des traceurs dans des rivières sans marée, Fisher a mesuré des coefficients plus importants que les précédents, dans un rapport de 2 à 3, ce qu'il attribue aux gradients horizontaux de vitesse.

Les phénomènes de marée ayant une période beaucoup plus longue que les processus turbulents, on généralise habituellement les résultats précédents aux estuaires. HOLLEY, HARLEMAN et FISHER ont montré que la dispersion dans ce cas se liait au rapport  $T/T_0$  où  $T$  est la période de la marée, et  $T_0$  une période caractéristique du mélange, perpendiculairement au courant. Les dimensions latérales des estuaires étant généralement très supérieures aux dimensions verticales, la période  $T_0$  caractéristique du mélange latéral est très supérieure à celle qui concerne le transport vertical.

Ils citent par exemple, le cas du DELAWARE :

$$\frac{T}{T_0} \approx 0,05$$

*latéral*

$$\frac{T}{T_0} \approx 15$$

*vertical*



Ce qui démontrerait que les gradients latéraux de la vitesse ont un effet négligeable devant les gradients verticaux, et que en dehors des estuaires dont les dimensions latérales sont très réduites, la relation de Elder serait encore applicable en utilisant la valeur arithmétique moyenne de la vitesse (soit  $2/\pi$  fois la vitesse maximum). Par ailleurs, conformément aux expériences de Fisher, on introduit l'effet des irrégularités de l'estuaire en multipliant la formule de Elder par un facteur d'environ 3.

$$\text{Soit : } K_x = \frac{35 H U_{max}}{c} \quad (59)$$

Application à la Seine (secteur large du Havre) :

$$\begin{array}{l|l} U = 1 \text{ m/s} & \\ H = 15 \text{ m} & \Rightarrow K_x = 6,6 \text{ m}^2/\text{s} \\ C = 80 \text{ MKS} & \end{array}$$

Les relations précédentes ne sauraient fournir plus qu'un ordre de grandeur des coefficients de mélange. Ceux-ci étant fonction d'un grand nombre de facteurs tels que la morphologie de la côte et du fond, les caractéristiques des courants, des sédiments, de la stratification, de l'action du vent, des vagues, etc..., leurs valeurs numériques ne peuvent être généralisées simplement, sans avoir recours à la mesure. Mais ici encore il faudra être très précis quant à l'analyse qui sera faite des observations. On a vu en effet que selon les hypothèses faites, qui se traduiront par une simplification du système de NAVIER-STOKES, les coefficients de mélange (de dispersion) qui s'en déduisent sont susceptibles d'être très différents.

Pour illustrer ce propos qui découle de la définition de ces coefficients, considérons une expérience de marquage d'un volume d'eau dans un estuaire étroit mais présentant une aire latérale d'inondation (voir page suivante).

L'étalement considérable de la tache lors du jusant, par vidage progressif de la zone latérale, se traduira dans une interprétation unidimensionnelle, par une très forte valeur du coefficient de dispersion longitudinal. Une interprétation par un schéma à deux dimensions aurait conduit à des valeurs plus faibles, pour la même expérience.

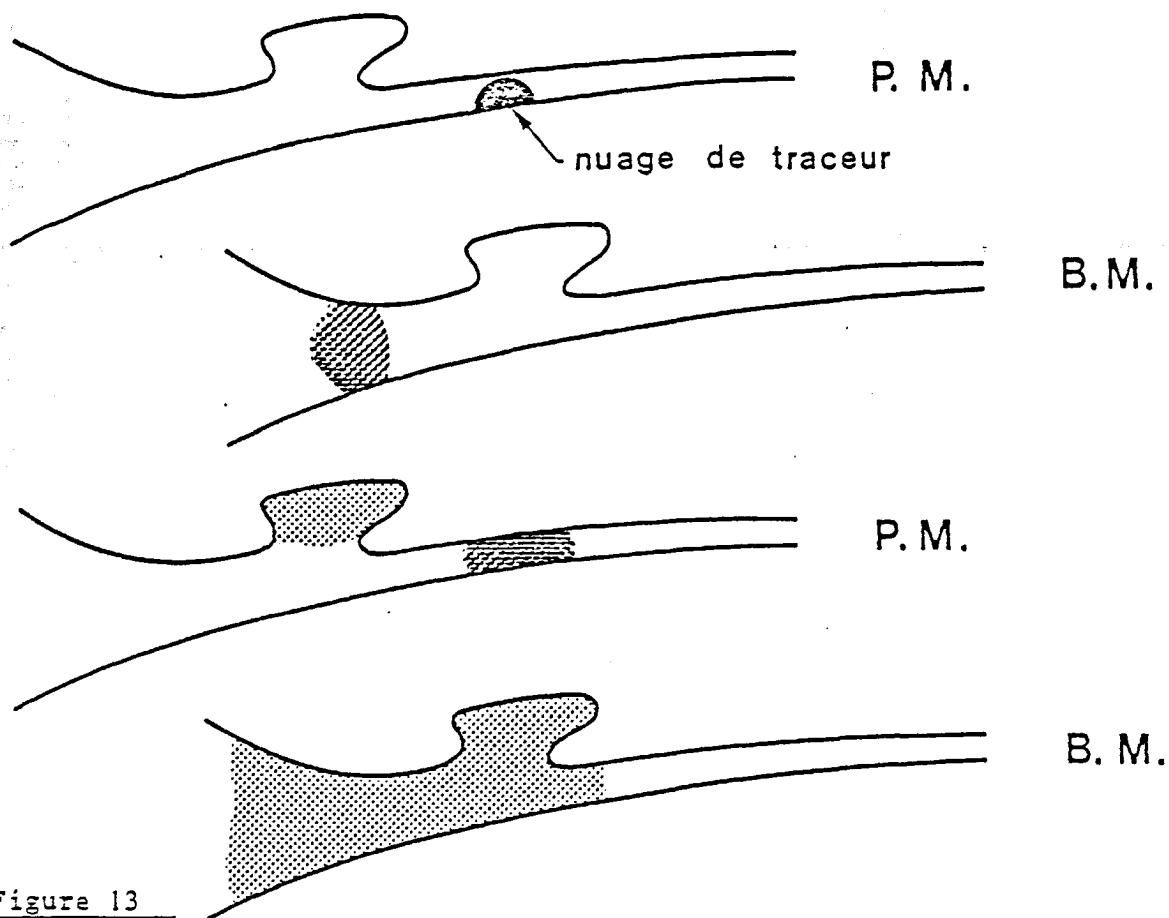


Figure 13

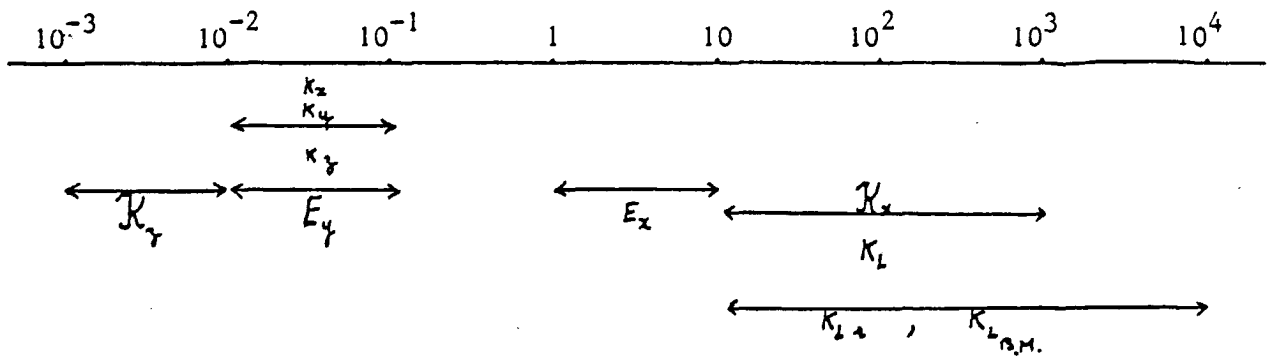
### Coefficients de mélange relatifs à la simulation à long terme

Au fur et à mesure des simplifications successives des équations de départ, par intégrations sur l'espace et le temps, la justification théorique de ces coefficients devient de plus en plus délicate, voire impossible pour l'équation (57) d'advection-dispersion appliquée à une phase particulière de la marée. On se contentera donc ici de donner l'ordre de grandeur de ces coefficients, que seule la comparaison des résultats de calcul et des observations en nature semble pouvoir indiquer.

$$10 < \frac{\kappa_{L n}}{\kappa_{L 0 M}} < 10^4 \text{ m}^2/\text{s}$$

### Conclusion

Pour récapituler les ordres de grandeur de tous ces coefficients on reprendra à O'CONNOR et Mc DOWELL (1977), le classement approximatif suivant :



E - MESURE DU COEFFICIENT DE DISPERSION HORIZONTAL DANS  
L'ESTUAIRE DE LA SEINE

Ainsi qu'il a été démontré plus haut, l'approche théorique de la définition des coefficients de diffusion et de dispersion est embarrassante et ne permet pas leur détermination analytique précise ; on a donc généralement recours à la mesure en nature. De telles mesures se sont multipliées depuis quelques années, le plus souvent par observations de l'étalement de taches marquées par un indicateur coloré ou radioactif. Des synthèses ont ainsi été publiées qui permettent une connaissance à priori de l'ordre de grandeur de ces coefficients (OKUBO, 1963).

Les quelques valeurs qui suivent sont issues de la bibliographie (Ministère de l'Équipement, 1975).

Méditerranée	Marseille (Cortiou)	21 mars 1973	$K_y = 0,028 \text{ m}^2/\text{s}$	SOGREAH
Méditerranée	Marseille (Cortiou)	19 juillet 1973	$K_y = 0,016 \text{ m}^2/\text{s}$	SOGREAH
Manche	Cap de la Hague	11-12 mai 1964	$= 0,3 \text{ à } 6 \text{ m}^2/\text{s}$	HYACINTHE et CEA
Pacifique	Japon (baie de Jaeri)	févr. 1962 à déc. 1963	$= 0,02 \text{ à } 0,2 \text{ m}^2/\text{s}$	FUKUDA - ITOH et SAKAGISHI
Pacifique	Japon (Ariake bay)	24 mars 1966	$K_x = 0,05 \text{ à } 0,57 \text{ m}^2/\text{s}$ $K_y = 0,03 \text{ à } 18 \text{ m}^2/\text{s}$	IWAI, INOUE et HIGUCHI
Atlantique	Cap Kennedy	1965-1966	$K_x = K_y = 0,04 \text{ m}^2/\text{s}$ $K_z = 1,3 \text{ à } 19 \text{ cm}^2/\text{s}$	OKUBO
Mer du Nord	Dunwich (NE de Londres)	1973	$K_y = 0,08 \text{ à } 0,12 \text{ m}^2/\text{s}$	Université de WALLINGFORD

Toutefois, ces coefficients reflètent des caractéristiques locales (hydrodynamique, morphologie, stratification, météorologie, etc...) qui ne sont évidemment pas transposables à d'autres secteurs, une mesure sur le site concerné et pour des conditions fluviales, océaniques, et météorologiques bien définies s'avère indispensable à la connaissance précise de ces termes.

Trois expériences de marquage par la rhodamine ont donc été effectuées dans l'estuaire de la Seine entre le 15 et le 22 juin 1978, par

TABLEAU 2 : CONDITIONS EXPERIMENTALES

N° D'EXPERIENCE		I	II	III
DATE		15-16 JUIN 1978	20 JUIN	22 JUIN
COORDONNEES GEOGRAPHIQUES DU POINT DE REJET		49°28'50" N 2'30" E	49°22'40" N 3' E	que I
HEURE D'IMMERSION		8h 5mn 30s	1h 41mn 50s	2h 39mn
DUREE de L'IMMERSION		1mn 40s	2mn 10s	2mn
PROFONDEUR DU POINT D'IMMERSION		1,50 m	1,50 m	1,50 m
DUREE DE L'EXPERIENCE		18 h	20 h	12 h
MASSE DE RHODAMINE IMMERGEE		30 kg	≈ 1 kg	9 kg
COEFFICIENT DE MAREE		48 - 49 - 52	86 - 91 - 96	101 - 103
HEURE DES MAREES AU HAVRE	P.M.	6 h 07 mn	22 h 45 mn	0 h 29 mn
	B.M.	12 h 54 mn	5 h 34 mn	7 h 24 mn
	P.M.	18 h 43 mn	11 h 10 mn	12 h 55 mn
	B.M.	1 h 28 mn	18 h 03 mn	19 h 49 mn
	P.M.	7 h 19 mn	23 h 37 mn	
HEURE DES MAREES A TROUVILLE	P.M.		21 h 50 mn	
	B.M.		5 h 28 mn	
	P.M.		10 h 15 mn	
	B.M.		17 h 55 mn	
	P.M.		22 h 42 mn	
VENT ET ETAT DE LA MER		TEMPS ET MER CALMES	TEMPS ET MER CALMES	VENT FORT ET MER AGITEE

B.M. basse mer

P.M. pleine mer

le Service d'Application des Radio-éléments du C.E.A. Ces expériences réalisées au large de Deauville et du Havre sont décrites en détail dans le rapport C.E.A. N° T13/FT, et ne seront reprises ici que très succinctement :

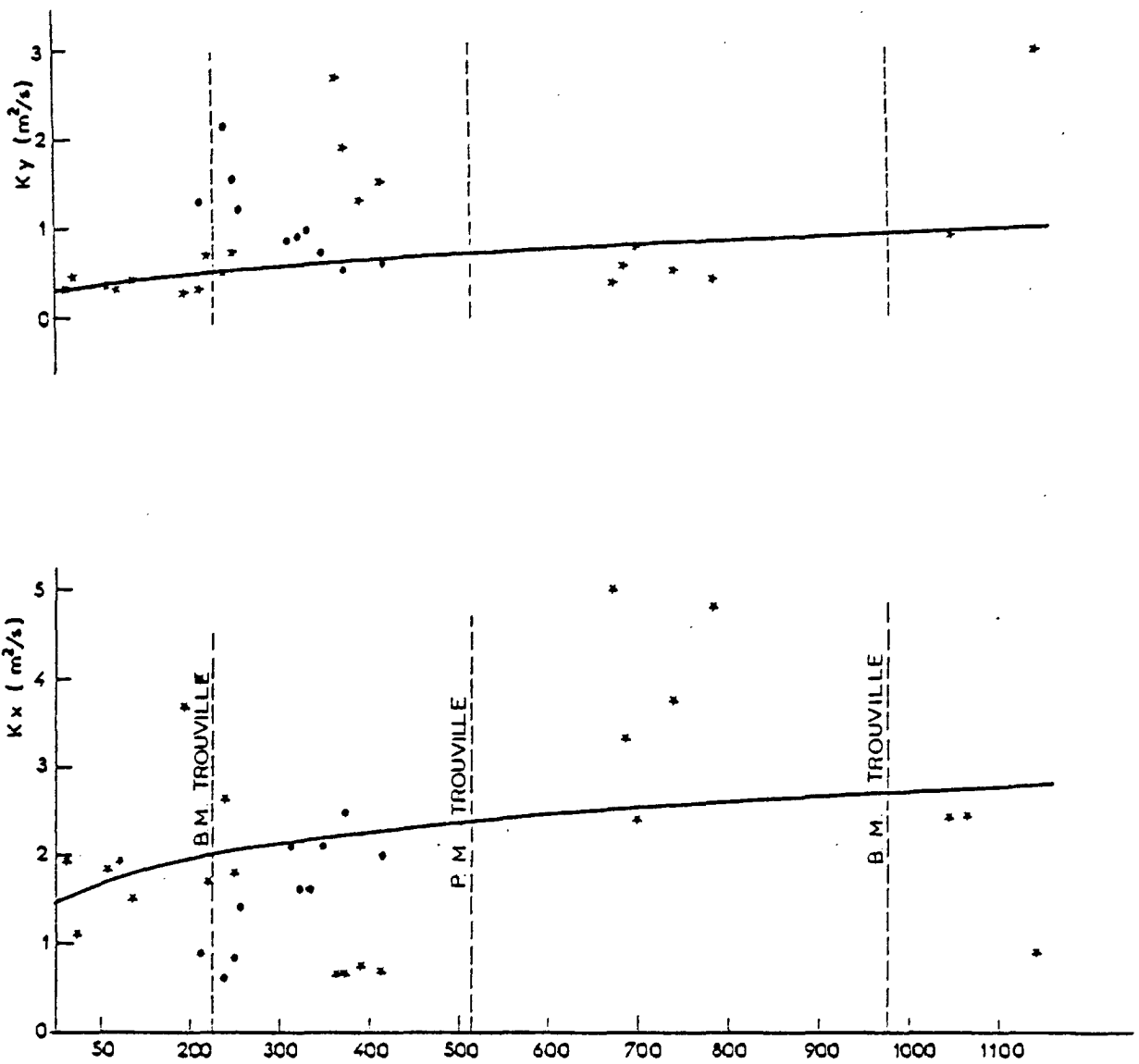
Après une injection considérée instantanée, une embarcation (Vedette Quillebois du P.A.H.) chargée de la détection a traversé le nuage alternativement dans les directions longitudinales et transversales, à vitesse aussi constante que possible (2 m/s). Les analyses en continu par fluorimétrie ont eu lieu à trois immersions différentes, mais les écarts de concentration selon la verticale s'étant révélés importants eu égard au nombre de points de prélèvement, l'interprétation des résultats n'a pu être conduite que dans un schéma de circulation bidimensionnelle en plan horizontal. L'interprétation de ces expériences a donc conduit à déterminer les coefficients notés plus haut  $E_x$  et  $E_y$ . En fait, les courants étant giratoires, ces coefficients seront distingués dans la direction du courant, et dans la direction perpendiculaire et non pas dans des directions figées.

Dans une analyse lagrangienne, (repère animé d'un mouvement identique à celui du centre de gravité du nuage) la solution de l'équation (43) où  $E_x$  et  $E_y$  ne sont considérés que comme dépendant du temps, est alors :

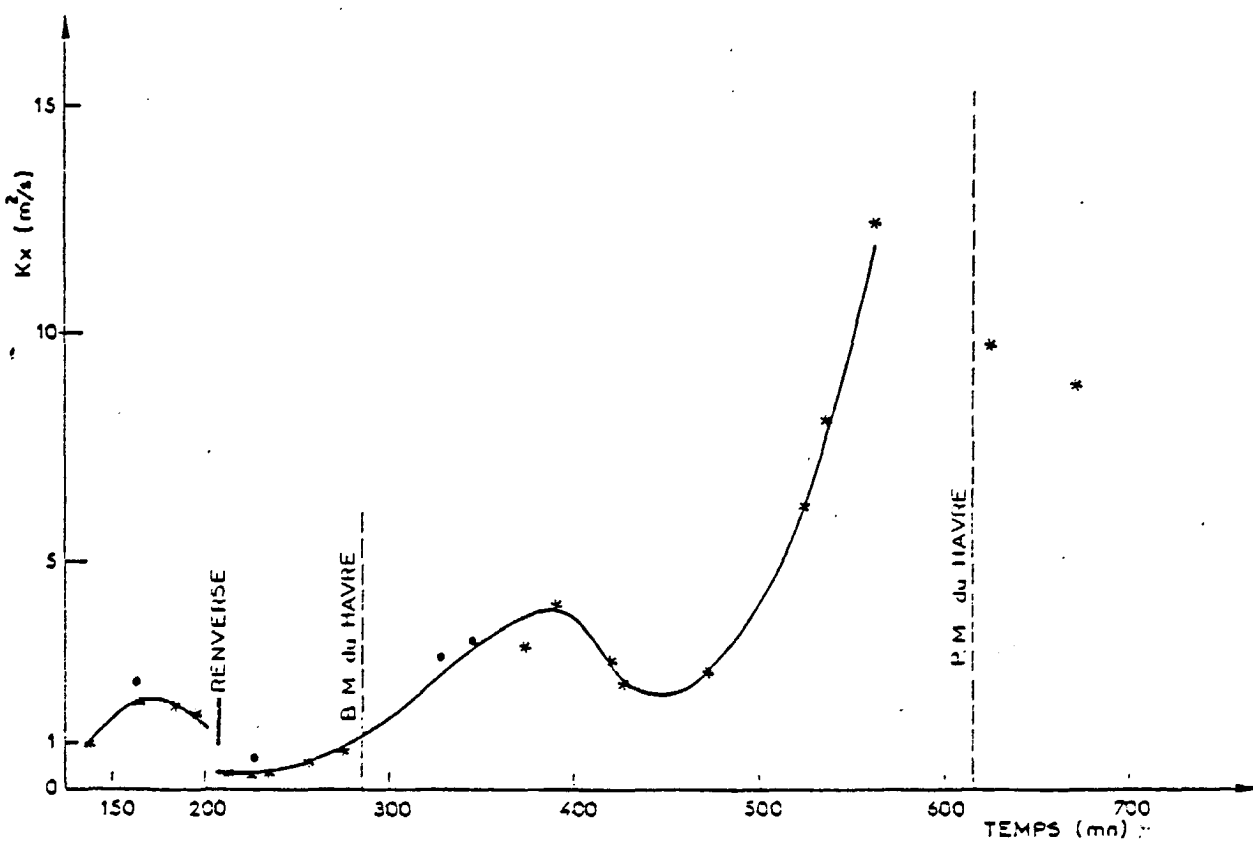
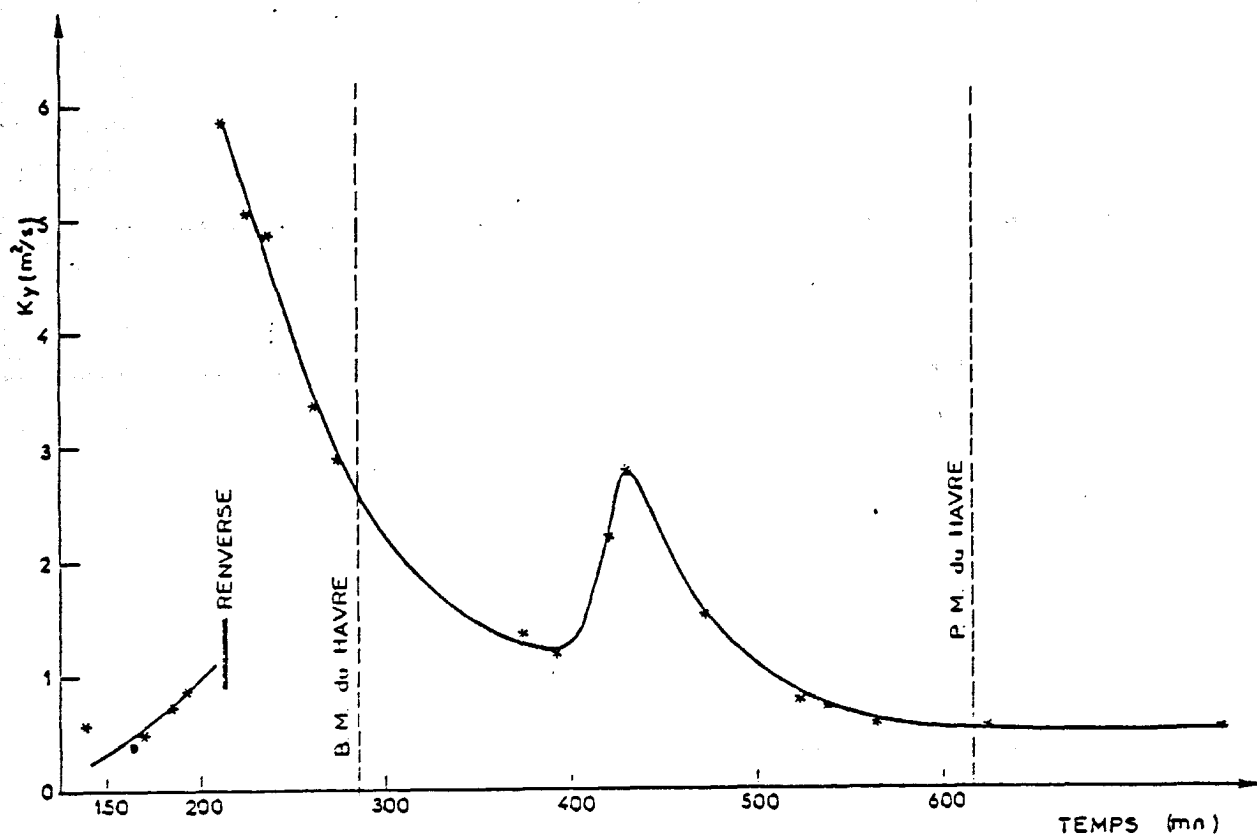
$$C = \frac{M_0}{4\pi t \sqrt{E_x E_y}} e^{-\frac{1}{4t} \left( \frac{x^2}{E_x} + \frac{y^2}{E_y} \right)}$$

L'ajustement des courbes réelles d'égale concentration, à cette solution théorique, au moyen de la concentration au centre de gravité, et de l'écart type ( $E_x = \sqrt{2 E_x t}$ ) permet de déduire les fonctions  $E_x(t)$  et  $E_y(t)$ .

Les points expérimentaux présentés figures 14 à 17 montrent une assez grande dispersion des résultats, avec toutefois pour l'expérience ayant eu lieu au large de Deauville, une croissance assez régulière au cours du temps, c'est-à-dire une augmentation de la taille du nuage et des coefficients d'échange d'ordre de grandeur suivant :



Figures 14 et 15 : Coefficients de dispersion en fonction du temps.  
20 Juin 1978.



Figures 16 et 17 : Coefficients de dispersion en fonction du temps.  
22 Juin 1978.



$$\begin{aligned} E_x &\simeq 2 \text{ à } 3 \text{ m}^2/\text{s} \\ E_y &\simeq 1 \text{ m}^2/\text{s} \end{aligned}$$

L'évolution de ces coefficients au large du Havre en grande Vive Eau, est beaucoup plus irrégulière, avec des valeurs atteignant  $12 \text{ m}^2/\text{s}$  dans le sens longitudinal, et  $6 \text{ m}^2/\text{s}$  dans le sens transversal, les valeurs moyennes se situant aux alentours de 4 et de  $2 \text{ m}^2/\text{s}$  respectivement.

On observera que l'ordre de grandeur fourni par la relation de ELDER est assez bien respecté.

#### IV - MODELES MATHÉMATIQUES DE L'ESTUAIRE DE LA SEINE

(Hydrodynamique, Dispersion, quelques aspects sédimentologiques)

##### A - CHOIX D'UN PROGRAMME DE MODELISATION

Lors de la définition du programme d'étude du S.A.U.M. de l'estuaire de la Seine, des lacunes considérables étaient apparues quant à la connaissance acquise des phénomènes de circulation, de dispersion, ou de sédimentation-érosion. En outre, l'estuaire de la Seine ayant été soumis à des modifications brutales, les études réalisées par le passé apparaissaient susceptibles d'être périmées, et devaient être mises à jour.

Le problème mathématique de la simulation des phénomènes estuariens se situant d'un point de vue mathématique, comme il a été exposé plus haut la première étape de cette étude consistait à définir, compte tenu des moyens informatiques disponibles, les types de modèles qui seraient les mieux appropriés à reproduire les phénomènes naturels mis en cause, pour contribuer à leur compréhension, et apporter des éléments de réponse aux problèmes qui se posent.

##### 1 - Caractéristiques générales du secteur d'étude

###### Disparité verticale

En estuaire, l'eau douce d'origine fluviale, plus légère que l'eau de mer, tend à s'écouler en surface, tandis que l'eau de mer, plus lourde, pénètre dans l'estuaire préférentiellement sur le fond. Ces eaux perdant progressivement leurs caractéristiques initiales par mélange turbulent donnent lieu à des phénomènes complexes, mal connus en Seine, qu'il faudra s'efforcer de reproduire avec un maximum de fidélité. Le degré de stratification des eaux fixe ainsi les limites de l'hypothèse de quasi uniformité verticale, qui sanctionnera la possibilité de reproduire la dynamique de l'estuaire par un modèle "intégré" sur la verticale".

###### Indices de stratification

Un indicateur simple et largement utilisé du degré d'homogénéité verticale des eaux est le rapport  $R_0$  du volume d'eau introduit par la marée durant le flot, au volume total d'eau douce pénétrant dans l'estuaire

pendant la période de la marée.

Ce calcul, effectué au niveau de Honfleur, à partir d'un simple modèle unidimensionnel réalisé au préalable (SALOMON, 1976) indiquait, pour une condition de débit fluvial relativement important de  $675 \text{ m}^3/\text{s}$  (soit 40 % de plus que le débit moyen), les valeurs suivantes :

Coefficient 70	$R_o = 4,2$
Coefficient 105	$R_o = 5,3$

Ces indices classent la Seine à la limite supérieure des estuaires partiellement mélangés.

Un autre indice, le rapport entre l'énergie dissipée par frottement et le gain d'énergie potentielle de l'eau douce au cours de son mélange confirme ce résultat, il vient (SALOMON, 1976) :  $R_e = 250$  ( $Q = 675 \text{ m}^3/\text{s}$ ).

Ceci signifie (IPPEN, 1966) que la variation relative de salinité sur une verticale, au niveau de Honfleur serait d'environ 10 à 15 %. L'estuaire de la Seine apparait donc assez bien mélangé à cet endroit.

Aussi utiles que puissent être ces indices de classification qui permettent à priori de connaître les grands traits de la circulation dans l'estuaire considéré, il est bien certain qu'ils ne peuvent se substituer à la mesure in situ de la structure verticale des salinités et des courants.

#### Observation de la structure verticale des vitesses

Une série de mesures de la structure verticale des courants dans la région de Fatouville (P.K. 350), réalisée par le Laboratoire d'Océanographie Physique de l'Université de Brest (SALOMON, 1976) entre le 18 et le 28 avril 1975, indiquait une structure verticale assez régulière, reflétant peu l'influence des gradients de densité, sinon au voisinage des renverses. Une approximation des profils observés par fonction logarithmique ou puissance, de la cote  $z$ , conduisait aux valeurs suivantes :

$$u = \frac{V^*}{K} \log \frac{z}{z_0} \quad 0,25 < z_0 < 1,6 \text{ cm}$$

$$u = a z^{\alpha^*} \quad 0,2 < \alpha^* < 0,3$$

Malheureusement, des mesures de salinité n'accompagnaient pas ces observations de courant.

Il apparaissait au début des études du S.A.U.M. que dans le secteur habituellement fréquenté par le gradient de salinité (Le Havre - Caudebec) la structure verticale des courants laissait entrevoir une stratification faible et que au-delà vers le large, les courants devaient être assez semblables de la surface au fond.

Cette dernière opinion pourrait être tempérée aujourd'hui, à la lumière des résultats de ces études (mesures de courant, trajectoire de marqueurs colorés, et résultats du modèle), et de la campagne d'étude de la baie de Seine (par le Centre Océanologique de Bretagne) ; il semblerait que le système estuarien de la Seine se situe plus au large que ce qui avait été supposé initialement, et que des circulations résiduelles assez nettement différenciées existent parfois au large du Havre.

Le rapport "Programme d'étude du milieu marin" (SAUM) faisait en 1977, le bilan des connaissances :

« L'oscillation au cours de la marée peut atteindre une vingtaine de kilomètres.

En période de débits fluviaux, élevés cette limite amont de l'intrusion saline semble se situer au P.K. 340 environ. Malgré le caractère incertain de ces limites, qui sont basées sur des données incomplètes on peut penser que la zone soumise à la circulation résiduelle (de densité) si celle-ci se manifeste dans la Seine, s'étend de l'embouchure au P.K. 340 à 320 selon le débit fluvial. La zone du "point nodal", ou zone où les composantes horizontales des vitesses résiduelles au fond convergent ou s'annulent, se situerait donc, si l'on se réfère à ces données, entre les P.K. 320 et 345 environ. Ces estimations sont simplement citées pour fixer les idées, car aucune donnée n'existe en Seine pour cerner les mouvements résiduels d'une façon globale. »

## 2 - Definition des types de modèles envisagés

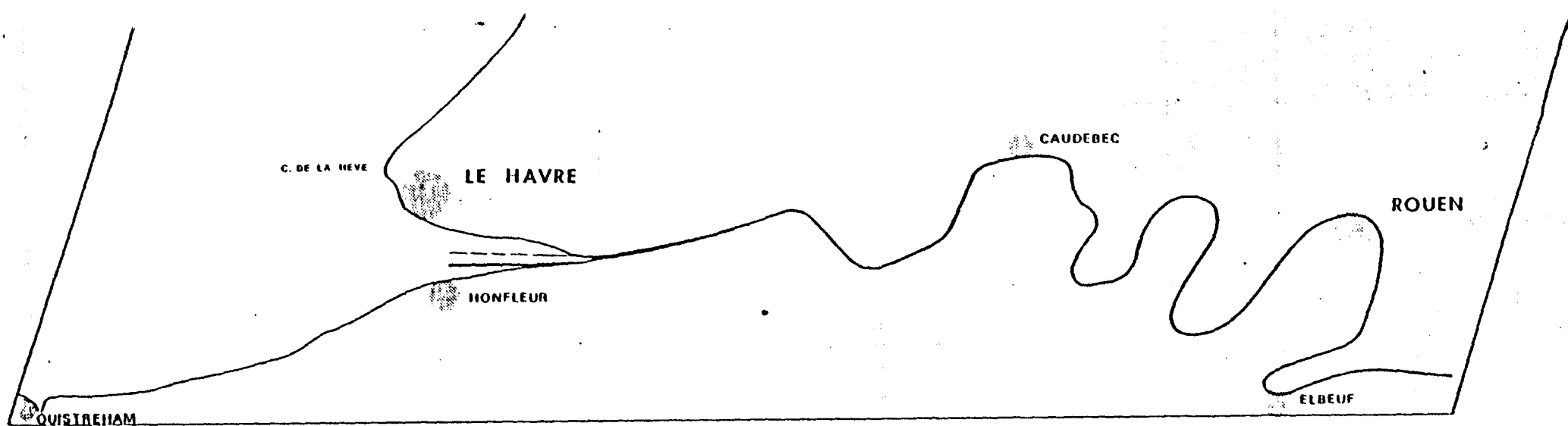
Compte tenu de l'estimation préalable de la circulation dans l'estuaire et des outils de modélisation existant à l'heure actuelle, il a été décidé de représenter l'estuaire par 3 modèles de type différent selon les secteurs étudiés, à savoir :

1 - A l'amont du P.K. 305 (soit environ 15 km à l'amont de la limite de pénétration saline), un modèle unidimensionnel représenterait toute variable décrite en fonction du temps et de l'abscisse par sa valeur moyenne dans une section perpendiculaire aux rives (U,  $\zeta$ , S, C...).

2 - Le secteur situé entre ce P.K. 305, et l'extrémité aval des digues qui encadrent le chenal principal (P.K. 365) est le secteur le plus concerné par les phénomènes de stratification qui résultent du mélange des eaux douces et salées. Sa largeur est faible, elle augmente d'amont en aval depuis 300 m au P.K. 305, jusqu'à 1 100 m aux environs de la balise A, pour la partie comprise entre les digues. On représenterait donc ce secteur par un modèle intégré sur la largeur, c'est-à-dire que toutes les variables calculées (U, W,  $\zeta$ , S, C, ...) le seraient en fonction du temps, de l'abscisse et de la cote (excepté pour  $\zeta$ ).

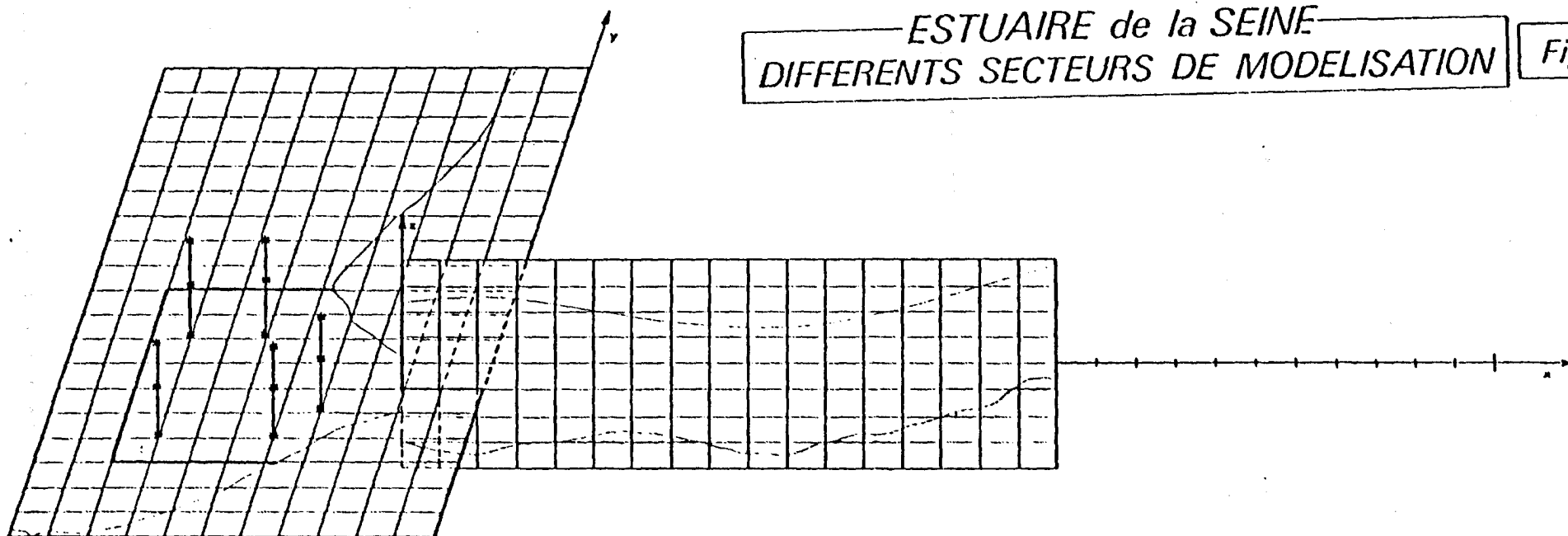
3 - La partie externe de l'estuaire ne peut de toute évidence être représentée autrement que selon les axes horizontaux. D'une manière idéale on devrait également conserver la dimension verticale, ce qui conduirait alors à réaliser un modèle à trois dimensions, plus le temps. On a dit plus haut le travail considérable que cela représenterait, et les réserves que l'on devait faire, encore actuellement pour ce type de modèle. Dans le cadre de cette étude il a donc été décidé de ne pas représenter les gradients verticaux, et de confectionner un modèle en plan horizontal. Les variables U, V,  $\zeta$ , S, C sont donc calculées dans l'espace (x,y,t) à l'aide de leur valeur intégrée sur la verticale.

On se réservera en outre la possibilité de développer ultérieurement ces solutions sur la coordonnée verticale, ainsi qu'il a été exposé au paragraphe II B, réalisant ainsi pour quelques points particuliers un pseudo modèle tridimensionnel.



ESTUAIRE de la SEINE  
DIFFERENTS SECTEURS DE MODELISATION

Fig: 19



Le secteur Honfleur - Le Havre (méridiens 3 à 15 environ) est particulièrement délicat à modéliser ; il est à la fois suffisamment large et de relief tourmenté, pour requérir une simulation en plan horizontal, et sans doute le siège de stratifications assez notables pour nécessiter une simulation en plan vertical. Cette difficulté a été résolue en profitant de la présence des digues qui bien qu'étant submersibles (côte 5 m à Honfleur, et seulement 3 m à la balise A), forment une barrière latérale assez nette pour que la simulation en plan vertical entre les digues soit admissible. On a donc réalisé un recouvrement de deux types de modèle (plan vertical et plan horizontal) dans le chenal, sur toute la longueur de la digue Nord (voir figure 19 )

Les deux zones situées au Nord de la digue Nord, et au Sud de la digue Sud, n'ont été représentées, dans la version actuelle des modèles que par une schématisation en plan horizontal. Dans le futur, si le besoin s'en faisait sentir, ces secteurs latéraux pourraient également être simulés en plan vertical, avec une approximation satisfaisante, puisque les chenaux orientés Est-Ouest sont nettement délimités par les digues, la côte et les bancs de sable.

#### Fonctionnement simultané des trois modèles

Ainsi qu'il sera précisé plus loin, un modèle a besoin pour fonctionner que lui soient fournies les valeurs des variables à calculer, sur les limites ouvertes. Ces "conditions aux limites", devront bien sûr être suffisamment éloignées du domaine géographique étudié pour être indépendantes des phénomènes modifiables à l'intérieur du secteur d'étude, sans quoi le modèle n'aurait plus d'intérêt prévisionnel, mais seulement descriptif et éventuellement explicatif.

Dans le cas de modèles juxtaposés les conditions sur les limites qui servent de frontière entre plusieurs modèles n'ont pas à être connues au préalable, elles résultent des solutions obtenues dans chacun des modèles. Seules doivent être fournies les conditions sur les limites extérieures de l'ensemble des modèles.

Le cas de l'estuaire de la Seine, schématisé comme il vient d'être décrit, est très délicat puisque d'une part la frontière entre les modèles 1 et 2 correspond à une rotation du plan de calcul ( $x, y$  en  $x, z$ ) et que d'autre part, les modèles 1 et 2 se recouvrent. La difficulté a été résolue en faisant fonctionner alternativement les modèles 1 et 3, puis le modèle 2:

Pour chaque intervalle de temps, le domaine entier est tout d'abord représenté par les deux modèles intégrés sur la verticale (également sur la largeur pour l'estuaire amont). Après quoi les solutions obtenues aux limites du modèle N° 2 sont partiellement développées sur la verticale (ainsi qu'il sera détaillé plus loin), ce qui permet à ce modèle de reprendre les calculs dans le plan ( $x, z$ ) et d'assurer ainsi le recouvrement désiré.



## B - MODELE DE L'ESTUAIRE EXTERIEUR

Les équations relatives à ce type de modèle ont été développées plus haut (§ IIC). Pour le cas particulier de l'estuaire de la Seine, ces équations ont été envisagées sous la forme suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - fV + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + g \frac{H}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + g \frac{U \sqrt{U^2 + V^2}}{g^2 H} + \frac{\partial P_a}{\partial x} + \frac{\tau_{ax}}{\rho H} + \varepsilon \Delta U = 0 \quad (60)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + fU + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + g \frac{H}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + g \frac{V \sqrt{U^2 + V^2}}{g^2 H} + \frac{\partial P_a}{\partial y} + \frac{\tau_{ay}}{\rho H} + \varepsilon \Delta V = 0 \quad (61)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(HU)}{\partial x} + \frac{\partial(HV)}{\partial y} = 0 \quad (62)$$

$$\frac{\partial(HS)}{\partial t} + \frac{\partial(HUS)}{\partial x} + \frac{\partial(HVS)}{\partial y} - \frac{\partial(H E_x \frac{\partial S}{\partial x})}{\partial x} - \frac{\partial(H E_y \frac{\partial S}{\partial y})}{\partial y} = 0 \quad (63)$$

$$\tau_{ax} = -\rho c_D (U-U) \sqrt{(U-U)^2 + (V-V)^2} \quad (64)$$

On retiendra du développement mathématique qui a conduit à ce système qu'il ne suppose nullement que la vitesse soit identique de la surface au fond, ainsi qu'on peut le lire parfois.

### 1- SCHEMA NUMERIQUE

Diverses méthodes numériques adaptées à la résolution de ce système ont été publiées depuis une quinzaine d'années environ, qui relevaient initialement toutes des différences finies. Actuellement, on assiste à l'apparition progressive d'autres techniques dites aux éléments finis, qui ont l'avantage de proposer des solutions très élégantes aux problèmes des grilles variables, mais qui étant par essence même implicites ne semblent pas (à la connaissance de l'auteur) pouvoir rivaliser avec les méthodes aux différences finies, du point de vue des temps de calcul. Ces dernières techniques continuent à progresser et permettent désormais d'utiliser également des mailles polygonales irrégulières (THACKER, 1979).

Par ailleurs, l'expérience acquise dans l'emploi des différences finies est aujourd'hui considérable, de nombreux schémas ayant été étudiés sous l'angle des perturbations numériques, ce qui constitue un argument important dans l'optique de la présente étude, intéressée plus aux indications physiques que l'on peut retirer des simulations, qu'à des recherches d'analyse numérique proprement dite.

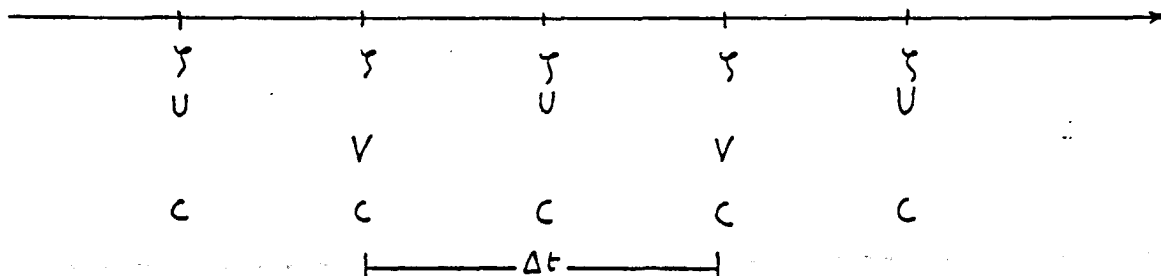
Sans avoir nous-même expérimenté chacun des schémas de différence finie applicables à notre problème et publiés dans la littérature (MASH-BRANDS, 1975 ; HANSEN, 1966 ; HEAPS, 1969 ; LEENDERTSE, 1970 ; ...) nous nous sommes fondés sur les commentaires publiés par les auteurs et sur les études comparatives (RONDAY, 1976) pour fixer notre choix sur une méthode en directions alternées introduite par PEACEMAN, RACHFORD et DOUGLAS, et appliquée au calcul des marées littorales par J.J. LEENDERTSE. Le schéma numérique correspondant a été abondamment décrit par LEENDERTSE (1967, 1970, 1972), nous l'avons cependant légèrement modifié pour ce qui est de la forme donnée au terme de frottement, l'adjonction d'un terme de viscosité et d'un terme de gradient de densité, ou pour reproduire des phénomènes particuliers tels que les digues submersibles et les brèches qui y sont projetées ou déjà réalisées.

Le schéma utilisé est décrit ci-après :

### Maillage

La grille de calcul est relativement complexe, par le décalage des points de calcul du niveau de l'eau :  $\zeta$ , des composantes U et V de la vitesse, et de la concentration S ou plus généralement C. Ceci permet une meilleure approximation des différentielles par des différences finies centrées, tout en réduisant autant que possible le pas spatial. (Figure 20)

Outre ce décalage dans l'espace, le schéma introduit également un décalage dans le temps des composantes U et V de la vitesse qui sont calculées alternativement tous les demi pas de temps :



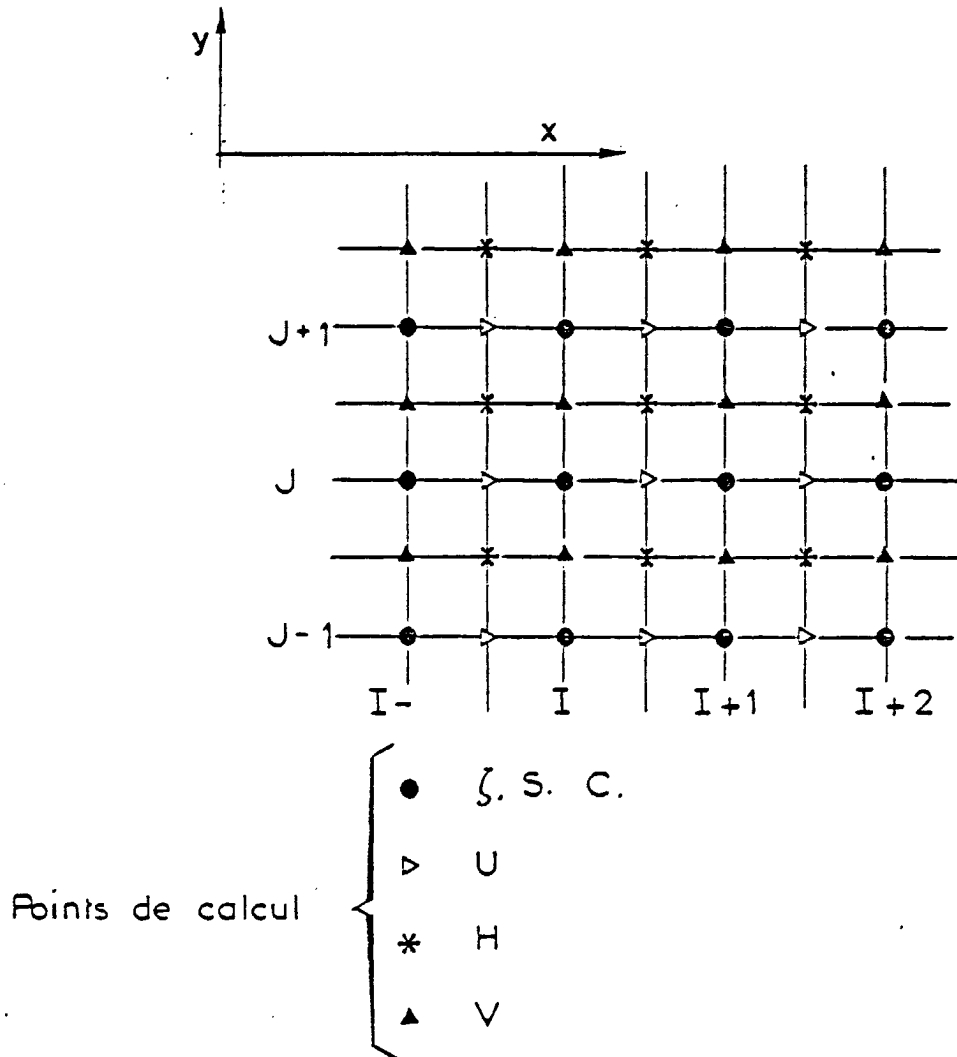


Figure 20 : Détail de la grille utilisée pour la résolution numérique

Ceci correspond à la résolution alternée des équations 60 et 61, puis 61 et 62 tous les demi pas de temps, utilisant pour les composantes de la vitesse des expressions tantôt implicites et tantôt explicites.

En introduisant les notations opératoires suivantes :

$$\overline{F}^x = \frac{1}{2} \left[ F\left(\left(I + \frac{1}{2}\right)\Delta x, J\Delta y, n\Delta t\right) + F\left(\left(I - \frac{1}{2}\right)\Delta x, J\Delta y, n\Delta t\right) \right]$$

$$\delta_x F = \frac{1}{\Delta x} \left[ F\left(\left(I + \frac{1}{2}\right)\Delta x, J\Delta y, n\Delta t\right) - F\left(\left(I - \frac{1}{2}\right)\Delta x, J\Delta y, n\Delta t\right) \right]$$

$$\overline{\overline{F}} = \frac{1}{4} \left[ F\left(\left(I + \frac{1}{2}\right)\Delta x, \left(J + \frac{1}{2}\right)\Delta y, n\Delta t\right) + F\left(\left(I + \frac{1}{2}\right)\Delta x, \left(J - \frac{1}{2}\right)\Delta y, n\Delta t\right) \right. \\ \left. + F\left(\left(I - \frac{1}{2}\right)\Delta x, \left(J + \frac{1}{2}\right)\Delta y, n\Delta t\right) + F\left(\left(I - \frac{1}{2}\right)\Delta x, \left(J - \frac{1}{2}\right)\Delta y, n\Delta t\right) \right]$$

$$\delta_{\frac{t}{2}} F = \frac{2}{\Delta t} \left[ F\left(I\Delta x, J\Delta y, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right) - F\left(I\Delta x, J\Delta y, n\Delta t\right) \right]$$

$$F^+ = F\left(I\Delta x, J\Delta y, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right)$$

$$F^- = F\left(I\Delta x, J\Delta y, \left(n - \frac{1}{2}\right)\Delta t\right)$$

$$\overline{F}^{t/2} = \frac{1}{2} \left[ F\left(I\Delta x, J\Delta y, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right) + F\left(I\Delta x, J\Delta y, n\Delta t\right) \right]$$

le système (60), (61) et (63) sera explicité comme suit :

$$\delta_x U - f \overline{V} + U_x \overline{\delta_x U}^x + \overline{V} \delta_y U_y + g \overline{\delta_x \xi}^t + (\overline{h}^x + \overline{\xi}^x) \delta_x s \cdot \frac{\alpha g}{2} \\ + g \overline{U}^t \frac{(U_x^2 + \overline{V}^2)^{\frac{1}{2}}}{(\overline{h}^x + \overline{\xi}^x)(\overline{e}^x)^2} + \delta_x q_x + \frac{\overline{c}_{0z}}{\rho(\overline{h}^x + \overline{\xi}^x)} + \varepsilon (\delta_x \delta_x U + \delta_y \delta_y V) = 0 \quad (65)$$

$(I + \frac{1}{2}, J, n)$

$$\delta_{\frac{t}{2}} \mathcal{S} + \delta_x \left( (\bar{h}^y + \bar{S}^x) U_+ \right) + \delta_y \left( (\bar{h}^x + \bar{S}^y) V \right) = 0 \quad (66)$$

(I, J, n)

$$\delta_{\frac{t}{2}} \left( S(\bar{h} + \bar{S}) \right) + \delta_x \left( (\bar{h}^y + \bar{S}^x) U_+ \bar{S}_+^x \right) + \delta_y \left( (\bar{h}^x + \bar{S}^y) V \bar{S}_+^y \right) - \delta_x \left( (\bar{h}_+^y + \bar{S}_+^x) E_{x_+} \delta_x S_+ \right) - \delta_y \left( (\bar{h}_+^x + \bar{S}_+^y) E_{y_+} \delta_y S \right) = 0 \quad (67)$$

(I, J, n)

Ce système permet le calcul des inconnues  $U$ ,  $\mathcal{S}$  et  $S$  au temps  $t_3$ , c'est à dire  $(n+\frac{1}{2})\Delta t$  à partir des solutions aux instants  $t_2(n\Delta t)$  et  $t_1(n-\frac{1}{2})\Delta t$ .

On observera avec CUNGE (1977), que les termes d'advection qui figurent dans l'équation de la continuité ne sont pas centrés dans le temps. Pour un intervalle  $\Delta t$  complet, il vient :

$$\left[ \frac{\Delta(HU)}{\Delta x} \right]_t^{t+\Delta t} = \frac{\Delta \left[ U^{t+\frac{\Delta t}{2}} \left( H^{t+\frac{\Delta t}{2}} + H^t \right) \frac{1}{2} \right]}{\Delta x}$$

Il importera donc que le pas d'intégration soit assez petit pour que l'erreur introduite soit faible ( $H^c \approx H^{c'} \frac{\Delta x}{\xi}$ )

Dans le cas contraire, CUNGE propose une expression plus rigoureuse de ce terme, dont l'inconvénient est de conduire à une matrice non tridiagonale, ce qui complique la méthode de résolution.

Dans l'expression (65) les deux derniers termes représentent respectivement l'effet du gradient horizontal de densité (par différence de salinité) qui n'avait pas été pris en compte par LEENDERTSE, et un terme de viscosité que l'on appelle fréquemment "pseudo-viscosité", dont le rôle est de dissiper l'énergie de faible longueur d'onde générée par les termes non linéaires, et que le modèle ne peut reproduire en dessous d'un certain rapport  $\lambda/\Delta x$ . Cette dissipation artificielle reprend la forme des termes de viscosité et de cisaillement (§ IIC), mais sa justification est toute autre. On veillera à donner à  $\xi$  des valeurs suffisamment faibles pour que le lissage des grandes longueurs d'onde qui en résulte également soit insignifiant. Il a d'ailleurs été vérifié que la condition  $\xi = 0$ , ne conduisait pas à des divergences, mais que les solutions étaient seulement "troublées" par une oscillation de haute fréquence, gênante quant à l'exploitation des résultats, mais sans conséquence sur la stabilité du schéma. Ce défaut aurait pu être éliminé par un simple lissage des résultats lors des sorties graphiques ou numériques.

Un type particulier d'oscillations de faible longueur d'onde est apparu dans l'application à l'estuaire de la Seine, qui nous a incité à recourir à une technique de dissipation particulière :

LEENDERTSE (1972) a démontré que le schéma de résolution de l'équation de continuité (62) était conservatif, sur un  $\Delta t$  complet, du point de vue de la masse et de l'énergie potentielle, dans le cas où la profondeur était constante. Dans le cas contraire, qui nous concerne ici, on observe une oscillation des courants qui se traduit par des tourbillons de longueur d'onde  $2 \Delta x$ , localisés de chaque côté des digues qui bordent le chenal, là où précisément les variations de profondeur sont les plus marquées. Comme signalé par LEENDERTSE, la phase de la marée la plus critique se situe peu après la Pleine Mer, lorsque les courants sont faibles et que l'effet stabilisant du terme de frottement s'atténue. Le cas particulier de l'estuaire de la Seine, où la tenue du plein dure quelques heures est de ce point de vue très défavorable.

Eliminer cet effet numérique aurait pu se faire par filtrage (LEENDERTSE), ou encore par accroissement du coefficient de pseudo-viscosité, nous avons préféré modifier l'expression du terme de frottement pour mieux dissiper l'énergie de ces tourbillons.

L'expression utilisée par LEENDERTSE pour exprimer la perte d'énergie par frottement au point  $(I + \frac{1}{2}, J)$  était la suivante :

$$F_t = \frac{g \bar{U}^t \sqrt{U_-^2 + \bar{V}^2}}{(R^2 + \bar{S}^2) (\bar{E}^x)^2}$$

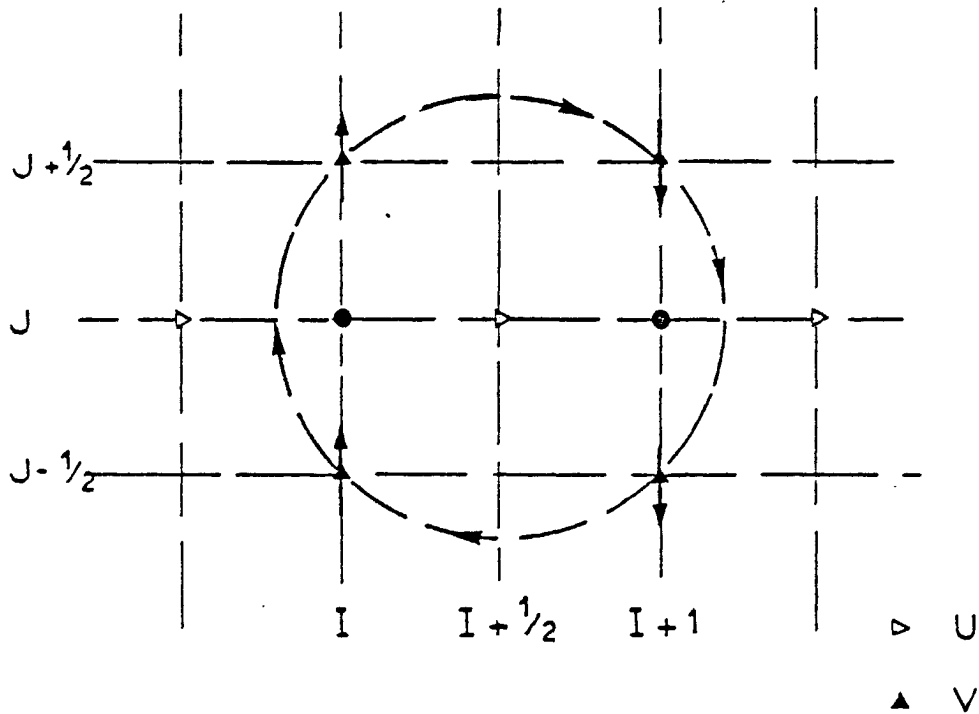


Figure 21 : Tourbillon généré par le schéma numérique.

Dans le cas d'un tourbillon centré sur le point  $(I + \frac{1}{2}, J)$  les valeurs de la composante  $V$  du courant, aux quatre sommets du quadrilatère (ici carré) entourant ce point :  $I, I + 1, j - \frac{1}{2}$  et  $j + \frac{1}{2}$ , sont à peu près opposées deux à deux, et donc telles que leur moyenne  $\bar{V}$  est très faible. Il s'en suit une perte d'énergie très faible, et donc une mauvaise

atténuation de cette oscillation.

Nous avons donc substitué au terme  $\overline{V^2}$  le terme :  $\overline{\overline{V^2}}$

$$\overline{\overline{V^2}}_{I+\frac{1}{2}, J} = \frac{1}{4} \left( V_{I, J+\frac{1}{2}}^2 + V_{I, J-\frac{1}{2}}^2 + V_{I+1, J-\frac{1}{2}}^2 + V_{I+1, J+\frac{1}{2}}^2 \right)$$

qui est peu différent du précédent lorsque les composantes  $V$  sont quasiment identiques en chacun des quatre points cités, mais devient très supérieur si ces composantes ont des signes opposés.

Il a ainsi été possible de diminuer l'intensité de ces tourbillons en dessous d'un seuil acceptable, sans qu'il soit nécessaire d'augmenter le coefficient de viscosité.

Une correction semblable est appliquée au terme de frottement pour la composante  $U$  du courant, dans le système qui permet de progresser depuis l'instant  $t_3$  jusqu'à l'instant  $t_4$  (calcul en colonne).

#### Procédé d'intégration

Le développement de chacun des termes des équations (65) et (66), en faisant apparaître les variables inconnues  $U$  et  $\zeta$  au temps  $t_3$  (noté 3), conduit aux relations :

$$-A_{I-1} U_{I-1, J} + \zeta_{I, J} + A_I U_{I, J} = B_{I, J}$$

$$-D \zeta_{I, J} + E_I U_{I, J} - D \zeta_{I+1, J} = F_{I, J}$$

où, pour simplifier les notations, les indices fractionnaires ont été réduits à leur partie entière.

$$A_I = \frac{\Delta t}{4\Delta x} \left( h_{J, J} + h_{J, J-1} + \zeta_{J, J} + \zeta_{I+1, J} \right)$$

$$B_{I, J} = \zeta_{J, J} + \frac{\Delta t}{4\Delta x} \left[ \left( h_{I, J-1} + h_{I-1, J-1} + \zeta_{I, J} + \zeta_{I, J-1} \right) V_{I, J-1} - \left( h_{I, J} + h_{I-1, J} + \zeta_{I, J+1} + \zeta_{I, J} \right) V_{I, J} \right]$$

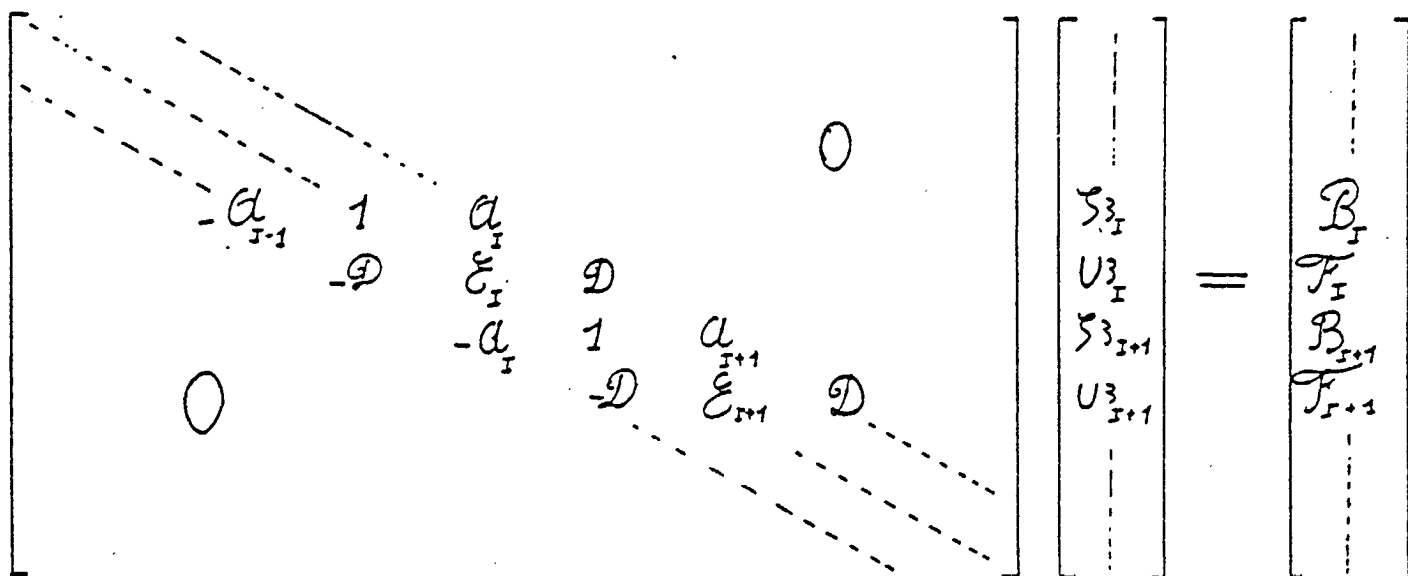


$$D = \frac{g \Delta t}{2 \Delta x}$$

$$E_I = 1 + \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (U_{I+1,J} - U_{I,J}) + 8g \frac{\Delta t}{2} \sqrt{\frac{U_{I,J}^2 + \frac{1}{4}(V_{I,J}^2 + V_{I,J-1}^2 + V_{I+1,J}^2 + V_{I+1,J-1}^2)}{(h_{I,J} + h_{I,J-1} + s_{I,J} + s_{I+1,J})(c_{I+1,J}^2 + c_{I,J}^2)^2}}$$

$$F_{I,J} = U_{I,J} + \left( g \Delta t - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (U_{I,J+1} - U_{I,J-1}) \right) \frac{1}{4} (V_{I,J}^2 + V_{I,J-1}^2 + V_{I+1,J}^2 + V_{I+1,J-1}^2) - \frac{g \Delta t}{2 \Delta x} (s_{I+1,J} - s_{I,J}) - 8g \frac{\Delta t}{2} U_{I,J} \sqrt{\frac{U_{I,J}^2 + \frac{1}{4}(V_{I,J}^2 + V_{I,J-1}^2 + V_{I+1,J}^2 + V_{I+1,J-1}^2)}{(h_{I,J} + h_{I,J-1} + s_{I,J} + s_{I+1,J})(c_{I+1,J}^2 + c_{I,J}^2)^2}} - \frac{g \Delta t}{4 \Delta x} (h_{I,J} + h_{I,J-1} + s_{I,J} + s_{I+1,J})(s_{I+1,J} - s_{I,J}) + \dots$$

On peut alors écrire le système précédent pour tous les points de calcul appartenant à la ligne J, on obtient ainsi une matrice tridiagonale dont la résolution est particulièrement simple et rapide:





Les relations précédentes permettant le calcul des inconnues ( $U$ ,  $\zeta$ ,  $C$ ) au temps 3 sont implicites pour ce qui concerne les inconnues situées sur la même ligne, mais seulement explicites pour les inconnues appartenant aux lignes adjacentes.

La progression des calculs depuis le temps 3, vers le temps 4 s'opère de manière analogue en substituant les lignes aux colonnes, et en calculant les variables  $V$ ,  $\zeta$  et  $C$ .

### Traitement numérique des frontières

#### Limites imperméables

Les limites fermées du domaine d'intégration, c'est-à-dire la côte et les ouvrages artificiels tels que les digues, sont délimitées dans le modèle par une série de segments rectilignes de direction  $Ox$  et  $Oy$ , et de longueur  $\Delta x$  et  $\Delta y$ . Ces segments joignent les points de coordonnées  $(I + \frac{1}{2}, J + \frac{1}{2})$  où sont affichées les valeurs de la cote du fond :  $h$  (voir exemple).

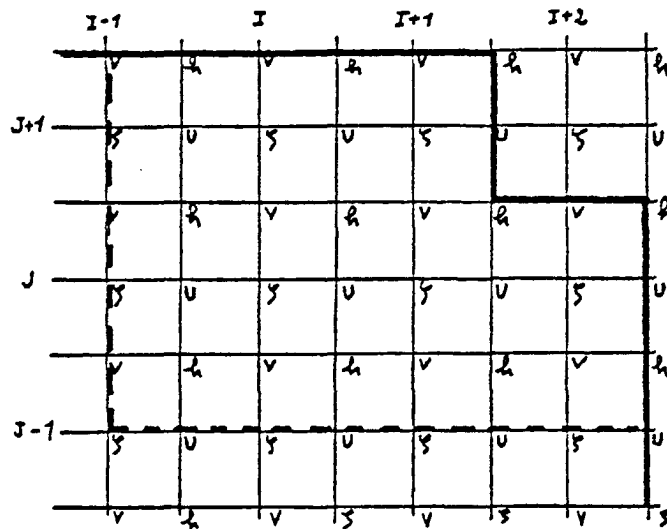


Figure 22

Perpendiculairement à ces limites, le débit est habituellement nul ( $U$  ou  $V$  nul), mais peut être défini par une formule explicite quelconque.

#### Limites ouvertes

Les frontières ouvertes (fluviales ou marines) sont également définies par une série de tronçons rectilignes de longueur  $\Delta x$  et  $\Delta y$ , mais centrés sur les points de calcul du niveau  $\zeta$ , si la condition imposée sur cette limite est exprimée en termes de niveaux, ou bien centrés sur les points de calcul des composantes de la vitesse si la condition aux limites

est exprimée en termes de vitesse ou de débit . On se trouve ramené, dans ce dernier cas, au traitement des frontières fermées.

#### Bancs découvrants

Ce modèle est parfaitement applicable à un domaine de géométrie variable avec la hauteur d'eau, lorsque des secteurs géographiques, de taille comparable à la surface d'une maille de calcul, se trouvent alternativement inondés et exondés au cours de la marée. LEENDERTSE (1971) a indiqué comment pouvait se dérouler la procédure numérique, en testant au long des calculs, mais à des intervalles de temps supérieurs au pas d'intégration à la fois la hauteur d'eau dans une maille (détection d'une zone émergente) et chacune des sections d'écoulement pouvant transmettre de l'eau dans ou hors de cette maille (détection de limites imperméables). Il en résulte éventuellement une séquence de modification des limites fermées du modèle, après quoi le calcul est repris selon le même schéma que précédemment.

La proximité des limites (ouvertes ou fermées, fixes ou variables) entraîne des modifications du schéma de calcul, certaines grandeurs n'étant plus accessibles parce que situées en dehors de la zone d'étude, ou bien ont perdu toute signification. On a donc défini un code, assez analogue à celui de MASH et BRANDES (1971), qui permet d'effectuer de manière totalement automatique tous les tests concernant le traitement particulier des points frontière.

Ce code assure également la généralité du programme de calcul qui peut ainsi être appliqué à tout secteur géographique sans aucune modification.

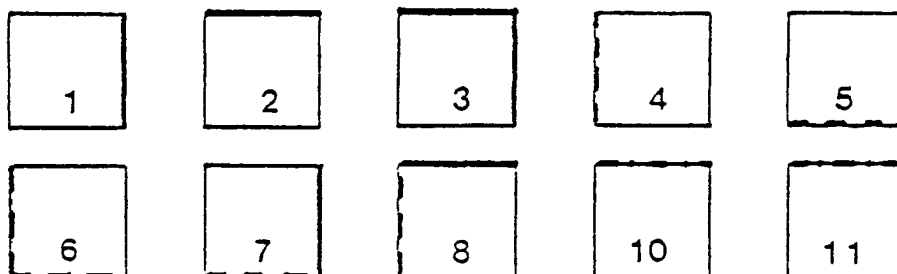


Figure 23

A titre d'illustration de la manière dont sont introduites les conditions aux limites, l'exemple qui suit concerne les calculs entre les instants  $t_2$  et  $t_3$ , pour une ligne  $J$  limitée à gauche par une frontière ouverte, et à droite par une frontière fermée.

Le vecteur  $X$  (temps  $t_3$ ) est le vecteur inconnu, le vecteur  $Y$  est constitué par les variables déjà déterminées aux instants  $t_1$  et  $t_2$  et pour son premier et son dernier terme par les conditions aux limites à gauche et à droite.

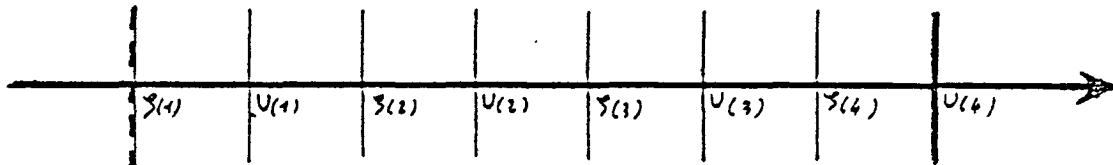


Figure 24

On écrira :

$$\begin{bmatrix} \dot{E}(1) & \mathcal{D} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha(1) & 1 & \alpha(2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{D} & \dot{E}(2) & \mathcal{D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha(2) & 1 & \alpha(3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathcal{D} & \dot{E}(3) & \mathcal{D} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha(3) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3(1) \\ S_3(2) \\ U_3(2) \\ S_3(3) \\ U_3(3) \\ S_3(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F} + \mathcal{D}S_3(1) \\ \mathcal{B} \\ \mathcal{F} \\ \mathcal{B} \\ \mathcal{F} \\ \mathcal{B} - \alpha(4)U_3(4) \end{bmatrix}$$

$$[A] X = Y$$

L'équation d'advection - dispersion conduit à un système matriciel, également tri-diagonal, mais de dimension plus faible. Il s'écrit ici :

$$\begin{bmatrix} Q(2) & R(2) & 0 \\ P(3) & Q(3) & R(3) \\ 0 & P(4) & Q(4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_3(2) \\ C_3(3) \\ C_3(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J(2) - P(2)C_3(1) \\ J(3) \\ J(4) - P(4)C_3(5) \end{bmatrix}$$

Les conditions aux limites sont également introduites dans le membre de droite sous la forme du flux de matière traversant ces limites.

Tous les calculs exposés ici relativement à la composante U (selon Ox) de la vitesse, à la hauteur d'eau, et à la concentration C en une substance quelconque, sont aisément généralisables par permutation au calcul de V,  $\gamma$  et C, effectué cette fois en colonne et à l'instant  $\frac{\Delta t}{2}$  après le calcul en ligne.

De nombreux aspects particuliers de ce procédé d'intégration numérique ont été publiés par LEENDERTSE (1967, 1970 et 1975) et ne seront pas repris ici pour la clarté et la brièveté de l'exposé. Pour les mêmes raisons on n'exposera pas ici les détails techniques et les difficultés d'ordre numérique, informatique ou autre que l'on peut rencontrer lors de l'application de cette méthode. Toutes les informations à ce sujet, ainsi que les programmes de calcul sont disponibles auprès de l'auteur.

### Stabilité

L'approximation en différences finies du système d'équations hyperboliques (si  $\mathcal{E} = 0$ ) aux dérivées partielles (60), (61) et (62), ne peut être satisfaisante que si elle vérifie les conditions de convergence et de stabilité.

Convergence : on dit que la méthode est convergente si la solution du système aux différences tend vers celle du système différentiel lorsque  $\Delta t$  et  $\Delta x$  tendent vers zéro.

Stabilité : une méthode aux différences est stable si les solutions des équations sont des fonctions uniformément bornées des données initiales pour tout  $\Delta t$  assez petit et tout  $n \Delta t$  fini (RALSTON-WILF, 1965).

Une autre notion est généralement employée : la consistance, qui exprime que chaque différence finie tend vers la valeur de la dérivée qu'elle représente, lorsque le pas d'intégration tend vers zéro.

De par les définitions précédentes, il est clair que la convergence entraîne la stabilité, et LAX a pu montrer que réciproquement pour un schéma numérique consistant, la stabilité entraînait la convergence, ceci dans le cas d'un système linéaire. On envisage donc généralement la propriété de stabilité.

Quelques méthodes permettent de définir des critères de stabilité parmi celles-ci citons :

1 - La méthode des perturbations qui consiste à introduire artificiellement une modification de la valeur d'une inconnue à un instant et un lieu arbitraires (on écrira par exemple  $\sum_{j,1,0} + \delta$  au lieu de  $\sum_{j,1,0}$ ) et de suivre l'influence de cette perturbation pour exprimer les conditions de sa disparition.

2 - La méthode de HIRT, par une démarche inverse de celle qui a permis de définir le système des différences finies, consiste à exprimer ces dernières à l'aide d'un développement en série de TAYLOR en notation différentielle, et à étudier alors les propriétés du système différentiel obtenu, légèrement différent du système initial si les termes d'ordre supérieur ont été pris en compte.

En dehors des critères de stabilité, cette méthode permet généralement d'envisager les effets numériques parasites introduits par le procédé d'intégration.

A titre d'exemple considérons l'équation d'advection - dispersion suivante :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (D \text{ et } U \text{ constants})$$

que l'on peut approcher en différences finies, sous la forme :

$$\frac{c_I^{m+1} - c_I^m}{\Delta t} + U \frac{(c_I^m - c_{I-1}^m)}{\Delta x} = D \frac{(c_{I+1}^m - 2c_I^m + c_{I-1}^m)}{\Delta x^2}$$

La méthode de HIRT permet de faire apparaître une expression différentielle plus proche du système aux différences, que l'équation initiale. Il vient :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} = \left( D + \frac{U \Delta x}{2} - \frac{U^2 \Delta t}{2} \right) \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + O(3)$$

Les termes supplémentaires sont dits ici diffusion numérique.

3 - La méthode de VON NEUMANN, très fréquemment utilisée, où la fonction solution est décomposée en série de Fourier. Chacun des termes de cette série est alors envisagé individuellement pour connaître à quelles conditions il serait susceptible d'être amplifié au cours du temps. Considérons par exemple un domaine unidimensionnel (selon Ox) où se déplace une onde progressive que l'on décompose en série de Fourier.

$$\psi(x, t) = \sum_m \sum_m^* e^{i(\omega_m t - k_m x)}$$

On étudiera le terme d'ordre  $m_0$  en introduisant son expression donnée ci-dessus dans l'équation aux différences, et en observant la relation obtenue entre  $\sum_{m_0}^t$  et  $\sum_{m_0}^{t+\Delta t}$  que l'on notera d'une manière générale :

$$\sum_{m_0}^{t+\Delta t} = G \sum_{m_0}^t$$

Le facteur G est le facteur d'amplification, sa valeur arithmétique devra être au plus égale à 1 pour que la solution reste bornée, ce qui constitue le critère de stabilité recherché.



LEENDERTSE a étudié de cette façon la stabilité du schéma numérique utilisé ici, tout d'abord (1970) dans une expression simplifiée linéarisée (sans effet d'advection, de frottement, ni de force de Coriolis), puis dans le cas non linéaire, mais en ne considérant que les termes d'advection, d'inertie et de frottement (1977).

### Equations linéarisées

En reportant dans les équations aux différences finies correspondant successivement au calcul en ligne, puis en colonne, l'expression de l'onde progressive supposée sinusoïdale :

$$\zeta(x, y, t) = \sum_{k_1, k_2} e^{i(k_1 x + k_2 y + \omega t)}$$

on déduit l'expression de l'équation caractéristique de la matrice d'amplification (G) :

$$(\lambda - 1) \left( \lambda^2 + 2\lambda \left( 1 - \frac{2}{\psi} \right) + 1 \right) = 0$$

Les trois solutions de cette équation sont soit égales à 1, pour la première valeur propre, soit intérieures au cercle du rayon 1 (ce qui se démontre d'après la valeur de  $\psi$ ). Il s'en déduit donc que ce schéma, appliqué aux équations linéarisées est inconditionnellement stable.

### Equations non linéaires

Le schéma numérique complet, du fait notamment des termes d'advection, se révèle à l'expérience instable sous certaines conditions. L'étude complète des critères de stabilité dans ce cas général est extrêmement difficile et n'a semble-t-il jamais pu être menée à bien. LEENSERTSE (1977) a toutefois effectué un calcul approché, fondé sur le fait que des oscillations apparaissent principalement par les termes d'advection et sont partiellement dissipées par les termes de frottement (on a exposé au chapitre II ce que recouvrent ces termes).

Considérons donc un domaine d'intégration à une dimension spatiale, l'auteur donne au schéma numérique l'expression simplifiée suivante :

$$U_J^{t+\Delta t} - U_J^t + \frac{\Delta t}{2\Delta x} U (U_{J+1}^t - U_{J-1}^t) + \frac{\Delta t}{2} \frac{g |U|}{c^2 H} (U_J^t + U_{J+1}^{t+\Delta t}) = 0$$

et la propagation d'une onde sinusoïdale de la forme :

$$u = U e^{i(\omega t + kx)}$$

il vient :

$$\lambda - 1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x} U (e^{ikx} - e^{-ikx}) + \frac{g \Delta t |U| (\lambda + 1)}{2 c^2 H} = 0$$

où 
$$\lambda = \frac{U_J^{t+\Delta t}}{U_J^t}$$

Il s'en déduit :

$$\lambda = \frac{1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} U i \sin kx - \frac{g \Delta t}{2 c^2 H} |U|}{1 + \frac{g \Delta t}{2 c^2 H} |U|}$$

La condition de stabilité ( $\lambda \leq 1$ ) se traduit alors par :

$$\Delta t \leq \frac{2g (\Delta x)^2}{c^2 H U}$$

condition qui ne peut être qu'indicative compte tenu des approximations faites.

## 2 - Caractéristiques particulières de l'application à l'estuaire de la Seine

### a) Dimensions géographiques - Maillage

La délimitation du domaine d'étude et des dimensions du maillage résultent, bien entendu, d'un compromis entre le désir d'obtenir une information aussi dense que possible, sur une aire aussi étendue que possible, et l'effort de calcul numérique que cela représente.

Outre la zone de l'estuaire proprement dite, ce modèle doit recouvrir un secteur assez large pour que les conditions aux limites soient indépendantes des phénomènes que l'on se propose d'étudier. Ceci, tant en ce qui concerne la propagation de la marée (courants et niveaux) qui ne devra pas être affectée sur ces limites par des modifications des ouvrages portuaires, littoraux ou autres, que pour les concentrations en éléments solubles étudiés (sels, polluants, ...) dont on envisagera des modalités de rejet peut être différentes de ce qu'elles sont actuellement. Dans ce dernier cas les concentrations sur ces limites devront être soit connues (préalablement mesurées), soit négligeables.

Nous fondant sur les données de courant disponibles au début de cette étude (dimension des ellipses et évaluation des dérivées Lagrangiennes) relevées en nature ou sur le modèle réduit de l'Institut de Mécanique de Grenoble, nous en avons déduit que les dimensions optimales de la zone couverte par le modèle, à l'extérieur du Havre, devraient être dans un rapport 1,5 à 2 (rapport de la dimension N-S sur la dimension E-W). Par ailleurs, le cap d'Antifer semblant être une limite naturelle, il a été décidé de limiter le modèle vers le Nord au parallèle  $49^{\circ}41' N$  et donc vers l'Ouest au méridien  $15'W$  (voir figure 25).

La limite amont étant fixée par l'extrémité du chenal nord (nord de la digue nord), soit environ quatre kilomètres en amont de Honfleur, le secteur d'étude a alors pour dimensions :

25 milles en latitude  
20 milles en longitude

Quant aux pas d'espace  $\Delta x$  et  $\Delta y$ , ils seront choisis égaux, puisque l'on n'entend privilégier, à priori, aucune des directions de circulation.

Compte tenu de la condition de stabilité précédente, le nombre des calculs élémentaires, approximativement proportionnel au coût financier d'une simulation, est proportionnel à la puissance quatre du pas d'espace. On mesure l'intérêt d'adopter un pas spatial important. Mais malheureusement un pas d'espace grand ne permet pas de reproduire assez fidèlement les singularités de faible dimension géométrique, et par ailleurs le grand intervalle  $\Delta t$  qu'il autorise serait inacceptable sous peine de lisser exagérément les phénomènes naturels tels que la pointe de flot en Seine. De ce dernier point de vue une limite supérieure du pas de temps nous a semblé devoir être fixée à 10 minutes.

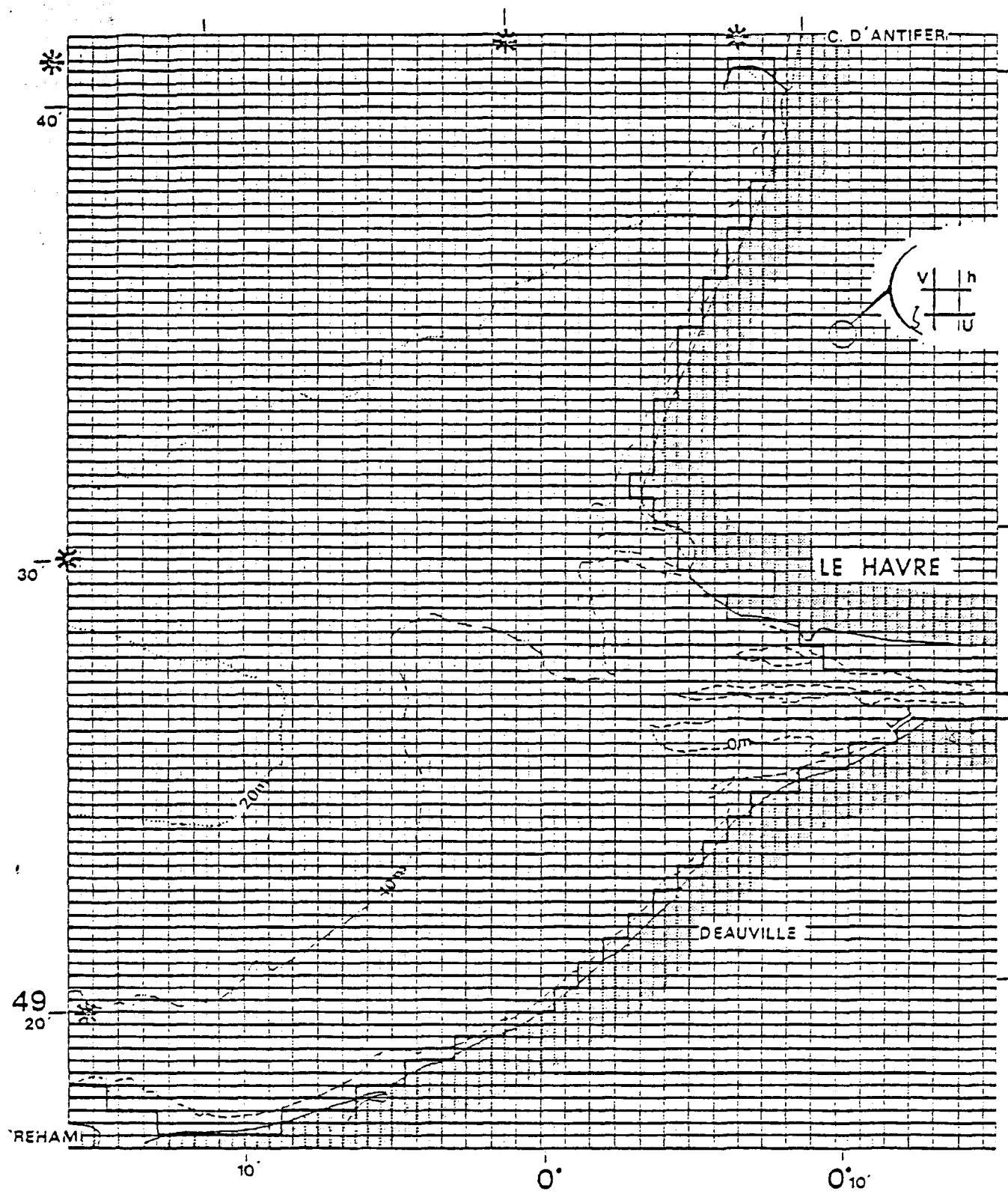


Figure 25 : Plan de détail du modèle de l'estuaire extérieur.

La condition de stabilité indique alors un pas d'espace critique :

$$\Delta x_c = C \sqrt{\frac{UH \Delta t}{2g}}$$

pour :

$$\left. \begin{array}{l} HU = 25 \\ C = 60 \text{ M.K.S.} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta x_c \approx 1650 \text{ m}$$

Cet ordre de grandeur étant défini, la bonne représentation des digues implique que celles-ci coïncident au mieux avec les limites des mailles. Les digues étant séparées par une distance augmentant progressivement depuis 900 m environ dans leur partie amont, jusqu'à 1300 m à l'extrémité du Ratier, le pas  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  sera fixé à 1000 m. Le domaine d'étude est alors couvert par une matrice 38 x 46 pour chacune des variables calculées : U, V,  $\zeta$  et C.

Une légère correction des profondeurs dans le chenal sera effectuée pour conserver autant que possible des valeurs correctes aux sections d'écoulement, malgré la distorsion imposée aux digues. En outre, pour que ces digues coïncident avec les points de calcul de la composante zonale du courant, la grille de calcul devra être inclinée de trois degrés environ par rapport aux axes géographiques.

#### b) Pas d'intégration $\Delta t$

L'application du critère de stabilité pour  $\Delta x = 1000$  m indique une limite supérieure du pas de temps de 220 s, mais on a pu constater que cette valeur pouvait être doublée sans provoquer d'instabilité. Toutefois le pas d'intégration adopté devra non seulement respecter ce critère, mais encore être tel que la solution obtenue, qui ne peut jamais être identique à la solution vraie, n'en soit pas trop différente.

LEENDERTSE a étudié cette déformation de l'onde au cours de sa propagation en introduisant la notion de facteur de propagation  $F_p$ . Ce facteur  $F_p$  est défini comme le quotient (complexe) de l'onde calculée et de l'onde réelle, en amplitude et phase, après propagation sur une distance de une longueur d'onde. Le module du facteur de propagation exprime l'amortissement du signal, et l'argument son déphasage par rapport au signal physique. Pour un schéma numérique donné, l'amortissement et le déphasage diminuent en même temps que le pas d'espace  $\Delta x$ .

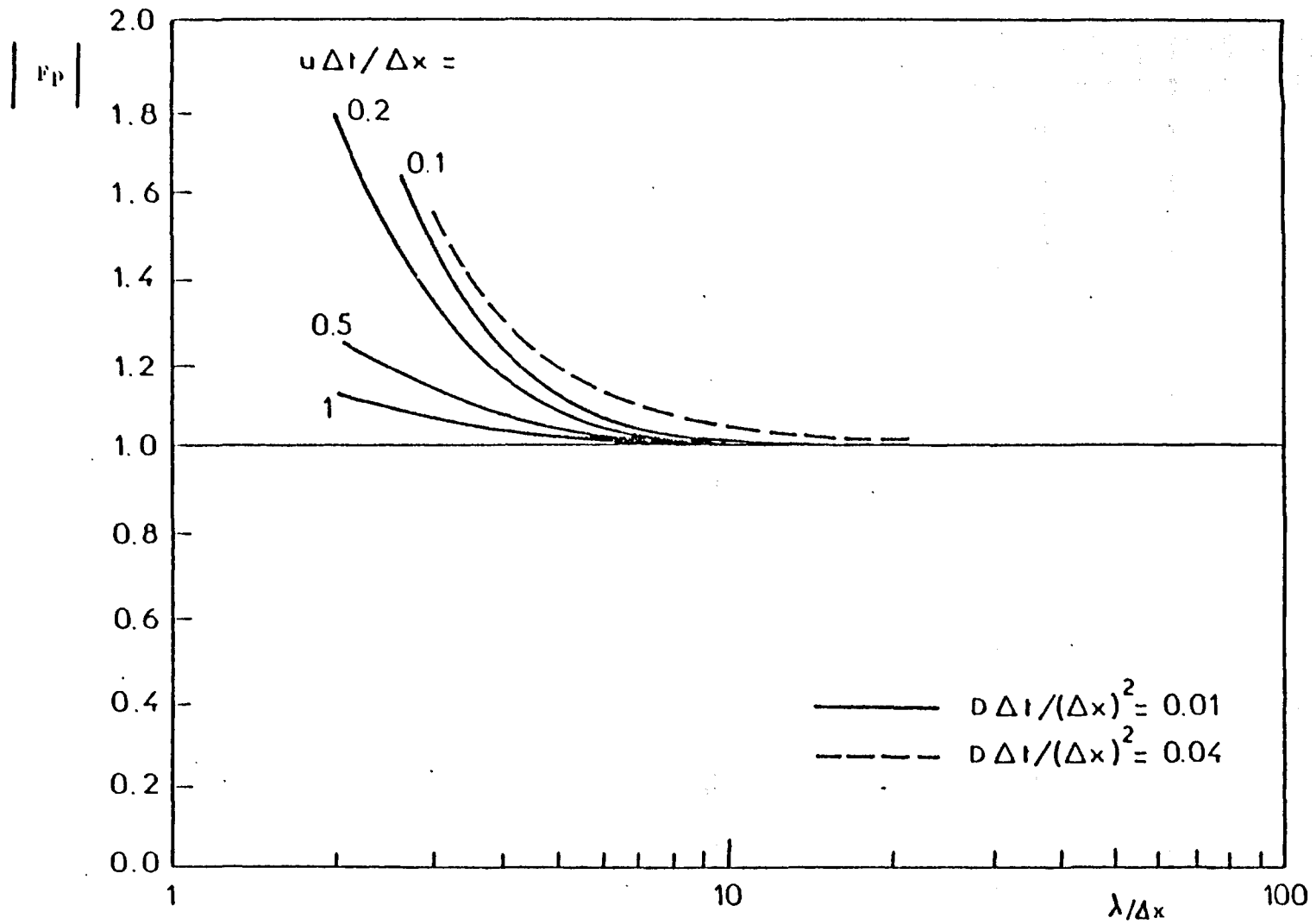


Figure 26: Module du facteur de propagation (d'après LEENDERTSE 1970)

Les figures (26) et (27) montrent les déformations obtenues (amplitude et phase) pour le schéma total alternativement implicite et explicite, dans le cas de l'équation d'advection - dispersion sous sa forme simplifiée :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} - D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0$$

On peut constater que les déformations ne seront pas trop importantes à la condition que le pas  $\Delta x$  soit au plus de l'ordre de  $\lambda/10$ , et que le rapport  $U\Delta t/\Delta x$  soit de l'ordre de 0,1 à 0,2. Cette dernière restriction conduit à un pas de temps limite d'environ 200 à 300 secondes.

Le même raisonnement pourrait être mené sur les équations de propagation de l'onde de gravité, pour en déduire l'effet de la valeur du pas de temps sur la précision des résultats. On le caractérise de manière semblable à ce qui vient d'être exposé, au moyen du rapport  $\alpha$  :

$$\alpha = \frac{c' \Delta t}{\Delta x}$$

$c'$  : vitesse de phase

Un schéma explicite implique pour des raisons de stabilité :  $\alpha < 1$ . Dans le cas de schémas implicites cette restriction n'existe généralement pas, mais l'obtention d'une "bonne solution" limite le coefficient  $\alpha$  à des valeurs de l'ordre de 5.

Le critère  $\alpha = 5$  entraîne pour ce modèle de l'estuaire de la Seine un pas de temps maximum de 300 secondes ; on retrouve ici une valeur critique semblable à celle signalée plus haut.

Il ressort de cette étude des effets numériques que le schéma adopté est stable jusqu'à des pas d'intégration de l'ordre de 5 minutes (valeur pouvant encore être accrue par augmentation du coefficient de pseudo-viscosité) mais que sous peine de déformations de la solution, il devra être limité à des pas de temps de 3 à 4 minutes. Par ailleurs, ne pourront être considérés comme correctement reproductibles que des phénomènes de longueur d'onde de l'ordre de 10 kilomètres au moins. Ceci indique que le modèle sera inapte à reproduire les panaches de dispersion issus d'une source

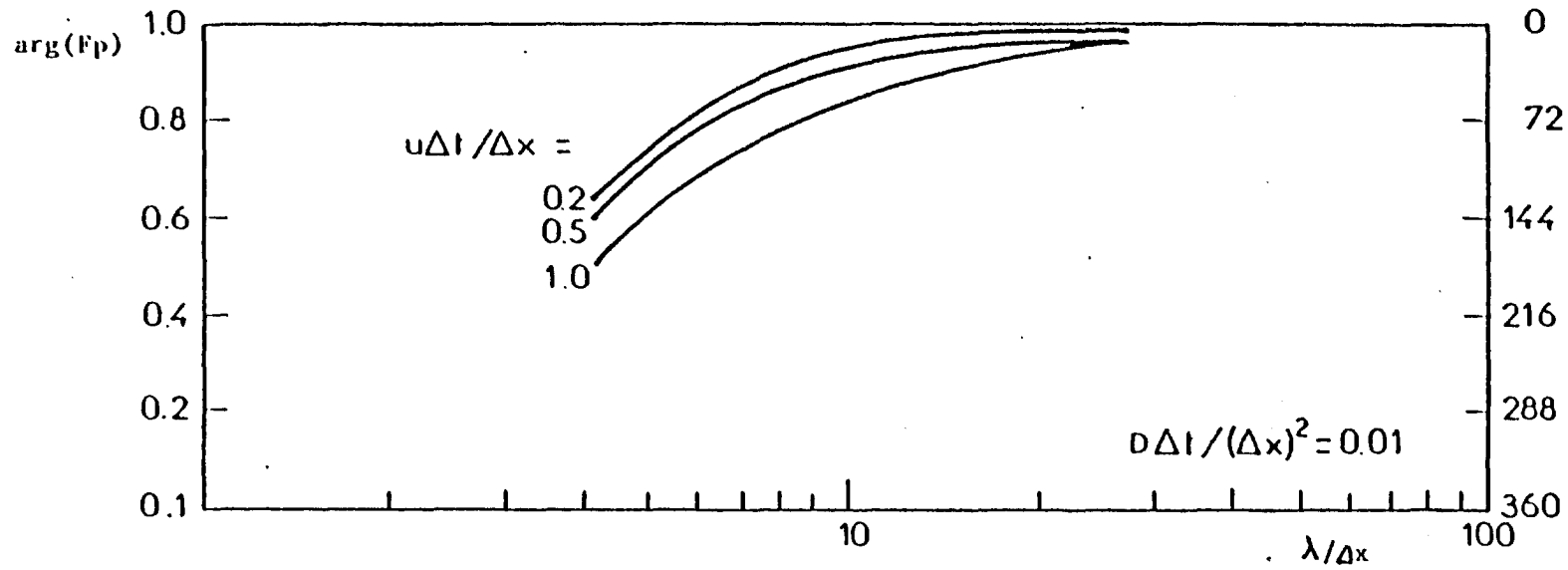


Figure 27 : Argument du facteur de propagation (différence de phase)

-d'après LEENDERTSE 1970-



ponctuelle durant les premières heures qui suivent le rejet, à moins de construire un sous-modèle local de pas d'espace plus faible, dont la position géographique peut être soit fixe, soit mobile et asservie aux déplacements du nuage.

### c) Représentation des digues

Les deux digues submersibles, dites du Ratier, et nouvelle digue Nord, sont grossièrement parallèles, elles divergent de l'amont vers l'aval (de 900 m à 1300 m) tout en s'abaissant de la cote 5 m à la cote 3 m. Le niveau moyen est de 4,8 m et le fond dans le chenal à la cote - 3 à - 4 m environ.

Ces deux digues ont pour effet de concentrer partiellement le jusant dans le chenal, tandis que le flot qui coïncide avec des niveaux (de la surface) plus importants, a la faculté de franchir les digues, limitant ainsi les vitesses de flot dans le chenal sans trop diminuer le volume d'eau introduit par la marée.

Ces digues ont été légèrement déformées dans le modèle pour coïncider avec les axes du maillage, comme il a été dit plus haut ( $\Delta y = 1000$  m). De plus, celles-ci se trouvant alternativement immergées et émergées (par endroit) on leur a donné la possibilité, comme pour les bancs découvrants, de constituer, ou non, des limites imperméables.

Dans le cas où elles se trouvent submergées, la discontinuité qu'elles provoquent du point de vue des sections d'écoulement (dans le sens Oy) nous a incité à considérer que les pertes de charge dans ce sens étaient exclusivement localisées au dessus des ouvrages, et très supérieures aux termes d'inertie et d'advection. L'équation du mouvement est alors réduite aux relations habituellement utilisées pour des écoulements permanents, au-dessus de déversoirs.

Trois cas ont été distingués selon les valeurs relatives des niveaux d'eau, et de la hauteur des digues :

Soit  $h_0$  la cote des digues, et  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  les niveaux de la surface de l'eau en amont et d'autre.

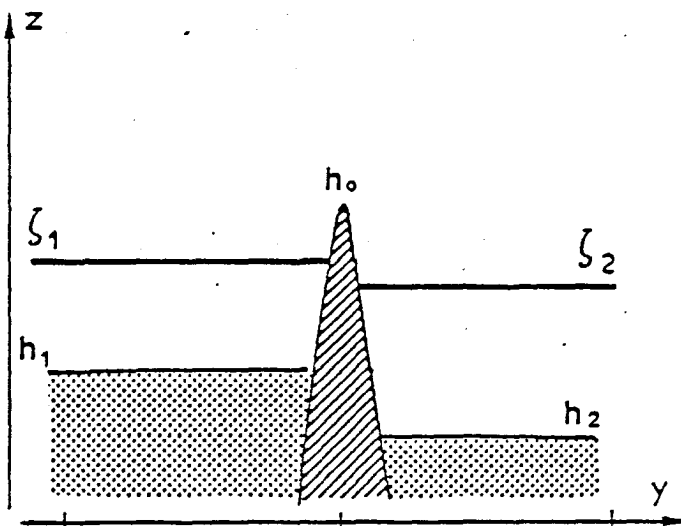
Cas 1

digue émerge

$\zeta_1 < h_0$

$\zeta_2 < h_0$

$V = 0$



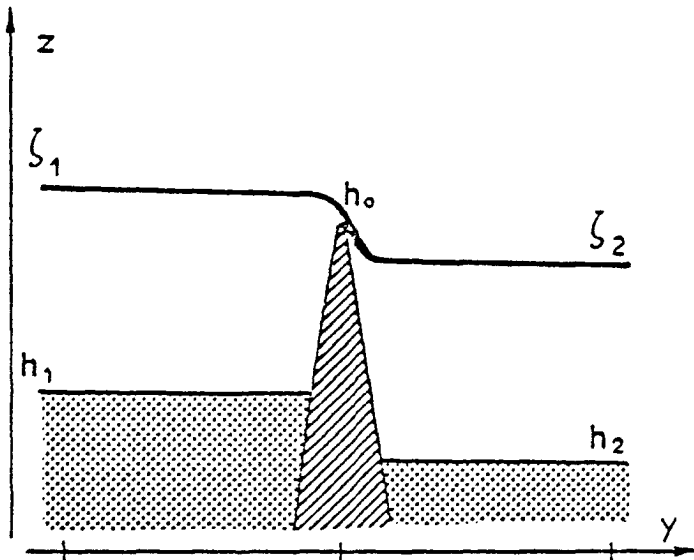
Cas 2

digue est assimilée à un réservoir

$\zeta_1 > h_0$

$\zeta_2 < h_0$

$V = k_1 \sqrt{\zeta_1 - h_0}$



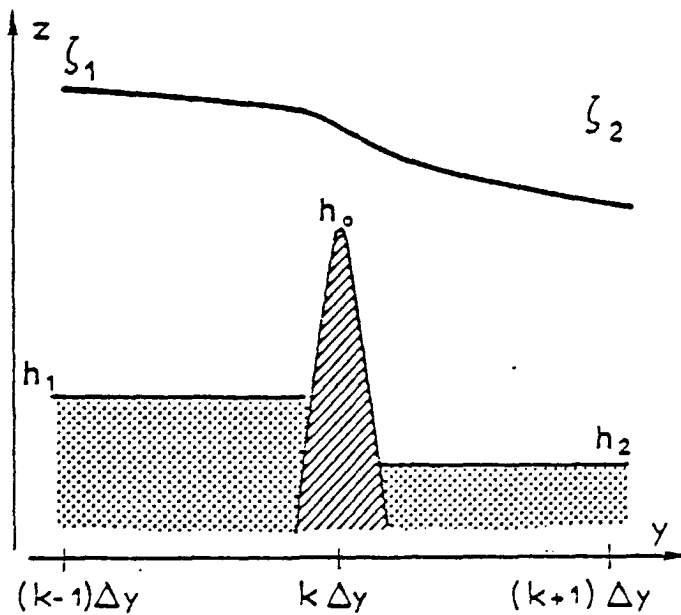
Cas 3

digue est immergée, la perte de charge sur son sommet est négligeable

$\zeta_1 > h_0$

$\zeta_2 > h_0$

$V = k_2 \sqrt{\zeta_1 - \zeta_2}$



Les coefficients  $k_1$  et  $k_2$ , de l'ordre de l'unité, peuvent être déterminés d'après la littérature en fonction des caractéristiques particulières des digues, ou bien par étalonnage après examen des résultats.

Ce procédé de représentation des digues, bien que très simple au plan théorique, conduit au niveau de la programmation à de grandes complications du schéma initial : aux points concernés, trois valeurs différentes de la profondeur existent ( $h_0$ ,  $h_1$  et  $h_2$ ) qui dans le détail des calculs devront être utilisées de manière distincte, nécessitant un travail d'informatique assez lourd.

Par ailleurs, deux ouvertures ont été prévues dans ces digues :

- la première dans la digue Nord, d'une longueur de un kilomètre, à la cote - 1 m, est actuellement réalisée aux environs du méridien 14 (P.K. 353 environ). Elle a été reproduite dans le modèle sans problème particulier du fait de sa dimension égale à celle d'une maille
- la seconde, actuellement à l'état de projet, doit consister en une brèche de 150 m de largeur, à la cote - 3,5 m, dans l'extrémité orientale de la digue du Ratier. Elle figure également dans le modèle, où elle a été simulée par une connection supplémentaire entre les mailles (34,18) et (35, 19) (Voir figure 20), le débit étant évalué de manière explicite par les formules présentées plus haut :

Premier cas :

$$Q = 0$$

Deuxième cas :

$$Q = 150 k_1 (\xi_1 - 3,5)^{1,5}$$

Troisième cas :

$$Q = 150 k_2 \left( \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} - 3,5 \right) \sqrt{\xi_1 - \xi_2}$$

d) Contraintes aux limites "fond" et "surface"

Les équations du mouvement rappelées plus haut (60, 61 et 64) font apparaître des termes représentant des tensions d'entraînement ou de résistance au contact de l'air ou du fond.

En surface, la relation adoptée est la suivante :

$$\tau_{xz} = \rho_a C_D (u_x - U) \sqrt{(u_x - U)^2 + (u_y - V)^2}$$

$$\tau_{xy} = \rho_a C_D (u_y - V) \sqrt{(u_x - U)^2 + (u_y - V)^2}$$

avec

$$\rho_a = 1,293 \cdot 10^{-3}$$

$$C_D = 1,4 \cdot 10^{-3}$$

où  $(u_x, u_y)$  sont les composantes de la vitesse du vent.

La justification de cette formule est donnée au paragraphe (IIIC).

Sur le fond, le terme interaction a été exprimé sous la forme donnée par CHEZY, plus rapide à calculer que la fonction de STRIKLER, qui fait appel à une puissance fractionnaire de la hauteur :

$$\tau_f = \rho g \left( \frac{U^2 + V^2}{\epsilon^2} \right)$$

Le coefficient de CHEZY  $\epsilon$ , en théorie constant pour un secteur donné, est considéré ici comme une fonction de la hauteur d'eau totale  $H = \zeta + h$ , en accord avec l'expression que l'on peut déduire d'une structure verticale des courants obéissant à la théorie de PRANDTL.

$$u = \frac{V^*}{K} \operatorname{Log} \frac{z}{z_0}$$

d'où par intégration :

$$U = \frac{V^*}{K} \operatorname{Log} \left( \frac{H}{e z_0} \right)$$

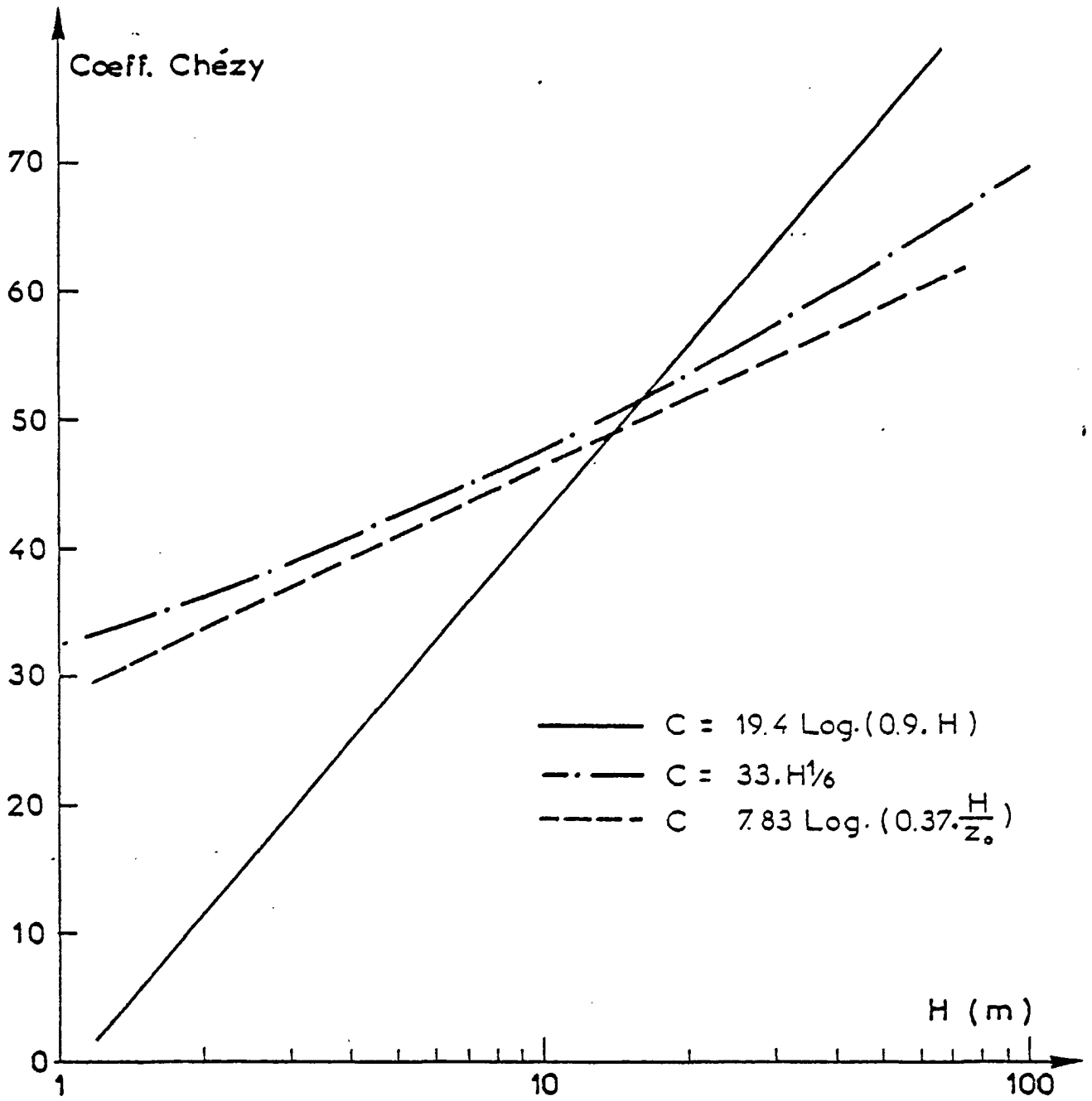


Figure 28 : Variations du coefficient de frottement selon la hauteur d'eau.

or,

$$\tau_f = \rho V_*^2 = \rho g \frac{U^2}{C^2}$$

d'où

$$C = \frac{\sqrt{g}}{K} \text{Log} \left( \frac{H}{e_{30}} \right)$$

c'est-à-dire

$$C = 7,8 \text{ Log} \left( \frac{0,37 \cdot H}{30} \right) \quad (68)$$

Pour la gamme des profondeurs (inférieures à 30 m) qui concerne l'estuaire de la Seine, cette relation n'est pas très différente de celle qui fut déterminée expérimentalement en Mer du Nord, et utilisée par LEENDERTSE (1967) (voir figure 28 )

$$C = 19,4 \text{ Log} (0,3 H)$$

Sur la figure (28) est également reportée la variation du coefficient de CHEZY correspondant à un coefficient de STRIKLER de 33, peu différent de la valeur numérique adoptée ici.

Cette même formule (68) a également été utilisée par KAMPHUIS (1970), pour l'estuaire du Saint Laurent, schématisé par un modèle unidimensionnel, sous la forme suivante :

$$C = 7,8 \text{ Log} \left( \frac{6H}{a} \right)$$

où l'expression de  $a$  n'est pas donnée par l'auteur, mais représente probablement la rugosité du fond.

On peut enfin noter que pour une hauteur d'eau de l'ordre de 20 m, la formule (68) correspond à l'expression :

$$C = 4 (U^2 + V^2)$$

que l'on pourra rapprocher des fonctions empiriques citées au paragraphe (III, A).

e) Conditions aux limites ouvertes

Le modèle étant relié dans la région de Honfleur au modèle du secteur amont, aucune information particulière n'est nécessaire à cet endroit. La seule limite ouverte est donc la limite extérieure ( $\varphi = 49^\circ 41' N$  et  $G = 15' W$  approximativement), où il faudrait en toute rigueur connaître par des moyens extérieurs au modèle les fonctions  $U(t)$ ,  $V(t)$ ,  $\zeta(t)$  et  $C(t)$ .

En réalité, bien que d'un point de vue théorique ce problème ne semble pas parfaitement résolu, l'expérience montre que moyennant quelques approximations, la connaissance de la vitesse ou bien du niveau peut suffire, de même la connaissance de  $C$  aux limites n'est nécessaire que lorsque la vitesse est dirigée vers l'intérieur du modèle.

La condition hydrodynamique utilisée est ici une condition de niveau  $\zeta(t)$ .

Détermination des niveaux aux limites

L'existence du modèle réduit tournant de la Manche à l'Institut de Mécanique de Grenoble nous a fourni l'opportunité de disposer des prédictions de niveau sur les limites choisies.

Utilisant les données actuellement disponibles sur la marée dans la zone étudiée : constantes harmoniques résultant d'observations in situ et cartes de constantes harmoniques établies à l'I.M.G. avec l'aide du modèle réduit (LE PROVOST, 1976), les caractéristiques spectrales des lois de niveau en cinq points répartis le long de ces limites (voir figure 25) permettent une prédiction sur les frontières ouvertes, aussi bien pour des situations passées que futures.

Les niveaux sont exprimés par la formule :

$$\zeta(x, y, t) = \zeta_0(x, y) + \sum_{i=1}^n A_i(x, y) f_i \cos \left( \omega_i t + (V_0 + \mu)_i - g_i(x, y) \right) \quad (69)$$

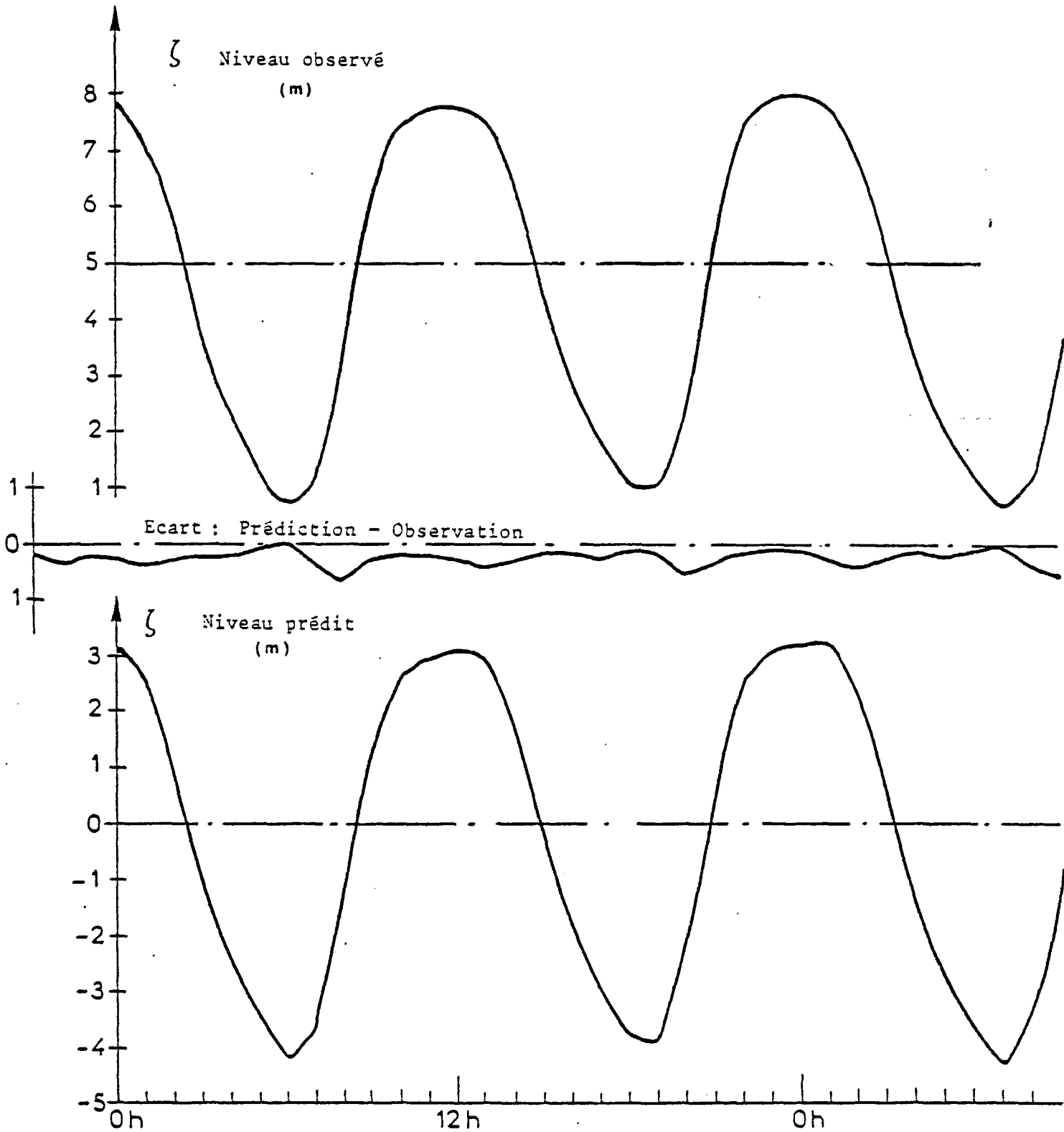
$i$  : indice des ondes constituant le spectre, limité ici à  $n = 29$

$\omega$  : pulsation de chaque composante

Liste des composantes  
utilisées pour la prédiction

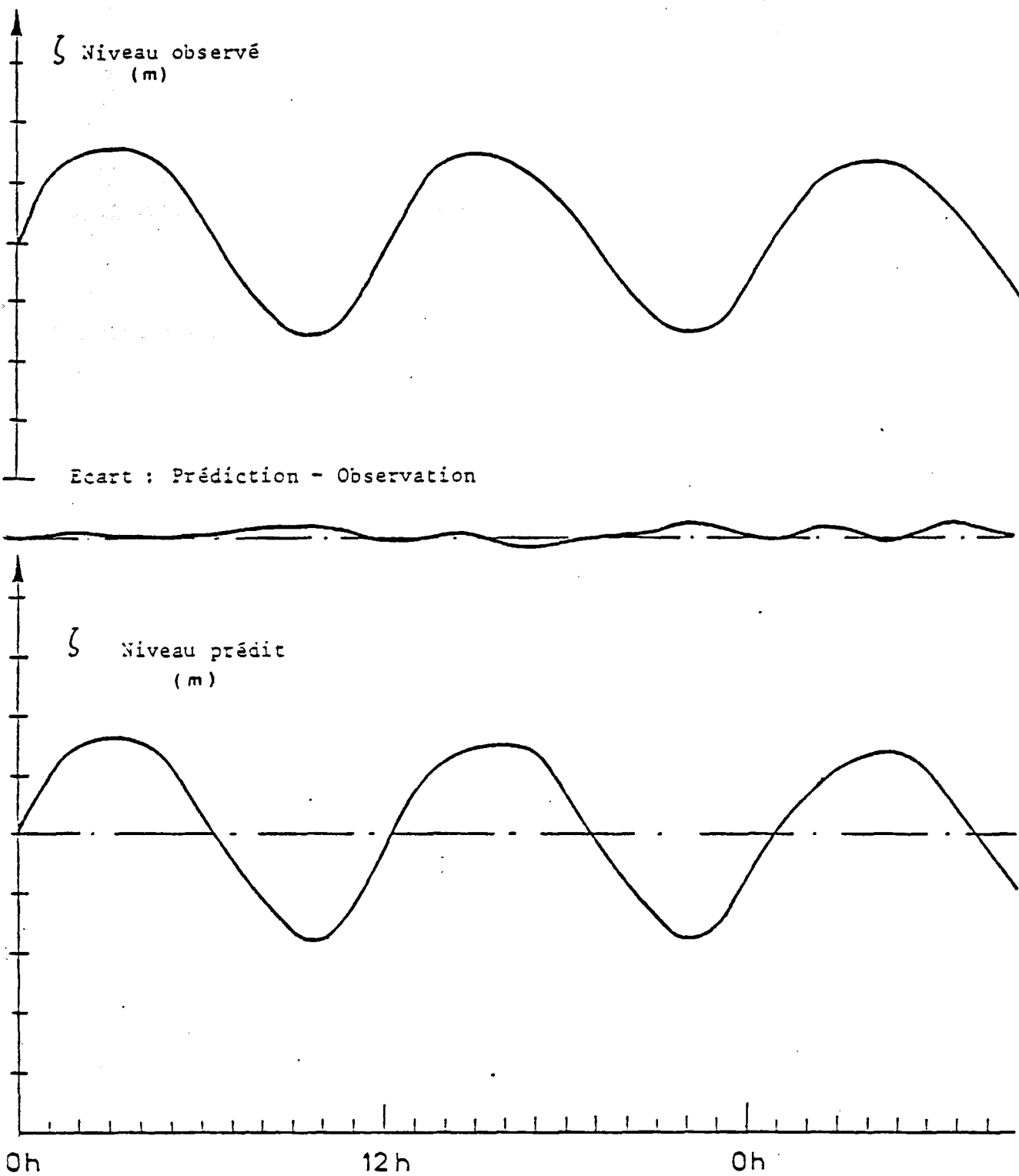
N°	ONDE	Vit. ang. d°/h	Fréq. Hz.10 <sup>-4</sup>
1	MS <sub>f</sub>	1, 015 595 8	0, 007 838 7
2	O <sub>1</sub>	13, 943 035 6	0, 107 585 2
3	P <sub>1</sub>	14, 958 931 4	0, 115 423 9
4	K <sub>1</sub>	15, 041 068 6	0, 116 057 6
5	MNS <sub>2</sub>	27, 423 833 7	0, 211 603 7
6	2MK <sub>2</sub>	27, 896 071 2	0, 215 170 3
7	2N <sub>2</sub>	27, 895 354 8	0, 215 241 9
8	K <sub>2</sub>	27, 968 208 4	0, 215 804 1
9	2MS <sub>2</sub>	27, 968 208 4	0, 215 804 1
10	N <sub>2</sub>	28, 439 729 5	0, 219 442 4
11	Y <sub>2</sub>	28, 512 583 1	0, 220 004 5
12	3MSN <sub>2</sub>	28, 512 583 1	0, 220 004 5
13	M <sub>2</sub>	28, 984 104 2	0, 223 642 8
14	SNM <sub>2</sub>	29, 455 625 3	0, 227 281 1
15	L <sub>2</sub>	29, 528 478 9	0, 227 843 2
16	2MN <sub>2</sub>	29, 528 478 9	0, 227 843 2
17	T <sub>2</sub>	29, 958 933 3	0, 231 164 6
18	S <sub>2</sub>	30, 000 000 0	0, 231 421 5
19	K <sub>2</sub>	30, 082 137 3	0, 232 115 3
20	MSN <sub>2</sub>	30, 544 374 7	0, 235 681 9
21	2SM <sub>2</sub>	31, 015 835 8	0, 239 320 2
22	MN <sub>4</sub>	57, 423 833 7	0, 443 085 1
23	M <sub>4</sub>	57, 968 208 4	0, 447 285 6
24	MS <sub>4</sub>	58, 984 104 2	0, 455 124 3
25	MK <sub>4</sub>	59, 066 241 5	0, 455 758 0
26	2MN <sub>6</sub>	86, 407 933 0	0, 666 727 9
27	M <sub>6</sub>	86, 952 312 7	0, 670 928 3
28	MSN <sub>6</sub>	87, 423 833 7	0, 674 566 6
29	2MS <sub>6</sub>	87, 968 208 4	0, 678 767 0
30	2MK <sub>6</sub>	88, 050 345 7	0, 679 400 8





Comparaison entre niveaux observés et prédits au Havre.

Figure 29 : Marée de vive eau



Comparaison entre niveaux observés et prédits au Havre.

Figure 30 : Marée de morte eau

$A_i$  et  $g_i$  : amplitude et phase de l'onde au point concerné

$f_i$  : facteur de correction nodale

$(V_0 + u)_i$  : phase initiale ( $t = 0$ ) de l'astre perturbateur correspondant à l'onde d'ordre  $i$

### Précision

La précision obtenue sur les niveaux peut être contrôlée dans les ports où existent des observations marégraphiques. Une comparaison avec les marégrammes du Havre, de Barfleur, et de Port en Bessin a ainsi été faite.

A propos des résultats du Havre qui nous intéressent plus particulièrement, on note (figures 29 et 30) un calage des phases excellent et un écart sur les niveaux de l'ordre de 15 à 30 cm principalement localisé aux environs de la basse mer et au début du montant, plus important lorsque le coefficient de marée est plus fort.

Il va de soi que si une "erreur" de cet ordre affectait de manière quelconque les niveaux introduits sur les limites, le calcul qui en suivrait serait fortement inexact. Heureusement, cette différence entre nature et prédiction est approximativement identique sur toute la limite, de sorte que les dénivélations imposées, bien qu'étant relativement différentes de la marée réelle, sont compatibles entre elles, et ne devraient pas conduire à des erreurs notables sur la valeur instantanée du courant. Les conclusions qui pourront en être déduites quant au courant résiduel seront moins affirmatives, ainsi qu'il sera exposé plus loin.

### Détermination du niveau moyen

La détermination des niveaux instantanés à l'aide de la formule (69) implique que soit connue au long de ces limites, la cote du niveau moyen de la mer  $\zeta_0(x,y)$ , par rapport à un plan de référence horizontal, assimilé à une portion du géoïde. Ce niveau moyen est excessivement difficile à mesurer, il n'est même probablement pas constant (fonction du temps) sous l'effet de phénomènes de très longue période, mal connus, tels des effets météorologiques ou des réajustements istériques par exemple. Ici également, n'est véritablement importante que la position relative de ce niveau moyen

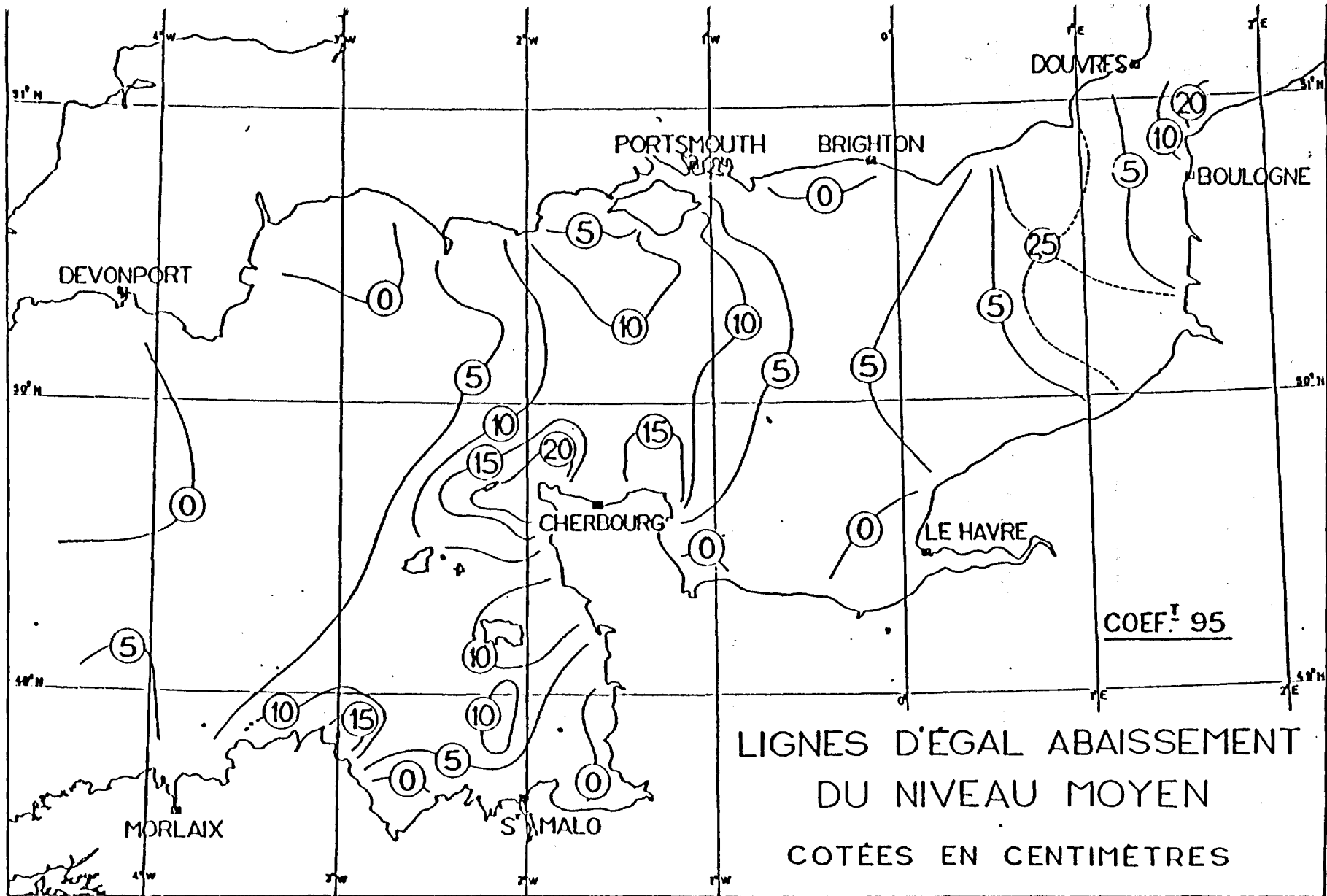


Figure 31 d'après G. CHABERT D'HIÈRES et C. LEPROVOST 1970

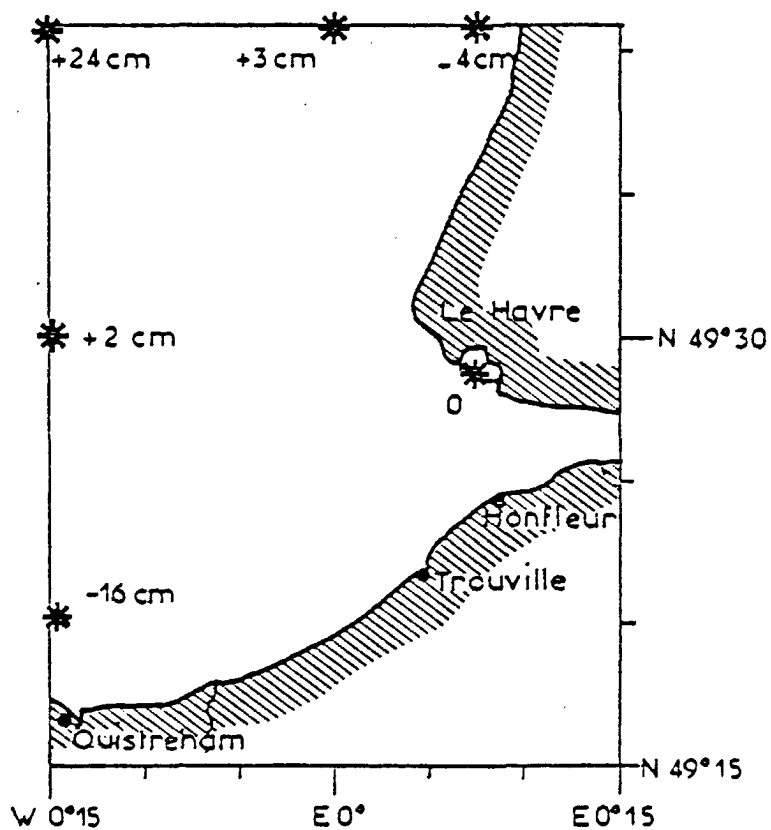


Figure 32 : Cote des plus basses mers relativement à la marée du Havre, le niveau moyen au long de ces limites étant supposé horizontal.

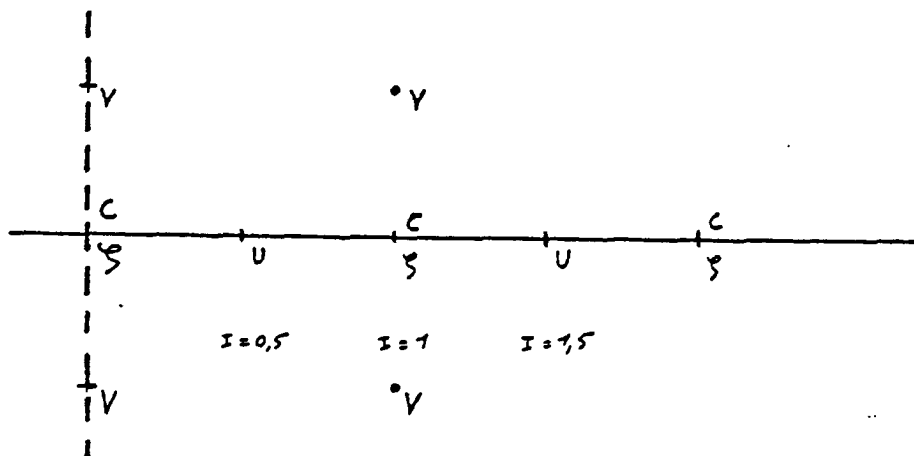
au long des limites. Les observations du modèle de Grenoble (LE PROVOST, 1974) montrent un niveau moyen sensiblement horizontal sur la limite du modèle (figure 31). On pourra donc fixer cette référence à 4,8 m ou 4,9 m sur toute cette limite.

### Réduction des sondes

Ce problème n'est pas propre aux conditions aux limites, mais aux niveaux relatifs de la surface de la mer dans le secteur étudié. Le système d'équations à résoudre étant relatif à un plan de calcul horizontal, toutes les grandeurs qui interviennent doivent être exprimées par rapport à ce repère (en fait une faible portion de géoïde), et notamment la cote du fond. Or, les documents marins disponibles expriment ces sondes par rapport au niveau des plus basses mers théoriques (de coefficient 120), pour la France. L'amplitude de la marée, plus encore que le niveau moyen, étant fonction des coordonnées horizontales (x,y), une correction doit être effectuée pour y remédier. A la côte, on pourra se référer au nivellement N.G.F., encore que celui-ci soit relatif à un ellipsoïde; en mer il faudra connaître les caractéristiques de la marée locale.

Cette correction effectuée pour l'estuaire par simulation d'une marée de coefficient 115, s'est avérée être inférieure à 25 cm, par rapport au zéro du Havre, c'est-à-dire de l'ordre de la précision des sondages et n'a donc pas nécessité de modification des profondeurs relevées sur les cartes marines. ( Figure 32 )

### Calcul des courants sur les limites



Les niveaux seuls étant fournis sur la limite, l'algorithme complet détaillé au début de ce paragraphe ne peut être utilisé pour le calcul des composantes de la vitesse aux points situés sur, ou adjacents à, ces frontières ouvertes. Dans l'exemple ci-dessus, les composantes U sur la colonne  $i = 0,5$  et les composantes V sur la colonne  $i = 0$ , ne sont pas accessibles au calcul.

Composante perpendiculaire à la limite : seul le terme  $\partial U / \partial x$  ne peut être calculé de manière centrée au point  $i = 0,5$ , on pourra sans inconvénient notable soit décentrer la dérivée, soit l'extrapoler à partir de l'intérieur du domaine, soit même la supposer nulle.

La première solution a été adoptée ici :

$$\left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i=0,5} \neq \frac{U_{1,5} - U_{0,5}}{\Delta x}$$

Composante parallèle à la limite ; la résolution de l'équation (61) est beaucoup plus délicate que la précédente, la majeure partie des termes faisant appel à des variables extérieures au domaine d'étude.

Ici encore, on pourra soit exprimer chaque différence finie de manière décentrée vers l'intérieur du domaine, soit l'extrapoler à partir des valeurs adjacentes correctement évaluées, soit même extrapoler directement la composante de la vitesse que l'on recherche.

Cette dernière méthode a été utilisée ici du fait de sa simplicité et de sa rapidité :

$$V_{i=0} = 2V_{i=1} - V_{i=2}$$

### Concentration sur les limites

Le flux de matière en suspension attribuable à l'advection (par les courants), étant en règle générale très supérieur à la part imputable à la dispersion, l'équation (63) peut être simplifiée près des limites :

$$\frac{\partial(HC)}{\partial t} + \frac{\partial(HUC)}{\partial x} + \frac{\partial(HVC)}{\partial y} = 0$$

Au prix d'un excentrement de la dérivée spatiale perpendiculaire à la limite ouverte, cette expression pourra être résolue. Cet excentrement, qui n'est physiquement justifiable que vers l'amont, les caractéristiques du fluide étant véhiculées avec le courant, est utilisé lorsque le flux est dirigé hors du domaine. Dans le cas d'un courant dirigé vers l'intérieur de l'estuaire, on imposera les concentrations sur les limites, soit connues à partir de mesures en nature (salinité), soit supposées nulles si l'élément considéré, est présent en quantité suffisamment faible dans l'estuaire, pour que la dilution qui sera intervenue lors du franchissement des limites extérieures soit très importante (considérée infinie).

### 3 - Résultats

Pour illustrer les résultats de ce modèle, des cartes de courants heure par heure, pour une situation de marée moyenne sont présentées figures 34 à 46.

Des planches de synthèse (figures 51 à 55) regroupant l'ensemble des observations courantométriques publiées, et les résultats du modèle pour diverses conditions de marée, présentés sous forme de diagrammes polaires permettent de juger de la fidélité du modèle. Celle-ci apparaît très satisfaisante, excepté sans doute, ainsi qu'il est normal, au voisinage immédiat des limites ouvertes; notamment à l'extrémité N-W du modèle, où les deux conditions de niveau imposées, sans doute légèrement discordantes, modifient la direction du courant.

Le modèle simule toute condition de marée et de débit fluvial avec une bonne précision. On observera figure 56 que les résultats de ce modèle numérique sont légèrement meilleurs que ceux du modèle réduit de la Manche de l'Institut de Mécanique de Grenoble, bien que les informations aux limites extérieures soient fournies par ce modèle réduit.

Bien entendu, des trajectoires peuvent également être construites à partir des courants eulériens, qui reproduisent les déplacements de particules d'eau ou d'éléments en solution. On délimite ainsi des secteurs pouvant être atteints par un rejet donné, après un certain laps de temps ( par exemple) fig. (57 ).



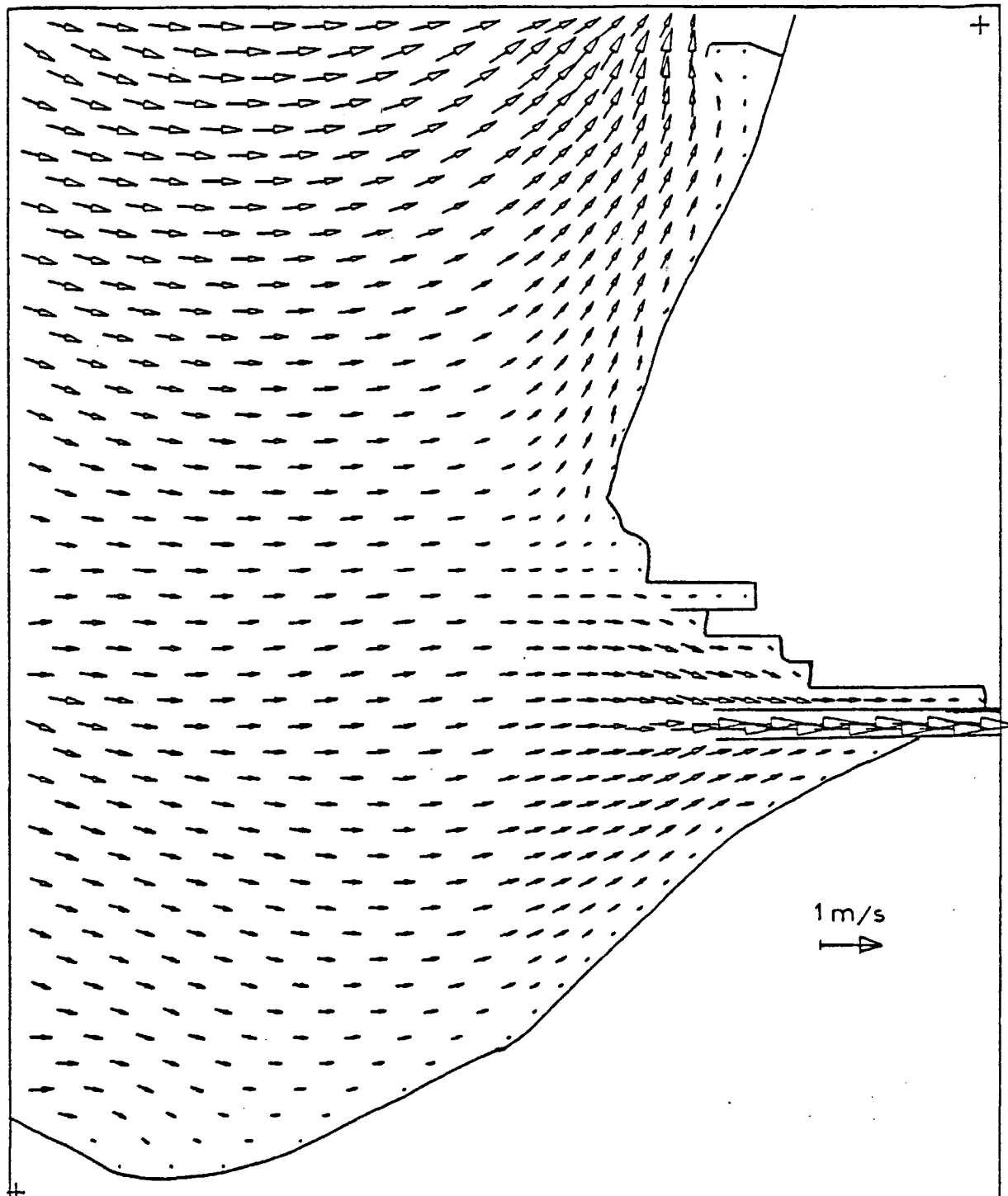


Figure 34 : Courants de marée dans l'estuaire de la Seine.

20 octobre 1978 - Marée moyenne - Etiage  $180 \text{ m}^3/\text{s}$

2 H avant la Pleine Mer du Havre

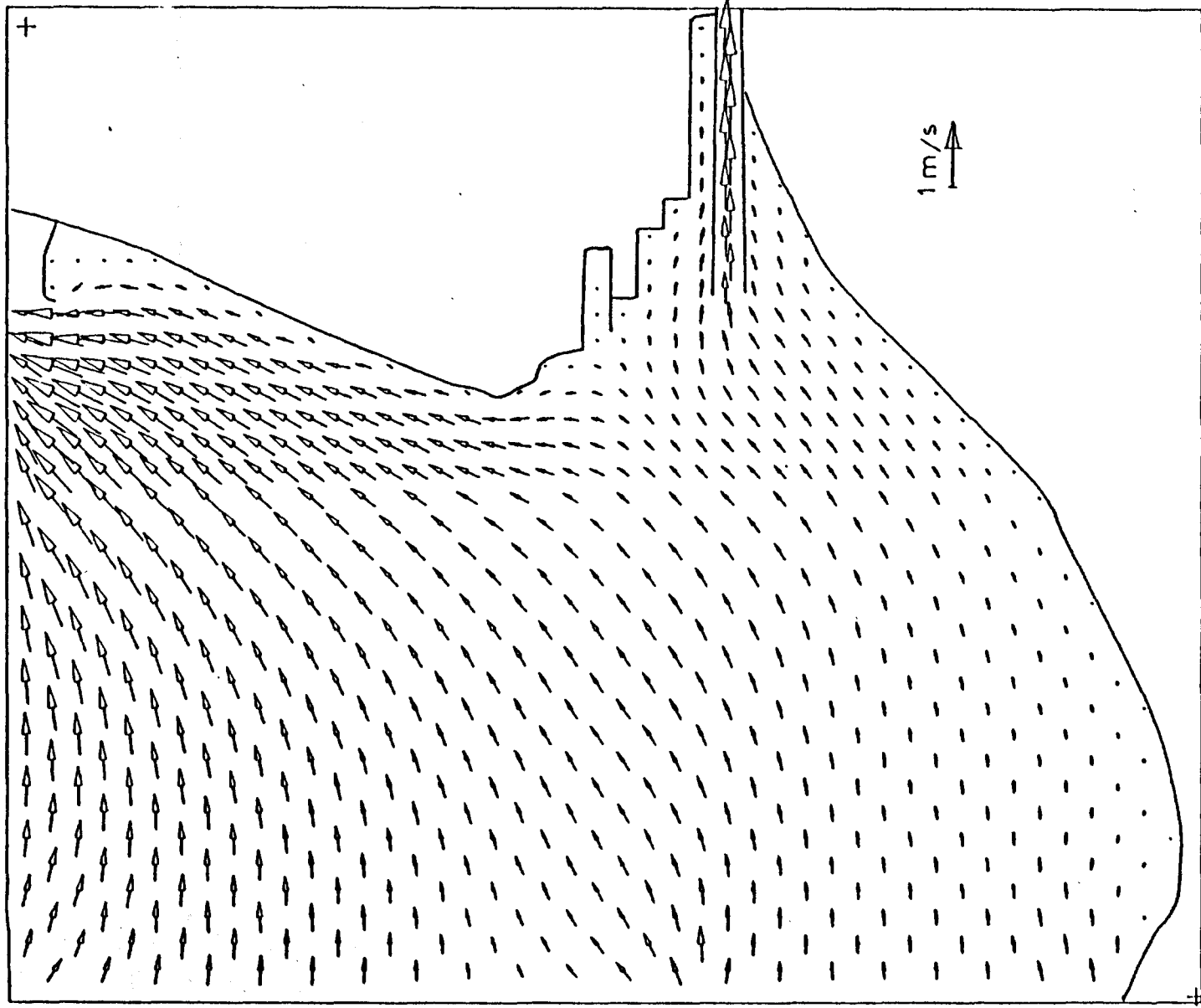


Figure 35 : Courants de marée dans l'estuaire de la Seine  
20 octobre 1978 - Marée moyenne - Etiage 180 m<sup>3</sup>/s  
1 H avant la Pleine Mer du Havre

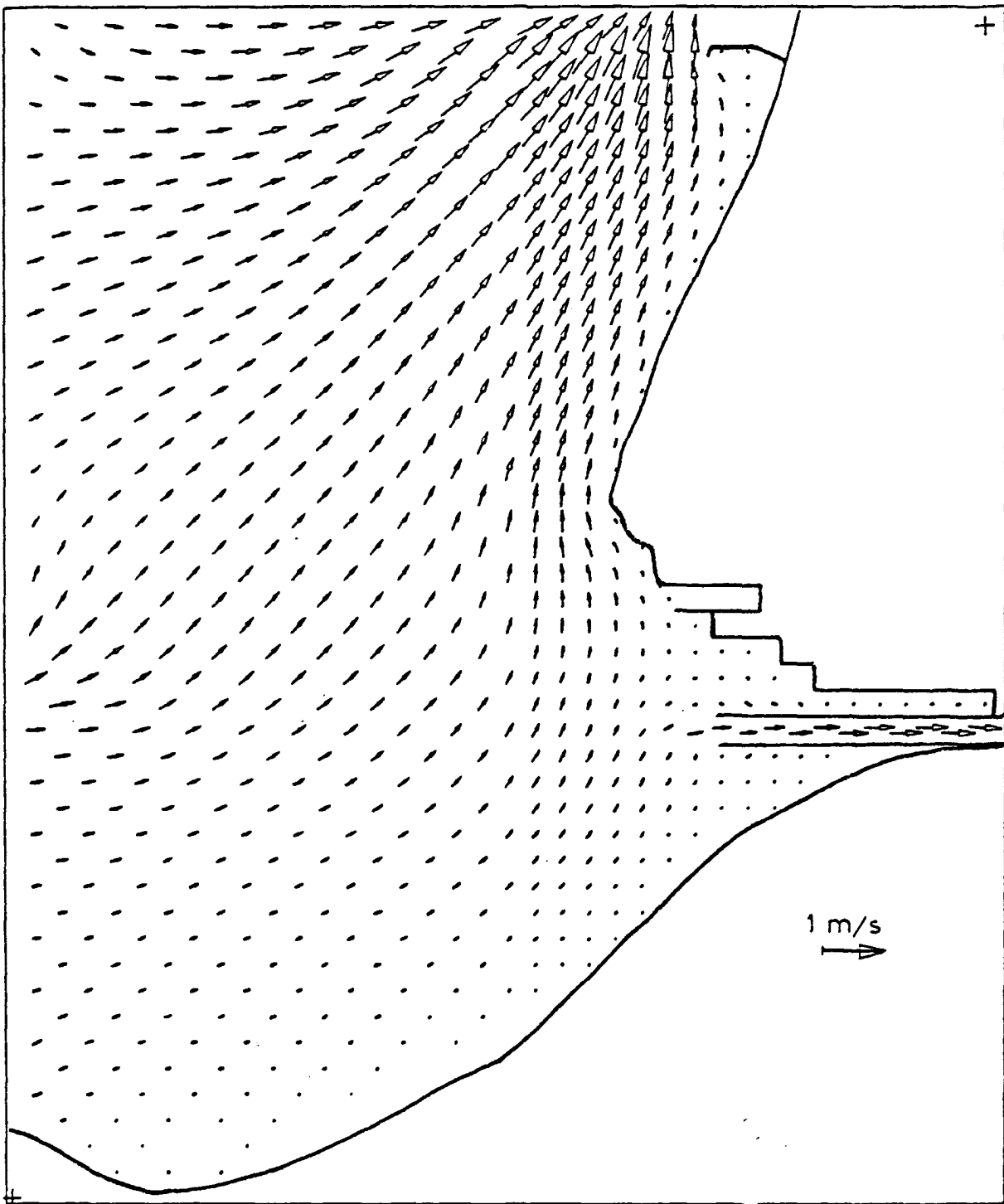


Figure 36: Courants de marée dans l'estuaire de la Seine  
20 octobre 1978 - Marée moyenne - Etiage  $180 \text{ m}^3/\text{s}$   
Pleine Mer du Havre

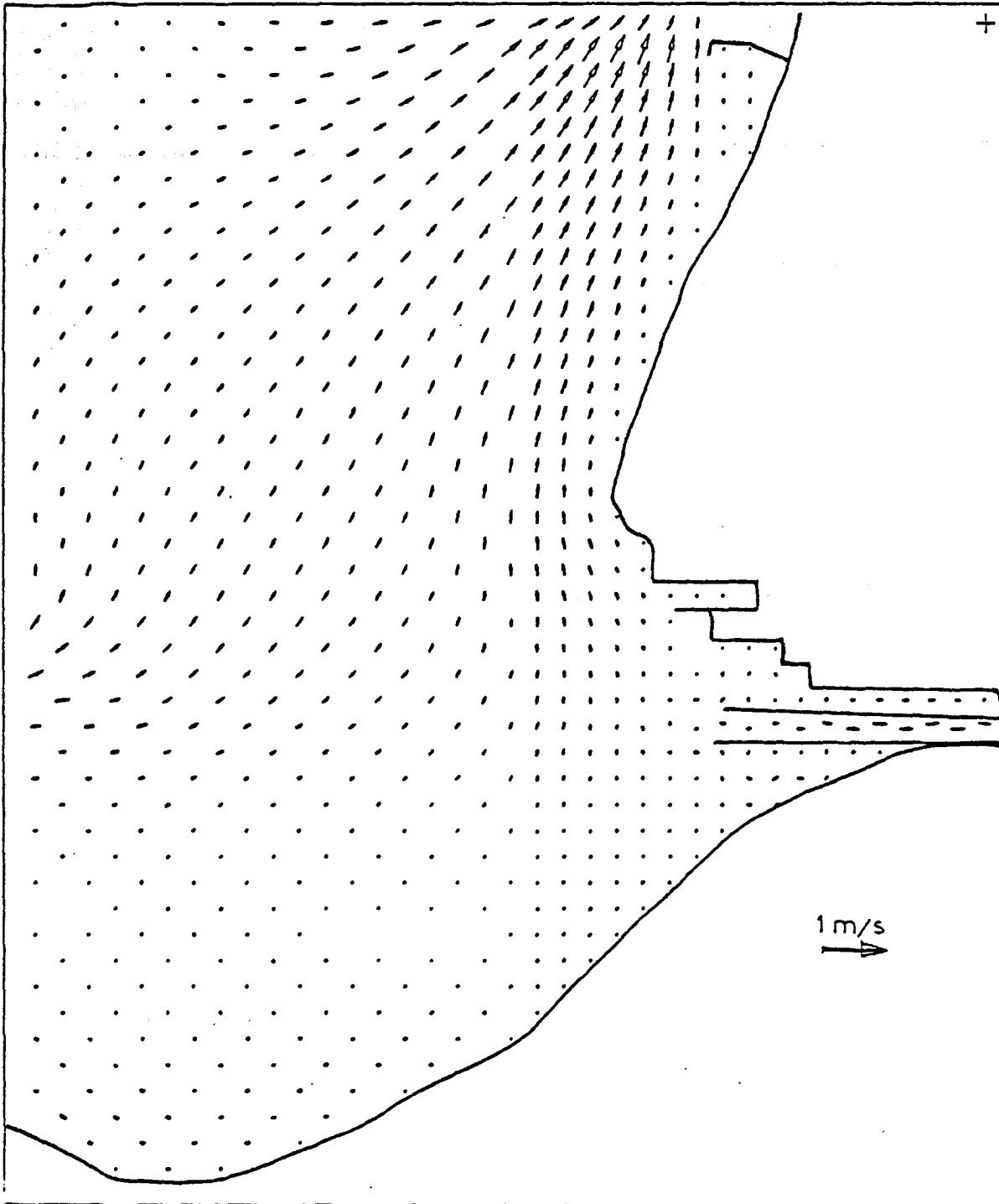


Figure 37 : Courants de marée dans l'estuaire de la Seine  
20 octobre 1978 - Marée moyenne - Etiage  $180 \text{ m}^3/\text{s}$   
1 H après la Pleine Mer du Havre

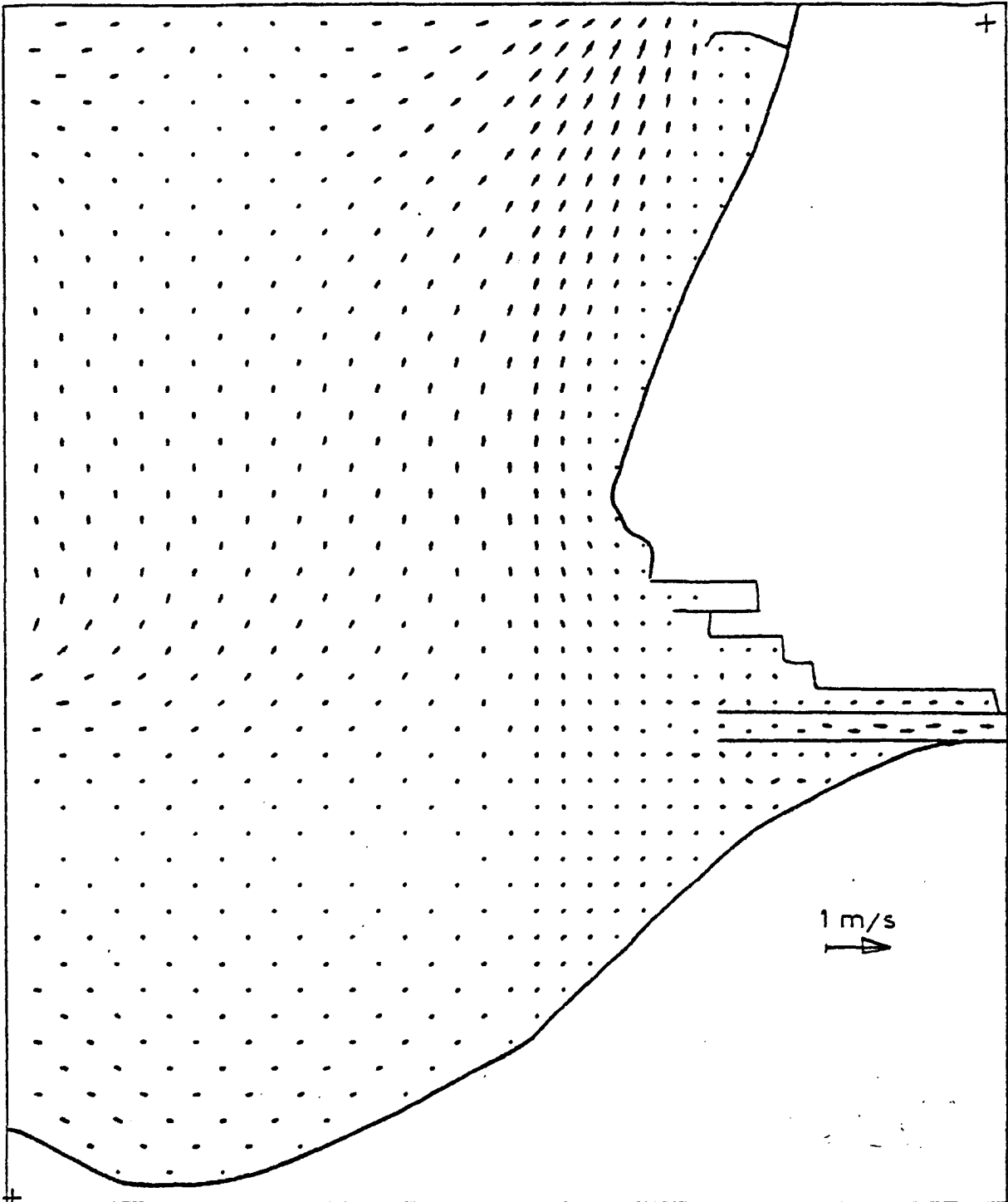


Figure 38 : Courants de marée dans l'estuaire de la Seine  
20 octobre 1978 - Marée moyenne - Etiage  $180 \text{ m}^3/\text{s}$   
1 H 30 après la Pleine Mer du Havre  
6 H avant la Basse Mer

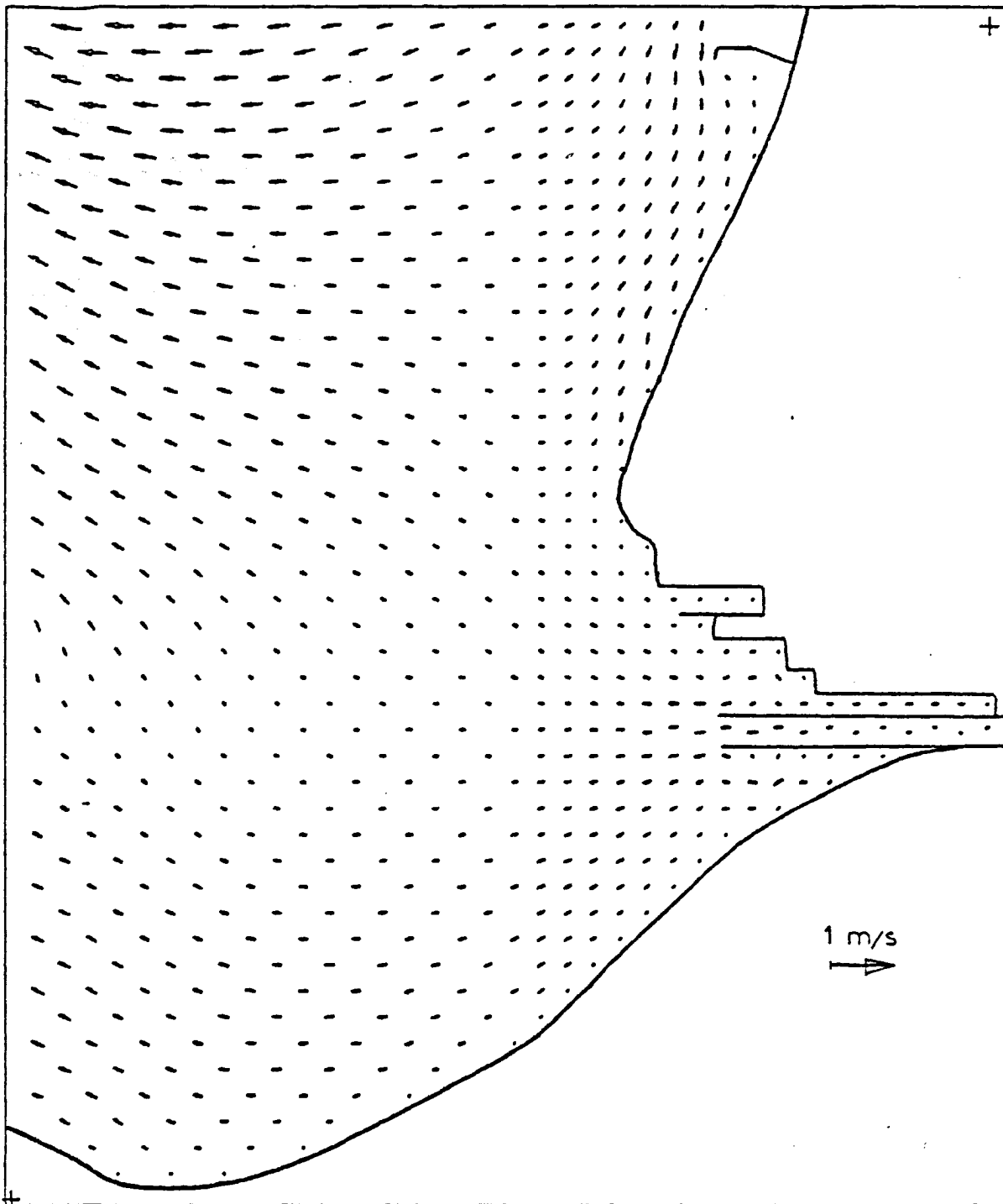


Figure 39 : Courants de marée dans l'estuaire de la Seine  
20 octobre 1978 - Marée moyenne - Etiage  $180 \text{ m}^3/\text{s}$   
5 H avant la Basse Mer du Havre

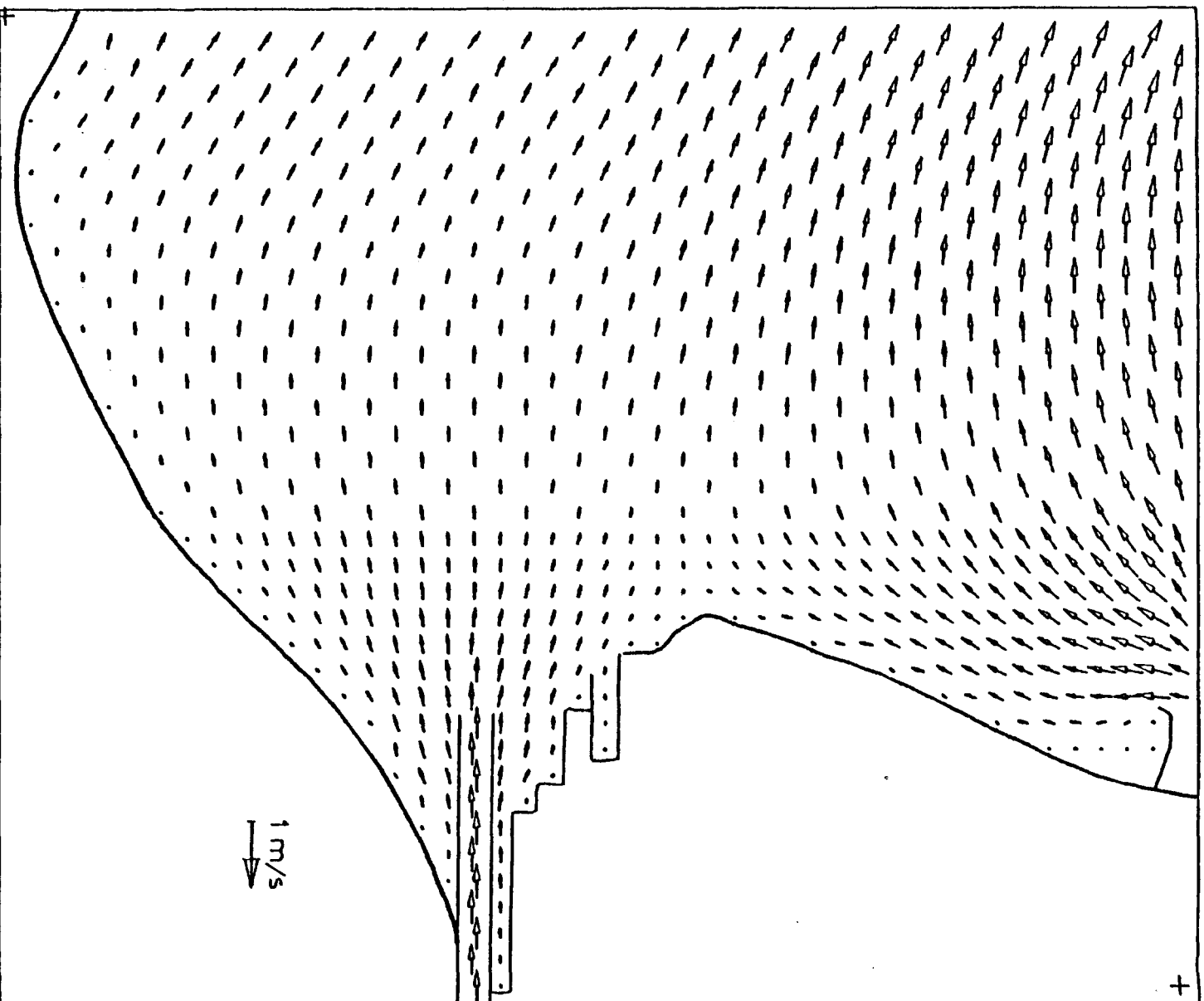


Figure 40 : Courants de marée dans l'estuaire de la Seine  
20 octobre 1978 - Marée moyenne - Etiage 180 m<sup>3</sup>/s  
4 H avant la Basse Mer du Havre

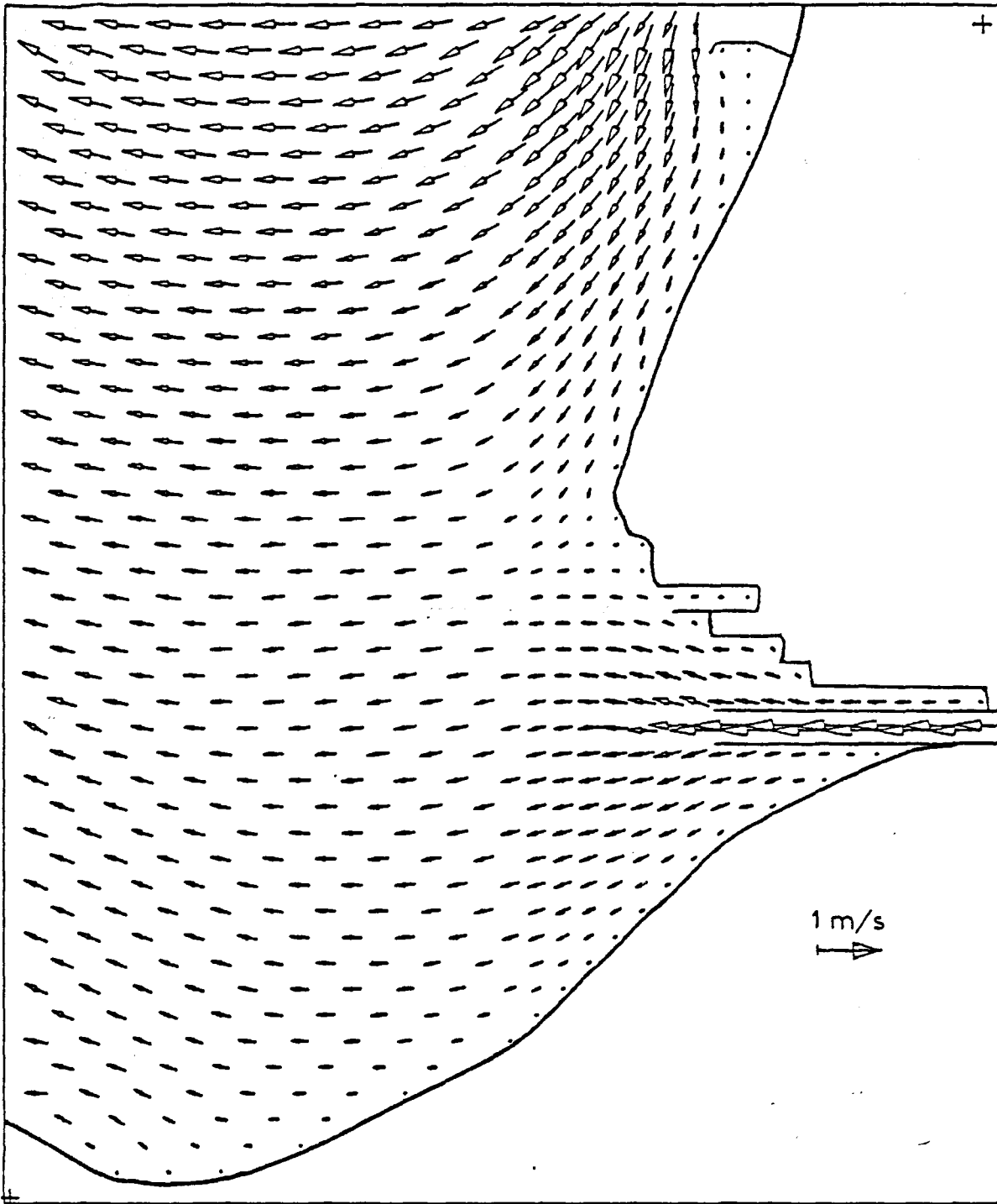


Figure 41 : Courants de marée dans l'estuaire de la Seine  
20 octobre 1978 - Marée moyenne - Etiage  $180 \text{ m}^3/\text{s}$   
3 H avant la Basse Mer du Havre



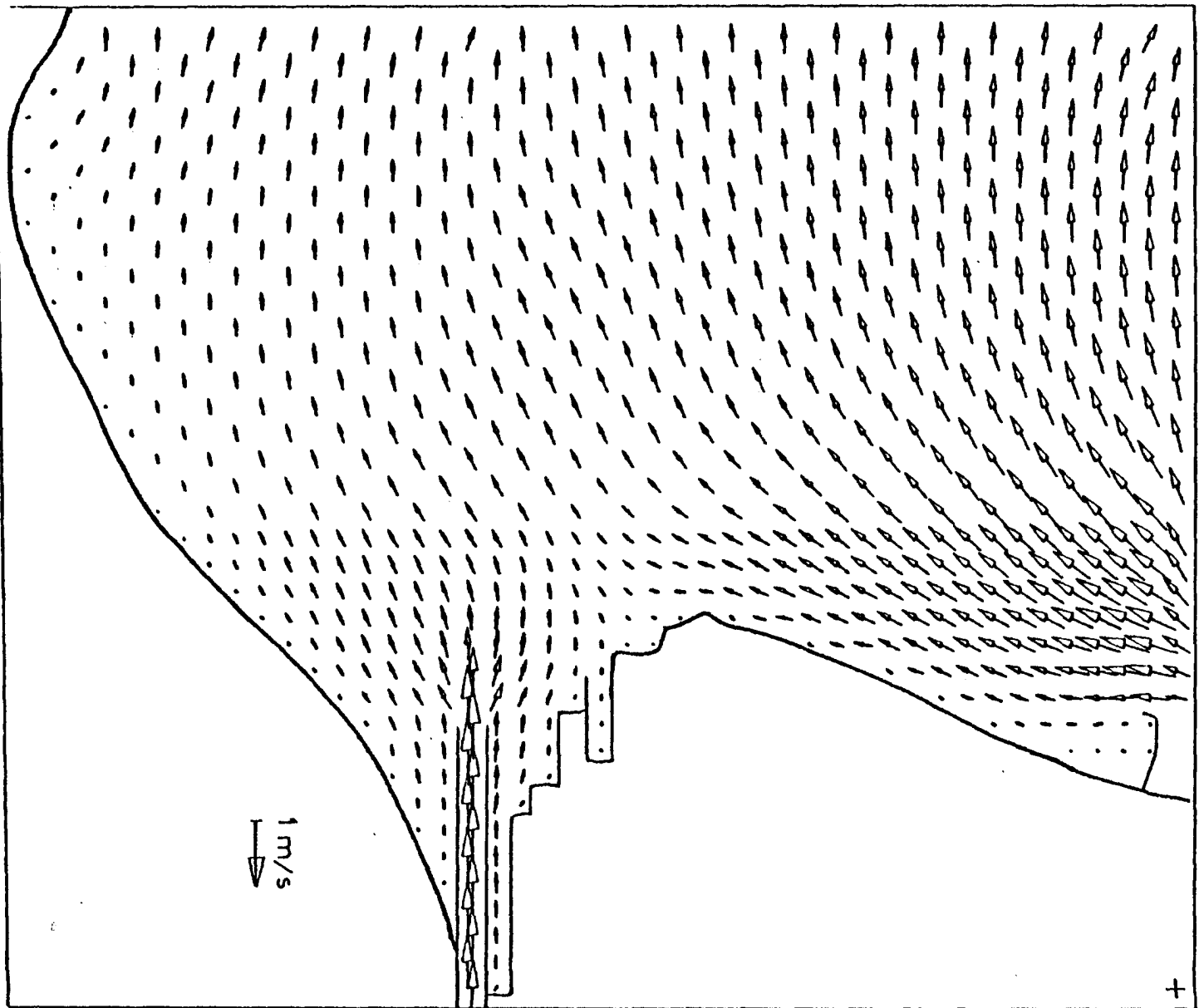


Figure 42 : Courants de marée dans l'estuaire de la Seine  
20 octobre 1978 - Marée Moyenne - Etiage 180 m<sup>3</sup>/s  
2 H avant la Basse Mer du Havre

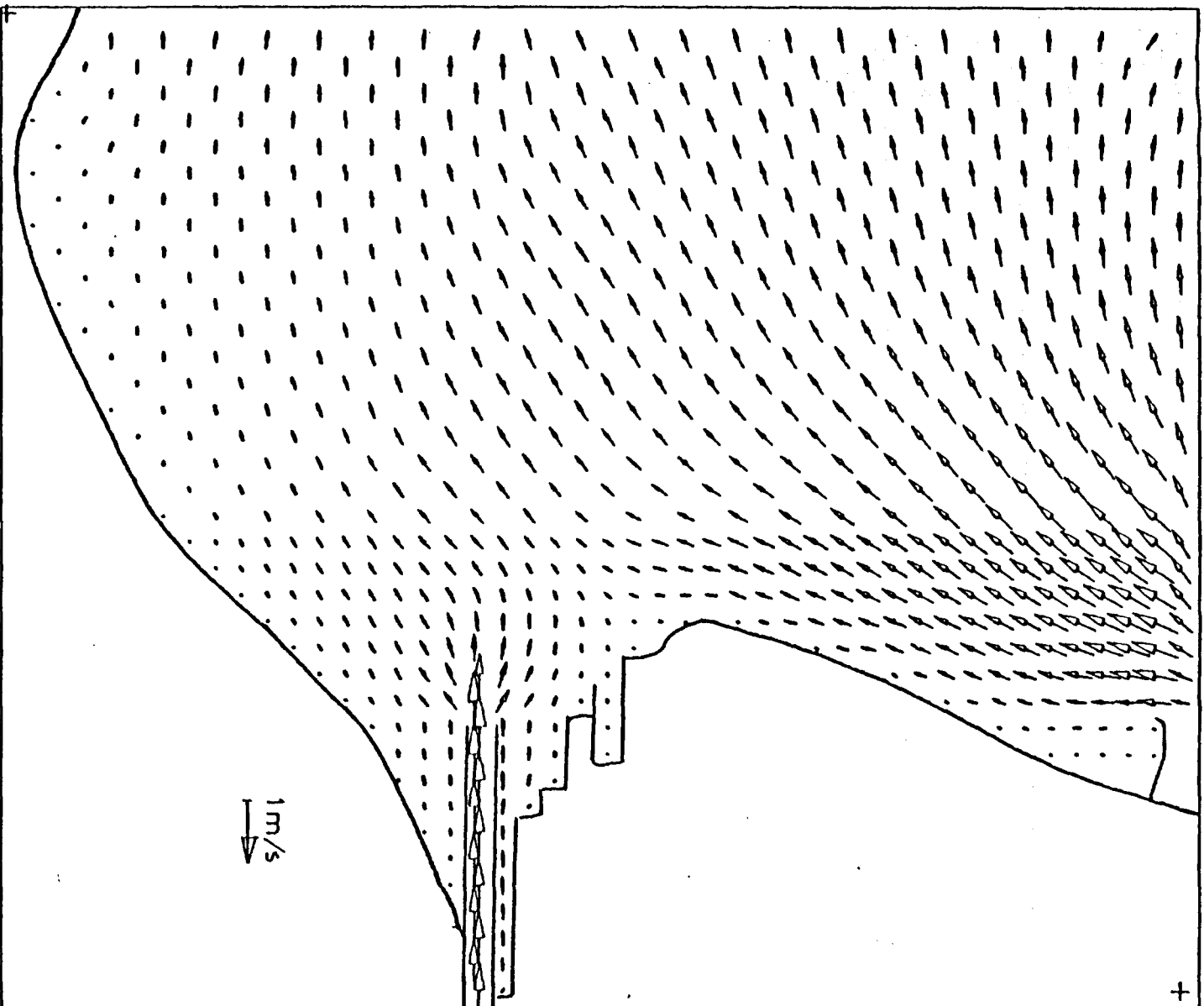


Figure 43 : Courants de marée dans l'estuaire de la Seine  
20 octobre 1978 - Marée moyenne - Etiage 180 m<sup>3</sup>/s  
1 H avant la Basse Mer du Havre

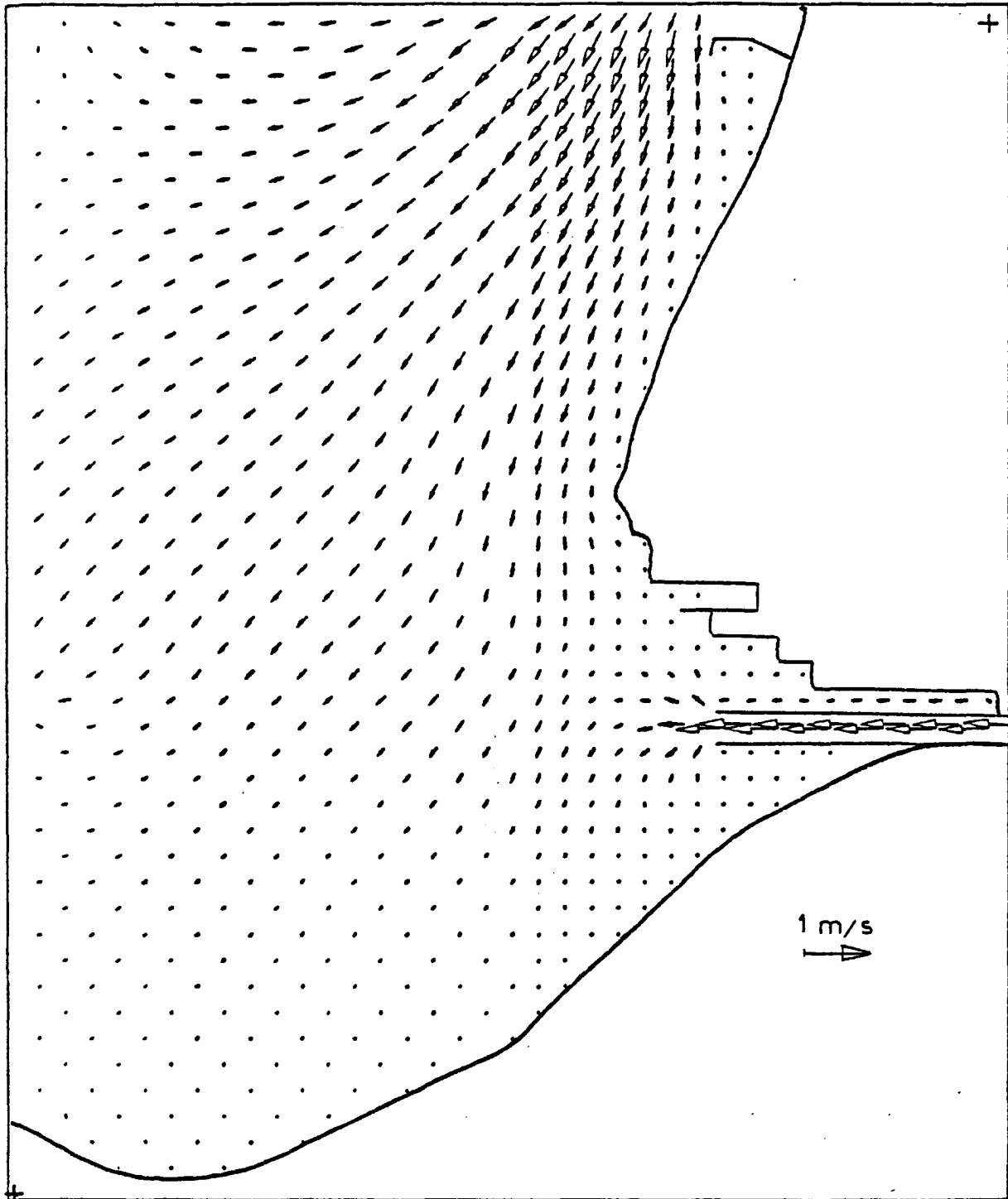


Figure 44 : Courants de marée dans l'estuaire de la Seine  
20 octobre 1978 - Marée moyenne - Etiage 180 m<sup>3</sup>/s  
Basse Mer du Havre

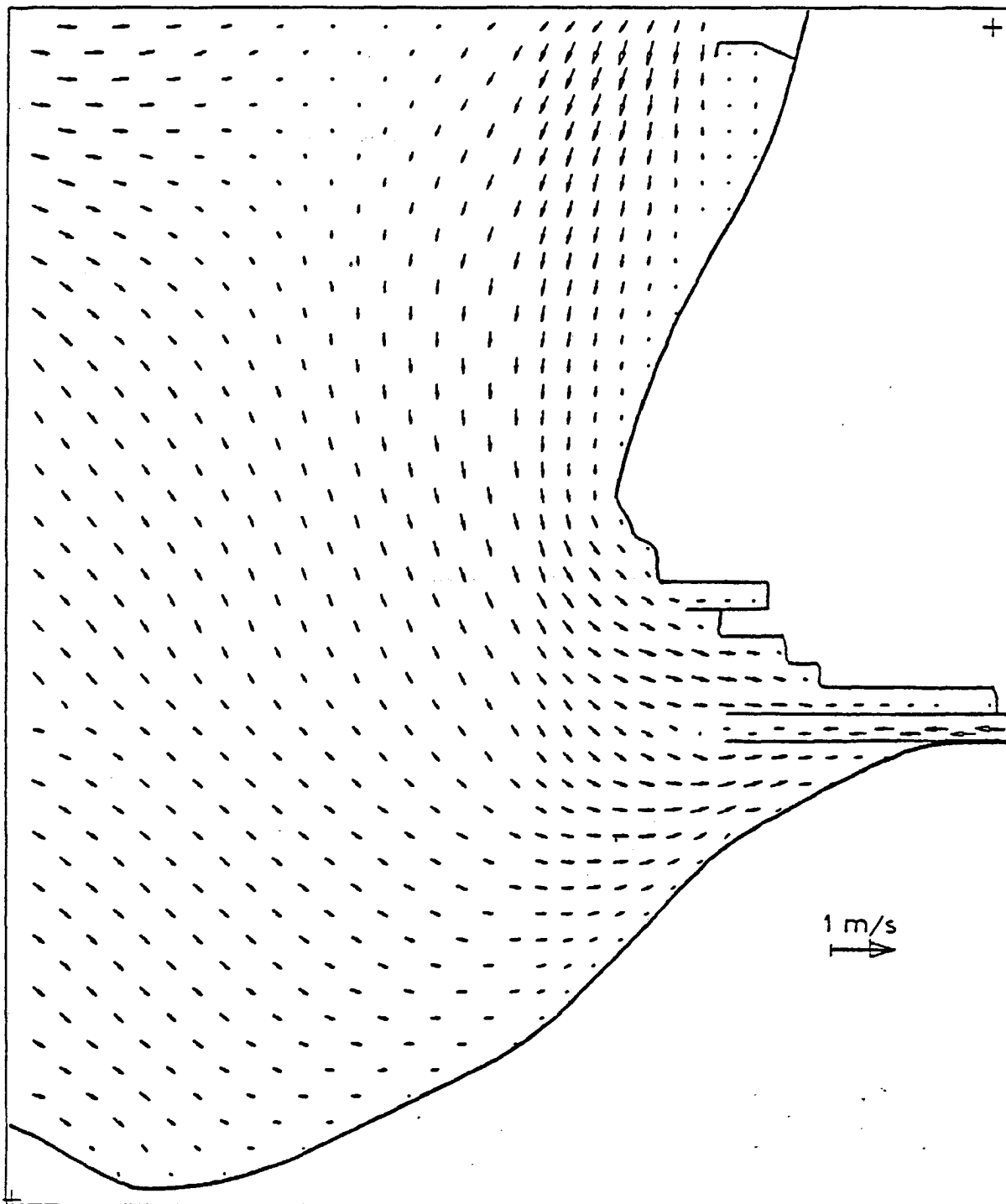


Figure 45 : Courants de marée dans l'estuaire de la Seine  
20 octobre 1978 - Marée moyenne - Etiage 180 m<sup>3</sup>/s  
1 h après la Basse Mer du Havre

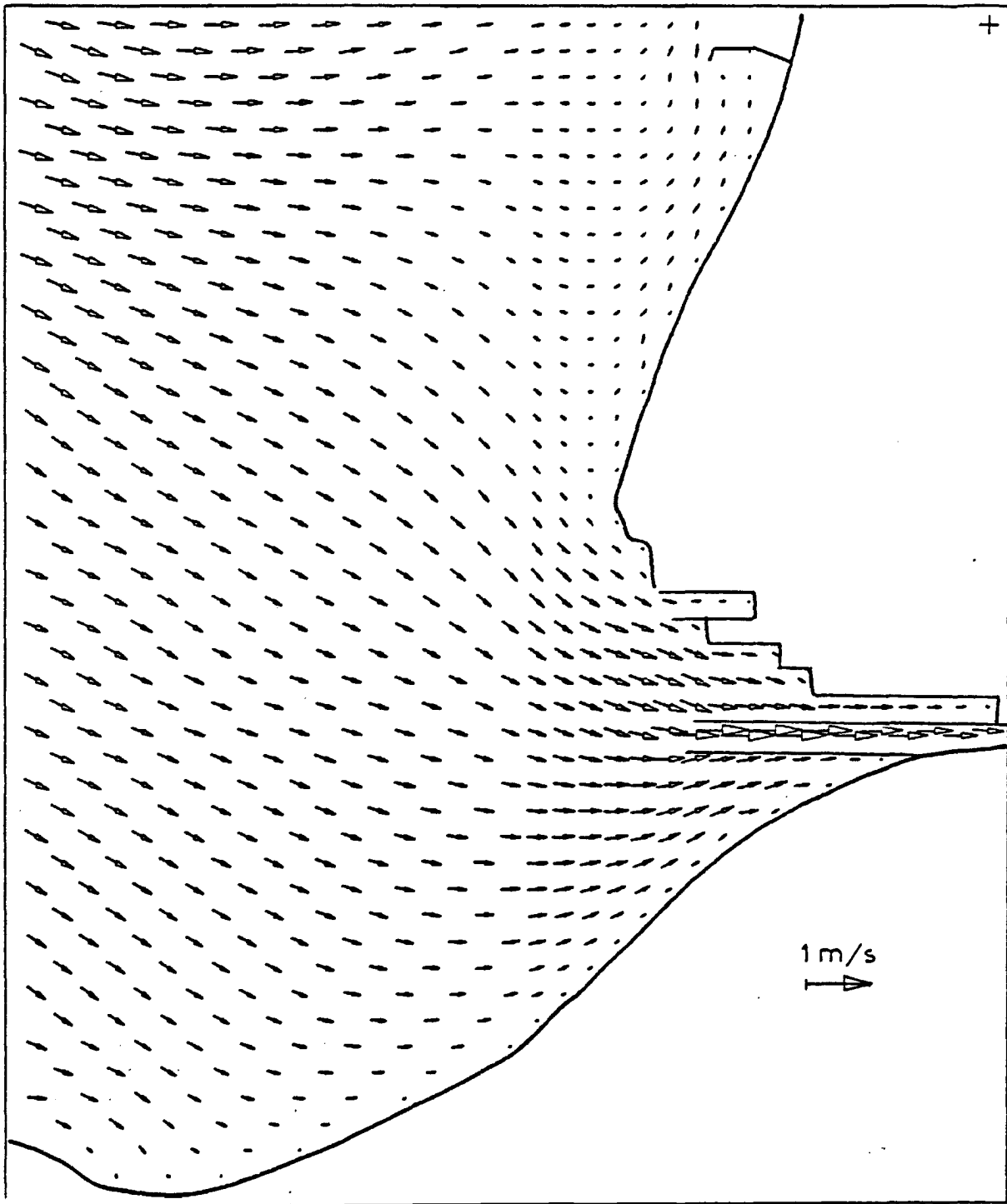


Figure 46 : Courants de marée dans l'estuaire de la Seine  
20 octobre 1978 - Marée moyenne - Etiage  $180 \text{ m}^3/\text{s}$   
2 H après la Basse Mer du Havre  
3 H avant la Pleine Mer

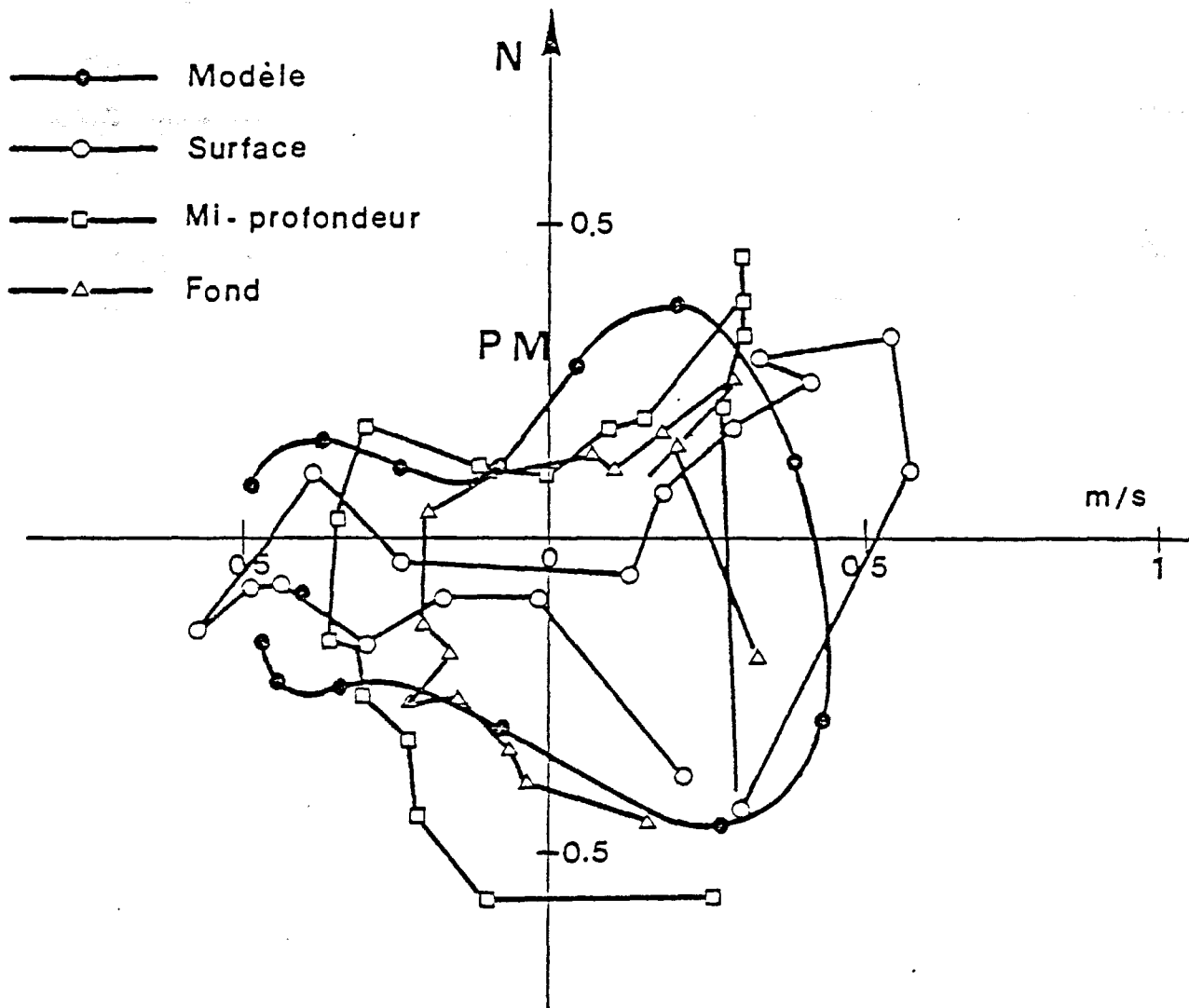


Figure 50 : Comparaison entre courants calculés et courants mesurés  
 pour une marée de vive eau, aux environs du centre du  
 modèle ( maille 16,28 )

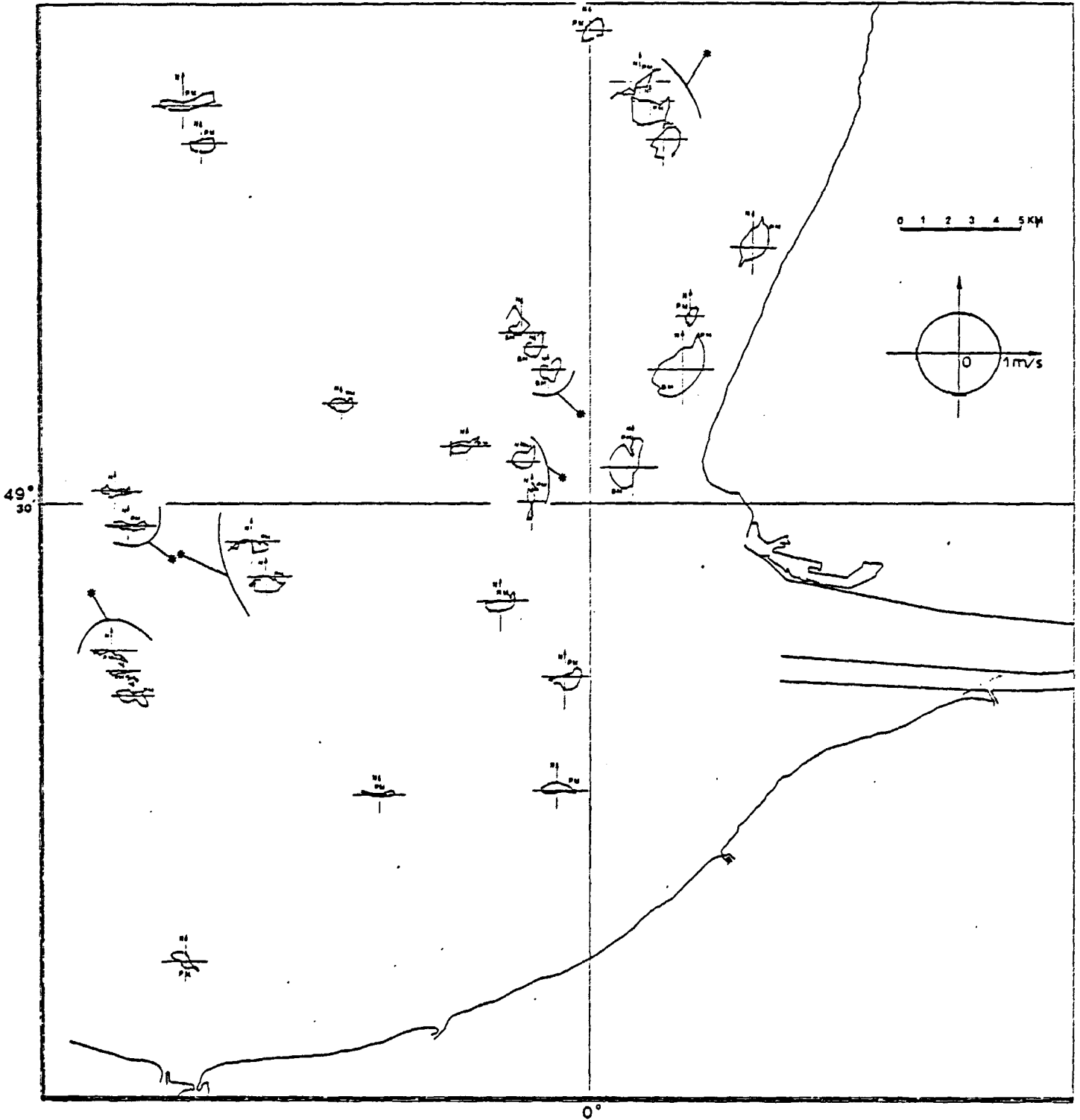


Figure 51 : Planche de synthèse de l'ensemble des observations courantométriques publiées. Marée de Morte Eau.

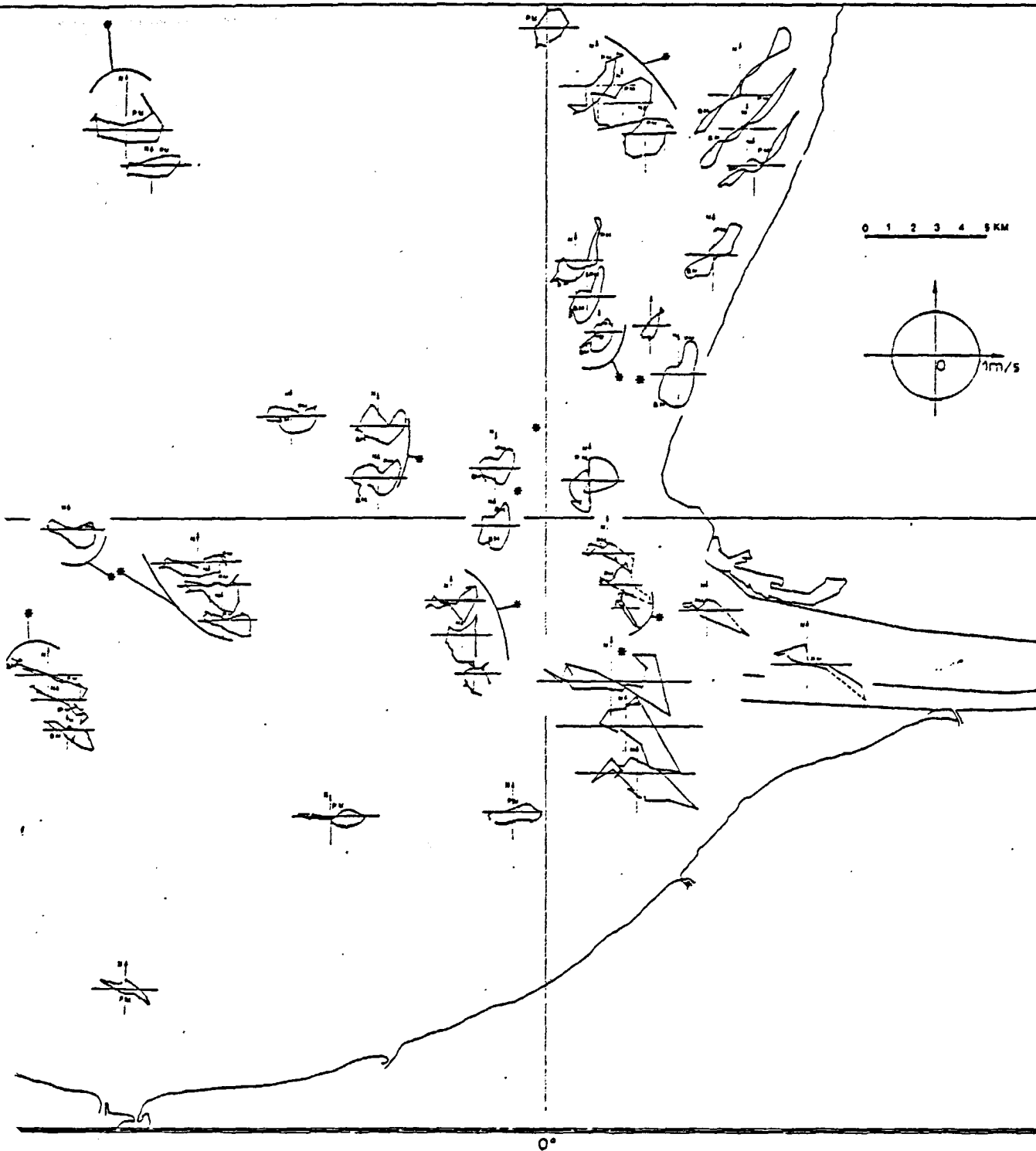


Figure 52 : Planche de synthèse de l'ensemble des observations courantométriques publiées. Marée de Vive Eau.



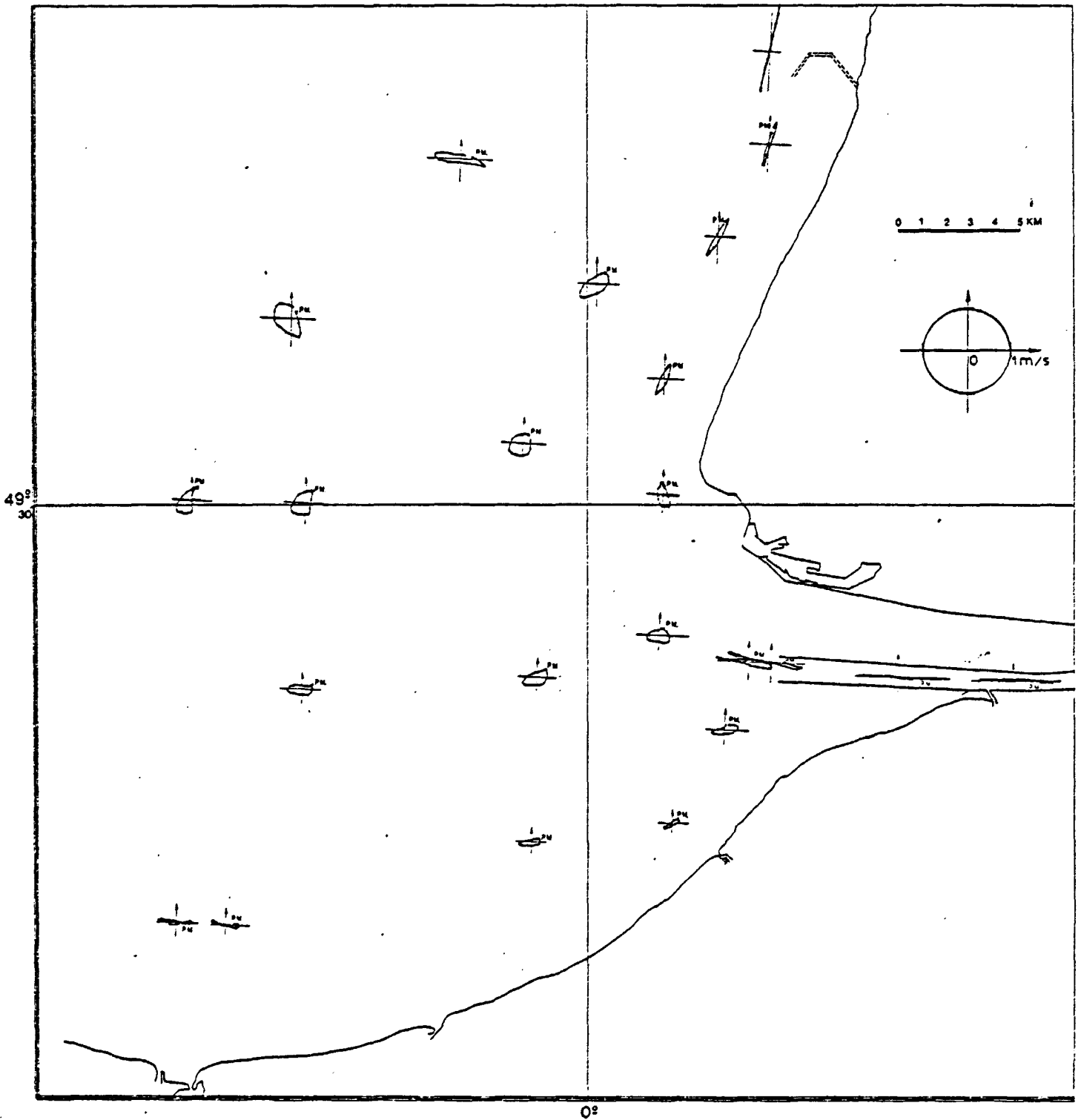


Figure 53 : Représentation par diagrammes polaires des courants calculés par le modèle. Marée de morte eau moyenne.

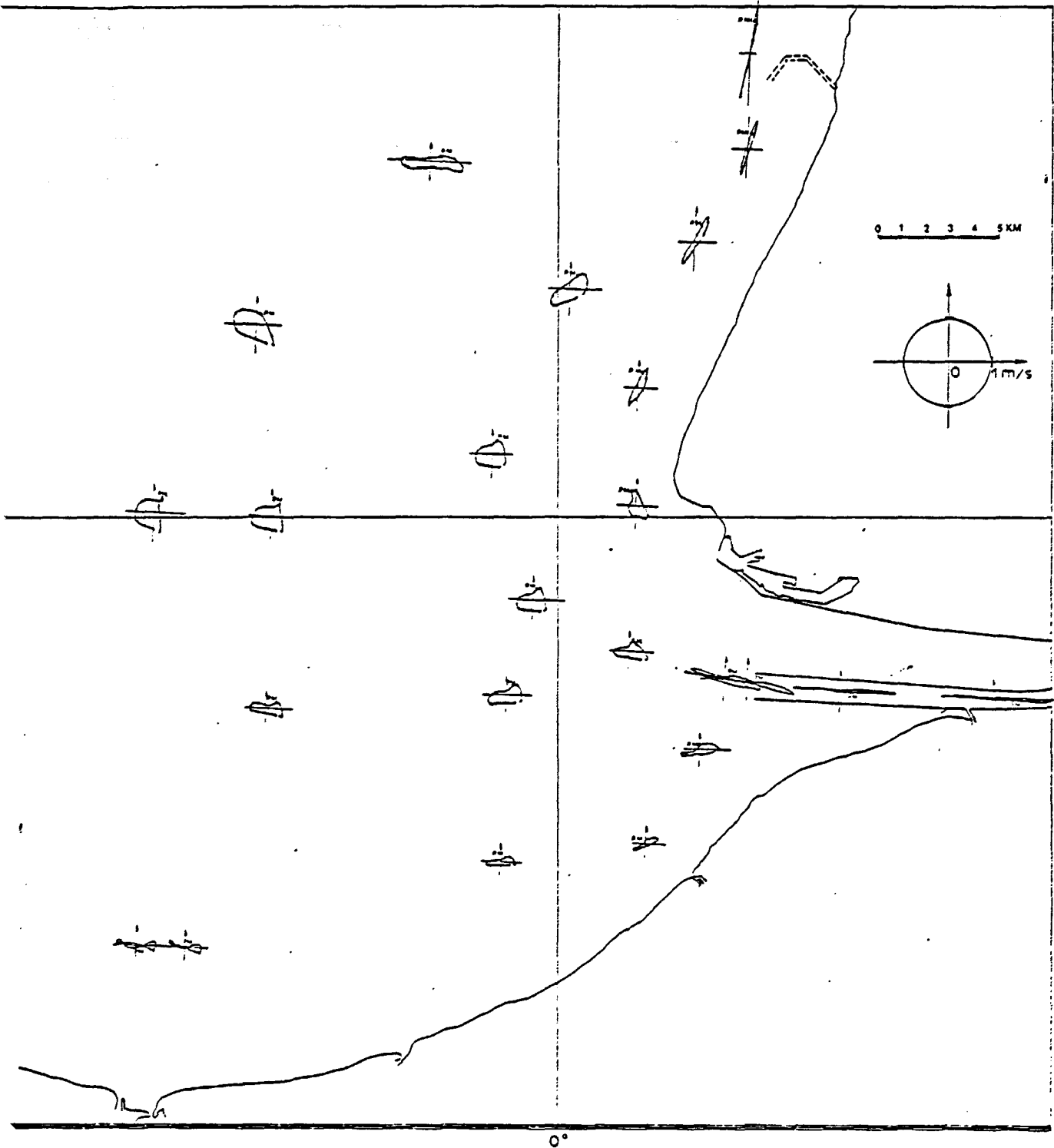


Figure 54 : Représentation par diagrammes polaires des courants calculés par le modèle. Marée moyenne.

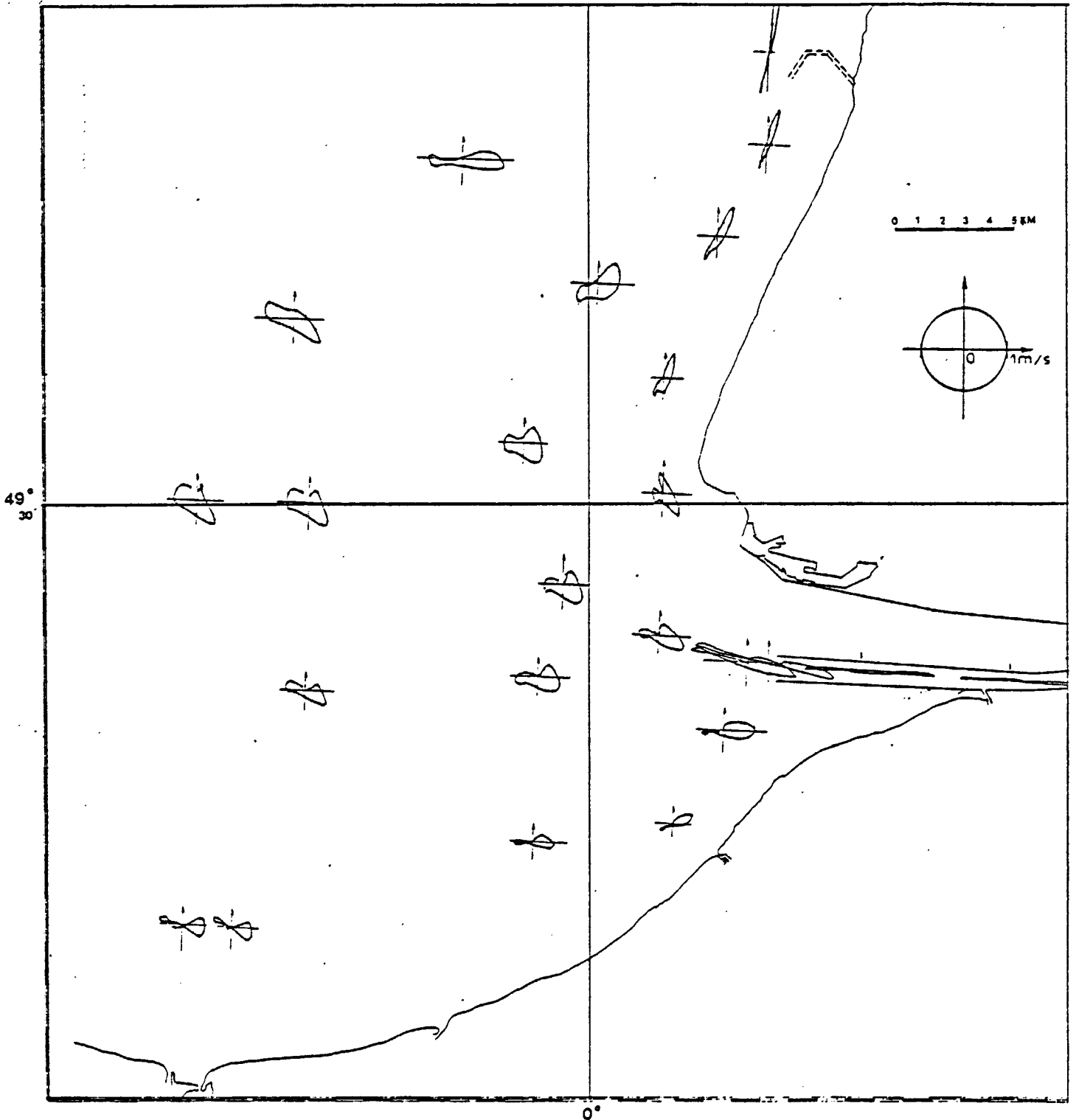


Figure 55 : Représentation par diagrammes polaires des courants calculés par le modèle. Marée de Vive eau moyenne.

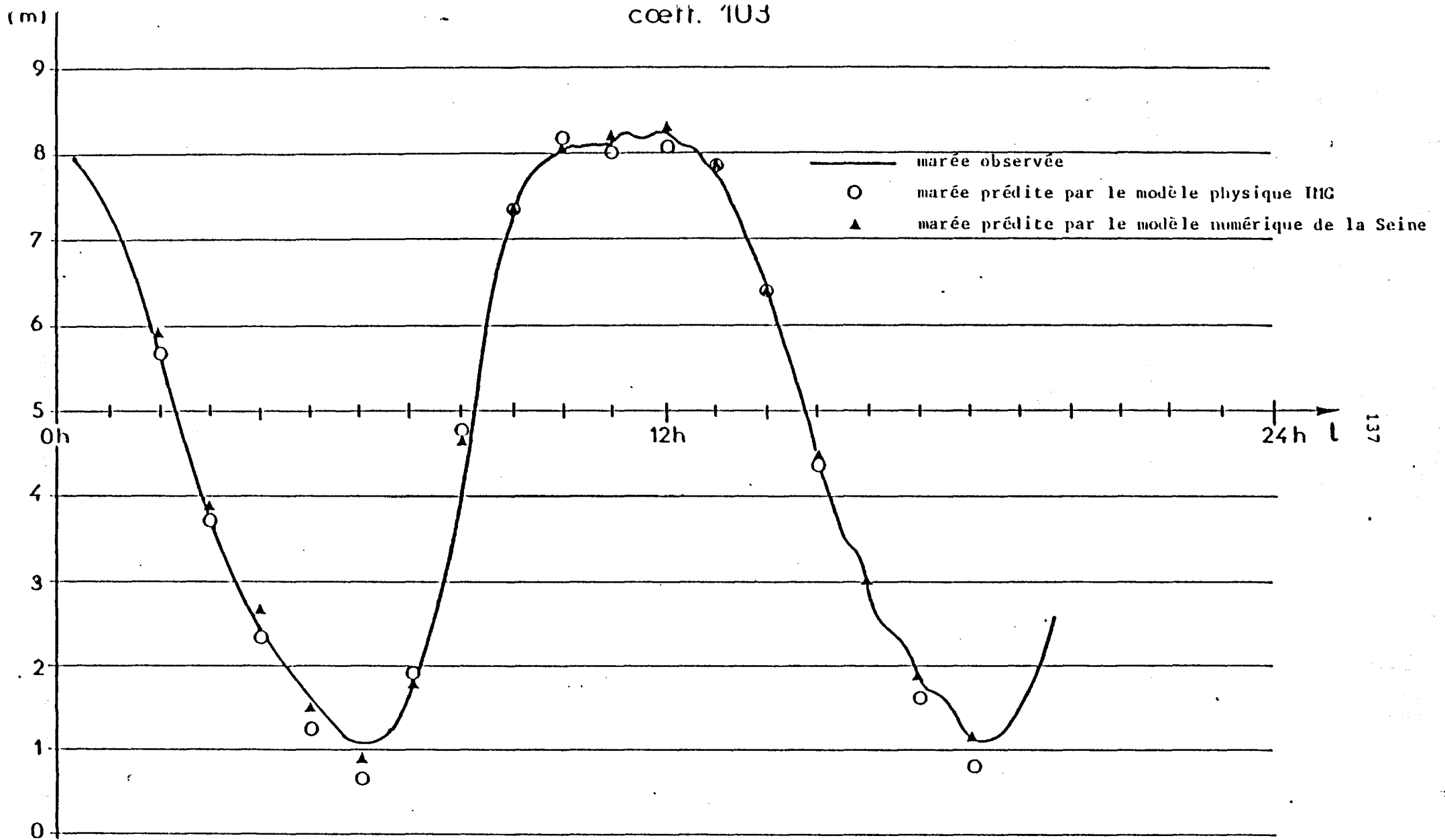
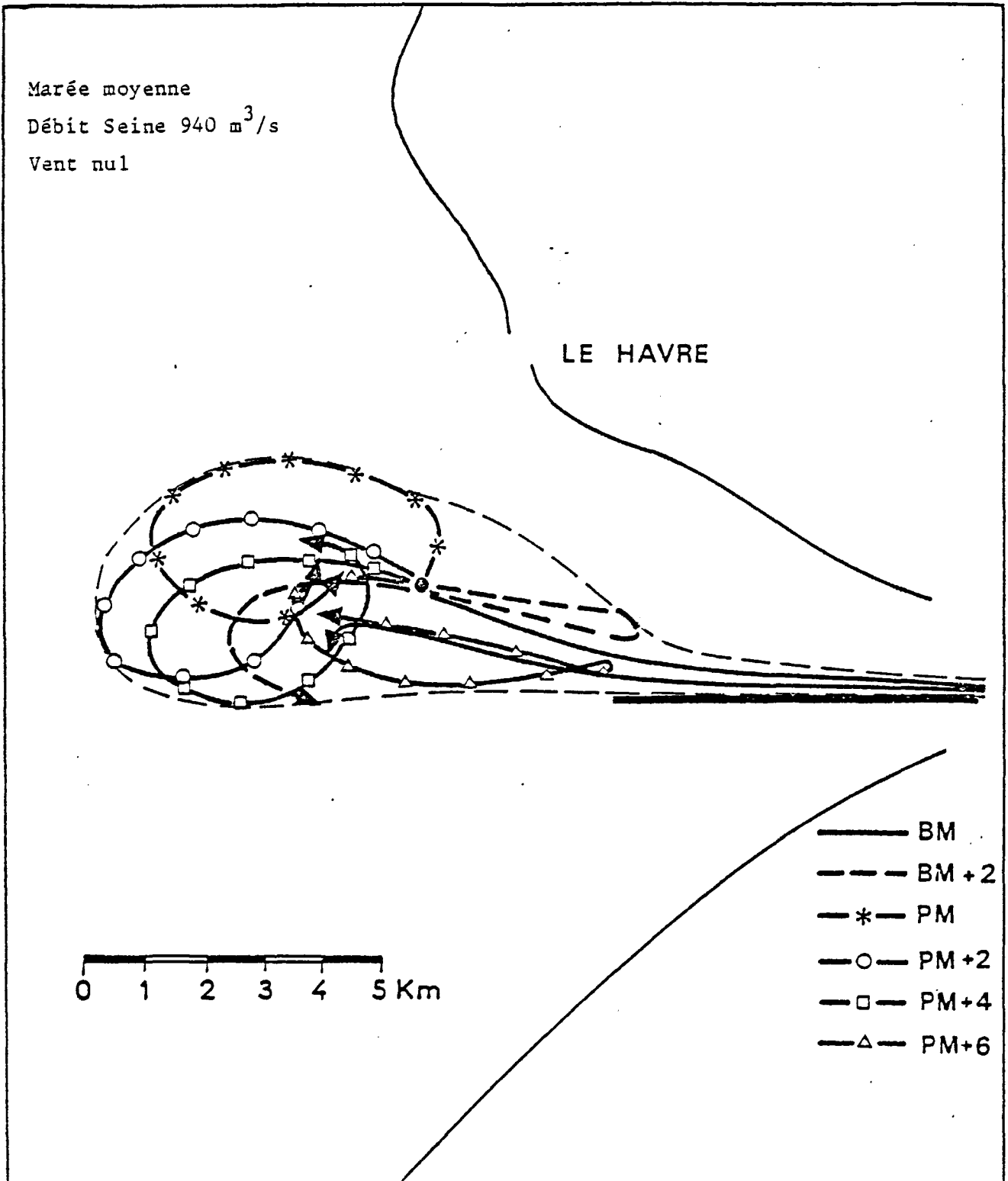


Fig. 56



Trajectoire d'une particule au cours d'une marée, selon l'heure du rejet.

Figure 57

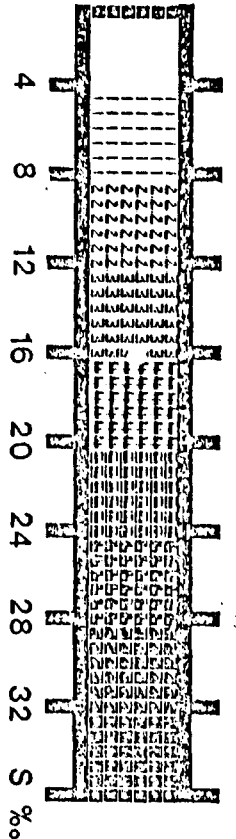
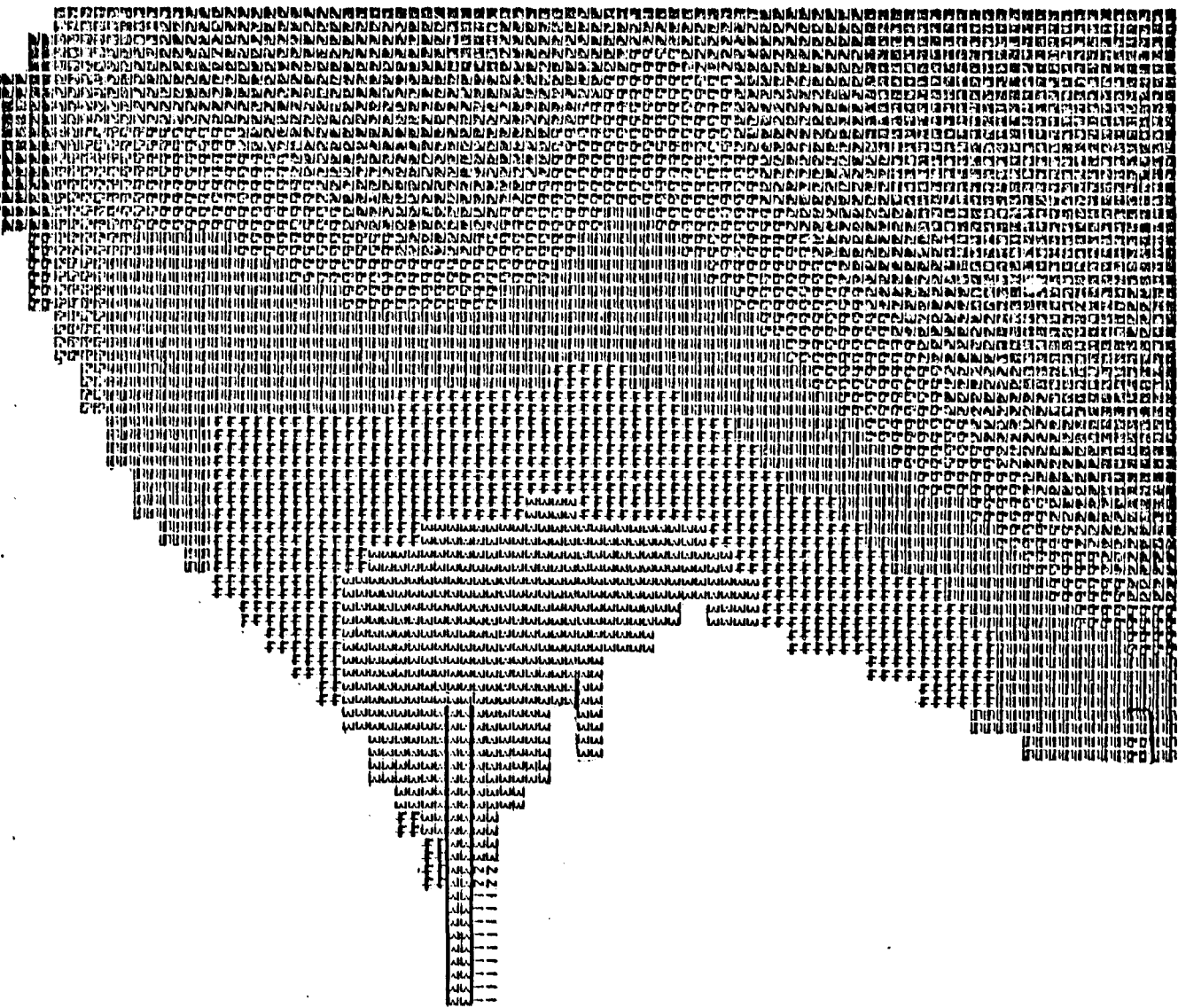


Figure 58 : Salinités calculées - Situation du 20 octobre 1978  
1 H 30 après la Pleine Mer du Havre, soit 6 H avant la Basse Mer

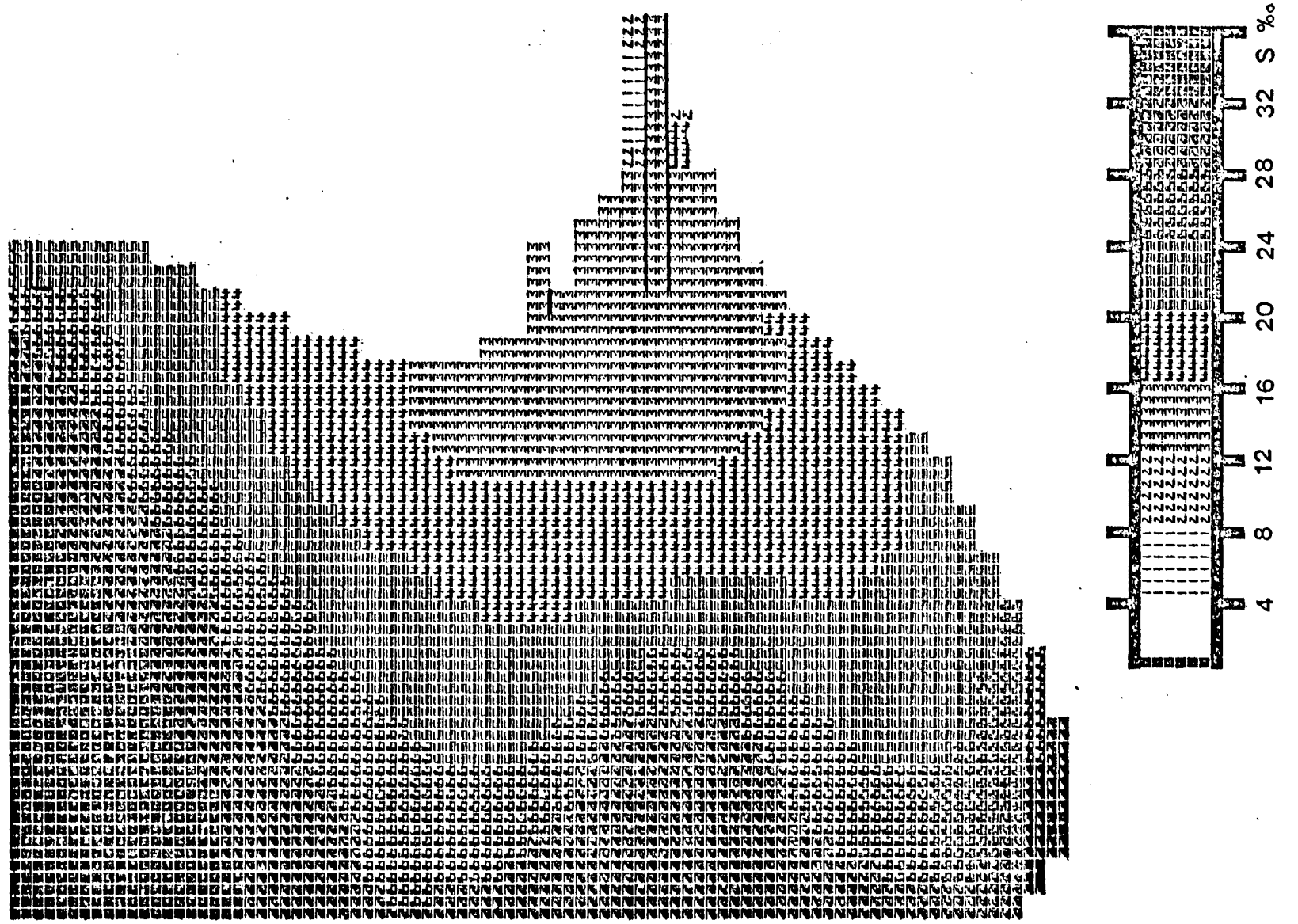


Figure 59 : Salinités calculées - Situation du 20 octobre 1978  
4 H avant la Basse Mer du Havre

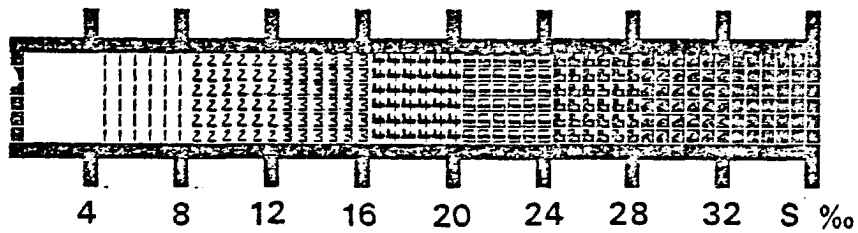
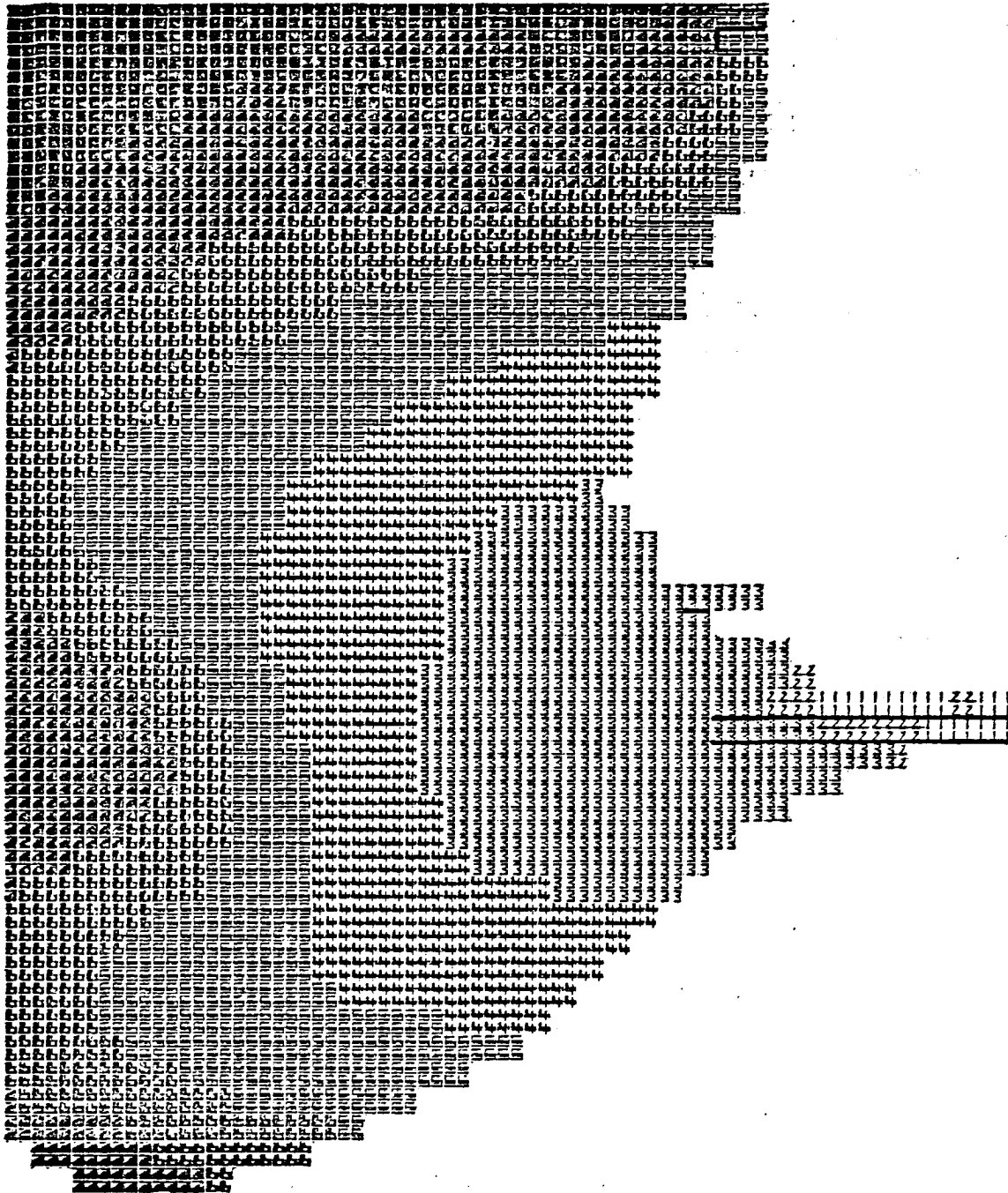


Figure 60 : Salinités calculées - Situation du 20 octobre 1978  
 2 H avant la Basse Mer du Havre



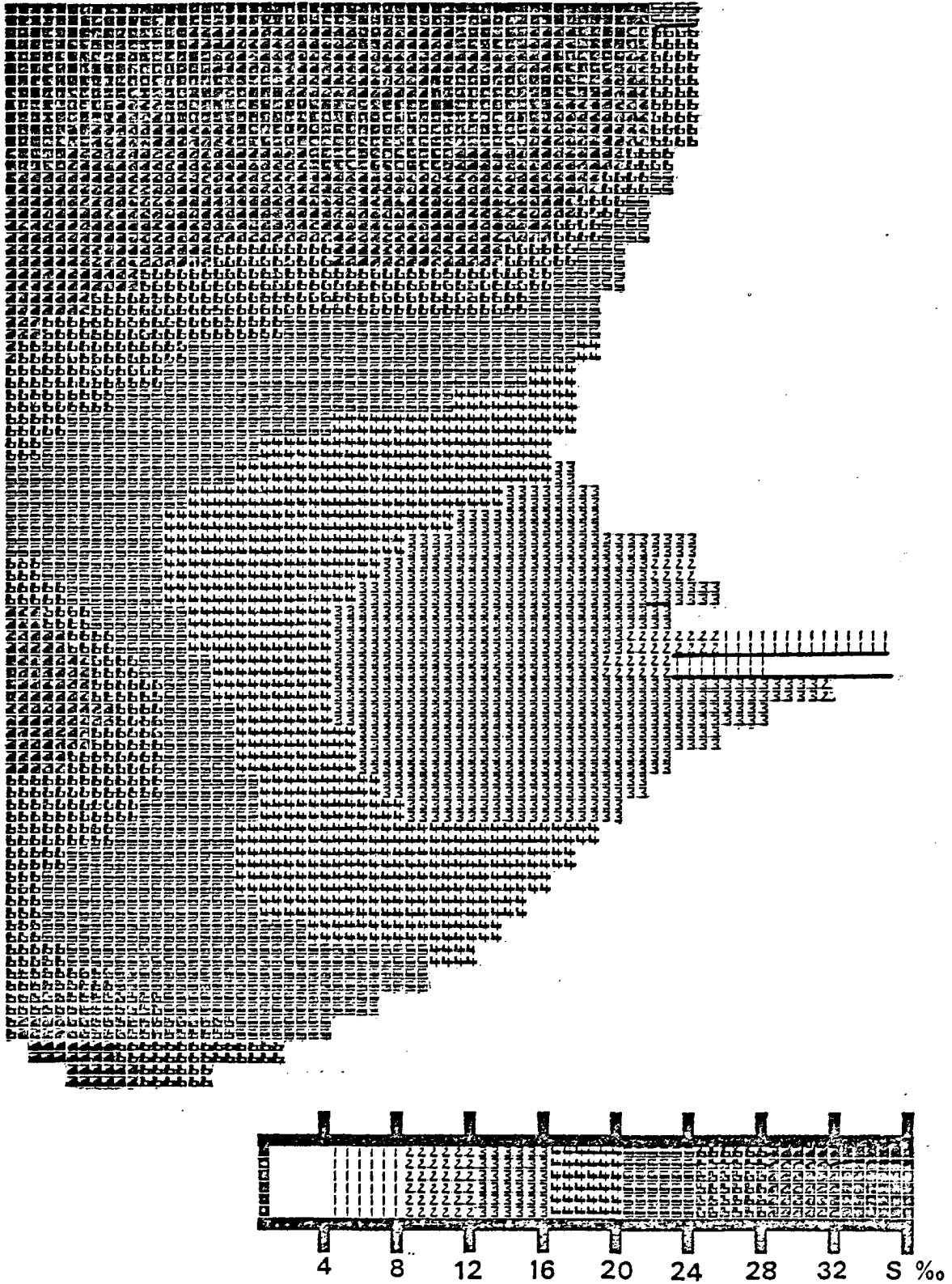


Figure 61 : Salinités calculées - Situation du 20 octobre 1978  
 Basse Mer du Havre

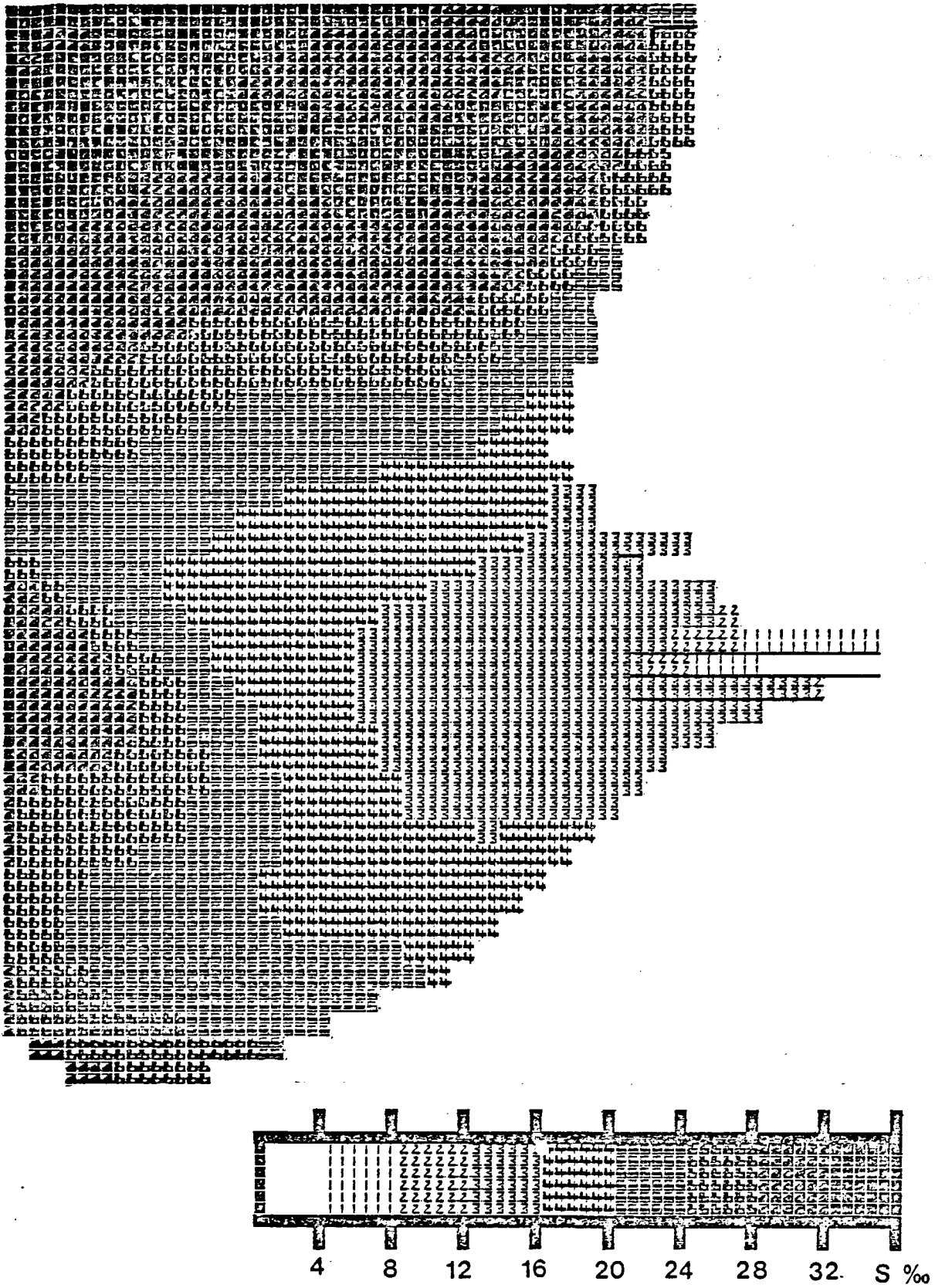


Figure 62 : Salinités calculées - Situation du 20 octobre 1978  
2 H après la Basse Mer du Havre

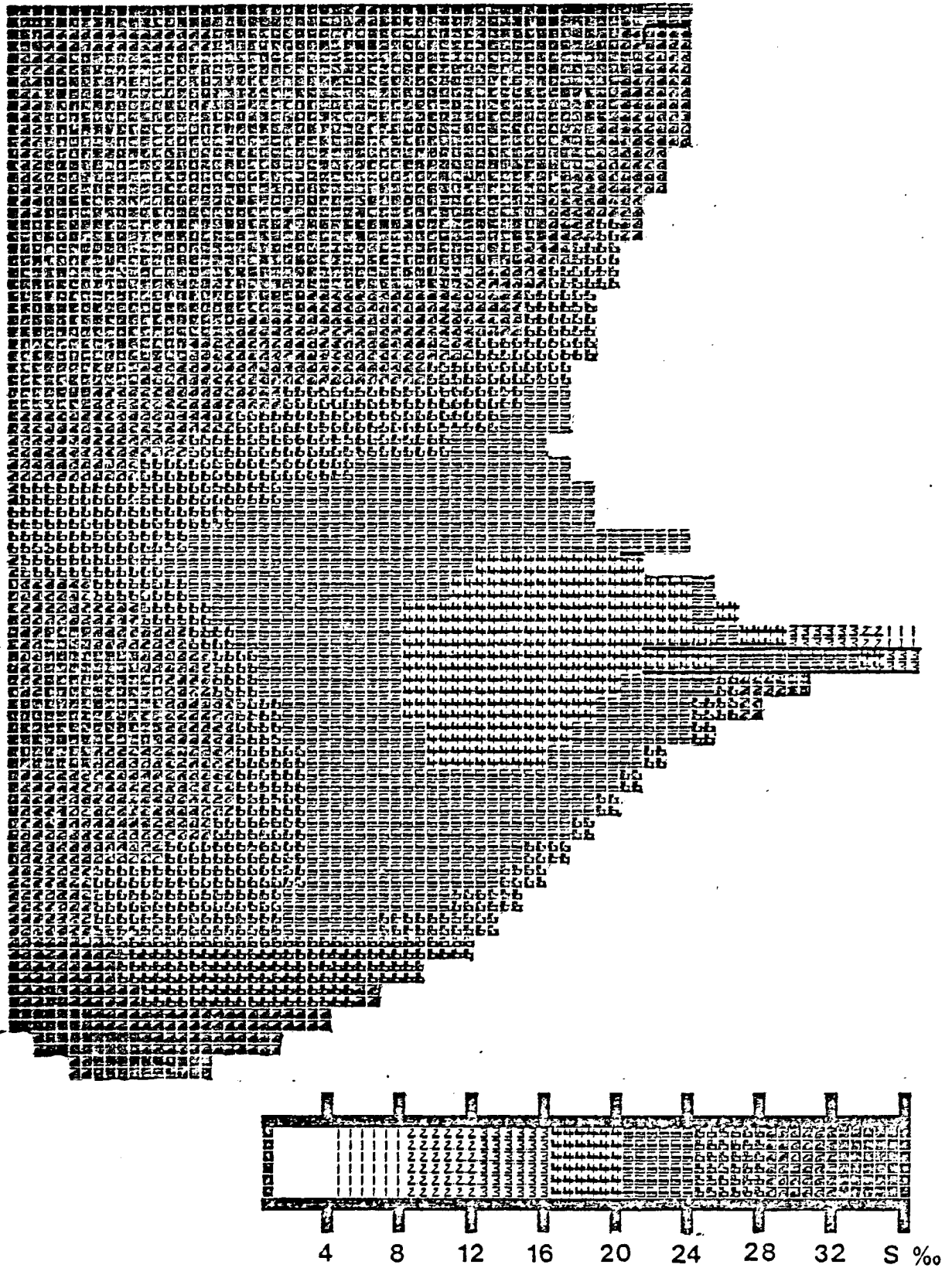


Figure 63 : Salinités calculées - Situation du 20 octobre 1978  
 4 H après la Basse Mer du Havre

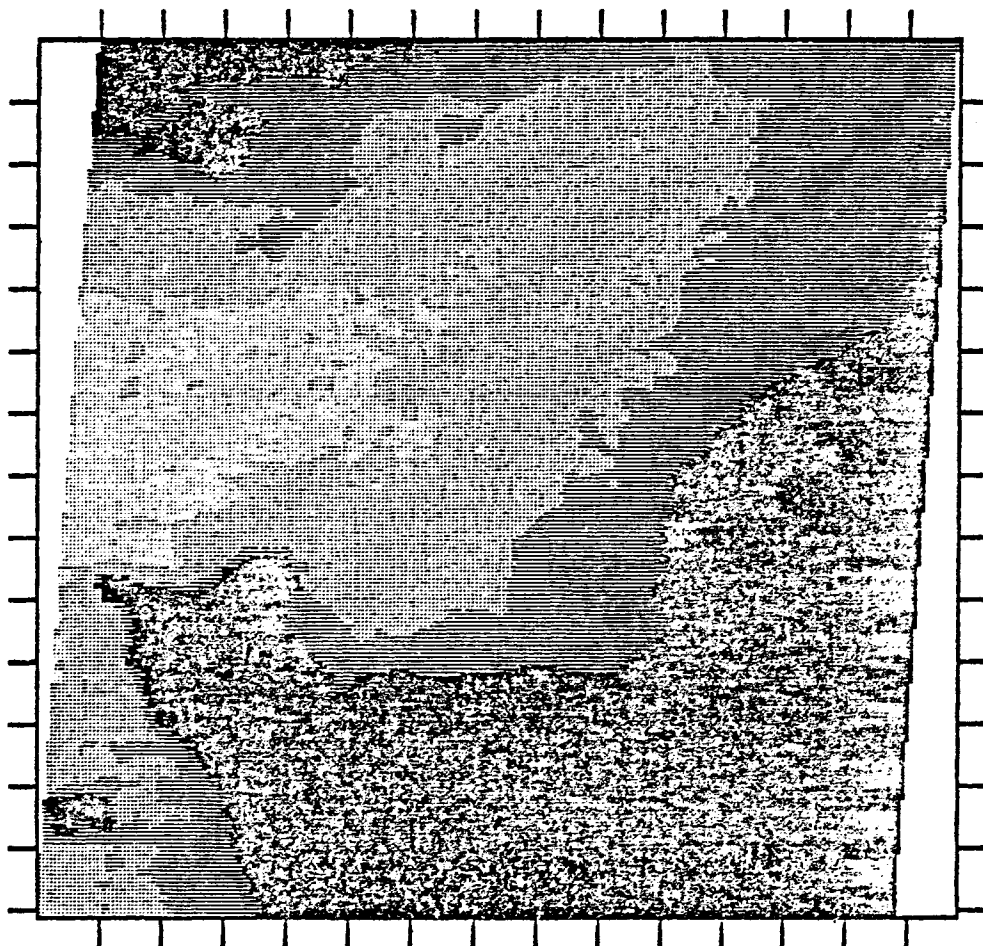


Figure 64 : Exemple de thermographie infrarouge recueillie par télédétection.

marée coef. 101 P.M.-3  
débit 300m<sup>3</sup>/s  
vent variable faible



Figure 65 : Exemple de thermographie infrarouge recueillie par télédétection.

marée coef. 61 B.M.  
débit  $650\text{m}^3/\text{s}$   
vent N.E. 10 noeuds

Les panaches de dispersion résument à la fois ces trajectoires (advection) et la dispersion proprement dite. Dans la mesure où ils résulteraient d'un grand nombre de cycles de marée ils reflèteront partiellement la circulation résiduelle, laquelle est extrêmement difficile à apprécier dans la partie orientale de la baie de Seine. Les illustrations présentées fig (58) à (63) sont donc à considérer avec prudence, elles semblent néanmoins être en bon accord avec les quelques mesures en nature disponibles aujourd'hui ( figures 64 et 65 ).

#### Vers les phénomènes résiduels

Il est à l'évidence très tentant d'essayer d'obtenir une description des phénomènes résiduels par simple intégration des résultats instantanés sur une période de marée. Malgré l'ambiguïté de la notion de résiduelle ainsi définie (la période d'intégration étant courte des résultats très différents osnt à attendre en fonction des marées envisagées) et en dépit d'une précision insuffisante sur les conditions aux limites pour atteindre des grandeurs qui seraient du second ordre, nous avons bien entendu effectué cette opération et les exemples sont présentés figures (66) à (67).

De nos résultats, il ressort que cette circulation intégrée sur la verticale, est faible (de l'ordre de 5 cm/s) et peut être fortement modifiée par la prise en compte d'un vent de force moyenne, par la superposition d'une pente de 1 mm/km le long des frontières ouvertes (test de la précision des conditions aux limites), et également très marquée au niveau du Havre par le terme de gradient horizontal de densité. Un modèle qui ne prendrait pas en compte la dispersion du sel ne pourrait donc prétendre à une bonne représentation des phénomènes résiduels dans ce secteur.

Cette circulation résiduelle intégrée sur la verticale reflétant des caractéristiques de la circulation au large de l'estuaire, pour en obtenir une description satisfaisante, il faut donc soit améliorer la connaissance des conditions aux limites, soit agrandier la zone couverte par le modèle jusqu'à atteindre les dimensions du phénomène physique qui engendre cette circulation.

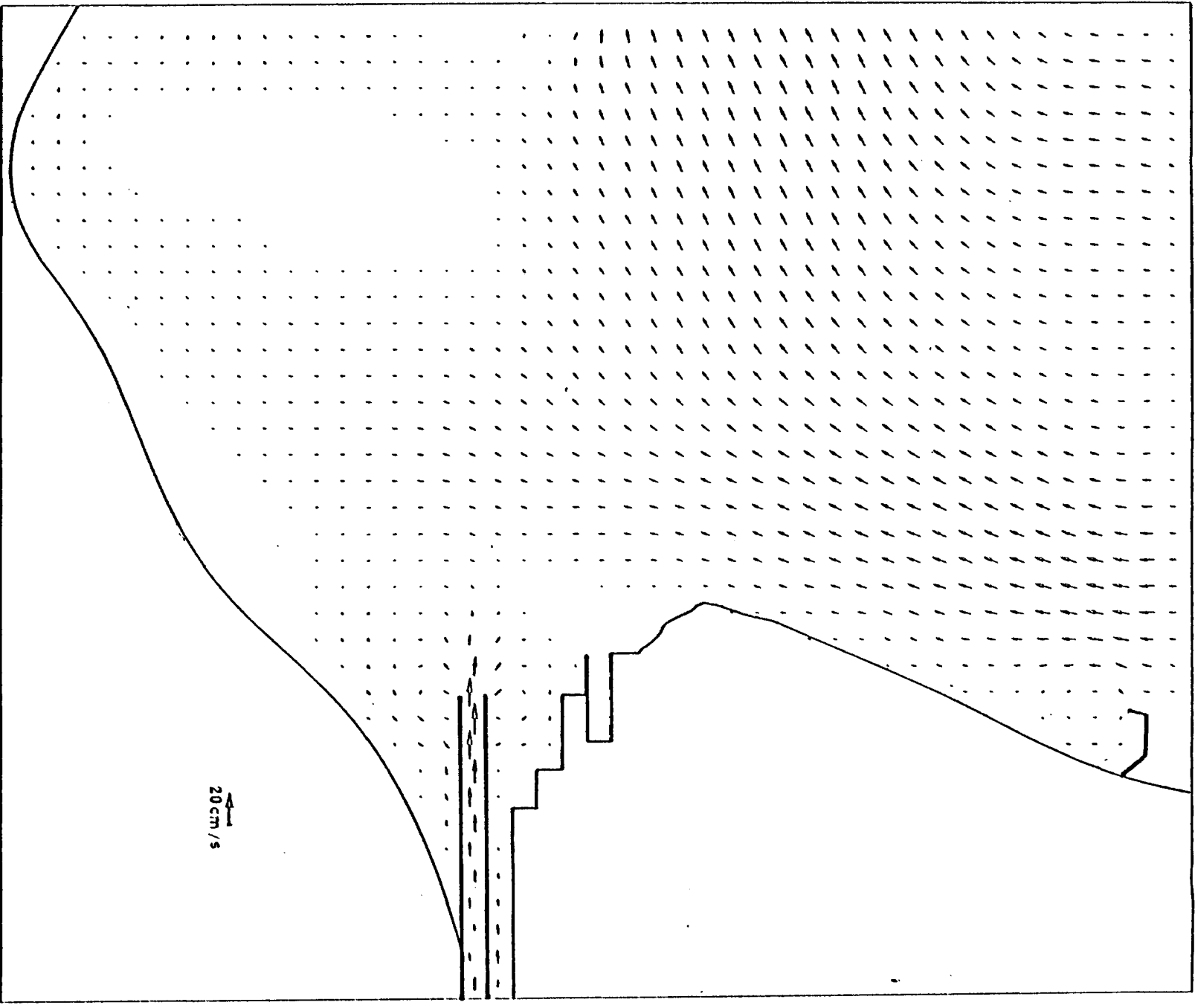


Figure 66 : Vitesses eulériennes obtenues par intégration sur un cycle de marée.  
Marée moyenne. - Etlage.

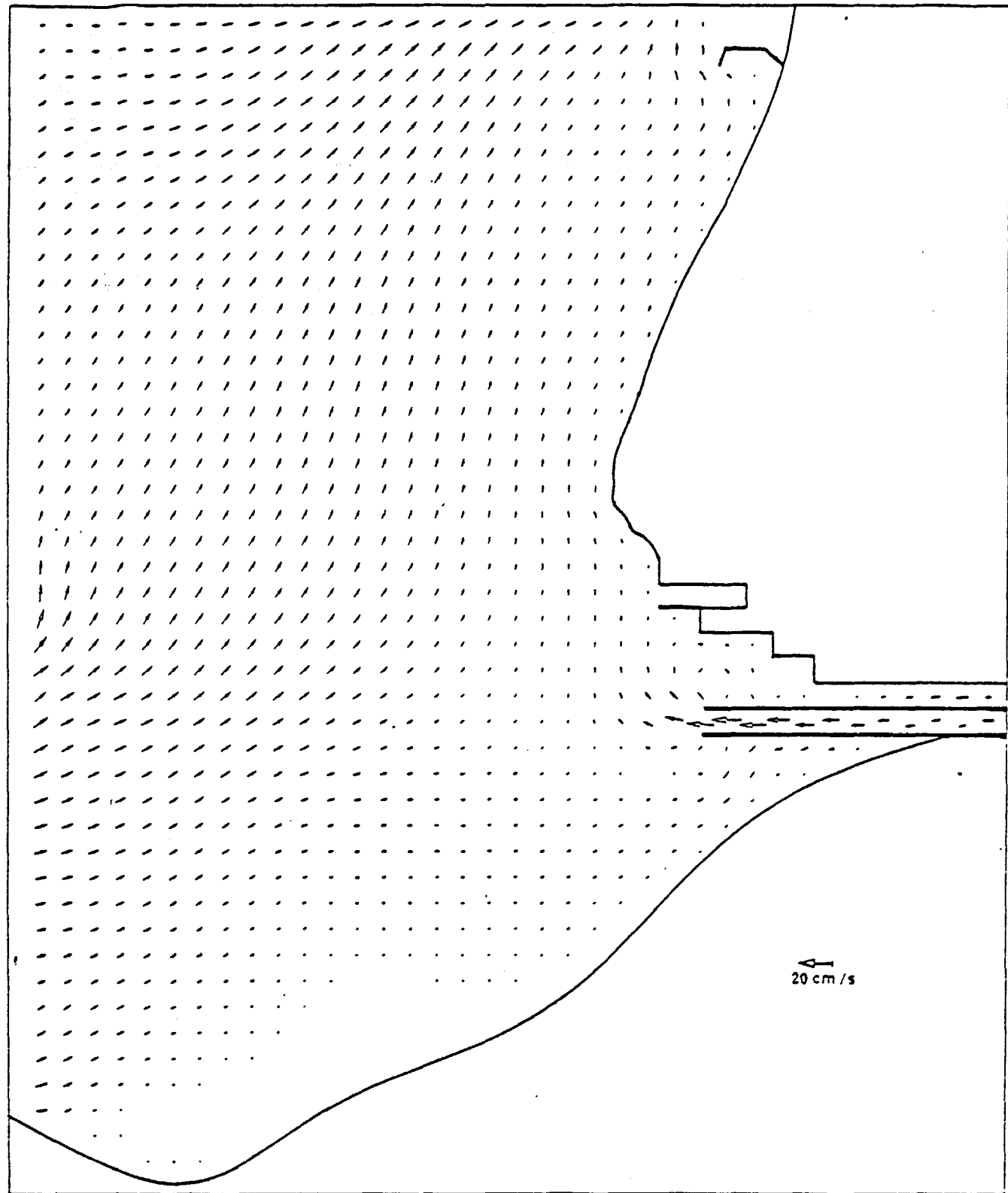


Figure 67 : Vitesses eulériennes obtenues par intégration sur un cycle de marée.  
Marée moyenne - Etiage  
Niveau moyen s'abaissant de  $1\text{mm/km}$  du Sud vers le Nord, au long  
de la limite Ouest.



Toutefois, indépendamment de l'effort de modélisation dont ce rapport rend compte, d'importantes campagnes de mesure ont eu lieu qui montrent une circulation résiduelle variable selon la coordonnée verticale. Dès lors, on comprend mieux que la valeur moyenne sur cette verticale, reproduite par le modèle, soit peu significative et sujette à une forte variabilité.

Du point de vue de la modélisation, la suite du présent travail semble donc devoir être une simulation tridimensionnelle, ce qui constitue actuellement une tâche délicate, mais pas insurmontable.

Toujours en attirant l'attention du lecteur sur les réserves que nous formulons quant à la description des phénomènes intégrés sur une marée, nous présentons figure 68 une carte de débit résiduel  $Q_r$  qui donne une meilleure image de la circulation des masses d'eau et une carte (figure 69) de l'intégrale de la sollicitation au transport  $Q_s$ , pour des sédiments sableux.

$$\overline{Q_r} = \frac{\int_0^T \overline{V(t)} H(t) dt}{\int_0^T H(t) dt}$$

$$\overline{Q_s} = k \int_0^T \frac{\overline{V(t)}^2}{H(t)} dt$$

Pour ce dernier calcul, une formule simple a été utilisée (formule de INGLIS in SALOMON, 1976) qui exprime le transport total (suspension + charriage).

Ici encore, il ne s'agit que d'indications très sommaires destinées à illustrer les possibilités du modèle, remarquons seulement sur cette figure le transport potentiel sableux inversé près du littoral au sud d'Antifer, la résiduelle de flot dans les chenaux latéraux Nord et Sud, la résiduelle inversée dans le chenal principal, et la convergence (donc la tendance à l'accumulation) à l'extrémité aval des digues.

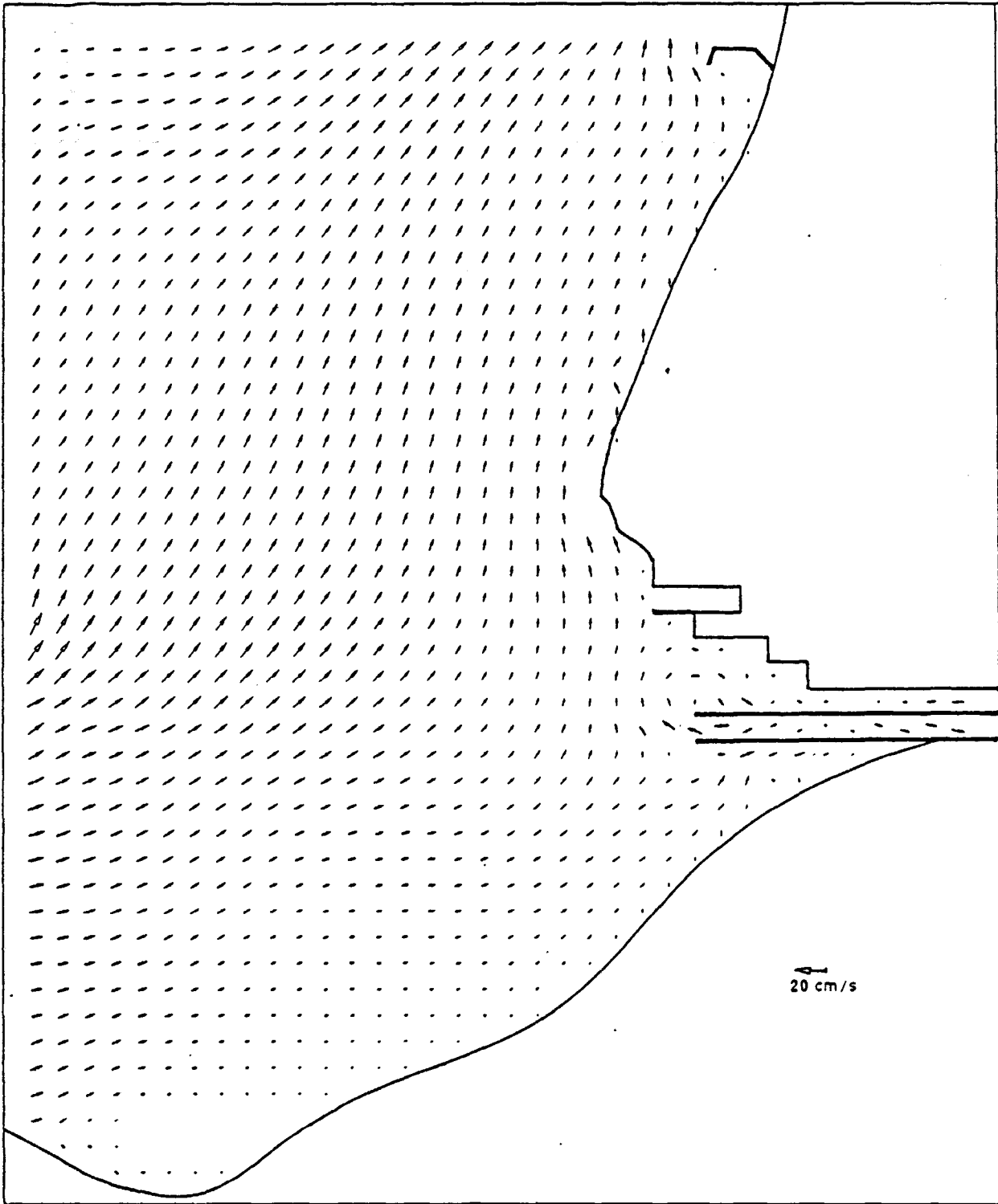


Figure 68 : Débit eulérien obtenu par intégration sur un cycle de marée.  
Marée moyenne - Etiage.

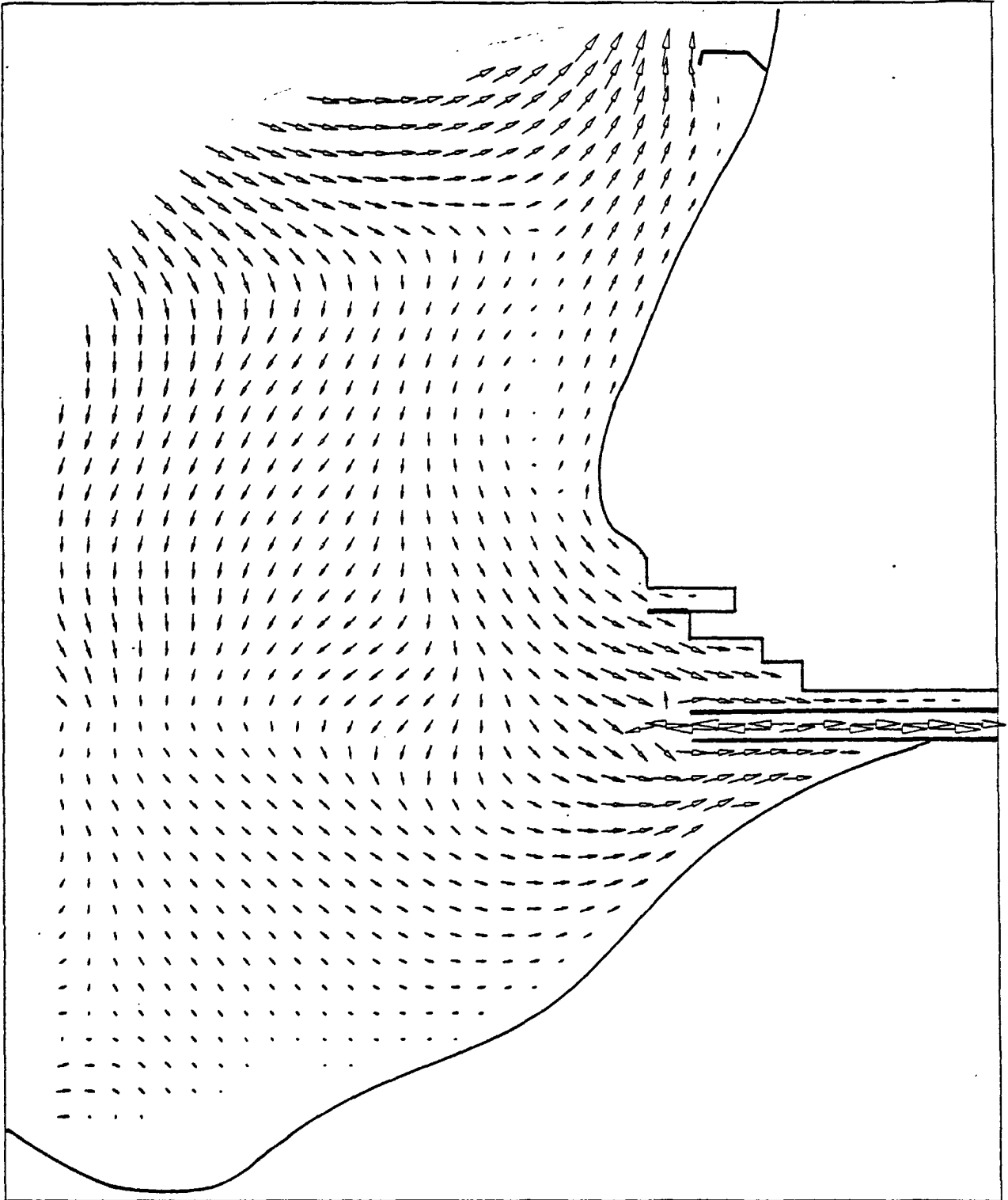


Figure 69 : Intégrale de la sollicitation au transport sur un cycle de marée.  
Marée de vive eau (coef. 100). Sédiment sableux.  
Echelle logarithmique.

C - MODELE UNIDIMENSIONNEL DE L'ESTUAIRE AMONT

La partie "Seine Maritime" de l'estuaire de la Seine, c'est-à-dire le secteur situé à l'amont de la pénétration extrême de la marée saline depuis La Mailleraye P.K. 305, jusqu'au barrage de Poses P.K. 202, étant de faible largeur et non susceptible d'être le siège de courants de densité, il a été décidé que ce secteur serait représenté par un modèle unidimensionnel. Les fonctions inconnues  $\sigma$ ,  $U$  et  $C$ , sont des fonctions de l'abscisse  $x$ , et de l'instant  $t$  uniquement.

Toutefois, pour simplifier le raccordement des trois modèles, ainsi que pour diminuer les temps de calcul lorsque l'intérêt n'est pas focalisé sur le secteur intermédiaire (représenté par le modèle bidimensionnel en plan vertical) ce modèle  $x, t$  a été prolongé vers l'aval jusqu'à la limite amont du modèle de l'estuaire extérieur (P.K. 353).

Le système d'équation a été établi plus haut, à savoir :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial \sigma}{\partial x} + g \frac{H}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{2P}{\rho\sigma} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial(\sigma U)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial(\sigma C)}{\partial t} + \frac{\partial(\sigma U C)}{\partial x} - \frac{\partial(\sigma K_L \frac{\partial C}{\partial x})}{\partial x} = 0$$

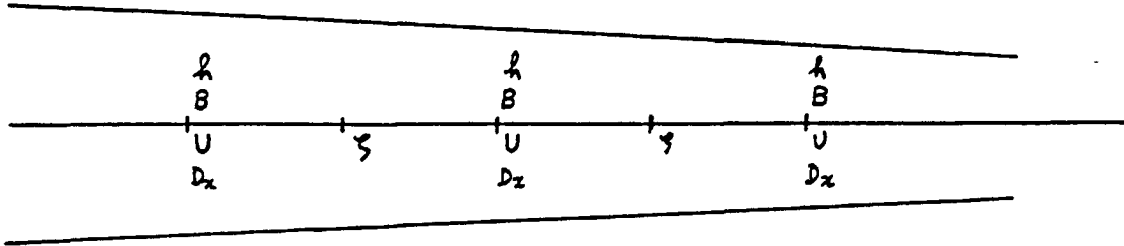
Schéma numérique

De très nombreux schémas numériques implicites, explicites ou mixtes, existent dans la littérature, qui permettent de résoudre ces équations. Le schéma retenu ici l'a été moins en fonction de ses performances propres, que de la compatibilité qu'il présentait avec le schéma à deux dimensions du secteur aval, et de la simplicité du raccordement.

Après quelques essais, la solution adoptée a été de conserver le même schéma en directions alternées utilisé pour le modèle aval ; ce schéma étant seulement "dégénéré" du fait que la composante de la vitesse perpendiculaire au chenal est nulle en permanence.

Maillage

La maille est dérivée directement de la précédente :



la seule modification concerne la définition de la largeur de l'estuaire B, et de la cote du fond, au point où est calculée la vitesse.

Le pas spatial  $\Delta x$  est également de un kilomètre.

Procédé d'intégration

L'intervalle d'intégration  $\Delta t$  est encore divisé en deux demi pas de temps ;

Entre  $t_2$  et  $t_3 = t_2 + \frac{\Delta t}{2}$  le système est résolu de manière implicite en  $\zeta$  et  $U$ , comme précédemment pour les lignes.

L'équation de la continuité s'écrit :

$$\frac{(\zeta_I^{t_3} - \zeta_I^{t_2})(B_I + B_{I-1})}{\Delta t} + \frac{U_I^{t_3} B_I (h_I + (\zeta_I^{t_2} + \zeta_{I+1}^{t_2})_{0,5})}{\Delta x} - \frac{U_{I-1}^{t_2} B_{I-1} (h_{I-1} + (\zeta_{I-1}^{t_2} + \zeta_I^{t_2})_{0,5})}{\Delta x} = 0$$

que l'on mettra sous la forme :

$$-\alpha'_{I-1} U_{I-1}^3 + \beta'_I \zeta_I^3 + \alpha'_I U_I^3 = \beta'_I \zeta_I^2$$

L'équation du mouvement, après développement, s'écrira :

$$-\mathcal{D}'_I \zeta_I^3 + \mathcal{E}'_I U_I^3 + \mathcal{D}'_{I+1} \zeta_{I+1}^3 = \mathcal{F}'_I$$

$$D' = g \frac{\Delta t}{2 \Delta x}$$

$$E'_I = 1 + \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (U'_{I+1} - U'_I) + 4g \Delta t \frac{|U'_I|}{(2h'_I + s'_{I+1} + s'_I)(c'_{I+1} + c'_I)^2}$$

$$F'_I = U'_I - \frac{g \Delta t}{2 \Delta x} (s'_{I+1} - s'_I) - U'_I 4g \Delta t \frac{|U'_I|}{(2h'_I + s'_{I+1} + s'_I)(c'_{I+1} + c'_I)^2} + \varepsilon \Delta U'$$

$$- 2 \frac{g \Delta t}{4 \Delta x} (s'_{I+1} + s'_I + 2h'_I)(s'_{I+1} - s'_I)$$

On pourra ainsi, toujours de manière semblable à ce qui a été exposé plus haut, résoudre ce système linéaire à l'aide de la matrice tridiagonale associée :

$$\begin{array}{ccc}
 -\alpha'_{I-1} & \beta'_I & \alpha'_I \\
 -D' & E'_I & D' \\
 -\alpha'_I & \beta'_{I+1} & \alpha'_{I+1} \\
 -D' & E'_{I+1} & D'
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \vdots \\
 \xi'_I \\
 U'_I \\
 \xi'_{I+1} \\
 U'_{I+1} \\
 \vdots
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \vdots \\
 \beta'_I \xi'_I \\
 F'_I \\
 \beta'_{I+1} \xi'_{I+1} \\
 F'_{I+1} \\
 \vdots
 \end{array}$$

La relation aux différences correspondant à l'équation d'advection-dispersion est également obtenue en dégénéralant l'équation 67.

$$c'_{I-1} P'_I + c'_I Q'_I - c'_{I+1} R'_I = J'_I$$

Entre  $t_3$  et  $t_4 = t_3 + \frac{\Delta t}{2}$ , l'équation du mouvement (en colonne) disparaît, il ne demeure donc que deux expressions explicites pour la continuité en eau et en substance dissoute :

$$\zeta'_I = \zeta'_I + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \frac{Q'_{I-1} - Q'_I}{B_I + B_{I-1}}$$

où

$$Q'_I = U'_I B_I (2h'_I + \zeta'_I + \zeta'_{I+1})$$

et l'équation d'advection dispersion, dont l'expression, un peu plus complexe, est de la forme :

$$C'_I = \frac{F_1(U'_I, \zeta'_I, C'_I)}{F_2(\zeta'_I)}$$

On obtient ainsi un schéma numérique hybride où l'équation du mouvement est résolue de manière implicite deux fois moins fréquemment que les équations de la continuité en eau et en substance dissoute (alternativement de façon implicite et explicite).

#### Conditions aux limites

- limite aval : raccordement avec le modèle à deux dimensions.

Le choix d'un algorithme de calcul qui n'est qu'un cas particulier de la méthode utilisée pour le modèle à deux dimensions, permet un raccordement très simple, en faisant fonctionner ces deux modèles simultanément de la même manière que s'il s'agissait d'effectuer le calcul dans un secteur étroit et long, tel que celui qui représente le port du Havre ou le chenal endigué.

#### Calcul en ligne

Le calcul selon l'axe Ox, et l'axe du chenal est effectué en constituant une seule matrice. Au niveau du raccord, les termes affectés d'un astérisque font intervenir des grandeurs appartenant à la fois à la partie à une dimension et à la partie à deux dimensions (voir ci-contre).







$$\xi_{N+1} = 2 \xi_N - \xi_{N-1}$$

d'où:

$$U_N^3 = \frac{\text{Opér.}}{B_N (h'_N + 0,5(\xi'_N + \xi'_{N+1}))}$$

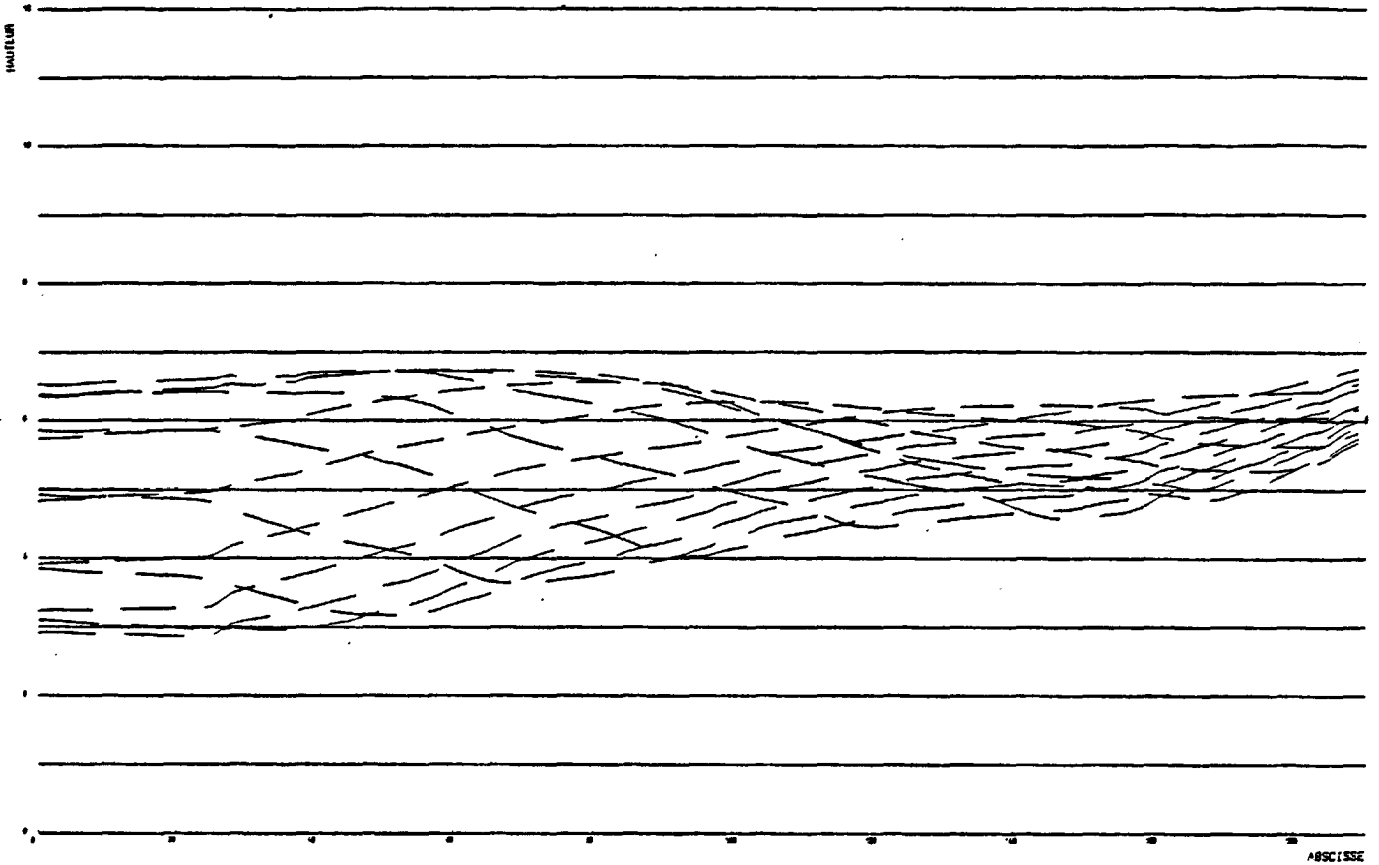
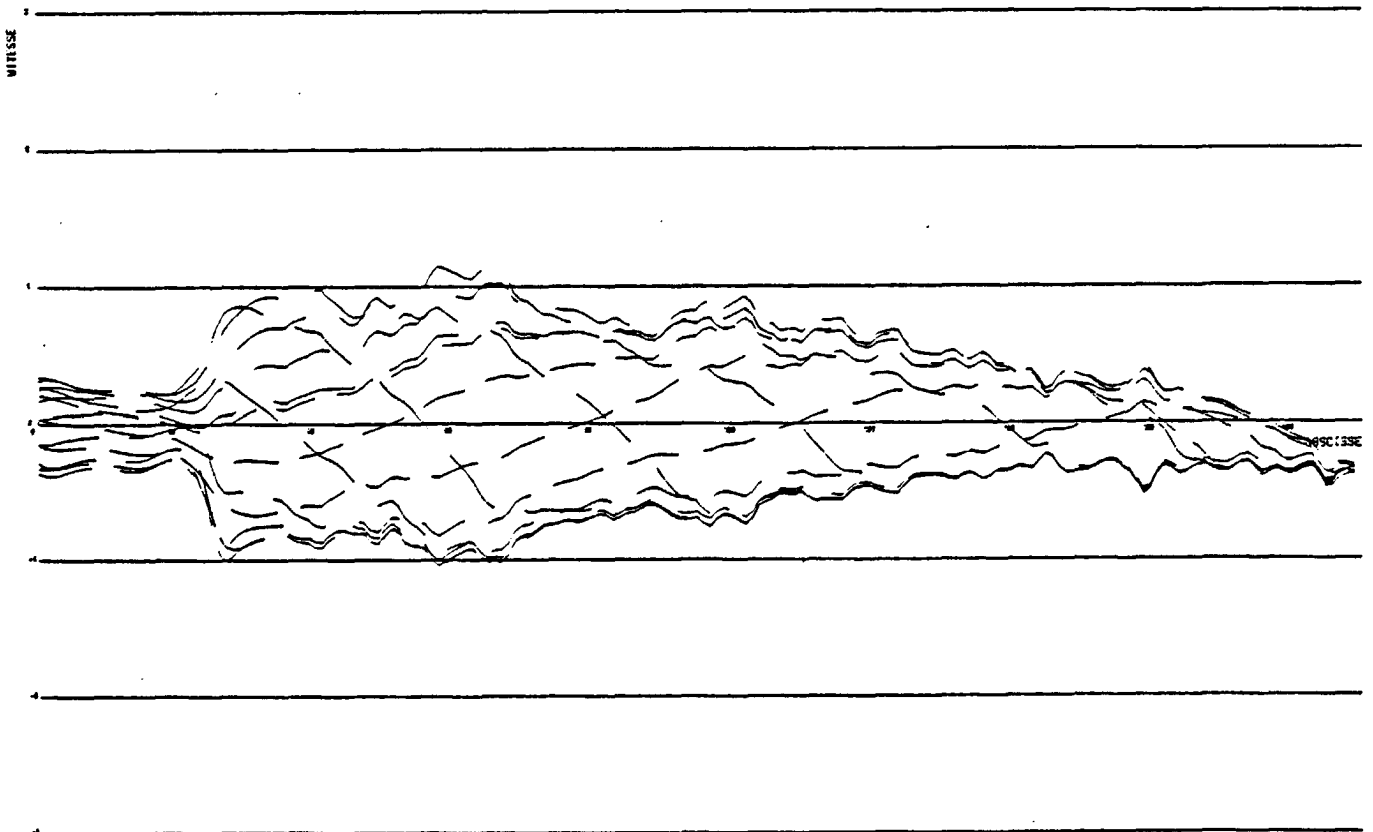
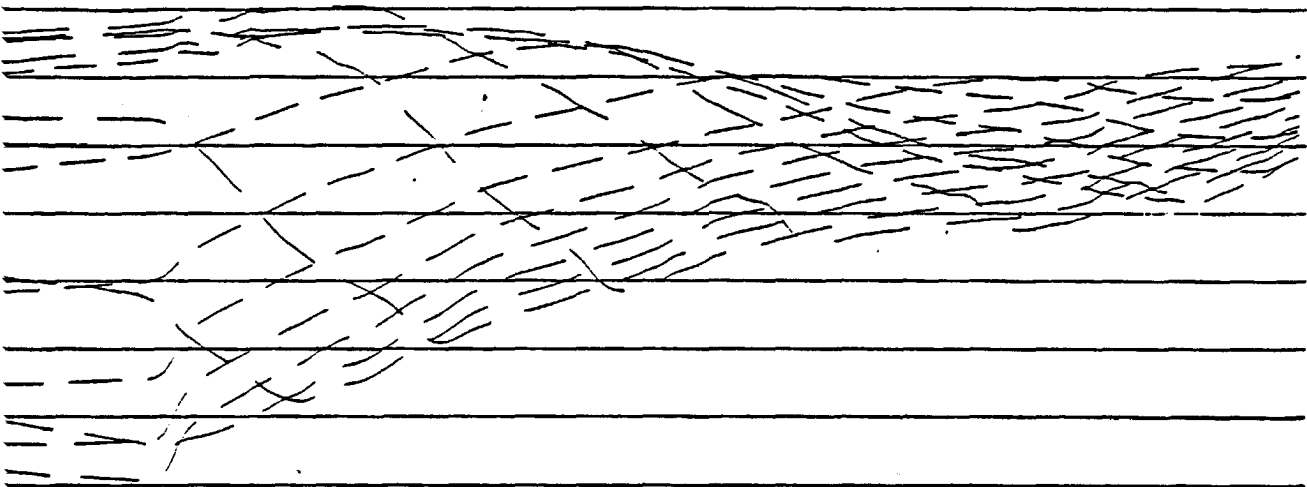


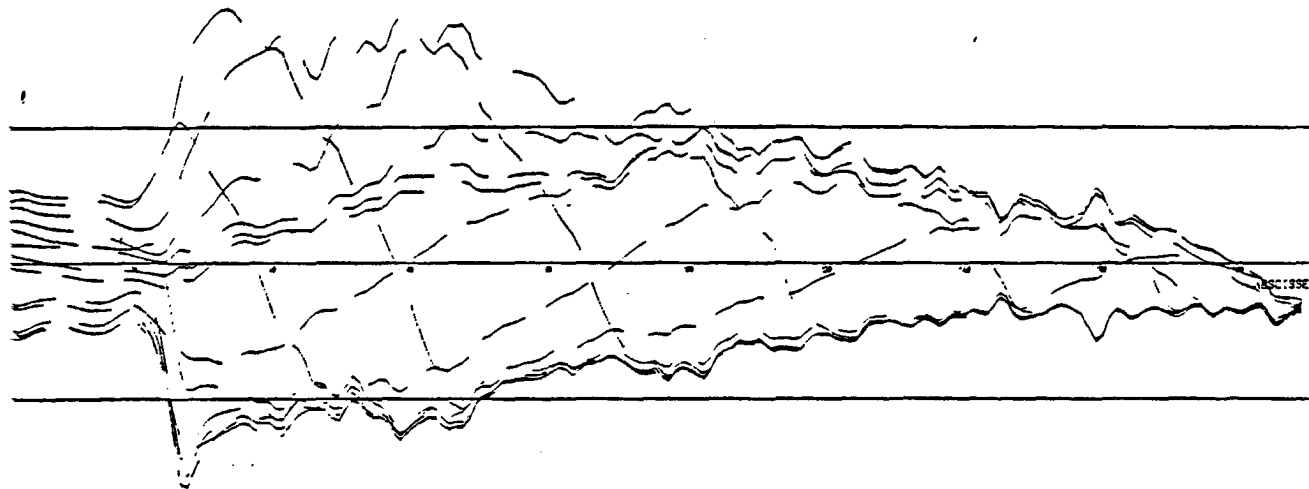
Figure 70 : Profils longitudinaux de hauteurs et de vitesses.  
(composante E-W depuis le méridien 15'W, puis vitesse selon l'axe  
de l'estuaire). Marée de morte eau - Débit d'étiage.





ABSCISSE

Figure 71 : Profils longitudinaux de hauteurs et de vitesses.  
(composante E-W depuis le méridien 15'W, puis vitesse selon l'axe  
de l'estuaire). Marée de vive eau - Débit d'étiage.



ABSCISSE

D - MODELE BIDIMENSIONNEL DE L'ESTUAIRE MOYEN

L'estuaire moyen, c'est-à-dire le secteur compris entre l'extrémité des digues qui longent le chenal, et les environs de la Mailleraye, apparaissait au début de cette étude, susceptible de donner lieu à des phénomènes de transport différents selon la distance par rapport au fond, qui ne pouvaient être correctement simulés par leur valeur moyenne sur la profondeur. Cette remarque est, à fortiori valable pour les mécanismes sédimentaires relatifs aux vases; on sait en effet que la dynamique du Bouchon Vaseux dépend étroitement des phénomènes de densité (point nodal).

Ce secteur de l'estuaire a donc été représenté par un modèle bidimensionnel dans le plan Axe de l'estuaire - verticale, toute grandeur étant représentée par sa valeur moyenne sur la largeur de l'écoulement.

Ce modèle calcule :

le niveau :  $\zeta(x,t)$

la vitesse du courant :  $U(x,z,t)$  et  $W(x,z,t)$

la concentration en une substance dissoute :  $C(x,z,t)$

(dont le sel)

la concentration en vase :  $C_s(x,z,t)$

Les équations du système hydrodynamique ont été établies au paragraphe (II,E), à savoir :

$$\frac{\partial(BU)}{\partial x} + \frac{\partial(BW)}{\partial z} = 0 \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(BU)}{\partial t} + \frac{\partial(BU^2)}{\partial x} + \frac{\partial(BUW)}{\partial z} + g B \bar{\rho} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + g B(\zeta - z) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} \\ - \frac{\partial(BK_x \frac{\partial U}{\partial x})}{\partial x} - \frac{\partial(BK_z \frac{\partial U}{\partial z})}{\partial z} - N_{xx} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial x} + \tau_{lat} = 0 \end{aligned} \quad (71)$$

$$\frac{\partial(BS)}{\partial t} + \frac{\partial(BUS)}{\partial x} + \frac{\partial(BWS)}{\partial z} - \frac{\partial(BK_x \frac{\partial S}{\partial x})}{\partial x} - \frac{\partial(BK_z \frac{\partial S}{\partial z})}{\partial z} = 0 \quad (72)$$

$$\frac{\partial \int_{-h}^{\zeta} B U dz}{\partial x} + B \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (73)$$

La zone géographique concernée par ce modèle ayant fait l'objet de toute l'attention des aménageurs est actuellement très endiguée, ce qui nous permettra de simplifier le système d'équations en schématisant l'estuaire par des sections rectangulaires variables en fonction de l'abscisse, mais de largeur variant lentement, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial B}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} \text{ faible}$$

On négligera également la dispersion de quantité de mouvement dans le plan horizontal, par rapport au terme vertical, d'où le nouveau système :

$$\frac{\partial (BU)}{\partial z} + B \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (74)$$

$$\frac{\partial (S)}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial \int_{-z}^z U dz}{\partial x} = 0 \quad (75)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} + g \frac{\bar{\rho}}{\rho} \frac{\partial S}{\partial x} + g \frac{(S-\bar{z})}{\rho} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} - \frac{\partial (K_x \frac{\partial U}{\partial z})}{\partial z} = 0 \quad (76)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + U \frac{\partial S}{\partial x} + W \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{1}{B} \frac{\partial (BK_x \frac{\partial S}{\partial x})}{\partial x} - \frac{\partial (K_z \frac{\partial S}{\partial z})}{\partial z} = 0 \quad (77)$$

auquel s'ajoutera l'équation de conservation de la masse des sédiments :

$$\frac{\partial C_s}{\partial t} + U \frac{\partial C_s}{\partial x} + W \frac{\partial C_s}{\partial z} + \frac{\partial W_s C_s}{\partial z} - \frac{1}{B} \frac{\partial (K'_x B \frac{\partial C_s}{\partial x})}{\partial x} - \frac{\partial (K'_z \frac{\partial C_s}{\partial z})}{\partial z} = 0 \quad (78)$$

$W_s$  : vitesse de chute des sédiments

#### Conditions aux limites

Limites aval et amont.

Les limites de ce modèle sont situées à l'intérieur du modèle

de l'estuaire extérieur (à l'extrémité des digues), pour ce qui est de la limite aval, et à l'intérieur du modèle unidimensionnel pour ce qui concerne la limite amont. Sur ces deux limites, on dispose donc par calcul, du niveau de l'eau et de la moyenne de la vitesse et de la salinité sur la verticale. Le seul problème est de développer ces valeurs intégrées selon leurs composantes à toute cote.

A l'amont, en dehors de la zone saline, on imposera une salinité nulle à toute profondeur et une condition de vitesse respectant une structure logarithmique des courants :

$$U(z) = \frac{Q}{BH} \frac{\text{Log } \frac{z}{z_0}}{\text{Log } \frac{H}{z_0}}$$

ou une puissance de la cote  $z$ , de la forme :

$$U \propto z^{\alpha^*}$$

il vient :

$$U(z) = \langle U \rangle (\alpha^* + 1) \left( \frac{z}{H} \right)^{\alpha^*}$$

$$\langle \rangle = \frac{1}{H} \int_{-z}^z dz$$

La turbidité devra également être imposée au cours du jusant, puisqu'elle n'est pas calculée, même en valeur intégrée par le modèle amont. On l'introduira donc en tant que résultat d'expérience ou d'hypothèse de simulation.

A l'aval, on terminera le modèle sur une ligne de calcul des niveaux (voir plus loin le détail du schéma numérique), aucune hypothèse ne sera donc faite sur la structure verticale des courants. On modifiera seulement le schéma numérique en décentrant les dérivées horizontales de la vitesse vers l'intérieur du domaine et en négligeant la viscosité horizontale. En négligeant également la dispersion horizontale en regard de l'advection, aucune condition ne sera imposée quant à la structure verticale des salinités lors du jusant. En flot, par contre, à partir de la salinité moyenne il faudra définir une fonction  $S(z)$ . Pour cela, nous pourrons

soit introduire une relation totalement empirique déduite des mesures en nature, soit adopter une expression analytique qui respecte les conditions de gradient nul en surface et au fond :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)_{z=-h} = 0$$

Une fonction polynomiale du troisième degré répond à ces critères, soit :

$$S(x, z, t) = \langle S \rangle \left( 1 - \frac{\Delta S}{\langle S \rangle} \left( 2 \left( \frac{z-z}{H} \right)^3 - 3 \left( \frac{z-z}{H} \right)^2 + 0,5 \right) \right)$$

où :

$$\Delta S = S_{-h} - S_5$$

La seule approximation notable concerne ce terme  $\frac{\Delta S}{\langle S \rangle}$  que l'on pensait lors de la définition du programme d'étude être faible, au vu des indices de stratification (paragraphe IV A). Il apparaît au résultat des mesures en nature (AVOINE, 1980) que pour des débits faibles à moyens, cette opinion initiale est assez bien vérifiée, mais que par contre en crue, l'écart relatif de salinité peut être de l'ordre de l'unité en début de flot notamment. De sorte que ce modèle fonctionnera de manière parfaitement "autonome", pour des débits fluviaux peu importants; en période de crue on fera avantageusement appel aux résultats d'expériences aujourd'hui disponibles, pour corriger la valeur de ce terme  $\frac{\Delta S}{\langle S \rangle}$  aux environs de l'extrémité de la digue du Ratier.

Les conditions de turbidité sur cette limite aval seront également issues de l'expérience in situ ou des hypothèses de la simulation.

Limites supérieures et inférieures.

En surface : La condition à la limite, pour ce qui est de la quantité de mouvement, est la contrainte de cisaillement due à l'action du vent (le plus souvent considérée nulle). Ce terme s'introduit sans difficulté :

$$\left(\rho \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=5} = \tau_{\text{vent}} = f(u)$$



Diverses expressions de la fonction  $f$  ont été données au paragraphe (III, C).

- On exprimera également que le flux de sel au travers de la surface libre est nul (ni perte ni apport) :

$$\left( K_s \frac{\partial s}{\partial z} \right)_z = 0$$

- De même, pour les sédiments en suspension, la décantation en surface équilibre le flux vertical créé par la dispersion :

$$\left( K'_s \frac{\partial c_s}{\partial z} \right)_{z=5} = (W_s c_s)_{z=5}$$

Au fond.

La contrainte exercée sur le fond  $\tau_f$ , appelée tension de frottement, a pour expression :

$$\tau_f = \left( \rho g z \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{z=-h}$$

Malheureusement, du fait de la disproportion entre le pas d'espace vertical du modèle et l'épaisseur de la couche limite du fond, la valeur numérique du gradient de vitesse sur le fond est très difficilement accessible. Plusieurs tentatives d'utilisation de cette fonction ont été réalisées qui sans conduire obligatoirement à une divergence des calculs, ne se sont pas avérées satisfaisantes. Nous avons donc préféré introduire une fonction de la vitesse plutôt que de sa dérivée sous la forme habituelle :

$$\tau_f = -k U_{1m} |U_{1m}|$$

Le coefficient  $k$ , (ordre de grandeur 2 à 3) est un coefficient d'étalonnage analogue au coefficient de Chézy ou de Strickler pour un modèle intégré sur la verticale :

$$k \approx \rho g C^{-2}$$

La vitesse verticale au fond est nulle :

$$W_{-h} = 0$$

Le flux de sel au travers du fond est nul :

$$\left( K_s \frac{\partial s}{\partial z} \right)_{z=-h} = 0$$

Le flux vertical de sédiment est égal au bilan "érosion - dépôt" :

$$K'_s \frac{\partial C_s}{\partial z} - W_s C_s = \left( \frac{dM}{dt} \right)_{\text{érosion}} + \left( \frac{dM}{dt} \right)_{\text{dépôt}}$$

La fonction d'érosion est présentée sous la forme de la relation de Parthéniades :

$$\left( \frac{dM}{dt} \right)_{\text{érosion}} = M \left( \frac{\tau}{\tau_{ce}} - 1 \right)$$

et la fonction de dépôt sous la forme de Einstein-Krone (1961) :

$$\left( \frac{dM}{dt} \right)_{\text{dépôt}} = W_s C_s \left( 1 - \frac{\tau}{\tau_{cd}} \right)$$

La constante d'érosion  $M$ , déterminée en laboratoire pour divers types de sédiments (HARRISON et OWEN, 1971, CORMAULT, 1971) serait de l'ordre de  $10^{-3}$  MKS. Les tensions critiques d'érosion  $\tau_{ce}$  et de dépôt  $\tau_{cd}$  peuvent être issues soit de mesures en nature ou à défaut au laboratoire (MIGNIOT, 1977), soit évaluées à partir du diagramme de POSTMA.

$\tau < \tau_{cd}$	dépôt (flux de sédiment négatif)
$\tau_{cd} < \tau < \tau_{ce}$	aucun échange avec le fond
$\tau_{ce} < \tau$	érosion (flux de sédiment positif)

#### Coefficients de dispersion

Les équations 76 à 78 font intervenir des termes de dispersion dans les directions  $x$  et  $z$ , pour la masse (solution et suspension), et pour la quantité de mouvement.

Peu d'informations existent à l'heure actuelle sur ces coefficients horizontaux qui représentent l'effet des fluctuations à haute fré-

quence, et de l'intégration sur la largeur de l'estuaire. Fort heureusement, cette indétermination relative n'est pas critique pour les modèles en valeurs instantanées puisque les échanges horizontaux sont essentiellement le fait des termes d'advection. On se contentera donc de valeurs numériques identiques de la surface au fond, (la précision obtenue par une fonction de  $z$  étant illusoire,) et proportionnelles aux coefficients d'échange verticaux. Ce coefficient de proportionnalité suggéré par l'étude bibliographique (DYER, 1973), serait de l'ordre de  $10^5$ , valeur également adoptée par KUO et al. (1978) :

$$\frac{K'_z}{\langle K'_z \rangle} = \frac{K_z}{\langle K_z \rangle} = \frac{K'_z}{\langle K'_z \rangle} = 10^5$$

Les coefficients d'échange verticaux devront par contre être déterminés avec beaucoup de soins, puisqu'ils conditionnent très fortement les résultats des calculs.

Dans le cas d'un écoulement permanent, non stratifié, et sans turbidité, on a exposé plus haut que la relation suivante, issue de la théorie de PRANDTL, était généralement employée :

$$K_z = N_z = K(z+h) V^* \left(1 - \frac{z+h}{S+h}\right)$$

BOWDEN et HAMILTON (1975) ont présenté une synthèse des relations obtenues dans le cas d'écoulements présentant une stratification de densité :

MUNK et ANDERSON (1948) :

$$N_z = A_0 (1 + 10 R_i)^{-\frac{1}{2}}$$

$$K_z = A_0 (1 + 333 R_i)^{-\frac{3}{2}}$$

PRITCHARD (1960) :

$$K_z = 8,6 \cdot 10^{-3} \frac{U (z+h)^2 (H-z)^2}{H^3} (1 + 0,276 R_i)^{-2}$$

et quant à eux, utilisent les relations :

$$N_z = 5 \cdot 10^{-4} (1 + 10^{-2} H \langle U \rangle (1 + 7 R_i)^{-\frac{1}{4}})$$

$$K_z = 5 \cdot 10^{-4} (1 + 10^{-2} H \langle U \rangle (1 + R_i)^{-\frac{7}{4}})$$

KUO et al (1978) ont usé de la formule de PRITCHARD, prenant en compte l'effet du vent en surface :

$$K_z = \left( K_0 + 3,6 \cdot 10^{-3} \frac{(z+h)(H-z)}{HT} \mathcal{H} e^{-\frac{2\pi(z+h)}{L}} \right) (1 + 0,276 Ri)^{-2}$$

où  $\mathcal{H}$  est la hauteur des vagues

$L$  la longueur d'onde de la houle

$T$  la période de la houle

Quant à BLUMBERG (1975) il a employé une formule légèrement différente des précédentes, fondée sur la théorie de MONTGOMERY et les résultats numériques de KENT et PRITCHARD ;

$$K_z = k_1^2 (z+h)^2 \left( 1 + \frac{z+h}{H} \right)^2 \frac{\partial U}{\partial z} \sqrt{1 - \frac{Ri}{Ric}}$$

$$\mathcal{N}_z^2 = K_z (1 + Ri)$$

$$\mathcal{N}_z^2 = K_z = 0 \quad \text{si} \quad Ri < Ric$$

On introduit ainsi un nombre de RICHARDSON critique, de valeur numérique 10, au dessus duquel tous les échanges verticaux se trouvent annulés.

Dans l'application de ce modèle à l'estuaire de la Seine, nous avons successivement utilisé des relations proches de celles citées par HAMILTON, et déjà établies à propos de la Gironde (DE GRANDPRE, 1978).

$$\mathcal{N}_z^2 = \mathcal{N}_0^2 + HU \sqrt{k} (\mathcal{N}_1 f(z) + \mathcal{N}_2) (1 + 7 Ri)^{-0,25}$$

$$K_z = K_0 + HU \sqrt{k} (K_1 f(z) + K_2) (1 + Ri)^{-1,75}$$

Avec :

$$f(z) = \sqrt{\frac{z+h}{H}} \left( 1 - \left( \frac{z+h}{H} \right)^3 \right)$$

puis des fonctions empiriques plus simples telles que les coefficients d'échange verticaux soient plus élevés près de la surface, de la forme :

$$\mathcal{N}_z^2 = \mathcal{N}_0^2 + \mathcal{N}_1 U \text{Log}(z+1) (1 + 7 Ri)^{-0,25}$$

Il s'est avéré que les résultats numériques obtenus n'étaient pas très différents et que les observations disponibles étaient en trop petit nombre pour que l'on puisse déterminer la meilleure expression. Au stade actuel de nos connaissances des phénomènes en nature, il semble que l'on puisse parvenir à des résultats assez proches bien qu'issus de formes différentes de ces coefficients d'échange, à la condition toutefois, de respecter une augmentation de la valeur des coefficients avec la distance au fond, dans la partie inférieure de l'écoulement.

Quant au coefficient de dispersion pour le sédiment, une indétermination encore plus grande règne à son sujet ; KUO et al (1978) ont adopté la même expression que pour la dispersion du sel.

Au cours d'essais successifs il est apparu que des valeurs trop faibles de ce coefficient  $K'_z$  près du fond pouvaient conduire à des instabilités de calcul :

$$\left(\frac{\partial C_s}{\partial z}\right)_h = \frac{\text{Erosion} + \text{Dépôt} + W_s C_s}{K'_z}$$

Le gradient de concentration calculé à certains instants conduit dans ce cas, du fait de l'extrapolation utilisée lors du traitement des conditions aux limites, à des valeurs aberrantes sur le fond. L'expression de  $K'_z$  a donc été simplifiée sous la forme :

$$K'_z = 2 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-3} | \langle U \rangle H | (1 + R_i)^{-2}$$

#### SCHEMA NUMERIQUE

Les résolutions numériques appliquées à ce type de modèle sont aujourd'hui encore peu nombreuses du fait qu'à toutes les difficultés propres aux modèles à deux dimensions, tel le modèle de l'estuaire extérieur, s'ajoute celle d'une intégration dans un domaine de géométrie continuellement variable (à la surface libre), et le problème de la représentation de la couche limite de fond.

Parmi les quelques modèles développés à ce sujet, plusieurs font coïncider la géométrie du fond avec les limites des mailles et traitant le cas d'une marée de faible amplitude ne font pas intervenir la modification de l'étendue du plan de calcul au cours de la simulation (BLUMBERG, 1975 ; ELLIOTT, 1976 ; WILSON, 1977 ; KUO et al., 1978).

Il en résulte un aspect du fond en marches d'escalier certainement inadéquat pour représenter les phénomènes sédimentaires, et une simplification du domaine de calcul totalement inapplicable en Seine, où le marage est du même ordre de grandeur que la hauteur d'eau.

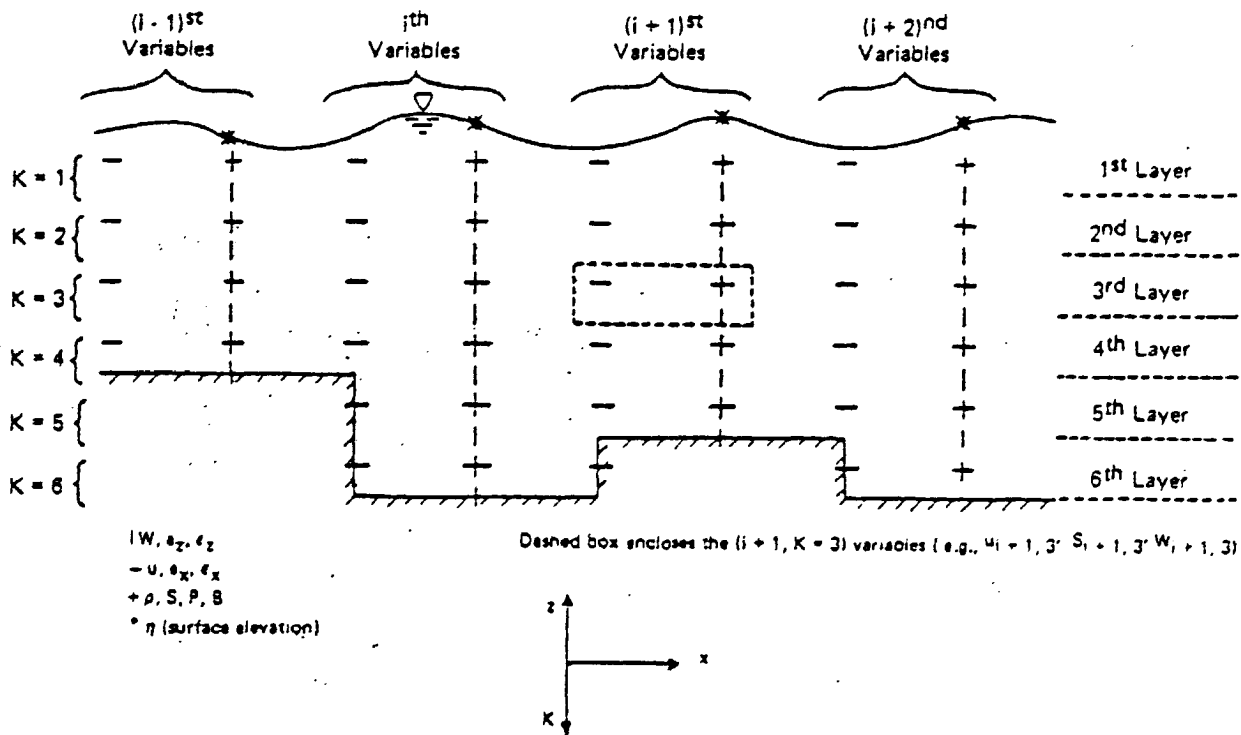


Figure 72 : Exemple de grille de calcul d'un modèle " en couches " (KUO et Al 1978)

Ces inconvénients peuvent être fortement diminués en opérant un changement de coordonnées qui transforme la zone de calcul en un secteur rectangulaire. Il en découle bien entendu l'apparition dans les équations hydrodynamiques de nouveaux termes, qui alourdissent fortement les calculs.

Ce type de modèle hydrodynamique "en couches" a donc été écarté au profit d'un modèle en valeurs locales, tel qu'il a été publié pour l'essentiel par HAMILTON (1975).

La grille de calcul est présentée figure 73 . Les points de calcul des composantes de la vitesse et de la concentration sont décalés de manière différente de la discrétisation adoptée pour le modèle de l'estuaire extérieur. Celle-ci est due à HEAPS (1969).

La méthode d'intégration est explicite, elle fait appel à des approximations centrées des dérivées spatiales, à l'exception du terme d'advection pour la concentration qui est décentré vers l'amont du courant.

Cette discrétisation du premier ordre, du type "upwind", introduit malheureusement une dispersion numérique parasite, mais elle s'est révélée la plus apte, et la plus économique en regard des temps de calcul, à stabiliser le schéma. En outre, pour tenter de diminuer cet effet, le terme de dispersion a été exprimé par un schéma centré, du second ordre. .





D'où finalement le système aux différences :

$$\frac{S_i^{t+\Delta t} - S_i^t}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x \cdot B_i} \left( B_{i+1} \int_3^U U_{i+1}^t - B_i \int_4^U U_i^t \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{S_{i,j}^{t+\Delta t} - S_{i,j}^t}{\Delta t} &= -\frac{1}{4\Delta x} \left( U_1 (S_{i+1,j}^t - S_{i,j}^t) + U_2 (S_{i,j}^t - S_{i-1,j}^t) + (U_1 + U_2) \Delta S \right) \\ &\quad - \frac{1}{2\Delta z} W_{i,j} (S_{i,j+1}^t - S_{i,j-1}^t) \\ &\quad + \frac{1}{2\Delta z^2} \left( K_{z,i+1}^t + K_{z,i}^t (S_{i,j+1}^t - S_{i,j}^t) - (K_{z,i}^t + K_{z,i,j+1}^t) (S_{i,j}^{t+\Delta t} - S_{i,j-1}^{t+\Delta t}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{B_i \Delta x^2} \left( B_{i+1} K_{x,i+1}^t (S_{i+1,j}^t - S_{i,j}^t) - B_i K_{x,i}^t (S_{i,j}^{t+\Delta t} - S_{i,j-1}^{t+\Delta t}) \right) \end{aligned}$$

$$U_1 = 0,5 (U_{i+1,j}^t - U_{i+1,j-1}^t)$$

$$U_2 = 0,5 (U_{i,j}^t - U_{i,j-1}^t)$$

$$\begin{aligned} \Delta S &= S_{i+1,j}^t - S_{i,j}^t & \text{si } (U_1 + U_2) < 0 \\ &= S_{i,j}^t - S_{i-1,j}^t & \text{si } (U_1 + U_2) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\frac{U_{i,j}^{t+\Delta t} - U_{i,j}^t}{\Delta t} = -U_{i,j}^t (U_{i+1,j}^t - U_{i-1,j}^t) / 2\Delta x$$

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{4\Delta z} \left( (W_{i,j+1}^t + W_{i-1,j+1}^t) (U_{i,j+1}^t - U_{i,j}^t) + (W_{i,j}^t - W_{i-1,j}^t) (U_{i,j}^t - U_{i,j-1}^t) \right) \\ &-\frac{2q}{2\Delta x} \left( \partial_z + \frac{S_i^{t+\Delta t} - S_{i-1}^{t+\Delta t}}{2} \right) \left( S_{i,j}^{t+\Delta t} - S_{i-1,j}^{t+\Delta t} + S_{i,j+1}^{t+\Delta t} - S_{i-1,j+1}^{t+\Delta t} \right) \\ &-\frac{q}{\Delta x} (S_i^{t+\Delta t} - S_{i-1}^{t+\Delta t}) \\ &+\frac{1}{2\Delta z^2} \left( (N_{z,i+1}^t + N_{z,i,j+1}^t) (U_{i,j+1}^t - U_{i,j}^t) - (N_{z,i}^t + N_{z,i-1,j}^t) (U_{i,j}^{t+\Delta t} - U_{i,j-1}^{t+\Delta t}) \right) \end{aligned}$$

$$\frac{W_{i,j+1}^t - W_{i,j}^t}{\Delta z} = -\frac{1}{\Delta x B_i} \left( B_{i+1} U_{i+1,j}^t - B_i U_{i,j}^t \right)$$

L'équation de conservation de la masse du sédiment est discrétisée de manière identique à l'équation d'advection-dispersion d'une substance en solution, avec prise en compte de la vitesse de chute  $W_s$ , calculée au même point que la concentration.

#### Modifications du schéma près des limites

L'aspect particulièrement intéressant de ce schéma numérique est de permettre la résolution des équations concernées jusqu'aux limites supérieures et inférieures du domaine, et ce, quelle que soit leur position. Pour cela, le calcul faisant appel à neuf noeuds du réseau entourant le point de calcul, donc à des points parfois extérieurs au domaine d'intégration, les valeurs de  $U$ ,  $S$  et  $C_s$  sont extrapolées après chaque pas de temps au dessus de la surface, et en dessous du fond, par des fonctions polynomiales.

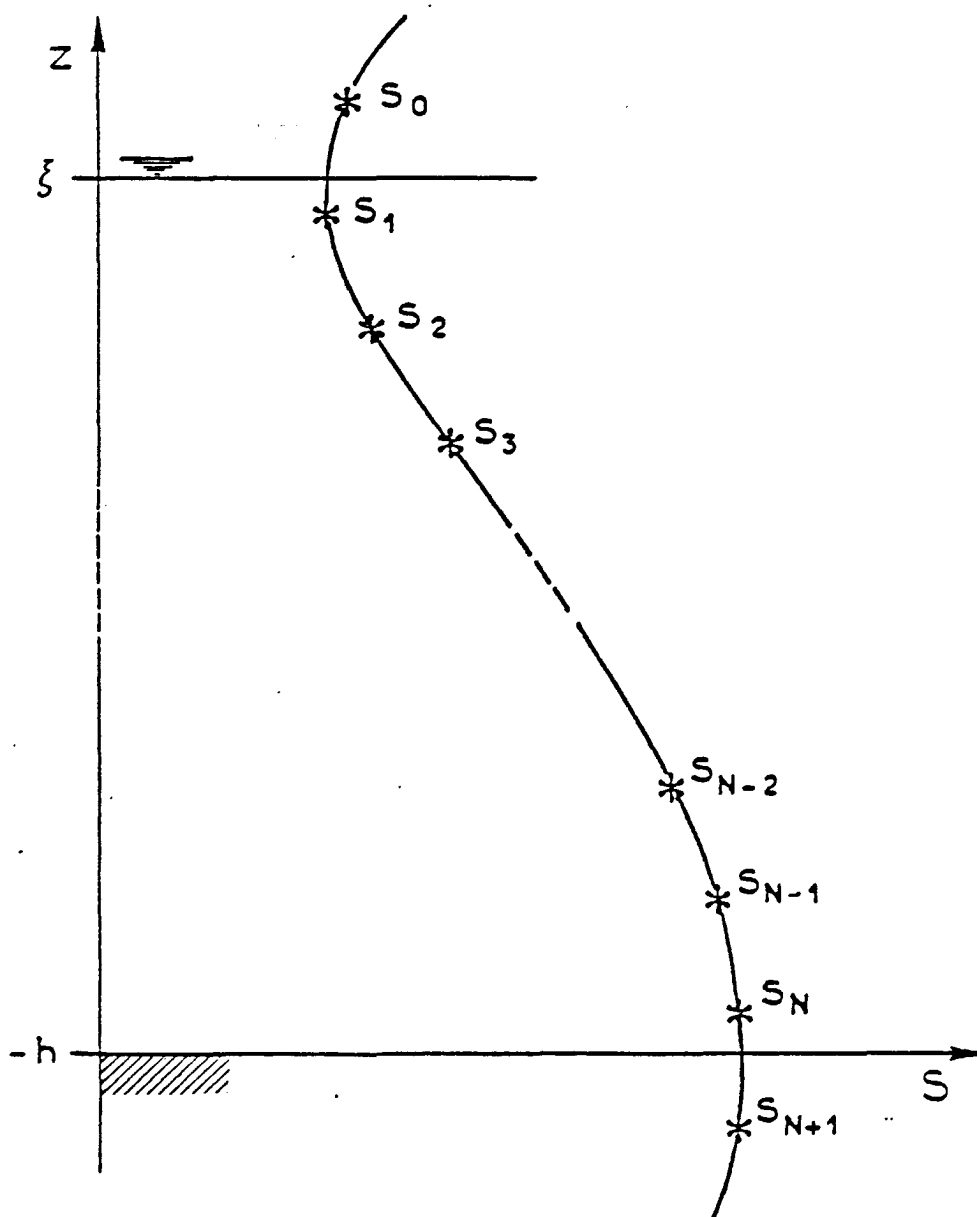


Figure 74

La valeur  $S_0$  de l'exemple ci-contre est calculée par extrapolation parabolique à partir des valeurs adjacentes  $S_1$  et  $S_2$  et de la condition de dérivée nulle en surface.

De même pour le calcul de  $S_{N+1}$  à partir de  $S_{N-1}$ ,  $S_N$  et de la dérivée nulle sur le fond. (Figure 74)

Toutefois, cette extrapolation par une fonction du second degré s'avère insuffisante pour évaluer les termes de dispersion près des limites, qui correspondent en fait à une dérivée seconde :

$$\frac{\partial \left( K_z \frac{\partial S}{\partial z} \right)}{\partial z}$$

On utilise alors une interpolation par polynôme du troisième degré, passant par les points  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  et respectant la condition de dérivée première nulle à la surface.

Le calcul est identique pour la salinité sur le fond, ainsi que pour la vitesse et la concentration en sédiments mais uniquement en surface.

Pour le calcul de la vitesse près du fond, HAMILTON utilisait également une extrapolation parabolique basée sur les points  $V_{N-2}$ ,  $V_{N-1}$  et  $V_N$ , d'où étaient issus  $U_{N+1}$  et  $V_{lm}$ .

Ce procédé qui numériquement donne toute satisfaction présente l'inconvénient de conduire à un courant non nul sur le fond, et donc à un calcul contestable de la vitesse à un mètre du fond et du débit total sur la verticale (par intégration des fonction  $U(z)$  définies par interpolation).

Une technique différente a été introduite ici, en adoptant entre le fond et le point d'indice  $N$  (figure 75) une fonction puissance de la forme :

$$U(z) = \alpha (z+h)^{\alpha^*}$$

Les coefficients  $A$  et  $\alpha^*$  de cette fonction sont déterminés de façon à respecter au point d'indice  $N$  la valeur de la fonction  $V(z)$  et de sa dérivée première (obtenue par la parabole  $V_{N-2}$ ,  $V_{N-1}$  et  $V_N$ ).

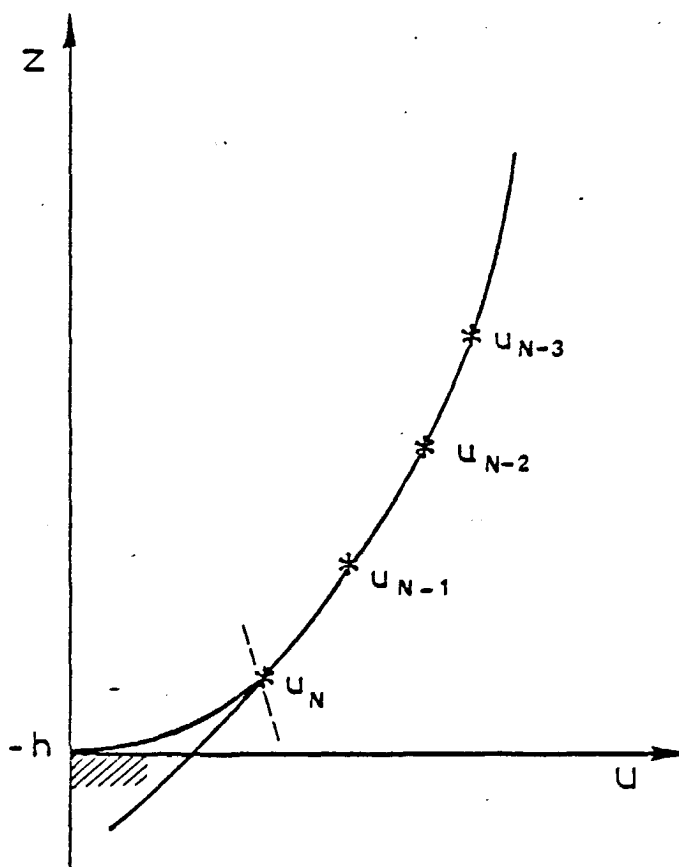


Figure 75

Le calcul de la turbidité et de ses dérivées près du fond soulève des difficultés analogues à ce qui vient d'être exposé pour les courants. Reproduire avec exactitude (autant que possible) la concentration près du fond est d'autant plus important que la fonction de dépôt fait appel à cette valeur :

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_{\text{dépôt}} = (W_s C_s)_{z=-h} \left(\frac{1 - \sigma_f}{\sigma_{fd}}\right)$$

Dans une première version du modèle mise au point à propos de la Gironde (DU PENHOAT et SALOMON, 1979) une extrapolation parabolique avait été utilisée, criticable quant à l'exactitude des résultats obtenus.

Pour mieux simuler les phénomènes d'échelle plus faible que le pas d'espace adopté, on s'est rapproché ici (comme pour les profils verticaux de courant) de la solution analytique. On sait qu'en régime permanent, lorsque la vitesse de chute équilibre la dispersion verticale, la concentration suit une fonction de la forme :

$$C_S(z) = C_S(z^*) e^{-\frac{W_s}{K'_y} (z - z^*)}$$

On a donc retenu la forme générale de cette fonction pour décrire la concentration près du fond :

$$C_S(z) = C_S(-h) e^{-\beta(z+h)} \quad (79)$$

Après avoir déterminé les concentrations  $CS$  aux points de rang  $N-2$ ,  $N-1$  et  $N$ , une interpolation parabolique permet de connaître la dérivée

$\frac{\partial C_S}{\partial z}$  au point  $N$  :

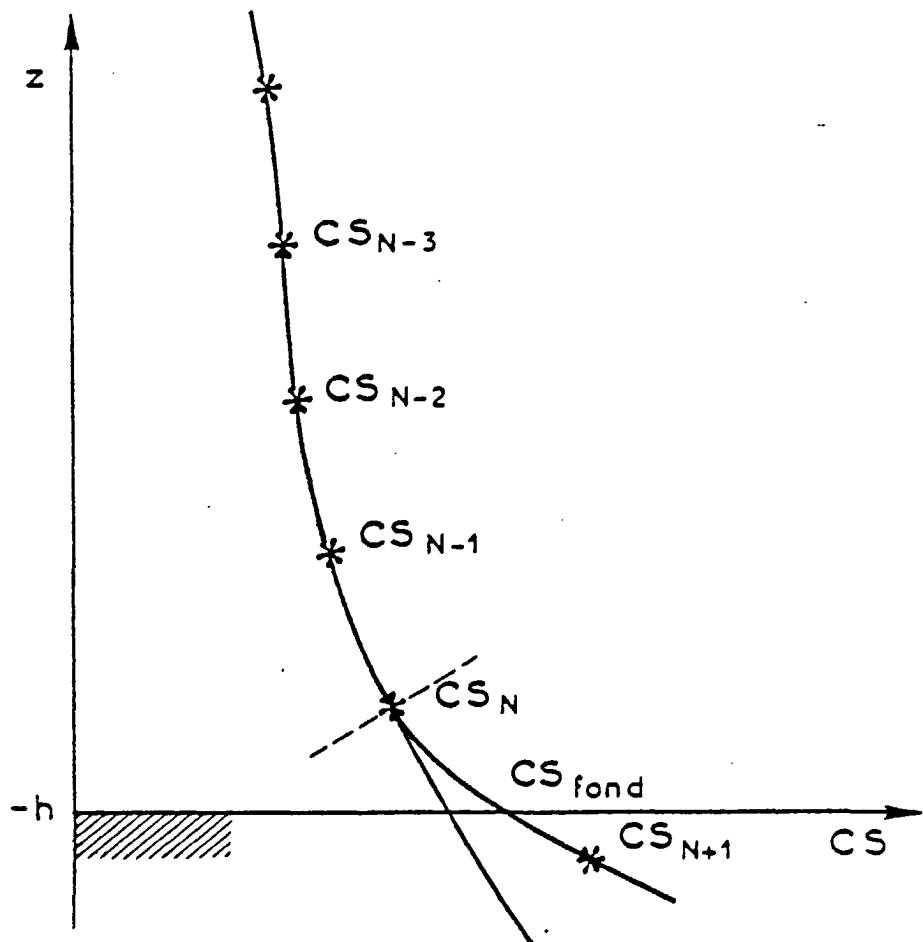


Figure 76

On cherche ensuite la fonction de forme exponentielle donnée plus haut (79), qui respecte à la fois  $CS_N$  et  $\left(\frac{\partial CS}{\partial z}\right)_{\text{fond}}$ . Cette fonction donne alors la valeur de CS sur le fond, et la valeur extrapolée  $CS_{N+1}$ .

Cette procédure, bien que numériquement très dangereuse (une petite erreur sur le gradient de turbidité au point N conduisant à des écarts considérables sur CS au fond ou sur sa dérivée seconde), n'a que rarement conduit à des instabilités de calcul et celles-ci ont toujours pu être éliminées par une paramétrisation adéquate des termes d'échange turbulent ( $K'_z$  principalement).

#### Stabilité du schéma

Une analyse de la stabilité au sens de VON NEUMANN (voir paragraphe V B) a été effectuée par HAMILTON (1975) dans le cas d'un système linéarisé et sans prendre en compte le traitement particulier des points aux limites. Les changements apportés ici au schéma original ne sont donc pas susceptibles de modifier les conclusions de l'étude de stabilité, à savoir :

$$\Delta t < \text{minimum} \left( \frac{\Delta z}{W}, \frac{\Delta x}{U}, \frac{\Delta x}{2\sqrt{gH}} \right)$$

Pour l'écoulement subcritique concerné par cette étude, le second critère se révélera moins contraignant que le troisième. Le premier et le troisième critère permettront donc de fixer des limites à deux des trois pas d'intégration ( $\Delta t, \Delta x, \Delta z$ ), le troisième étant fixé par la densité des résultats souhaités.

Bien entendu, les remarques faites au paragraphe (IV, B) à propos de la stabilité et de la précision du schéma peuvent être reprises ici. Que le schéma soit stable n'implique pas obligatoirement que la solution soit bonne, notamment du fait de la dispersion numérique introduite par le décentrement de certaines dérivées.

#### Choix des pas d'intégration

Une hauteur d'eau maximum de l'ordre de 14 m indique pour le troisième critère :

$$\Delta t < 0,06 \cdot \Delta x$$

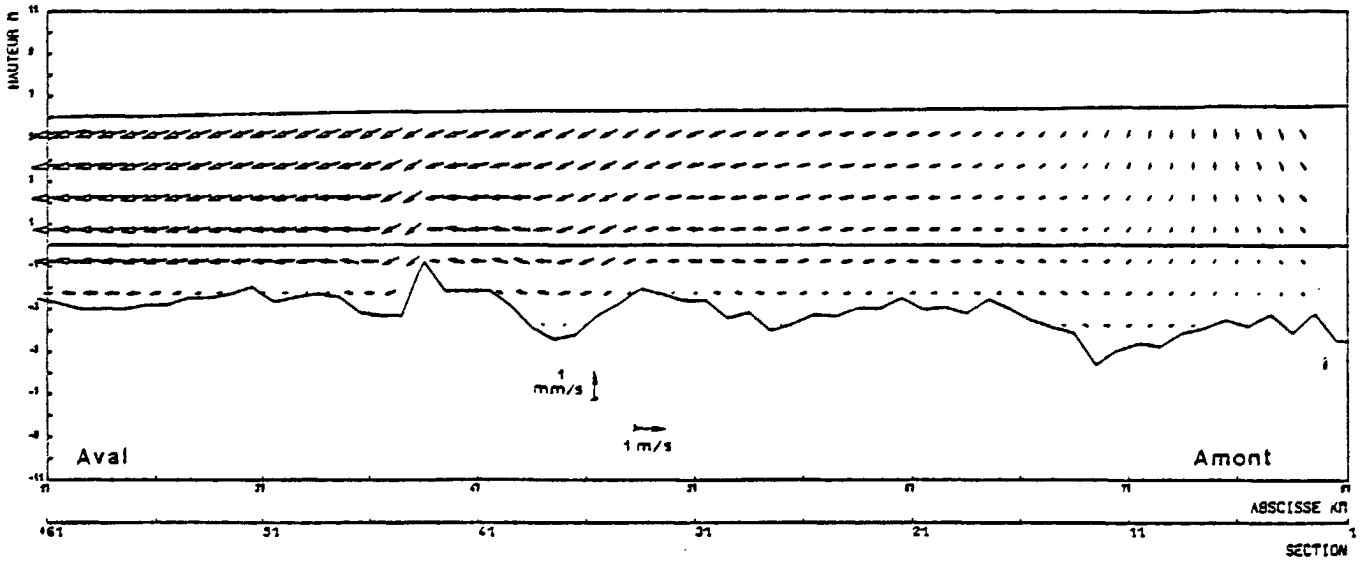


Figure 78a

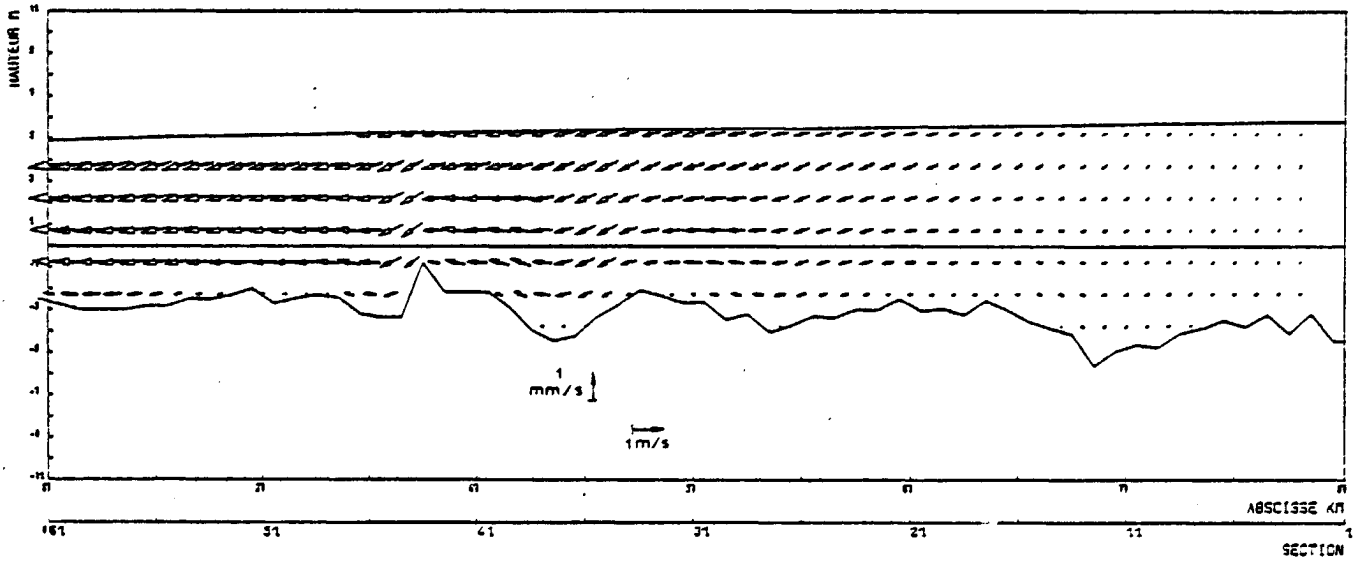


Figure 78b

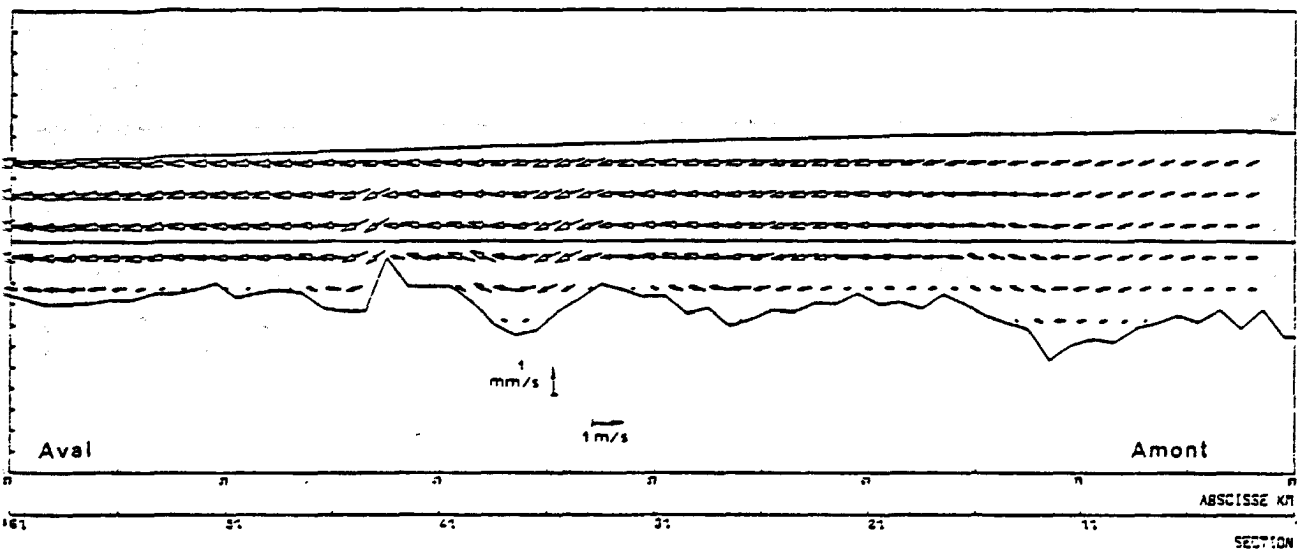


Figure 79a

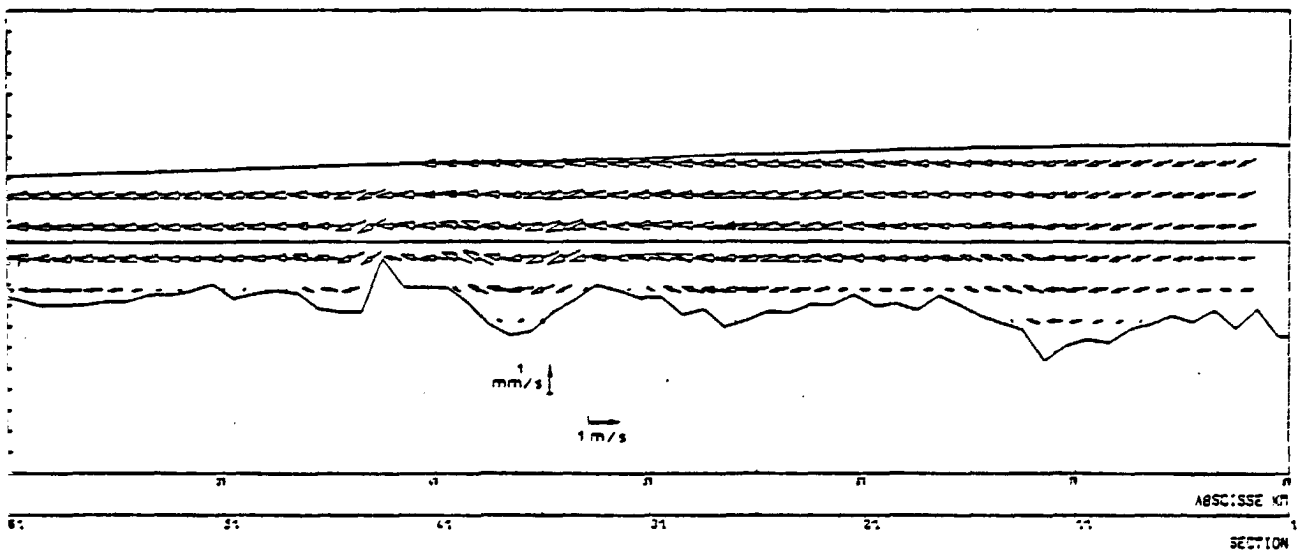


Figure 79b



La limitation imposée par le pas d'intégration vertical est mal aisée à calculer à priori, la vitesse verticale étant un paramètre difficilement accessible. Un ordre de grandeur de  $W$  pourrait être déduit en l'approximant par la dérivée partielle de la hauteur d'eau (4 mètres en une heure)

$$W(z) \approx \frac{\partial \zeta}{\partial t} \approx 10^{-3}$$

d'où 
$$\Delta t < 1000 \Delta z$$

De toute évidence le premier critère sera le plus restrictif, il correspond à :

$$\Delta t = 1 \text{ minute pour } \Delta x = 1000 \text{ m } , (\Delta z > 6 \text{ cm})$$

$$\Delta t = 2 \text{ minutes pour } \Delta x = 2000 \text{ m } (\Delta z > 12 \text{ cm})$$

Pour homogénéiser les pas d'espace et de temps des trois modèles conçus pour fonctionner simultanément, la valeur de  $\Delta x = 1000 \text{ m}$  a également été retenue pour ce modèle. Le pas d'intégration est alors une minute, ce qui présente l'avantage d'être un sous-multiple du pas d'intégration des modèles intégrés sur la verticale, et de faciliter leur fonctionnement de pair.

Quant au pas  $\Delta z$ , il a été choisi égal à 1,5 m par compromis entre le désir de précision et l'économie des temps de calcul. Il pourrait être très fortement diminué si le besoin s'en faisait sentir.

### Résultats

Les figures 77 à 82 fournissent une visualisation de la circulation au cours d'un cycle de marée moyenne et un débit d'étiage.

On y notera particulièrement la zone étendue concernée par la renverse des courants en fin de flot (fig.77b), en comparaison de la renverse de jusant plus brutale (fig. 81a ou 81b) et accompagnée d'un léger déphasage entre le fond et la surface très connu en estuaire, et qui apparaît ici bien que l'estuaire soit bien mélangé, dans les conditions envisagées.

Figures 77 à 82 : Vitesses calculées pour une situation de marée moyenne et de débit d'étiage.  
Situations présentées d'heure en heure.

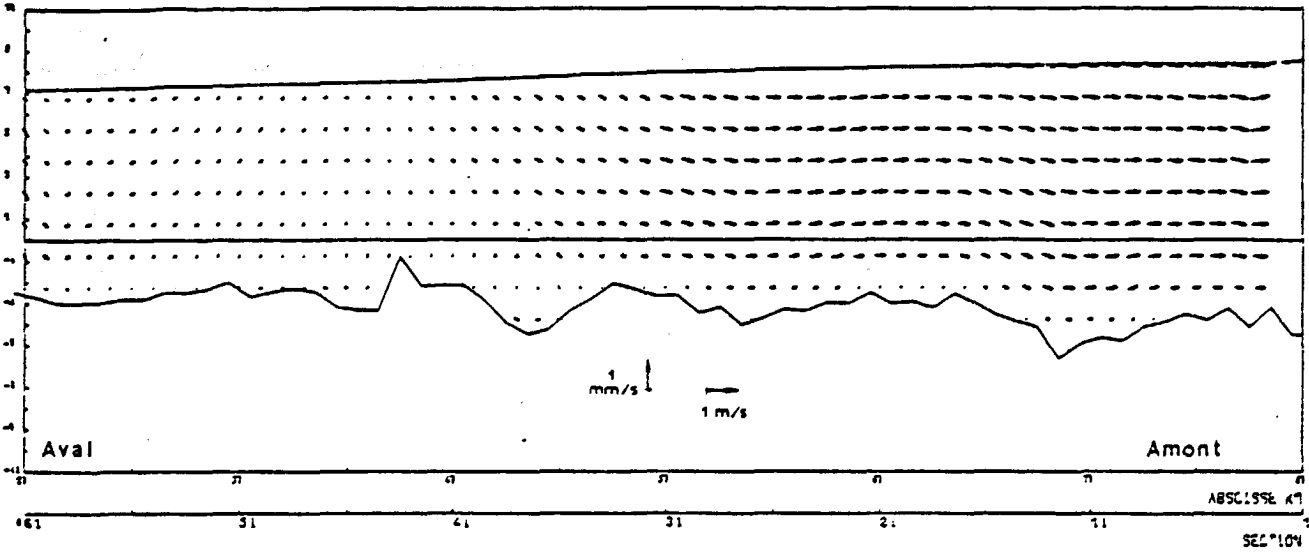


Figure 77a

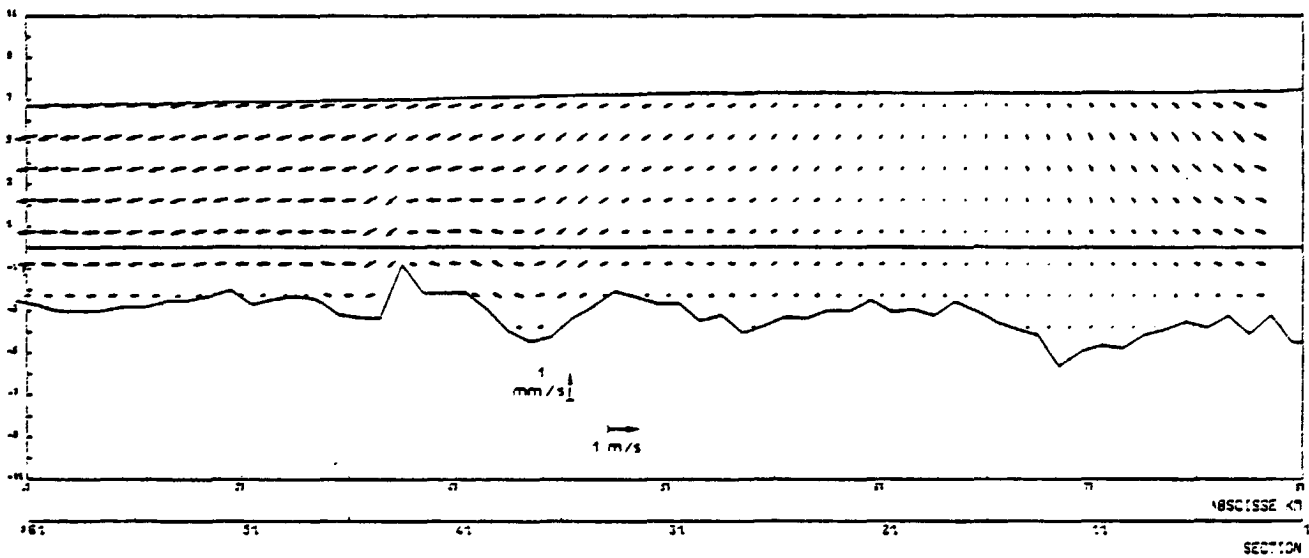


Figure 77b

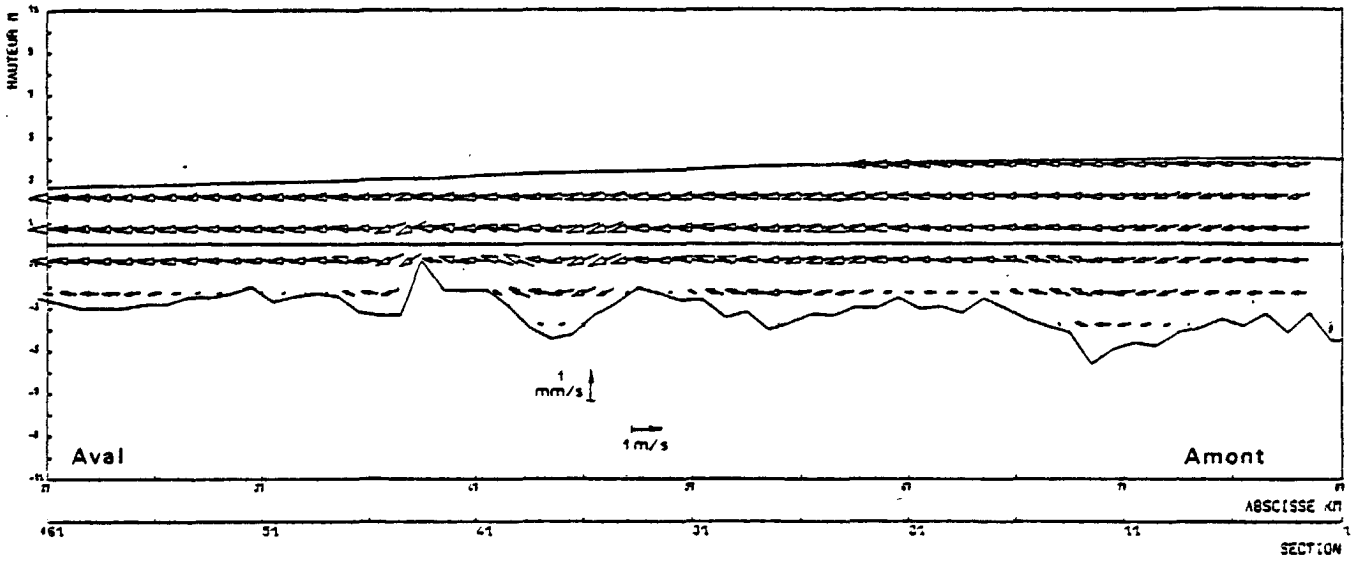


Figure 80a

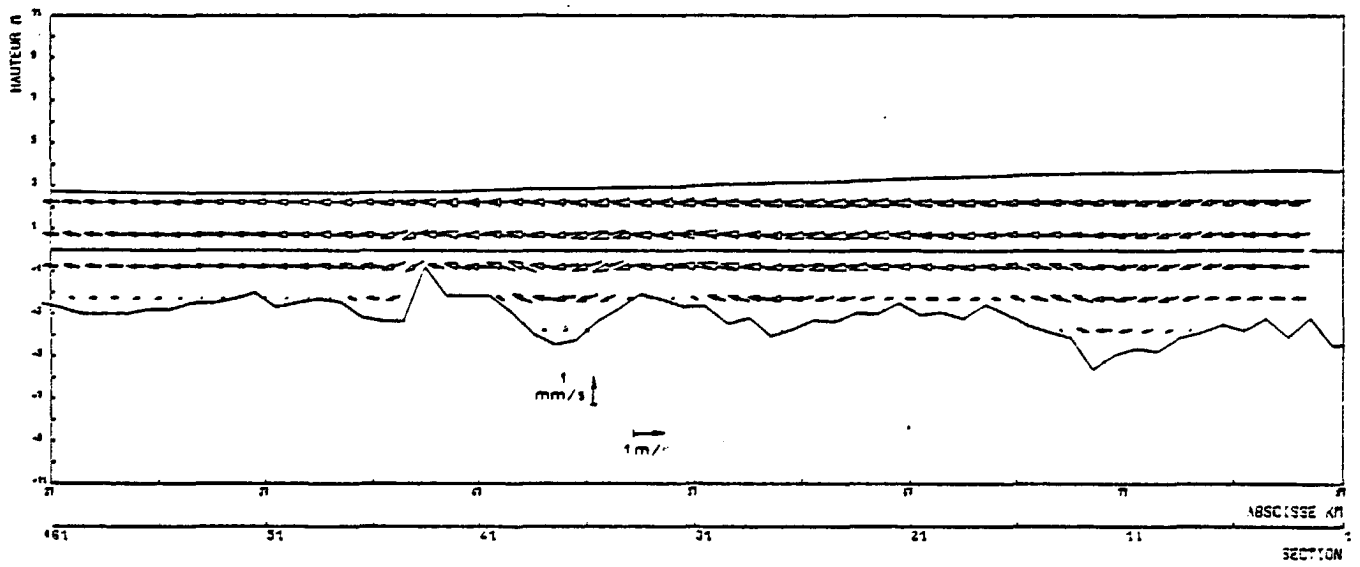


Figure 80b.

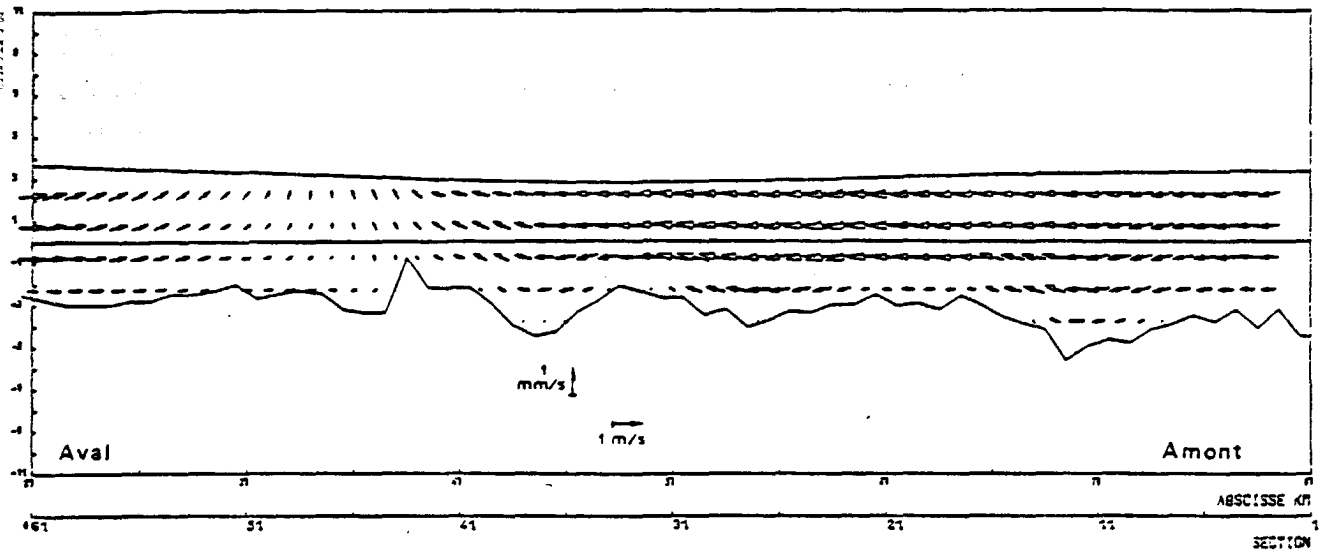


Figure 81a

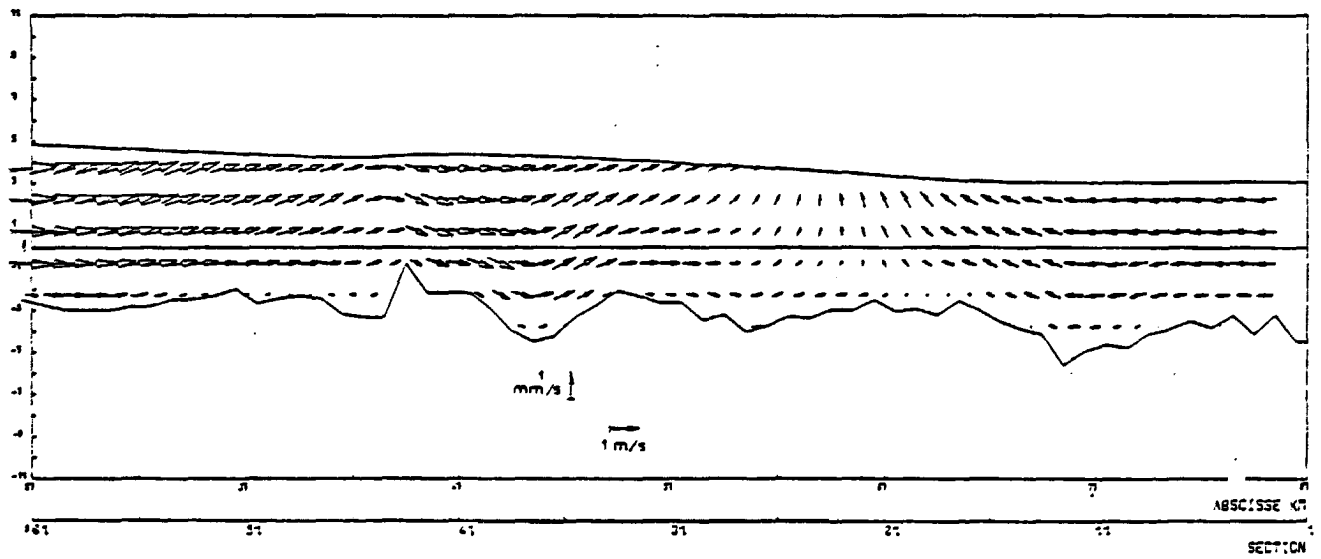


Figure 81b

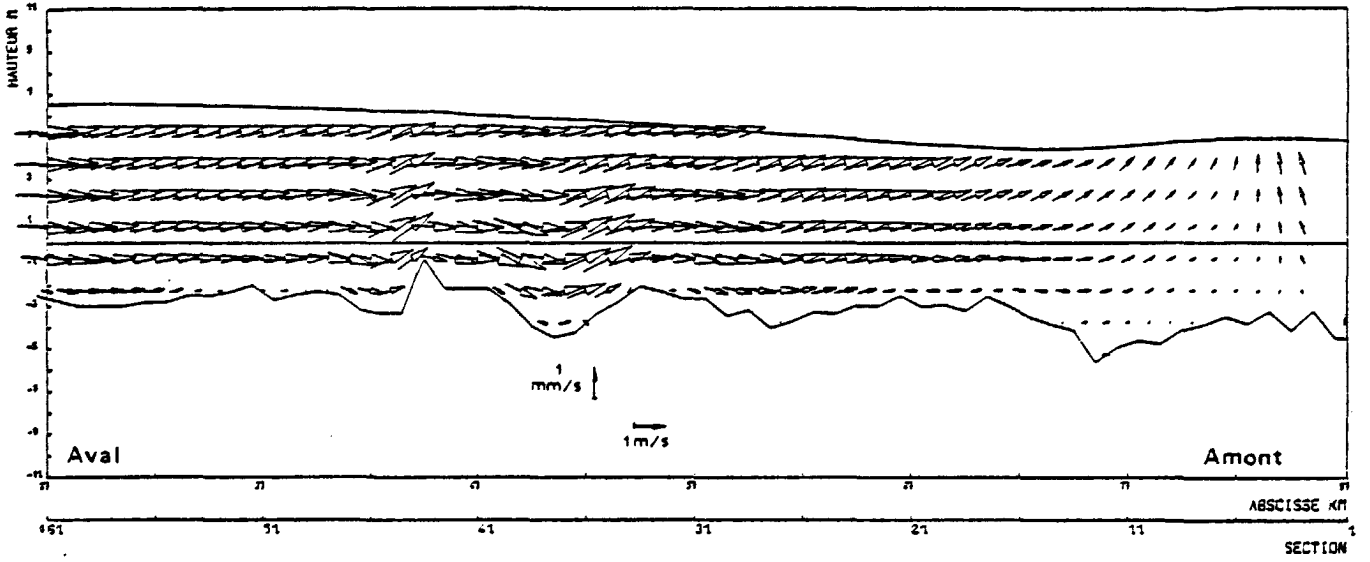


Figure 82a

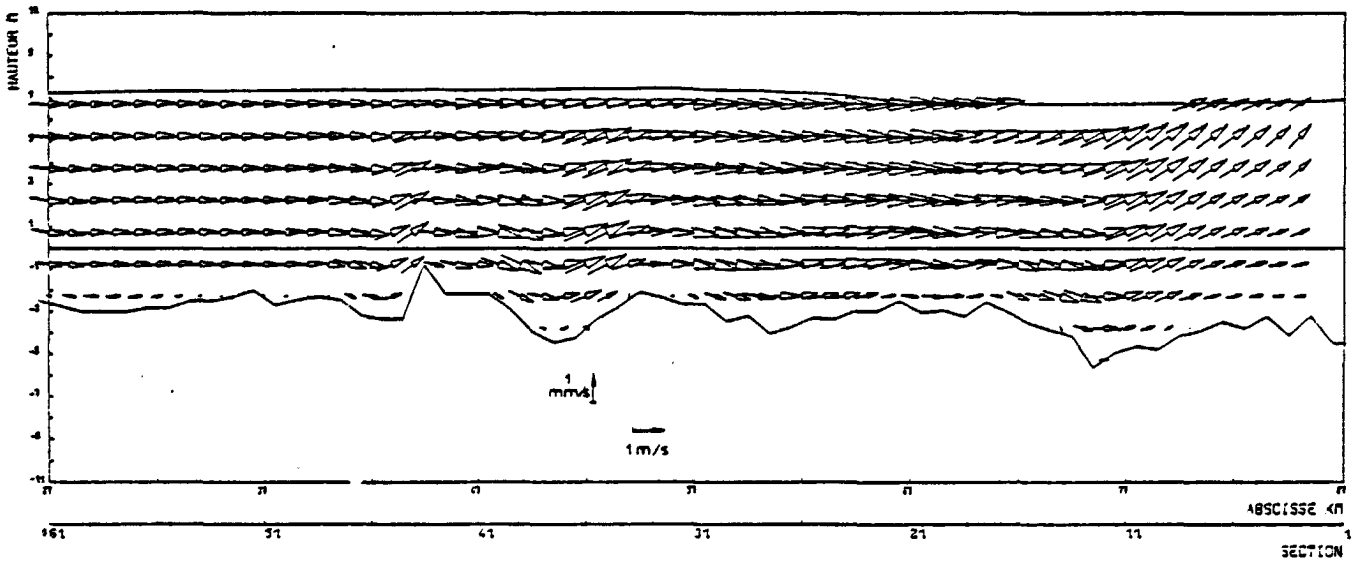


Figure 82b

On notera d'ailleurs que cette avance de la renverse de jusant près du fond dans la partie aval du modèle, où existe un gradient horizontal de salinité, disparaît à l'amont où l'eau est totalement douce. L'intensité du courant en début de flot est également remarquable en comparaison du courant de jusant.

La figure suivante (83) représente les courants intégrés sur le même cycle de marée. On a déjà signalé plus haut sous quelles réserves ces valeurs intégrées pouvaient représenter le phénomène résiduel, toutefois dans ce cas particulier l'intensité des courants intégrés, de l'ordre de 1 noeud, pour une situation d'étiage, est exceptionnelle et donc suffisamment nette pour ne pas être contestable quant à ses caractères essentiels. On précisera également que ces résultats sont confirmés par des mesures en nature (AVOINE, 1980).

Ce courant résiduel (eulérien) dirigé vers l'aval est explicable à la fois par la forme particulière de la marée en Seine, et par les ouvrages artificiels (digues et remblais) qui ont été réalisés dans ce secteur. La montée très brutale des niveaux, suivie de la tenue du plein, accentue la différence de hauteur d'eau moyenne entre le flot et le jusant, que l'on observe de manière générale dans les estuaires. Cette différence de niveau, de l'ordre de 2 mètres dans la région des digues, entraîne une variation des sections d'écoulement qui se répercute sur les courants, le volume introduit en flot étant peu différent du volume expulsé en jusant. Plus les sections d'écoulement augmentent rapidement avec la hauteur d'eau et plus cet effet devient important, renforçant les vitesses de flot, et s'opposant ainsi à la pénétration des sédiments marins dans l'estuaire. Les digues submersibles sont, sur ce point, très efficaces pour ce qui concerne les sables (SALOMON, 1976).

En ce qui concerne les sédiments fins la dynamique des phénomènes est plus obscure, mais le modèle décrit ici peut contribuer à éclaircir le problème :

#### Simulation du Bouchon Vaseux

Il apparaît à l'examen des mesures en nature (AVOINE, 1980), que des accumulations turbides existent de manière quasiment permanente dans le

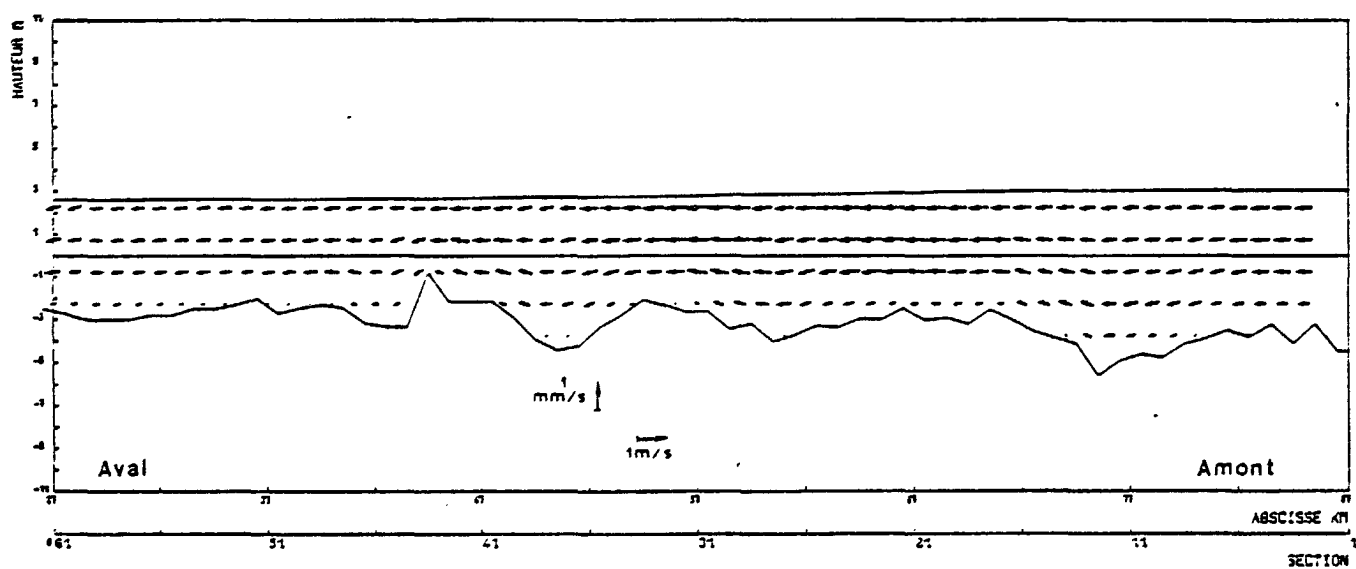


Figure 83 : Vitesses Eulériennes résultant d'une intégration sur un cycle de marée moyenne. situation d'étiage.

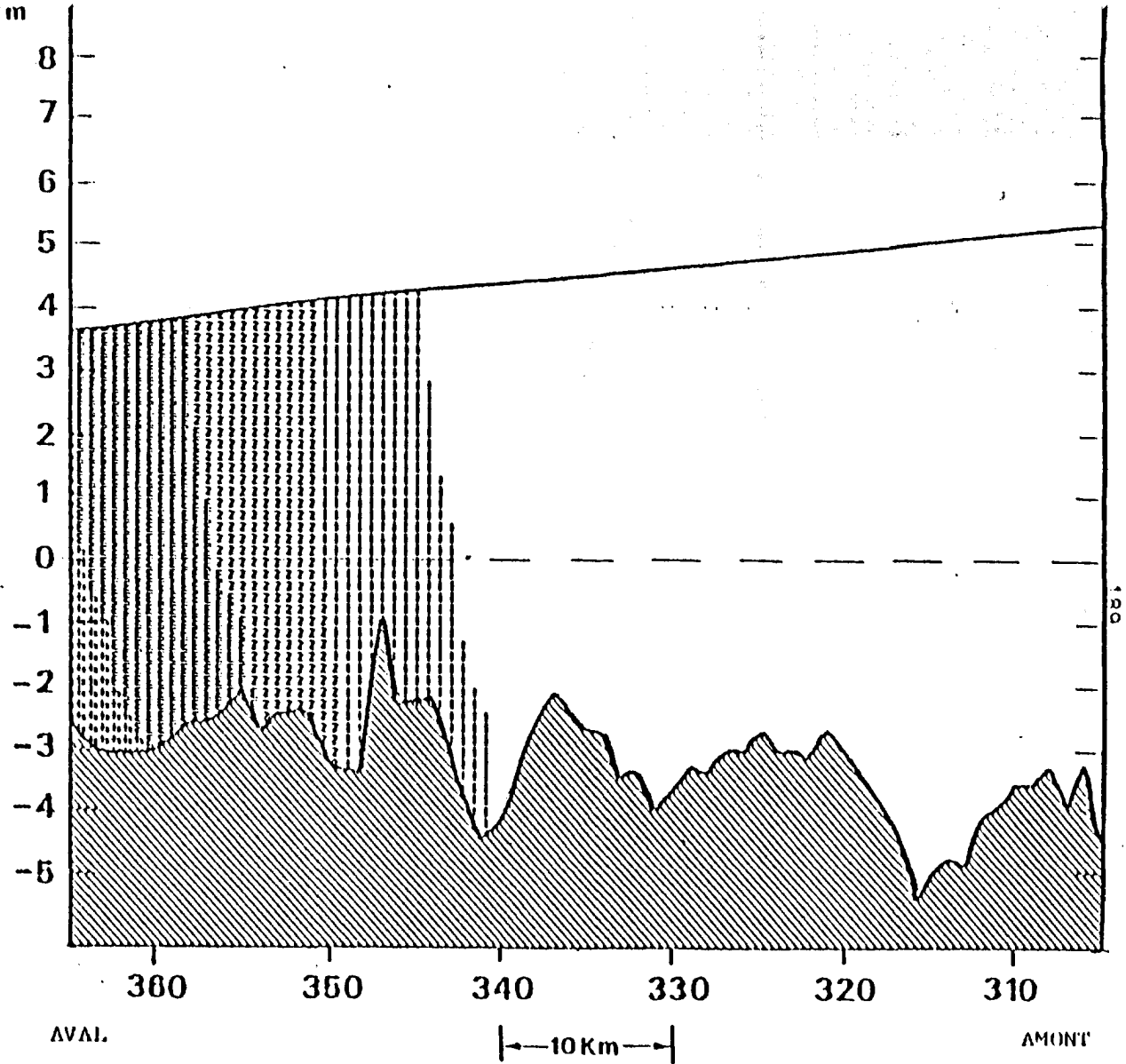
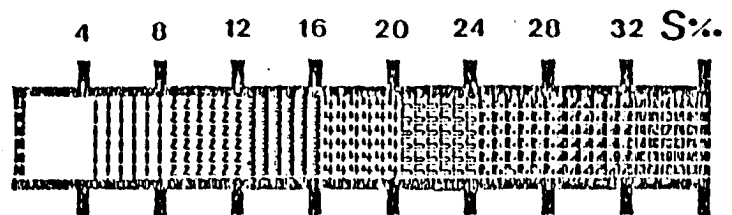


Figure 84 : Exemple de distribution des salinités, pour une situation de jusant.  
Marée moyenne d'étiage.



secteur des P.K. 320 à 360, Bouchon vaseux qui n'est qu'épisodiquement et partiellement expulsé hors du chenal. Le courant résiduel eulérien étant dirigé vers l'aval, comme il vient d'être décrit, il ne semble pas que l'explication classique liée au point nodal de densité puisse être retenue, nous avons donc recherché, à l'aide du modèle, une autre interprétation.

Pour ceci nous avons considéré que les fonds de l'estuaire étaient initialement inafouillables, et avons imposé une turbidité initiale de 1 g/l en tout point. Après quelques cycles marégraphiques de fonctionnement, en supposant qu'aucune introduction de matériau sédimentaire n'ait lieu par les limites amont et aval, on constate fig. 87 à 92 que les sédiments fins se rassemblent en une sorte de noyau, et oscillent avec la marée pratiquement sans être expulsés de l'estuaire. La figure 83 résume le processus : transport vers l'aval au cours du jusant, décantation faible dans le secteur aval et remise en suspension totale, puis transport vers l'amont, décantation plus complète du fait de l'étale de flot plus longue et du volume d'eau (donc de sédiment) plus important, et remise en suspension par le courant de jusant de manière plus progressive. Il s'en suit que la résultante Lagrangienne des sédiments fins est quasiment nulle dans ce secteur : Les particules s'y trouvent recyclées. On observera également le rôle de piège que jouent les irrégularités du fond vis à vis des sédiments.

A l'examen de ces résultats une interprétation semble se dégager, à savoir que selon les caractéristiques de la marée, et son importance relativement au débit fluvial, deux mécanismes au moins peuvent expliquer la formation d'un bouchon vaseux estuarien :

- les phénomènes de densité, maintes fois mis en lumière et qui sont certainement prépondérants dans les estuaires stratifiés (faible marée, débit fluvial important, grandes profondeurs) ;

- les phénomènes dynamiques de marée que l'on met en évidence dans le cas précis de la Seine, et sans doute d'autant plus efficaces que la marée est importante (voire de forme particulière) et que le débit fluvial et les profondeurs sont faibles.

Figures 87 à 92 : Turbidités calculées. Deux heures séparent chacune des situations présentées. Marée moyenne d'étiage.

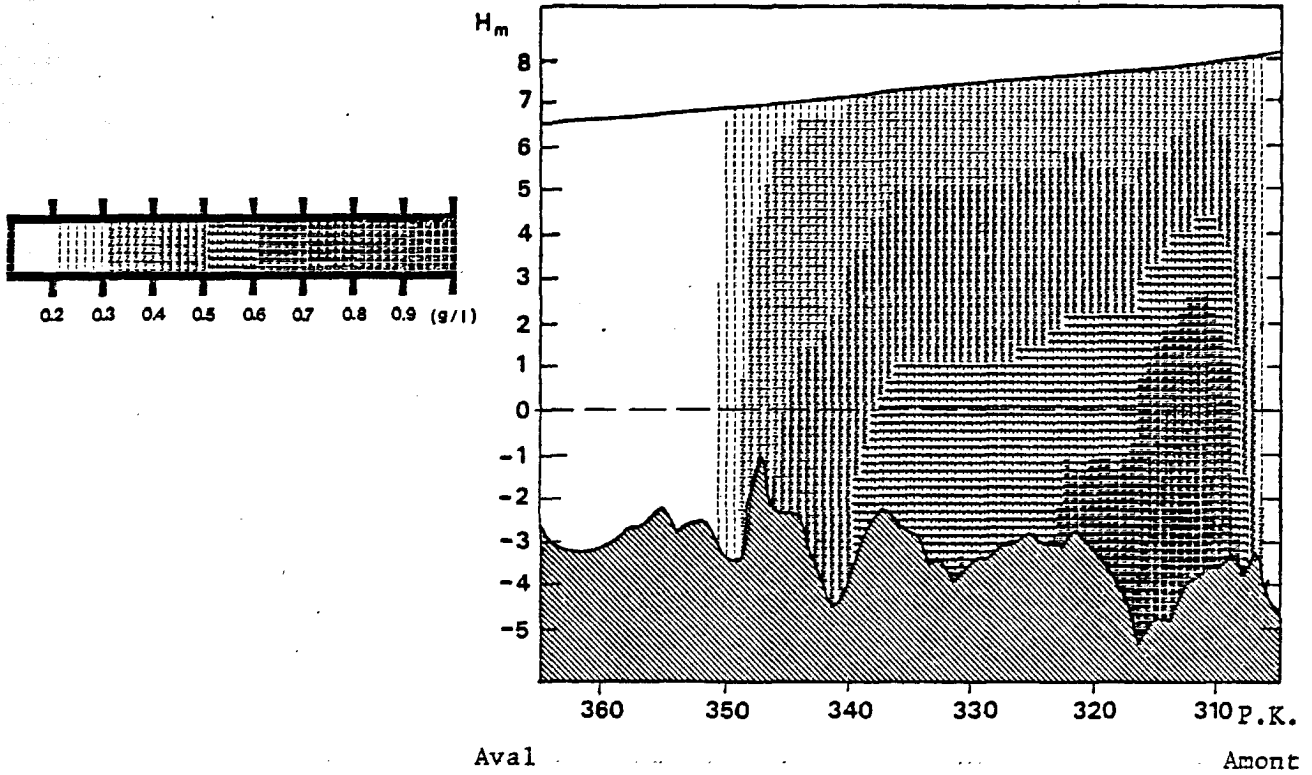


Figure 87

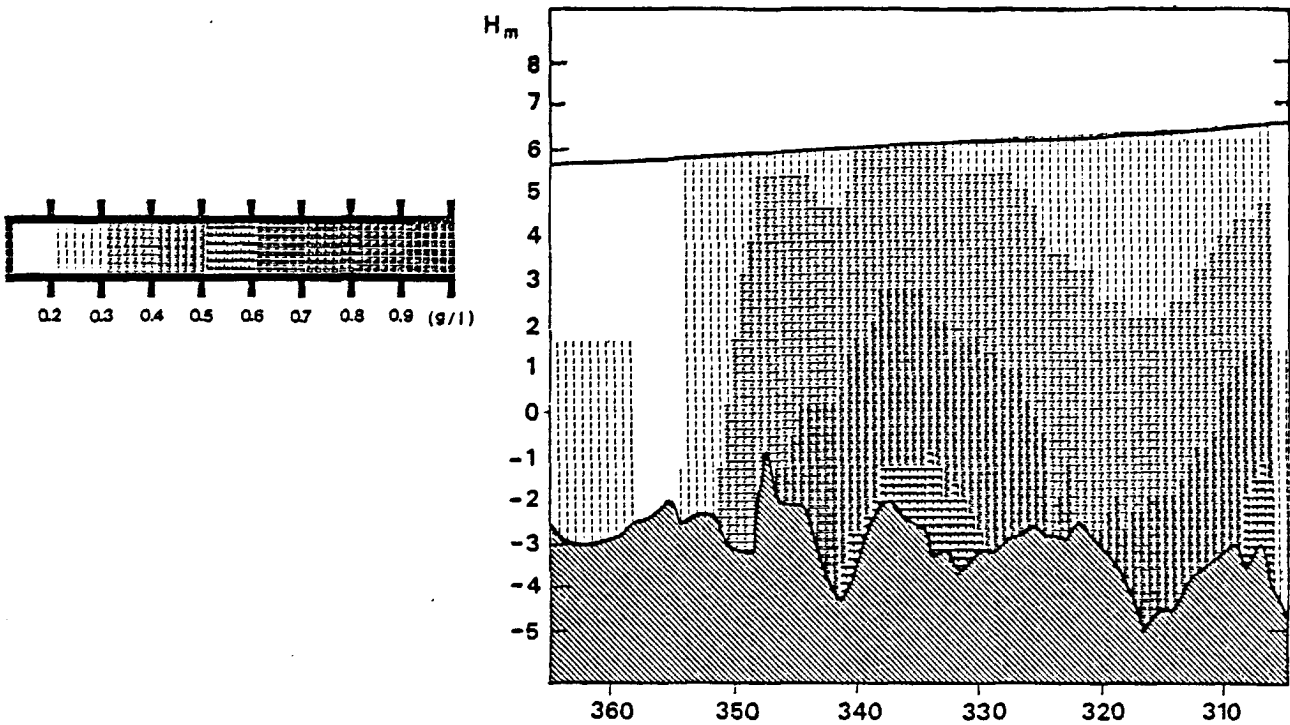


Figure 88

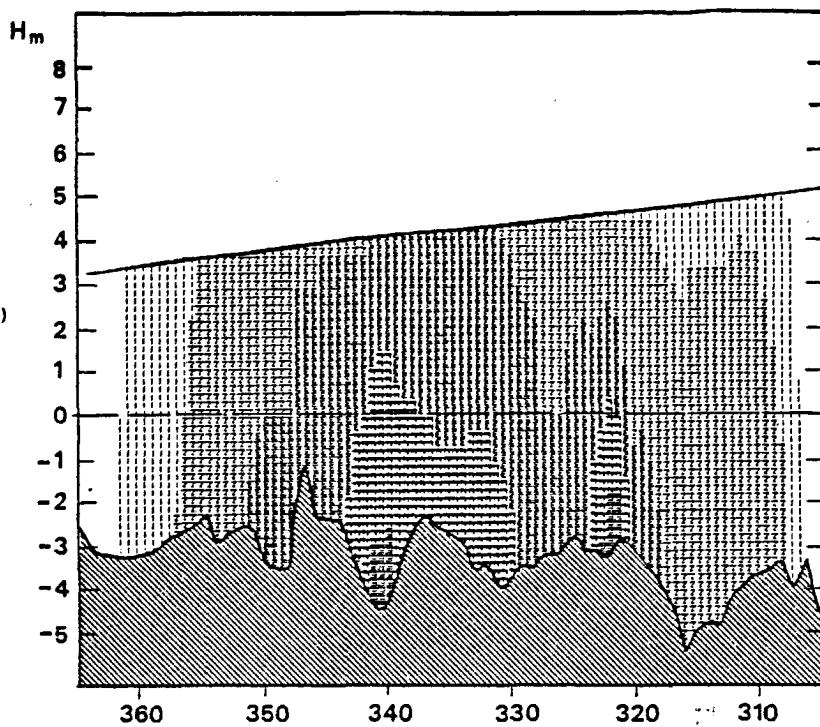
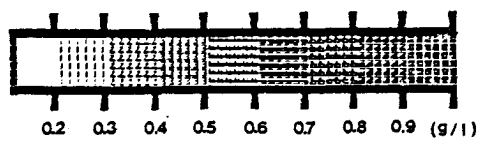


Figure 89

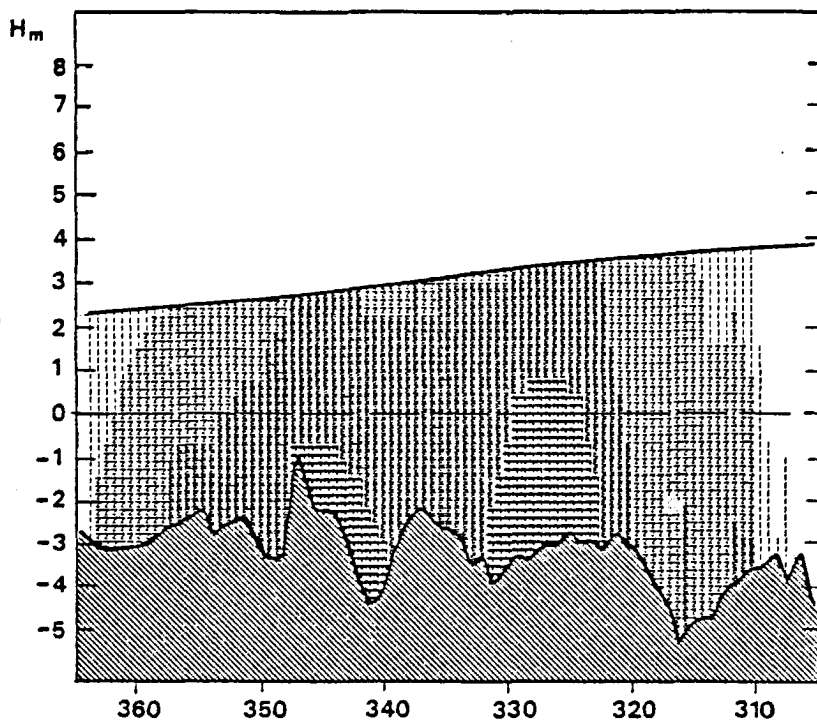
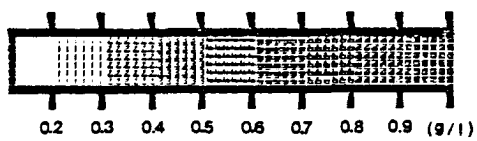


Figure 90

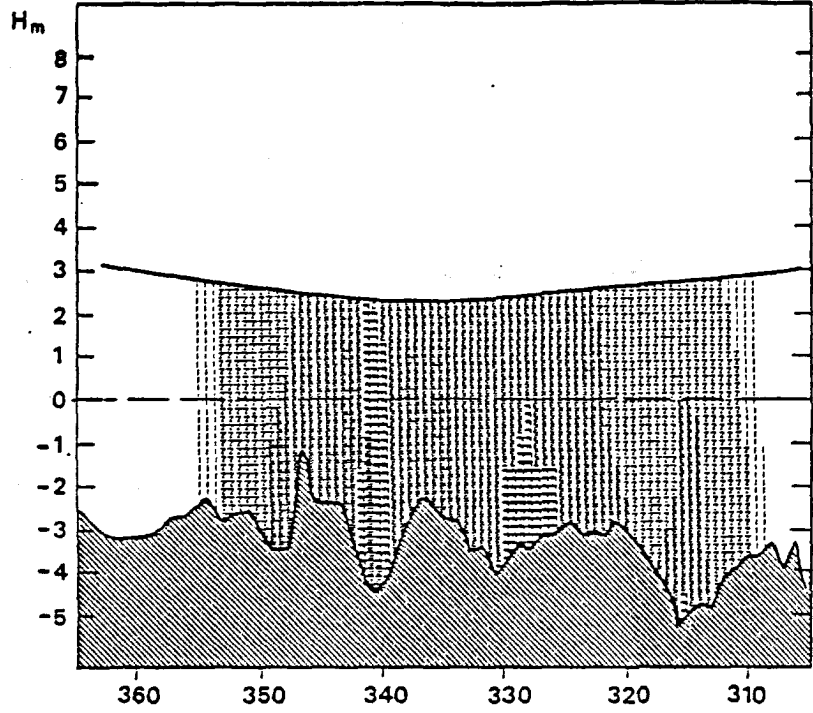
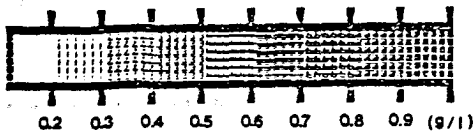


Figure 91

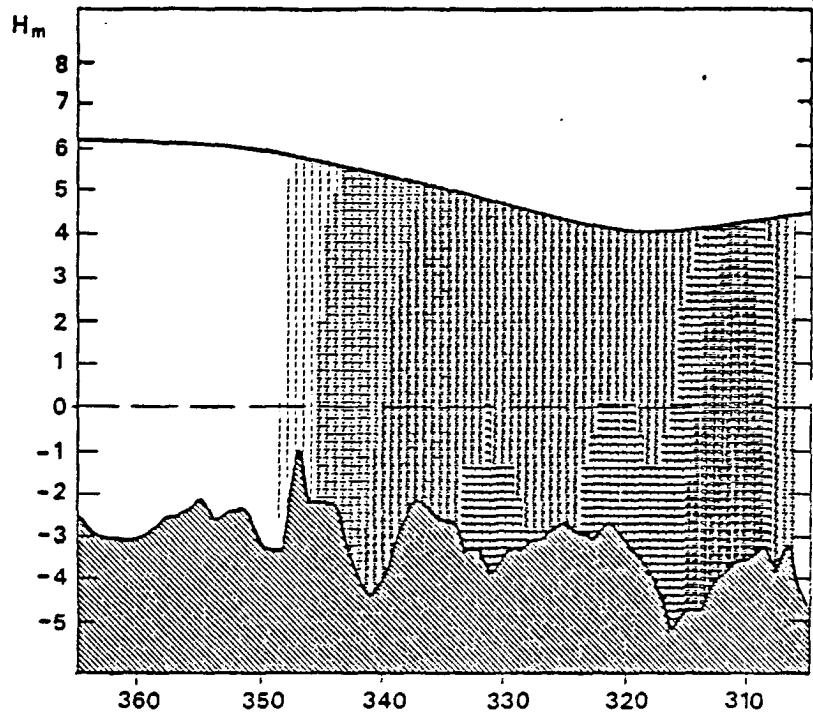
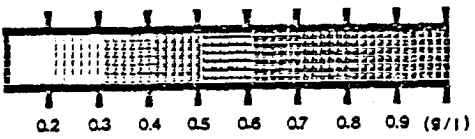


Figure 92

# Simulation du bouchon vaseux

(marée moyenne)  
(débit moyen)

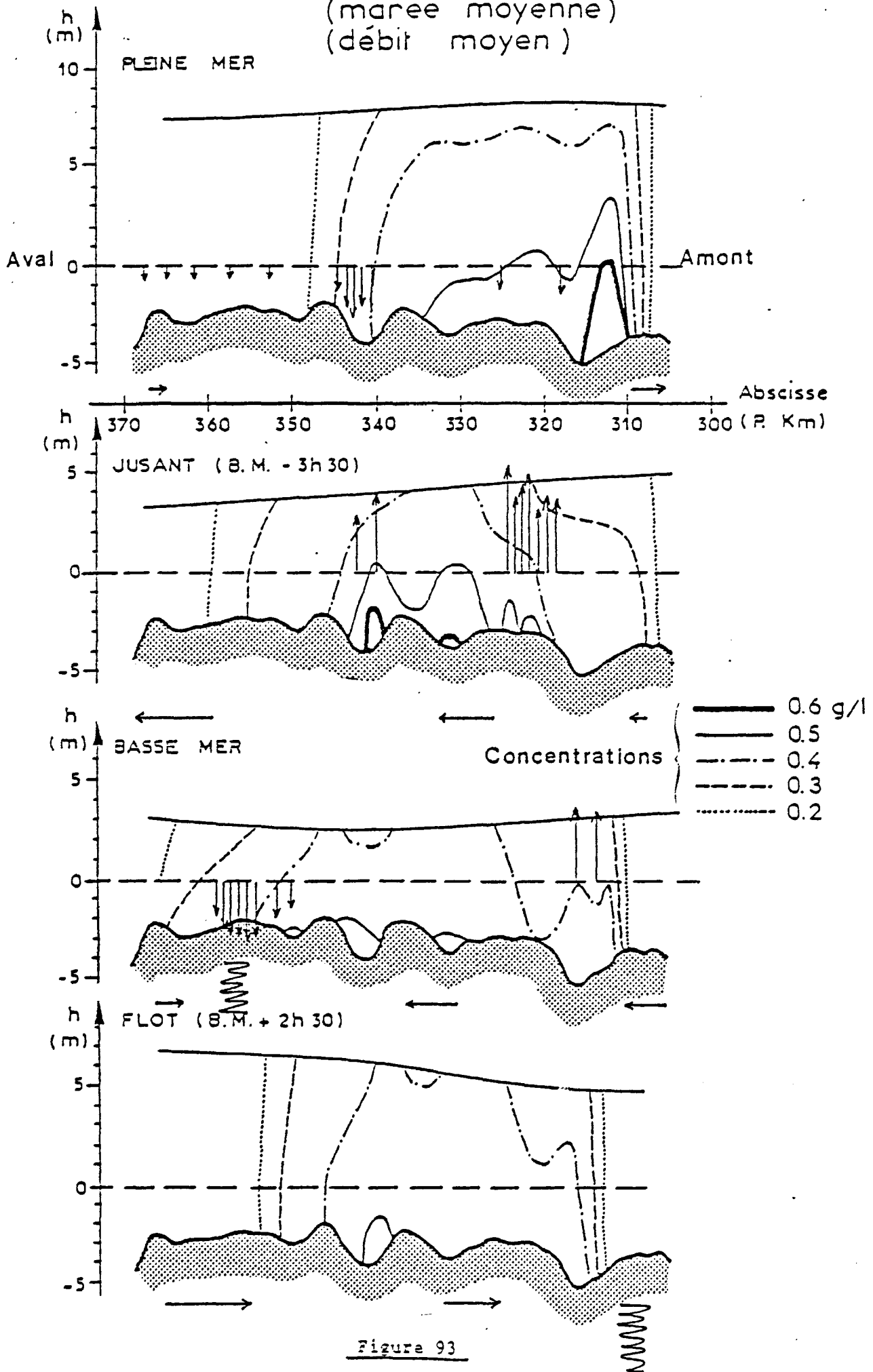


Figure 93

Probablement ces deux types de causes existent-elles simultanément avec des intensités variables ; en Seine il semble que le phénomène dynamique soit très important dans le secteur endigué, mais il ne serait pas impossible qu'un point nodal de densité existe à l'aval des digues, principalement par fort débit fluvial, et que la dynamique des accumulations turbides y soit différente, d'autant plus que la dimension latérale y serait à prendre en compte également.

Cette brève discussion pour illustrer un exemple d'application de ce modèle bidimensionnel en plan vertical

## E - MODELE TRIDIMENSIONNEL DE L'ESTUAIRE EXTERIEUR

Certaines options prises lors de la définition du programme de modélisation de l'estuaire de la Seine, à savoir parvenir impérativement à un outil d'analyse et de gestion "réaliste" et utilisable dans le cadre du SAUM, avaient conduit à éliminer à priori, l'éventuelle construction d'un modèle tridimensionnel.

Toutefois, au fur et à mesure que les études du SAUM (observations de terrain et résultats des modèles) progressaient, il est apparu clairement que le système estuarien de circulation différenciée sur la verticale, était dans ce cas d'estuaire, situé très en aval, et que les modèles laisseraient dans l'ombre un aspect important de la dynamique estuarienne, s'ils ne pouvaient simuler la circulation selon les trois dimensions, au moins dans le secteur extérieur proche du Havre.

Il a donc été décidé de procéder à une extension partielle du modèle bidimensionnel horizontal sur la dimension verticale, en réalisant un pseudo-modèle tridimensionnel.

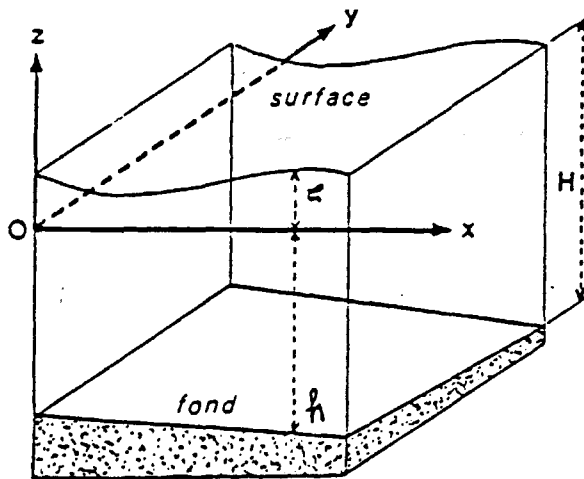
Ce type de modèle dont les hypothèses et les équations ont été formulées au paragraphe (II.B), ne reproduit pas l'advection différentielle des substances dissoutes, et n'agit pas sur le modèle bidimensionnel horizontal. Il constitue un compromis entre le désir de simuler d'une manière aussi complète que possible les phénomènes estuariens en Seine, et les contraintes de durée de l'étude et de moyens disponibles pour la mener à bien.

### 1 - Formulation du problème

Le système d'équations établi plus haut (§ IIB), concerne les écarts des variables par rapport à leur valeur moyenne sur la verticale :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - f \tilde{v} = A_x + G_x - \frac{\tau_{0x} - \tau_{1x}}{\rho H} + \frac{\partial (N_v \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z})}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + f \tilde{u} = A_y + G_y - \frac{\tau_{0y} - \tau_{1y}}{\rho H} + \frac{\partial (N_v \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z})}{\partial z}$$

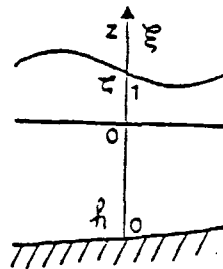


a) Changement de variable

On peut observer que la variable  $z$  a une limite supérieure variable. Pour simplifier la résolution des équations, il est intéressant d'opérer un changement de variable de façon à travailler en "hauteur réduite" dont les limites sont fixes :

$$\text{Soit : } \xi = \frac{z+h}{H+h}$$

Alors, quel que soit  $\xi$  et donc  $t$ ,  
 $\xi$  varie de 0 à 1.



Formules de changement de variable

Si l'on considère le nouveau système de coordonnées  $X = x$ ,  
 $Y = y$ ,  $T = t$ , on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T} - \frac{\xi}{H} \frac{\partial \xi}{\partial T} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}$$



$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} + \left( \frac{1-\xi}{H} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\xi}{H} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \quad R$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

Remarque : la vitesse  $w$  qui sera conservée dans les équations désigne la composante verticale de vitesse correspondant à l'ancienne coordonnée verticale  $z$ , c'est-à-dire :

$$w = \frac{dz}{dt} \neq \frac{d\xi}{dt}$$

Ecriture des équations dans le nouveau système (X, Y, \xi, T)

Puisque  $\xi$  et  $h$  sont indépendants de  $\xi$ , d'après (R) les conditions d'imperméabilité au fond et en surface gardent la même expression.

Par contre, les équations (15) et (16) prennent la forme :

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial T} - \frac{\xi}{H} \frac{\partial \xi}{\partial T} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \xi} + \varepsilon_{ij} f \tilde{u}_j = A'_i + G'_i - \frac{\tilde{c}_{si} - \tilde{c}_{fi}}{\rho H} + \frac{1}{H} \frac{\partial (N_{ij})}{\partial \xi} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \xi} \quad i=1,2 \quad (87)$$

Avec :

$$A'_i = -(\tilde{u}_j + U_j) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_j} - \tilde{u}_j \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial X_i} \left( H \int_0^1 \tilde{u}_i \tilde{u}_j d\xi \right) - \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \xi} (U_i + \tilde{u}_i)_x$$

$$\left( \frac{1-\xi}{H} \frac{\partial h}{\partial X_i} - \frac{\xi}{H} \frac{\partial \xi}{\partial X_i} \right) - \frac{w}{H} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \xi}$$

(en remarquant que  $\int_{-h}^{\xi} \tilde{u}_i \tilde{u}_j = H \int_0^1 u_i u_j d\xi$ , indépendant de  $\xi$ )

$$G'_i = \frac{g}{\rho_0} \left( \int_0^1 \frac{\partial}{\partial X_i} (H \int_0^1 \rho d\xi) d\xi - \frac{\partial}{\partial X_i} (H \int_0^1 \rho d\xi) + \frac{\partial h}{\partial X_i} (\rho \xi - \int_0^1 \rho d\xi) + \frac{\partial H}{\partial X_i} \left( \int_0^1 \rho \xi d\xi - \rho \xi \right) \right)$$

L'équation de continuité, quant à elle, devient :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} + \frac{1}{H} \frac{\partial W}{\partial \xi} + \left( \frac{1-\xi}{H} \frac{\partial h}{\partial X} - \frac{\xi}{H} \frac{\partial \xi}{\partial X} \right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \quad (88)$$

$$+ \left( \frac{1-\xi}{H} \frac{\partial h}{\partial Y} - \frac{\xi}{H} \frac{\partial \xi}{\partial Y} \right) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} = 0$$

Enfin, on peut regrouper dans les équations (87) les termes non linéaires qui, si l'on tient compte de l'expression de la vitesse verticale en surface, s'écrivent :

$$A''_i = A'_i + \frac{\xi}{H} \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \xi} = -(U_i + \tilde{u}_i) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_i} - \tilde{u}_i \frac{\partial U_i}{\partial X_i} + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial X_i} \left( H \int_0^1 \tilde{u}_i \tilde{u}_i d\xi \right)$$

$$+ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \xi} \left( \frac{\xi-1}{H} (\tilde{u}_i + U_i) \right) \frac{\partial h}{\partial X_i} + \frac{\xi}{H} (\tilde{u}_i - \tilde{u}_i \xi) \frac{\partial \xi}{\partial X_i}$$

$$+ \frac{\xi w_\xi - w}{H}$$

Par ailleurs, on suppose que la viscosité turbulente verticale est indépendante de la direction horizontale considérée et qu'elle peut être exprimée comme le produit d'une fonction de T, X et Y et d'une fonction de  $\xi$  (cf. BOWDEN, 1965). On peut alors poser :

$$\frac{N_{iz}}{H^2} = \sigma(T, X, Y) \cdot \lambda(\xi) \quad (\text{NIHOUL, 1977})$$

Finalement, le système d'équations à résoudre est le suivant :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial T} - f \tilde{v} = A_x + G_x - \frac{c_{sx} - c_{fx}}{\rho H} + \sigma \frac{\partial \left( \lambda \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \right)}{\partial \xi} \quad (89)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial T} + f \tilde{u} = A_y + G_y - \frac{c_{sy} - c_{fy}}{\rho H} + \sigma \frac{\partial \left( \lambda \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} \right)}{\partial \xi} \quad (90)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = -H \frac{\partial (U + \tilde{u})}{\partial X} - H \frac{\partial (V + \tilde{v})}{\partial Y} + \left( (\xi-1) \frac{\partial h}{\partial X} + \xi \frac{\partial \xi}{\partial X} \right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}$$

$$+ \left( (\xi-1) \frac{\partial h}{\partial Y} + \xi \frac{\partial \xi}{\partial Y} \right) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi}$$

Avec :

$$A_i = -(U_i + \tilde{u}_i) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_i} - \tilde{u}_i \frac{\partial U_i}{\partial X_i} + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial X_i} \left( H \int_0^1 \tilde{u}_i \tilde{u}_i d\xi \right)$$

$$+ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \xi} \left( \frac{\xi-1}{H} (\tilde{u}_i + U_i) \right) \frac{\partial h}{\partial X_i} + \frac{\xi}{H} (\tilde{u}_i - \tilde{u}_i \xi) \frac{\partial \xi}{\partial X_i} - \frac{\xi w_\xi - w}{H}$$

$$G_i = \frac{q}{\rho_0} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( H \int_{\xi}^1 \rho d\xi \right) d\xi - \frac{\partial}{\partial x_j} H \int_0^1 \rho d\xi + \frac{\partial h}{\partial x_j} \left( \rho \xi - \int_0^1 \rho d\xi \right) + \frac{\partial H}{\partial x_j} \left( \int_0^1 \rho \xi d\xi - \rho \xi \right)$$

b) Conditions aux limites

Elles sont représentées par la donnée des tensions de frottement en surface  $\tau_s$  et au fond  $\tau_f$  qui interviennent par les formules :

$$\tau_{fi} = \left( \rho N_r \frac{\partial u_i}{\partial z} \right)_{-h} = \rho H \sigma \lambda_{-h} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right)_{-h} \quad (92)$$

$$\tau_{si} = \left( \rho N_r \frac{\partial u_i}{\partial z} \right)_{\xi} = \rho H \sigma \lambda_{\xi} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right)_{\xi}$$

Le choix de l'expression de  $\tau_f$  sera discuté plus loin le frottement adopté est du type CHEZY :

$$\tau_{fi} = \frac{\rho g}{g^2} |U + \tilde{u}_i| (U_i + \tilde{u}_{i,1})$$

$U_i + \tilde{u}_{i,1}$  représentant la vitesse au voisinage du fond (en fait à  $H/3(N-1)$  du fond).

La contrainte de surface quant à elle aura une expression semblable à celle utilisée pour le modèle horizontal (cf. III.C).

$$\tau_s = \rho_a c_D \left( (v - V)^2 + (u - U)^2 \right)$$

On remarque que les conditions d'imperméabilité au fond et en surface devront être respectées. De même la somme des fluctuations sur la verticale devra être nulle :

$$\int_0^1 \tilde{u}_i d\xi = 0$$

Enfin, si l'on tient compte de la viscosité du fluide, la condition d'imperméabilité au fond se transforme en condition de vitesse nulle, d'où :

$$\tilde{u}_{i,-h} = -U_i$$

## 2 - Méthode de résolution des équations (89, 90, 91)

Le principe adopté est une résolution numérique progressive des équations à partir de valeurs initiales, les équations étant discrétisées, selon un schéma en différences finies.

Une méthode totalement explicite du type DUFORT-FRANKEL, inspirée de la méthode du "saut de mouton", a d'abord été expérimentée : mais les conditions de stabilité du calcul entraînaient un pas de temps très faible et donc des temps de calcul trop longs. Aussi a-t-on préféré utiliser un schéma partiellement implicite.

### a) Schéma de discrétisation des équations (90) et (91)

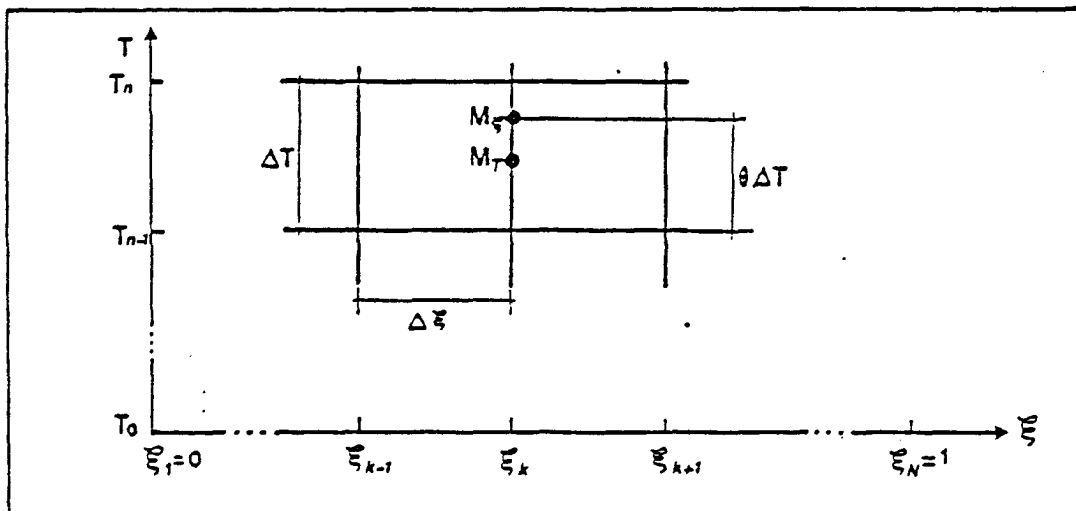


Figure 94 : Présentation du domaine d'intégration.

### Schématisation des dérivées

Si on exclut dans les équations les termes non linéaires  $A_i$  et les termes de densité  $J_i$ , le système (90) - (91) devient un système à deux inconnues  $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$  fonctions de deux variables  $T$  et  $\xi$ , pour un couple  $(X, Y)$  fixé. Les dérivées en  $T$  ou en  $\xi$  d'une fonction  $f$  sont respectivement exprimées dans l'espace discrétisé  $(T_n, \xi_k)$  aux points  $M_T$  et  $M_\xi$  (voir figure 94). Elles s'écrivent donc sous la forme des différences finies suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_{k, n-1/2} &= \frac{f_{k, n} - f_{k, n-1}}{\Delta T} \quad (\text{dérivée temporelle centrée}) \\ \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \right)_{k, n-1/2} &= \theta \cdot \frac{f_{k+1, n} - 2f_{k, n} + f_{k-1, n}}{(\Delta \xi)^2} + (1-\theta) \frac{f_{k+1, n-1} - 2f_{k, n-1} + f_{k-1, n-1}}{(\Delta \xi)^2} \end{aligned} \right.$$

Avec  $0 \leq \theta \leq 1$  : est le coefficient d'excentrement selon la dimension "temps" des dérivées spatiales. On remarquera que ces dérivées sont centrées selon la dimension "spatiale".

- si  $\theta = 0$  : la dérivée seconde en  $\xi$  de  $f$ , entre les instants  $n-1$  et  $n$ , n'est fonction que des valeurs de  $f$  au temps  $n-1$  : le schéma est dit explicite.
- si  $\theta = 1$  : cette même dérivée seconde n'est alors fonction que des valeurs de  $f$  au temps  $n$  (qui sont inconnues) : le schéma est dit totalement implicite.
- pratiquement, nous n'avons utilisé que des dérivées centrées dans le temps, c'est-à-dire telles que  $\theta = 0,5$ .

### Schématization des équations

Le problème posé est le calcul des vitesses à l'instant  $T$  en toutes les cotes  $\xi$ , connaissant les vitesses aux instants précédents  $T_{n-1}$ ,  $T_{n-2}$ , etc...

Pour le résoudre, on écrit les équations (90) et (91) à la cote  $k$  et entre les instants  $n$  et  $n-1$ . Pour découpler les équations (90) et (91), on peut rendre les termes de CORIOLIS explicites, ce qui se justifie par la faible importance de ces termes. On écrit alors (en supprimant la notation " $\sim$ ", puisqu'il n'y a plus que des fluctuations de vitesse) :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{u_{k, n} - u_{k, n-1}}{\Delta T} &= Q_x + f v_{k, n-1} + \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \left[ \lambda_k^+ \frac{u_{k+1, n} - u_{k, n}}{\Delta \xi} - \lambda_k^- \frac{u_{k, n} - u_{k-1, n}}{\Delta \xi} \right] + \frac{(1-\theta)\sigma}{\Delta \xi} \left[ \lambda_k^+ \frac{u_{k+1, n-1} - u_{k, n-1}}{\Delta \xi} - \lambda_k^- \frac{u_{k, n-1} - u_{k-1, n-1}}{\Delta \xi} \right] \\ \frac{v_{k, n} - v_{k, n-1}}{\Delta T} &= Q_y - f u_{k, n-1} + \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \left[ \lambda_k^+ \frac{v_{k+1, n} - v_{k, n}}{\Delta \xi} - \lambda_k^- \frac{v_{k, n} - v_{k-1, n}}{\Delta \xi} \right] + \frac{(1-\theta)\sigma}{\Delta \xi} \left[ \lambda_k^+ \frac{v_{k+1, n-1} - v_{k, n-1}}{\Delta \xi} - \lambda_k^- \frac{v_{k, n-1} - v_{k-1, n-1}}{\Delta \xi} \right] \end{aligned} \right. \quad (94)$$

avec  $Q_i = A_i + G_i - \frac{\tau S_i - \tau f_i}{H}$   
 et  $\lambda_k^+ = \frac{\lambda_{k+1} + \lambda_k}{2}$ ,  $\lambda_k^- = \frac{\lambda_{k-1} + \lambda_k}{2}$

Ces équations sont en fait des relations implicites du type :

$$u_{k,n} = f(u_{k,n-1}, u_{k+1,n-1}, u_{k-1,n+1}, u_{k+1,n+1}, u_{k+1,n}, v_{k,n+1})$$

(on peut permuter u et v)

b) Schématisation des conditions aux limites

Les conditions aux limites sont introduites par l'intermédiaire des équations du mouvement aux points frontières. Ces équations s'expriment alors sous une forme particulière car on ne peut calculer de manière centrée

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right)$$

aux bords du domaine : en effet  $\partial u_i / \partial \xi$  n'a pas de sens au-delà des limites.

Pour éviter d'introduire des dérivées secondes excentrées, on écrit les équations non plus à la limite ( $k = 1$  ou  $N$ ), mais à  $\Delta \xi / 3$  de cette limite (voir fig. 95). Les termes  $\partial u_i / \partial \xi$  sont quant à eux calculés aux limites à l'aide des formules (92).

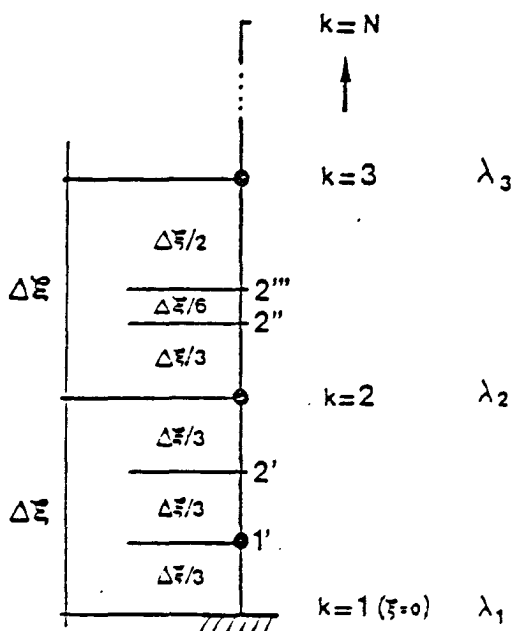


Figure 95 : Position des points de calcul près de la limite (les équations sont résolues aux points repérés par le symbole " ' ").

En (1') on écrit :

$$\sigma \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right) = \frac{\sigma}{(2/3)\Delta \xi} \left[ \frac{2\lambda_2 + \lambda_1}{3} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right)_{2'} - \lambda_1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right)_1 \right], \quad i = 1, 2$$

$$\text{avec } \left( \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right)_{2',n} = \frac{1}{(2/3)\Delta \xi} [\theta(u_{i,2n} - u_{i,1n}) + (1-\theta)(u_{i,2n-1} - u_{i,1n-1})] \text{ et } \lambda_1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right)_1 = \frac{\tau f_i}{\rho \sigma H}$$

$$\text{soit : } \sigma \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right) = \frac{3}{4} \frac{\sigma(2\lambda_2 + \lambda_1)}{\Delta \xi^2} [\theta(u_{i,2n} - u_{i,1n}) + (1-\theta)(u_{i,2n-1} - u_{i,1n-1})] - \frac{3}{2} \frac{\tau f_i}{\rho H \Delta \xi}$$

Compte tenu de ces relations, les équations (93) et (94) s'écrivent en 1', sous forme discrétisée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{1n} - u_{1n-1}}{\Delta T} = Qx + f v_{1'n-1} + \frac{3}{4} \frac{\sigma(2\lambda_2 + \lambda_1)}{\Delta \xi^2} [\theta(u_{2n} - u_{1n}) + (1+\theta)(u_{2n-1} - u_{1n-1})] - \frac{3}{2} \frac{\tau f_x}{H \Delta \xi} \rho \end{array} \right. \quad (93-1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_{1n} - v_{1n-1}}{\Delta T} = Qy - f u_{1'n-1} + \frac{3}{4} \frac{\sigma(2\lambda_2 + \lambda_1)}{\Delta \xi^2} [\theta(v_{2n} - v_{1n}) + (1-\theta)(v_{2n-1} - v_{1n-1})] - \frac{3}{2} \frac{\tau f_y}{H \Delta \xi} \rho \end{array} \right. \quad (94-1)$$

On obtient par un raisonnement analogue la forme discrétisée des équations (93) et (94) près de la limite supérieure (en N', située à  $\Delta \xi/3$  de N).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{Nn} - u_{Nn-1}}{\Delta T} = Qx + f v_{N'n-1} - \frac{3}{4} \frac{\sigma(2\lambda_{N-1} + \lambda_N)}{\Delta \xi^2} [\theta(u_{Nn} - u_{N-1n}) + (1-\theta)(u_{N'n-1} - u_{N-1n-1})] + \frac{3}{2} \frac{\tau s_x}{H \Delta \xi} \end{array} \right. \quad (93-N)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_{Nn} - v_{Nn-1}}{\Delta T} = Qy - f u_{N'n-1} - \frac{3}{4} \frac{\sigma(2\lambda_{N-1} + \lambda_N)}{\Delta \xi^2} [\theta(v_{Nn} - v_{N-1n}) + (1-\theta)(v_{N'n-1} - v_{N-1n-1})] + \frac{3}{2} \frac{\tau s_y}{H \Delta \xi} \end{array} \right. \quad (94-N)$$

Les vitesses n'étant pas calculées aux limites, les termes

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right)$$

aux points voisins ( $k = 2$  et  $N-1$ ) doivent être exprimés respectivement en fonction des vitesses en  $k = 1'$  et  $k = N'$ . On a alors pour  $k = 2$  (voir fig. 95) :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right) \right]_{n2} = \left( \lambda \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right)_{2'} - \left( \lambda \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right)_{2'} \frac{1}{2\Delta\xi/3}$$

$$\text{avec } \left( \lambda \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right)_{n2} = \frac{4}{5} \left( \lambda \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right)_{n2''} + \frac{1}{5} \left( \lambda \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right)_{n2'}$$

$$\left( \lambda \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right)_{n2''} = \frac{\lambda_3 + \lambda_2}{2} \frac{u_{i3} - u_{i2}}{\Delta\xi}$$

$$\left( \lambda \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right)_{n2'} = \frac{2\lambda_2 + \lambda_1}{3} \frac{u_{i2} - u_{i1'}}{2\Delta\xi/3}$$

$$\text{Soit } \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right) \right]_{n2} = \frac{3}{5\Delta\xi^2} [(\lambda_3 + \lambda_2)u_{i3} - (\lambda_3 + 2\lambda_2 + \lambda_1) \cdot u_{i2} + (2\lambda_2 + \lambda_1)u_{i1'}],$$

$$\text{avec } u_{i1} = \theta u_{i1n} + (1-\theta) u_{i1n-1}, \quad i=1, 2 \text{ ou } 3$$

La forme discrétisée des équations (90) et (91) en 2 est alors :

$$\frac{u_{2n} - u_{2n-1}}{\Delta T} = Qx + f v_{2n-1} + \frac{3}{5\Delta\xi^2} [(\lambda_3 + \lambda_2)(\theta u_{3n} + (1-\theta)u_{3n-1}) - (\lambda_3 + 2\lambda_2 + \lambda_1)(\theta u_{2n} + (1-\theta)u_{2n-1}) + (2\lambda_2 + \lambda_1)(\theta u_{1n} + (1-\theta)u_{1n-1})] \quad (93-2)$$

$$\frac{v_{2n} - v_{2n-1}}{\Delta T} = Qy - f u_{2n-1} + \frac{3}{5\Delta\xi^2} [(\lambda_3 + \lambda_2)(\theta v_{3n} + (1-\theta)v_{3n-1}) - (\lambda_3 + 2\lambda_2 + \lambda_1)(\theta v_{2n} + (1-\theta)v_{2n-1}) + (2\lambda_2 + \lambda_1)(\theta v_{1n} + (1-\theta)v_{1n-1})] \quad (94-2)$$

Les formes discrétisées 93-(N-1) et 94-(N-1) des équations (90) et (91) en N-1 sont analogues : il suffit de remplacer dans les relations (93-2) et (94-2) les indices 1', 2 et 3 par respectivement N', N-1 et N-2.

Remarque :

Dans les relations (93) et (94) les termes  $Q_i$ ,  $\mathcal{C}_{si}$  et  $\mathcal{C}_{fi}$  peuvent être écrits en fonction des inconnues  $u_{ikn}$  et modifient alors l'allure des équations, en particulier leur linéarité. Par simplification, on les considèrera comme fonctions explicites des variables  $u_{ikn-1}$ .

L'ensemble des relations 93-1, 93-2, 93 (pour  $2 < k < N-1$ ), 93-(N-1), 93-N d'une part, et 94-1, 94-2, 94 (pour  $2 < k < N-1$ ), 94-N



d'autre part, constituent deux systèmes matriciels de  $N$  équations à  $N$  inconnues (les  $u_{kn}$  d'une part et les  $v_{kn}$  d'autre part,  $1 \leq k \leq N$ ).

c) Résolution du système linéaire (93) (94)

On peut écrire les équations (93) et (94) en regroupant dans les premiers membres les termes inconnus  $u_{ikn}$ . Les systèmes d'équations alors obtenus (voir planche de la page suivante) peuvent s'écrire sous la forme matricielle :

$$(5) \text{ ou } (6) \quad [A] (U_n) = [B] (U_{n-1}) + [C]$$

où  $(U_n)$  est le vecteur  $(\dots, u_k, \dots)$  à l'instant  $n$  et  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[C]$  des matrices connues avec  $A$  de type tridiagonale.

Soit  $[A]$  de la forme

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & & & & & \\ & & & a_i & b_i & c_i \\ & & & & & & \\ & & & & & & a_m & b_m \end{bmatrix}$$

On est donc ramené au problème classique de résolution d'un système tridiagonal.

$Q_x$  (resp.  $Q_y$ ) regroupe, outre les termes de frottement les termes d'advection et les termes de densité.

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\rho H}$$

Termes d'advection

Dans une première version, nous avons négligé la contribution des vitesses verticales dans les termes d'advection. D'autre part, il est apparu utile d'ajouter à ceux-ci le premier membre de l'équation de continuité (égal à zéro), multiplié par  $u$ , de façon à remplacer les termes :

Schéma implicite de résolution des équations des fluctuations de vitesse

On pose  $R = 0 \sigma / 2 \Delta \xi^2$  et  $P = (1-\theta) \sigma / 2 \Delta \xi^2$

La notation indiquée "n" ou "n-1" a été supprimée (les  $u_n$  sont dans les premiers membres, les  $u_{n-1}$  dans les seconds).

Système d'équations en u :

$$\begin{array}{ccccccc}
 u_1 [1/\Delta T + \frac{3}{2} R (\lambda_1 + 2\lambda_2)] + u_2 [-\frac{3}{2} R (\lambda_1 + 2\lambda_2)] & = & \frac{u_1}{\Delta T} + Q_x + f v_1 - \frac{3}{2} \frac{\tau f x}{\mu \Delta \xi} + \frac{3}{2} P (\lambda_1 + 2\lambda_2) (u_2 - u_1) \\
 a_1 = 0 & & b_1 & & c_1 & & \longleftarrow d_1 \longrightarrow
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 u_1 [-\frac{6}{5} R (2\lambda_2 + \lambda_1)] + u_2 [\frac{1}{\Delta T} + \frac{6}{5} R (\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3)] + u_3 [-\frac{6}{5} R (\lambda_2 + \lambda_3)] & = & \frac{u_2}{\Delta T} + Q_x + f v_2 + \frac{6}{5} P [(\lambda_2 + \lambda_3) u_3 - (\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3) u_2 + (\lambda_1 + 2\lambda_2) u_1] \\
 a_2 & & b_2 & & c_2 & & \longleftarrow d_2 \longrightarrow
 \end{array}$$

-----  
 Pour  $3 \leq i \leq N-2$

$$\begin{array}{ccccccc}
 u_{i-1} [-R (\lambda_i + \lambda_{i-1})] + u_i [\frac{1}{\Delta T} + R (\lambda_{i-1} + 2\lambda_i + \lambda_{i+1})] + u_{i+1} [-R (\lambda_i + \lambda_{i+1})] & = & \frac{u_i}{\Delta T} + Q_x + f v_i + P [(\lambda_i + \lambda_{i-1}) u_{i-1} - (\lambda_{i-1} + 2\lambda_i + \lambda_{i+1}) u_i + (\lambda_i + \lambda_{i+1}) u_{i+1}] \\
 a_i & & b_i & & c_i & & \longleftarrow d_i \longrightarrow
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 u_{N-2} [-\frac{6}{5} R (\lambda_{N-1} + \lambda_{N-2})] + u_{N-1} [\frac{1}{\Delta T} + \frac{6}{5} R (\lambda_{N-2} + 3\lambda_{N-1} + \lambda_N)] + u_N [-\frac{6}{5} R (2\lambda_{N-1} + \lambda_N)] & = & \frac{u_{N-1}}{\Delta T} + Q_x + f v_{N-1} + \frac{6}{5} P [(\lambda_{N-2} + \lambda_{N-1}) u_{N-2} - (\lambda_{N-2} + 3\lambda_{N-1} + \lambda_N) u_{N-1} + (\lambda_N + 2\lambda_{N-1}) u_N] \\
 a_{N-1} & & b_{N-1} & & c_{N-1} & & \longleftarrow d_{N-1} \longrightarrow
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 u_{N-1} [-\frac{3}{2} R (2\lambda_{N-1} + \lambda_N)] + u_N [\frac{1}{\Delta T} + \frac{3}{2} R (2\lambda_{N-1} + \lambda_N)] & = & \frac{u_N}{\Delta T} + Q_x + f v_N + \frac{3}{2} \frac{\tau s x}{\mu \Delta \xi} - \frac{3}{2} P (\lambda_N + 2\lambda_{N-1}) (u_N - u_{N-1}) \\
 a_N & & b_N & & c_N = 0 & & \longleftarrow d_N \longrightarrow
 \end{array}$$

En notation indiquée, le système s'écrit :  $a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} = d_i$ ,  $i = 1, N$

Système d'équations en v : Les équations restent semblables, seuls les termes  $d_i$  sont modifiés ( $f$ ,  $\tau f x$ ,  $\tau s x$  et  $Q_x$  deviennent respectivement  $-f$ ,  $\tau f y$ ,  $\tau s y$  et  $Q_y$ ).

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \text{par} \quad \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}$$

ceci améliorant les résultats (les dérivées horizontales des fluctuations de vitesse sont à la limite de la précision du modèle). Les termes  $A_i$  deviennent donc :

$$A_i = -U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial U_j}{\partial x_j} + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( H \int_0^1 u_i u_j d\xi \right) \quad (98)$$

$$+ \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \left[ \frac{\xi-1}{H} (u_j + U_j) \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \frac{\xi}{H} (u_j - U_j) \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \right] + \frac{u_i}{\partial \xi} \left[ \frac{\xi-1}{H} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \frac{\xi}{H} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \right]$$

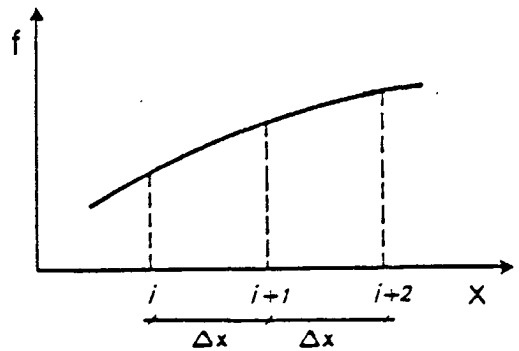
D'une manière générale, cette expression est calculée en remplaçant les dérivées par des différences finies.

Plusieurs difficultés sont apparues dans l'application de cette formule : la grande variabilité de  $u_j$  au voisinage du fond, entraîne un manque de précision dans le calcul des termes  $\int_0^1 u_i u_j d\xi$  et  $\frac{\partial u_i}{\partial \xi}$ .

Ainsi, le calcul des intégrales du type  $\int_0^1 f d\xi$  a-t-il été effectué entre 0 et  $2H/N-1$  selon la méthode de SIMPSON qui consiste à assimiler la fonction  $f$  à une parabole et à en évaluer une valeur exacte de l'intégrale.

Dans le cas général, on a :

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f dx = \frac{\Delta x}{3} [f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})]$$



Pour le calcul des intégrales  $\int_0^1 f d\xi$ , on applique la formule ci-dessus entre les points de calcul n° 1 et n° 3 (voir figure 96). Il faut au préalable définir la valeur de  $f$  en 1, ce qui s'obtient par extrapolation parabolique à partir de  $f(1')$ ,  $f(2)$  et  $f(3)$ . Il vient :

$$f(1) = 1.8 f(1') + 0.2 f(3) - f(2)$$

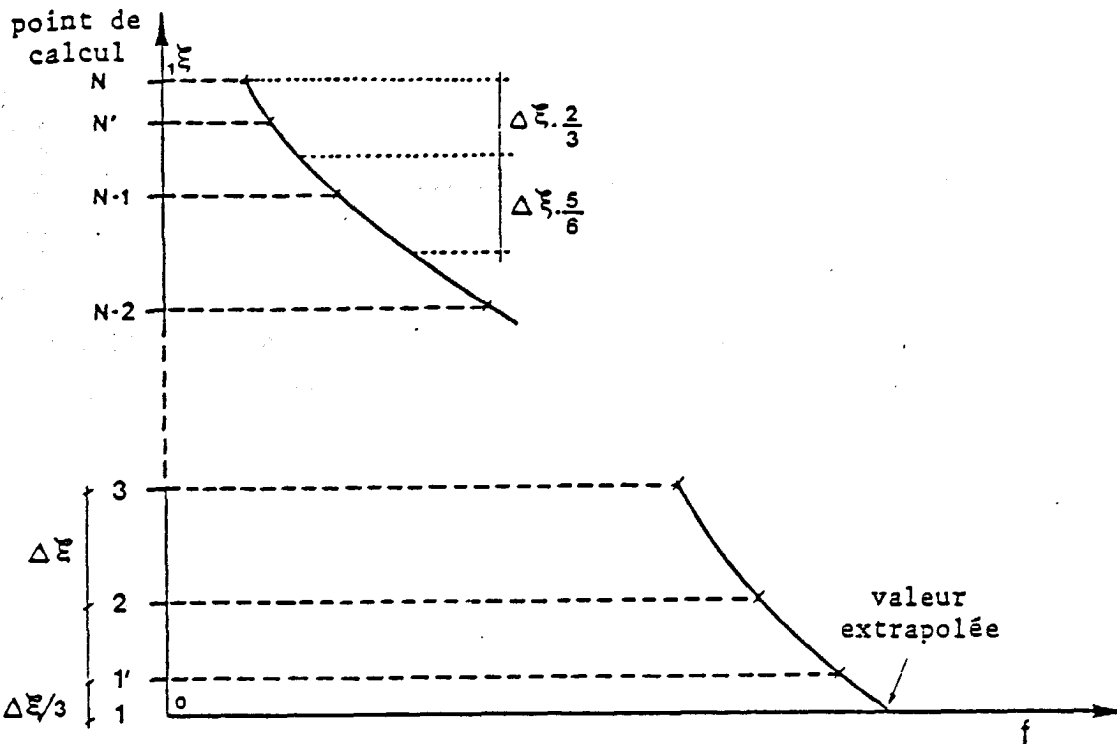


Figure 96 : Calcul des intégrales  $\int_0^1 f d\xi$  : valeurs des pas d'intégration.

Au voisinage de la surface, les gradients sont assez faibles pour qu'une intégration linéaire suffise. Cependant, on doit tenir compte de l'excentrement du point de calcul N. Finalement, on peut écrire :

$$\int_0^1 f d\xi \approx \frac{1}{N-1} \left( \sum_{k=3}^{N-2} f(k) + 0,6 f(1') + f(2) - 0,1 f(3) + 0,33 f(N-1) + 0,66 f(N') \right)$$

Par ailleurs, le terme  $\frac{\partial u}{\partial \xi}$  au point 1' peut être évalué de différentes façons, par exemple :

$$\left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{1'} \approx \frac{u_2 - u_{1'}}{0,66 \Delta \xi} \quad \text{ou} \quad \frac{u_2 + u}{\Delta \xi}$$

La première estimation a été retenue car la seconde conduisait à des termes d'advection trop élevés.

Enfin, on a constaté que les valeurs numériques des termes  $A_i$  ne respectaient pas la condition  $\int_0^1$  (termes d'advection) = 0, entraînant

alors une variation du courant moyen. Pour corriger cette erreur, deux techniques ont été essayées :

- a) - prendre  $A_i(1) = - \int_2^N A_i dk$  ce qui se justifie par l'imprécision de  $A_i(1)$   
 b) - prendre  $A_i(k) = \frac{1}{N-1} \int_1^N A_i dk$

Les deux méthodes ont donné des résultats comparables en vitesse, mais la seconde a été retenue parce que la fonction  $A_i(\xi)$  ne présente alors pas de "cassure" à  $\xi = \Delta\xi$ . Il faut en outre remarquer que les termes d'advection corrigés sont très peu différents des originaux.

### Termes de densité

Le calcul des termes de densité repose sur la connaissance de  $\rho$ ,  $h$  et  $\xi$  en tout point et à tout instant.

- $h$  et  $\xi$  sont fournis par le modèle de courants intégrés sur la verticale.
- $\rho$  est calculé en fonction de la salinité  $S$  et de la température  $T$  à l'aide de l'équation d'état simplifiée ici sous la forme :

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha S)$$

$$\alpha = 0.0008 \text{ pour } S \text{ en } \text{‰}$$

- $S$  est soit déduit de mesures en nature, soit fourni par le modèle de calcul de salinités moyennes sur la verticale, auquel cas son profil vertical devra de toutes façons être défini à partir de mesures.

$$G_i = g \int_0^1 \frac{\partial}{\partial X_i} \left( H \int_{\xi}^1 (1 + \alpha S) d\xi \right) d\xi - \frac{\partial}{\partial X_i} H \int_{\xi}^1 (1 + \alpha S) d\xi \quad (99)$$

$$+ \frac{\partial h}{\partial X_i} \alpha \left( S - \int_0^1 S d\xi \right) + \frac{\partial H}{\partial X_i} \left( \int_0^1 (1 + \alpha S) \xi d\xi - (1 + \alpha S) \xi \right)$$

Le calcul de  $G_i$  est effectué en différences finies, en commençant par les intégrales.

### Mode d'utilisation du modèle bidimensionnel

Les valeurs  $U_i$ ,  $h$  et  $\xi$  utilisées pour le calcul des termes de frottement, d'advection et de densité sont issues du modèle bidimensionnel en plan horizontal.

Or, ce modèle donne  $U$ ,  $V$ ,  $h$  et  $\zeta$  aux noeuds de quatre grilles décalées les unes par rapport aux autres (voir figure 20). Il a donc été nécessaire de calculer par interpolations les valeurs des quatre variables aux noeuds d'une grille unique (en l'occurrence celle des surélévations) qui coïncide avec celle où sont calculées les fluctuations de vitesse. De même, les valeurs des variables autour des points de calculs ont été recalculées aussi près que possible de ces points de façon à remplacer dans les équations, les dérivées par des différences finies centrées et "fines" (i.e. portant sur un  $\Delta x$  faible).

Remarques :

- 1) le modèle horizontal ne fournit pas simultanément  $U$  et  $V$  : si  $\Delta t$  désigne le pas de temps de ce modèle, les calculs de  $U$  et  $V$  sont décalés de  $\Delta t/2$ . Dans la pratique, ce décalage est négligé car le pas de temps utilisé est faible.
- 2) les expressions générales des gradients horizontaux de vitesses, hauteurs d'eau et salinités ne sont plus valables près des limites du domaine ni à la côte. Il serait possible de les modifier par des formules utilisant des différences finies excentrées ou des valeurs interpolées, mais dans la plupart des cas, le calcul a été simplifié et, près des limites les termes d'advection ou de densité sont négligés.

e) Récapitulation : intégration des deux modèles pour une résolution du problème tridimensionnel

La résolution des équations régissant la structure verticale des courants s'organise autour de la résolution du système linéaire (95-96). Au préalable, il est nécessaire de déterminer à chaque pas de temps  $\Delta t$  :

- le profil de viscosité verticale ( $\lambda(K)$ ) (il peut en effet varier avec le temps)
- les termes d'advection : ces termes explicites sont calculés à  $-\Delta t$  en fonction de  $u$ ,  $v$  (et  $w$ ) fournis par le modèle vertical d'une part et de  $U$ ,  $V$ ,  $h$ , fournis par le modèle horizontal d'autre part.
- la tension de frottement au fond : on peut rendre ce terme implicite en le calculant à l'aide de  $U$  et  $V$  évalués à  $-\Delta t/2$  : ceci suppose un pas de temps deux fois plus court pour le modèle horizontal.

- les termes de densité : on peut aussi les rendre implicites en les exprimant au moyen de S et HS calculés par le modèle horizontal à  $-\Delta t/2$ .
- la tension de frottement en surface, fonction de la différence ( $\vec{V}_{\text{vent}} - (U + U\zeta)$ ).

Enfin, il reste possible d'évaluer les vitesses verticales à partir de  $u_i$  et  $U_i$  en utilisant l'équation de continuité sous la forme (91). L'ensemble formé par le modèle horizontal et le modèle vertical ainsi défini constitue alors un modèle tridimensionnel de simulation du mouvement.

#### REMARQUES IMPORTANTES

1) Le programme de calcul de la structure verticale des courants est construit de telle sorte que la prise en compte des termes de densité ainsi que celle des termes d'advection restent optionnelles.

2) L'expression des termes d'advection en un point suppose un calcul de la structure verticale au voisinage de ce point dans chaque direction cardinale (soit en 4 points minimum).

3) Si les termes d'advection sont négligés, le calcul de la structure verticale devient strictement unidimensionnel et peut être effectué ponctuellement : c'est là l'intérêt principal de la méthode adoptée pour résoudre le problème tridimensionnel du calcul des courants.

#### 3 - Discussion sur le modèle vertical

Il apparaît que le modèle muni des conditions aux limites décrites plus haut ne permet pas de calculer les vitesses aux limites elles-mêmes mais seulement à une distance verticale  $\Delta\zeta/3$  de ces limites. Il est donc intéressant de chercher comment on peut en déduire des valeurs aux frontières.

#### La condition de surface

La première idée que l'on peut avoir pour le calcul de la vitesse en surface consiste à extrapoler les valeurs obtenues aux points de calcul situés plus bas. Ainsi, pour une extrapolation parabolique, et compte tenu des valeurs de  $\vec{U}$  aux points N-2, N-1 et N' (cf. fig. 96), on calcule  $\vec{U}$  en N

(i.e. à la surface) à l'aide de la formule :

$$\vec{\mu}_N = \frac{\vec{\mu}_{N-2}}{5} - \frac{\vec{\mu}_{N-1}}{5} + \frac{9}{5} \mu_N$$

L'extrapolation sera jugée valide si la valeur alors obtenue est sensiblement la même quelle que soit la taille du pas d'intégration  $\Delta\xi$  utilisé. Les résultats montrent que l'extrapolation est satisfaisante quand la viscosité verticale  $Nz$  ne s'annule pas en surface (en effet, si  $Nz \rightarrow 0$  - i.e.  $\lambda(\xi) \rightarrow 0$  - tend vers zéro en surface, les gradients de vitesse deviennent très forts et l'extrapolation plus aléatoire). Or, habituellement, on considère que la viscosité verticale conserve en surface une valeur non négligeable (bien supérieure à la viscosité moléculaire) ; l'extrapolation adoptée est donc justifiée. La figure 97 illustre les résultats obtenus pour deux profils de viscosité et deux maillages verticaux.

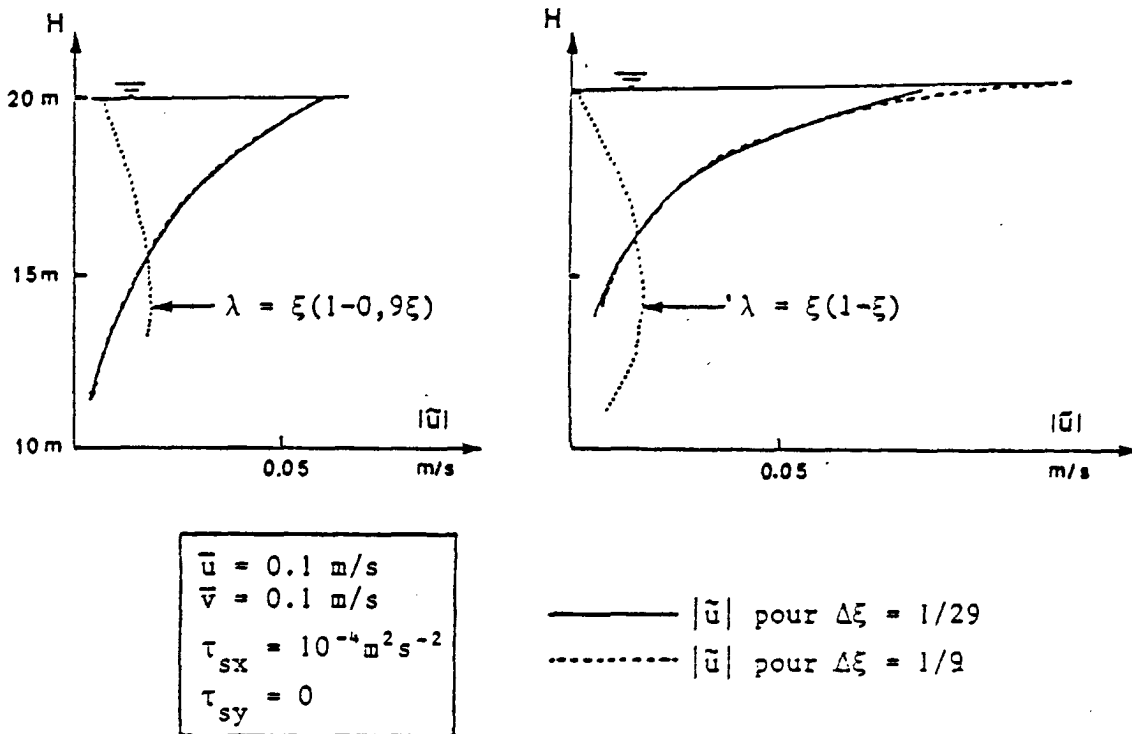
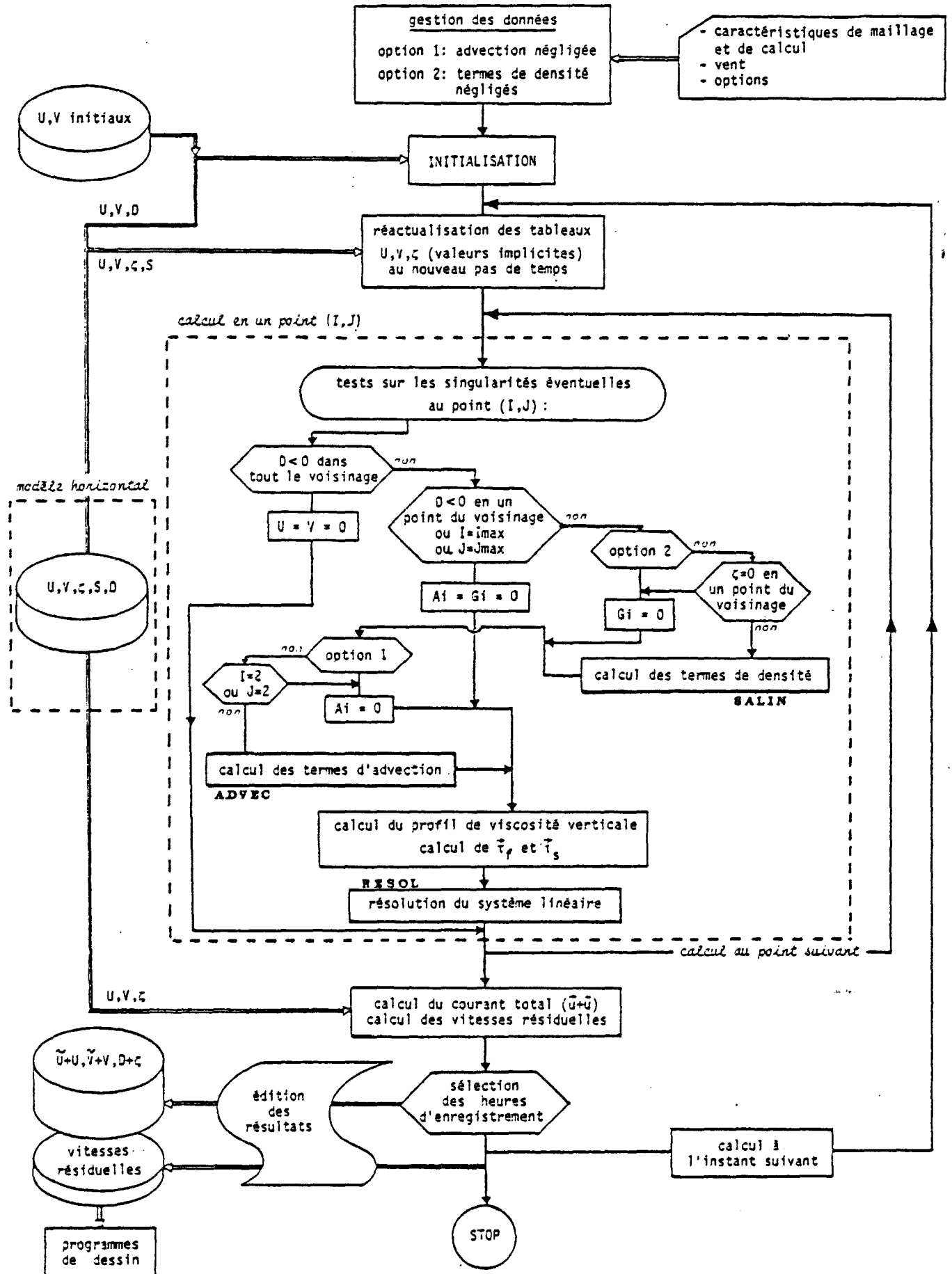


Figure 97 : Extrapolation parabolique des vitesses en surface, en fonction du profil de viscosité verticale et du pas d'intégration.



SCHEMA GENERAL DE FONCTIONNEMENT  
DU MODELE MATHEMATIQUE DE CALCUL  
DE LA STRUCTURE VERTICALE DES COURANTS



Condition de fond

Dans ce paragraphe, ainsi que dans le suivant, on a simplifié l'écriture des équations en supposant l'origine du repère au niveau du fond (soit  $d = 0$ ).

Avant d'envisager une extrapolation des vitesses au voisinage du fond, il peut être utile de revenir sur l'expression de la contrainte de frottement sur le fond qui nous a servi de condition limite. En toute rigueur, par souci d'homogénéité du calcul tridimensionnel, l'expression employée pour le modèle vertical devrait être identique à celle utilisée pour le modèle bidimensionnel horizontal, à savoir :

$$\tau_f = \frac{\rho g}{g^2} |U|U$$

Cependant, il est évident qu'une telle expression ne peut refléter le frottement dans le cas d'un écoulement qui ne serait pas plan, puisqu'alors les vitesses au voisinage du fond n'ont pas la même direction que leur moyenne sur une tranche d'eau. D'autre part, et c'est le cas lors des renverses de marée, il peut arriver que les vitesses s'inversent de la surface au fond, correspondant alors à une valeur moyenne nulle.

Pour tenir compte de cette difficulté, la solution la plus naturelle est d'exprimer le frottement sur le fond en fonction du courant au voisinage du fond.

Une telle expression peut se justifier par une méthode analogue à celle de PRANDTL mais moins contraignante sur les hypothèses faites sur la longueur du mélange (il suffit de supposer qu'elle s'écrit linéairement en fonction de la cote  $z$ , seulement au voisinage du fond).

On obtient alors l'expression de  $\tau_f$  :

$$\tau_f = \frac{\rho K u^2(z)}{\left(\log \frac{z}{z_0}\right)^2}$$

Plus précisément, nous avons choisi d'exprimer dans le modèle  $\tau_f$  en fonction de la vitesse à  $\Delta z/3$  du fond (soit à  $\Delta z/3H$ ) :

$$\tau_f = \frac{\rho K^2}{\left(\text{Log} \frac{H \Delta \xi}{3 z_0}\right)^2} u_f^2 \quad u_f = u_{z=0} = 0.5/3$$

et pour un écoulement tridimensionnel :

$$\tau_f = \frac{\rho K^2 |u_f| u_f}{\left(\text{Log} \frac{H \Delta \xi}{3 z_0}\right)^2}$$

On remarque que le coefficient de frottement varie avec la profondeur ; cette expression de  $\tau_f$  est à rapprocher de celle utilisée pour le modèle à deux dimensions en plan horizontal :

$$\tau_f = \frac{\rho g}{C^2} |U| U$$

avec  $C$  (coefficient de CHEZY) = 7.83 Log (H/Ez<sub>0</sub>) (cf. chapitre IV.B).

Par conséquent, pour un frottement exprimé en fonction de la vitesse au voisinage du fond, la formulation la plus homogène avec celle adoptée pour le modèle horizontal s'écrit :

$$\vec{\tau}_f = \frac{\rho g}{k^2 C^2} |u_f| \vec{u}_f \quad (100)$$

$k$  : coefficient de CHEZY identique à celui du modèle horizontal.

$$k = \frac{\text{Log} \frac{H}{z_0} + \text{Log} \frac{\Delta \xi}{3}}{\text{Log} \frac{H}{z_0} - 1}$$

#### Valeur de la vitesse au fond

Du point de vue physique, l'écoulement étant visqueux, la vitesse au fond est nulle. Ce résultat est en accord avec le profil logarithmique attribué à la vitesse près du fond pour justifier l'expression du frottement adoptée. Dans le calcul de la structure verticale des courants, on imposera donc au fond une fluctuation de vitesse  $\tilde{u}$  opposée au courant moyen  $U$ .

Cependant, si on essaie de "caler" une variation logarithmique sur les vitesses obtenues aux points de calcul situés près du fond, on obtient de nouvelles valeurs de  $V^*$  (donc  $\tau_f$ ) et de  $z_0$  : on pourrait alors envisager, comme NIHOUL (1977), de recommencer l'ensemble des calculs (modèle horizontal - modèle vertical) avec les paramètres ainsi obtenus, le proces-

sus pouvant être réitéré jusqu'à convergence. Une telle méthode itérative n'a pas été appliquée en raison de l'importance des temps de calcul qu'elle entraîne. D'autre part, il n'est pas évident que la solution ainsi obtenue soit indépendante de la variation logarithmique des vitesses près du fond utilisée pour le calcul de  $\zeta_f$ .

Par contre, il paraît très attrayant d'affiner le calcul des vitesses près du fond en augmentant le nombre de points de calcul ou mieux en adoptant un maillage variable, par exemple tel que la dimension des mailles diminue de manière logarithmique vers le fond. On pourrait alors étudier dans le détail le profil de vitesses près du fond, en déduire une valeur à la limite et réajuster l'expression du frottement à l'aide de la condition supplémentaire

#### Profil de viscosité verticale

Nous avons admis plus haut que le coefficient de viscosité turbulente verticale pouvait s'écrire :

$$N_z = H^2 \sigma(T, x, y) \cdot \lambda(\xi)$$

(cf. BOWDEN, 1965 ; NIHOUL, 1977)

Par ailleurs, nous avons vu qu'en appliquant la théorie de PRANDTL on pouvait exprimer  $N_z$  en fonction de  $V^*$  et donc de  $\zeta_f$  à l'aide de la relation :

$$N_z = k_3 V^* \left(1 - \frac{z}{H}\right) = k_3 \sqrt{\frac{\zeta_f}{\rho}} \left(1 - \frac{z}{H}\right)$$

(cf. chapitre III.D)

Si l'on considère que la loi de PRANDTL est réaliste près du fond, la relation ci-dessus indique le comportement asymptotique de  $N_z$  en fonction de  $z$ .

Enfin, parmi les nombreux types de variation verticale proposés pour  $N_z$ , il est apparu difficile de choisir, en raison du manque de mesures en nature nécessaires pour la détermination des coefficients numériques (cf. chapitre IV.D). C'est pourquoi on a testé plusieurs profils caractérisés chacun par une tangente à la limite du fond conforme à la théorie de PRANDTL. Ainsi, on peut écrire :

$$N_3 = H^2 \sigma \lambda(\xi)$$

avec :  $\sigma = K \sqrt{\frac{2\tau}{\rho}} / H$

$$\lambda = \xi f(\xi) \quad \text{où} \quad f'(0) = 0 \quad f(0) = 1$$

$$K = \frac{1,5 \sqrt{g}}{c} + 0,314 \quad (\text{constante de Karman})$$

### Les paramètres numériques

Les paramètres numériques introduits lors de la schématisation des équations sont le pas de temps  $\Delta T$ , le pas d'espace  $\Delta \xi$  et le coefficient d'excentrement  $\theta$

Ces paramètres devront être choisis de telle sorte que la méthode d'intégration des équations soit convergente. Nous avons vu ( chapitre IV, B) qu'il suffisait que le schéma numérique soit consistant et stable pour que la méthode converge.

Le terme de CORIOLIS étant très faible pour les profondeurs du cas d'étude, nous allons examiner la stabilité du système (93, 94) en négligeant la force de CORIOLIS. Dans ce cas, les équations (93) et (94) sont découplées et peuvent s'écrire schématiquement :

$$\begin{aligned} \frac{U_{kn} - U_{kn-1}}{\Delta T} = & Q + \frac{\theta \sigma}{\Delta \xi} \left( \lambda_k \frac{U_{k+1n} - U_{kn}}{\Delta \xi} - \lambda_k \frac{U_{kn} - U_{k-1n}}{\Delta \xi} \right) \\ & + \frac{(1-\theta)\sigma}{\Delta \xi} \left( \lambda_k \frac{U_{k,n-1} - U_{k,n-2}}{\Delta \xi} - \lambda_k \frac{U_{k,n-1} - U_{k-1,n-1}}{\Delta \xi} \right) \end{aligned}$$

En s'aidant de développements de Taylor, on peut montrer aisément que ce schéma est consistant. Il suffit donc de montrer qu'il est stable pour s'assurer de la convergence. Le critère de stabilité utilisé dans la suite est celui de VON NEUMANN : la fonction solution étant décomposée en série de FOURIER, la méthode consiste à examiner l'amplification au cours du temps des termes de la série. Si le facteur d'amplification  $\mathcal{A}$ , c'est-à-dire le rapport  $U_n/U_{n-1}$ , a un module inférieur à 1, le schéma est stable.

Examinons donc la propagation d'une onde sinusoïdale de la forme :

$$U = U_0 e^{i(\omega t + k\xi)}$$

on obtient :

$$\frac{\mathcal{A}-1}{\Delta T} = \frac{Q}{U} + \frac{\sigma}{\Delta \xi^2} \left[ \lambda_k^+ (e^{ik\Delta\xi} - 1) - \lambda_k^- (1 - e^{-ik\Delta\xi}) \right] (\theta \mathcal{A} + 1 - \theta)$$

$$\mathcal{A} = \frac{1 + \frac{Q}{U} \Delta T + \frac{(1-\theta)\sigma\Delta T}{\Delta \xi^2} \left[ \lambda_k^+ (e^{ik\Delta\xi} - 1) - \lambda_k^- (1 - e^{-ik\Delta\xi}) \right]}{1 - \frac{\sigma\theta\Delta T}{\Delta \xi^2} \left[ \lambda_k^+ (e^{ik\Delta\xi} - 1) - \lambda_k^- (1 - e^{-ik\Delta\xi}) \right]}$$

L'examen du module de l'expression ci-dessus n'est pas simple, c'est pourquoi nous allons poursuivre les calculs pour le cas particulier d'une viscosité verticale constante :  $\lambda_k^+ = \lambda_k^- = \lambda$ . Il vient alors :

$$\mathcal{A} = \frac{1 + \frac{Q}{U} \Delta T + \frac{(1-\theta)\sigma\lambda\Delta T}{\Delta \xi^2} 2 (\cos k\Delta\xi - 1)}{1 - \frac{\sigma\lambda\theta\Delta T}{\Delta \xi^2} 2 (\cos k\Delta\xi - 1)}$$

la condition  $|\mathcal{A}| < 1$  s'écrit :

$$\left| 1 + \left( \frac{Q}{U} + \frac{(1-\theta)\sigma\lambda}{\Delta \xi^2} 2 (\cos k\Delta\xi - 1) \right) \Delta T \right| \leq \left| 1 - \left( \frac{\theta\sigma\lambda}{\Delta \xi^2} 2 (\cos k\Delta\xi - 1) \right) \Delta T \right|$$

posons  $B = \frac{\sigma\lambda}{\Delta \xi^2} 2 (\cos k\Delta\xi - 1)$ . On remarque que B est négatif ou nul. On obtient successivement :

$$\left| 1 + \left( \frac{Q}{U} + (1-\theta) B \right) \Delta T \right| \leq \left| 1 - \theta B \Delta T \right|$$

$$\left( 1 + \left( \frac{Q}{U} + (1-\theta) B \right) \Delta T \right)^2 \leq (1 - \theta B \Delta T)^2$$

$$\Delta T \left[ \left( \frac{Q}{U} \right)^2 + 2 \frac{Q}{U} (1-\theta) B + (1-2\theta) B^2 \right] \Delta T + 2 \left( \frac{Q}{U} + B \right) \leq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta T \leq - \frac{2 \left( \frac{Q}{U} + B \right)}{\left( \frac{Q}{U} \right)^2 + (1-2\theta) B^2 + 2 \frac{Q}{U} (1-\theta) B} \\ \text{si } \left( \frac{Q}{U} \right)^2 + (1-2\theta) B^2 + 2 \frac{Q}{U} (1-\theta) B > 0 \end{array} \right.$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta T \geq - \frac{2 \left( \frac{Q}{U} + B \right)}{\left( \frac{Q}{U} \right)^2 + (1-2\theta) B^2 + 2 \frac{Q}{U} (1-\theta) B} \\ \text{si } \left( \frac{Q}{U} \right)^2 + (1-2\theta) B^2 + 2 \frac{Q}{U} (1-\theta) B > 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \theta = 0 \text{ (modèle explicite)} : \Delta T \leq -\frac{2U}{BU + Q} \\ \text{si } \theta = 1/2 : \Delta T \leq -\frac{2U}{Q} \text{ si } \frac{Q}{U} < 0 \text{ ou } \frac{Q}{U} > -B \\ \text{si } \theta = 1 \text{ (modèle implicite)} : \Delta T \leq \frac{2U}{BU - Q} \text{ si } \left(\frac{Q}{U}\right)^2 > B^2 \end{array} \right.$$

On voit que pour  $\theta = 1/2$  (cas où les dérivées spatiales sont centrées dans le temps) la condition de stabilité est particulièrement simple :

$$\Delta T \leq -\frac{2u}{Q} \text{ si } \frac{Q}{U} < 0$$

ou en remplaçant  $Q$  par sa valeur (cf. paragraphe 2.3.2) :

$$\Delta T \leq \frac{2U}{\frac{\tau_f - \tau_b}{H} - A - G} \text{ (si } \frac{Q}{U} < 0 \text{ ou } \frac{Q}{U} > -B)$$

ou encore dans le cas où les termes d'advection  $A$ , les termes de densité  $G$  et ceux de frottement en surface sont faibles devant le frottement sur le fond :

$$\Delta T \leq \frac{2HU}{\tau_f} = \frac{2HC^2U}{g|U_f|U_f}$$

(en général, on a effectivement  $\frac{Q}{U} \sim -\frac{g|U|}{HC^2} < 0$ )

Cette relation constitue une condition de stabilité indicative, compte-tenu des approximations effectuées. On remarque cependant que plus le frottement sera fort, plus le pas de temps devra être faible. Par ailleurs, il s'avère que les termes  $A$  ou  $G$  ne sont pas toujours négligeables et peuvent alors atteindre des valeurs importantes, menaçant la stabilité du schéma.

Application numérique :

$$\text{Pour } \theta = 0,5 \left\{ \begin{array}{l} H = 10 \text{ m} \\ C = 30 \text{ m}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1} \\ U \sim U_f = 1 \text{ m/s} \\ g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \end{array} \right. \quad \Delta T < 1800 \text{ s}$$

Pour  $\theta = 0$ , la condition serait  $\Delta T < \frac{-2U}{BU + Q}$  avec  $B = \frac{\sigma\lambda}{\Delta\xi^2} 2 (\cos k\Delta\xi - 1)$ .

$B$  et  $Q$  étant du même signe, la condition défavorable est obtenue pour  $\cos k\Delta\xi = 0$ , soit :

$$B = -\frac{2\sigma\lambda}{\Delta\xi^2} = -\frac{2\lambda}{\Delta\xi^2 H} K \sqrt{g \frac{U^2}{C^2}}$$

avec la même application numérique et  $\lambda = 1/2$ ,  $\Delta\xi = 1/10$ , on a  $B \approx -0,4$  d'où  $\Delta T < 5$  (s), ce qui est très contraignant.

### Choix des paramètres

Par sécurité en matière de stabilité, nous avons conservé pour  $\theta$ , la valeur 0,5. Dans ce cas, la stabilité semble indépendante du pas d'intégration dans la dimension verticale (en fait, la condition de stabilité n'a pas été écrite dans le cas général où  $\lambda(\xi)$  n'est pas constant). Pratiquement, le choix du pas  $\Delta \xi$  a été fait en fonction de la précision souhaitée pour les profils de vitesse, en particulier au voisinage du fond. Généralement, on a choisi  $\Delta \xi = 1/9$  (soit 10 points de calcul sur la verticale).

La condition de stabilité étant large, le pas de temps  $\Delta T$  a lui aussi été choisi en fonction de la précision voulue sur l'évolution dans le temps du profil de vitesse. De plus, le modèle horizontal fournit une vitesse moyenne toutes les 2 minutes et celle-ci est prise en compte par le schéma numérique à la fois sous une forme explicite et sous une forme "centrée dans le temps" : on a donc choisi un pas de temps de 4 minutes.

### Mise en place informatique

Le modèle a été implanté sur deux types d'ordinateurs :

. Un calculateur TEKTRONIX (modèle 4051), de faible capacité mémoire, a été utilisé pour la version "unidimensionnelle" du modèle vertical, pour laquelle les termes d'advection non linéaires sont systématiquement négligés. Ce modèle a été employé pour étudier l'influence des paramètres et l'évolution du courant en un point fixe.

Le calcul est programmé en BASIC. Les pas d'intégrations utilisés sont généralement  $T = 600$  s et  $\Delta \xi = 1/9$ . En régime permanent, le calcul converge au bout de 12 itérations, ce qui représente pour la machine 105 secondes de fonctionnement. En régime non permanent, on reproduit une marée en un point fixe en 12 minutes de calcul (pour un pas de temps de 600 s).

. L'ordinateur IRIS 80 du Centre Océanologique de Bretagne a été utilisé pour l'exploitation complète du modèle vertical.



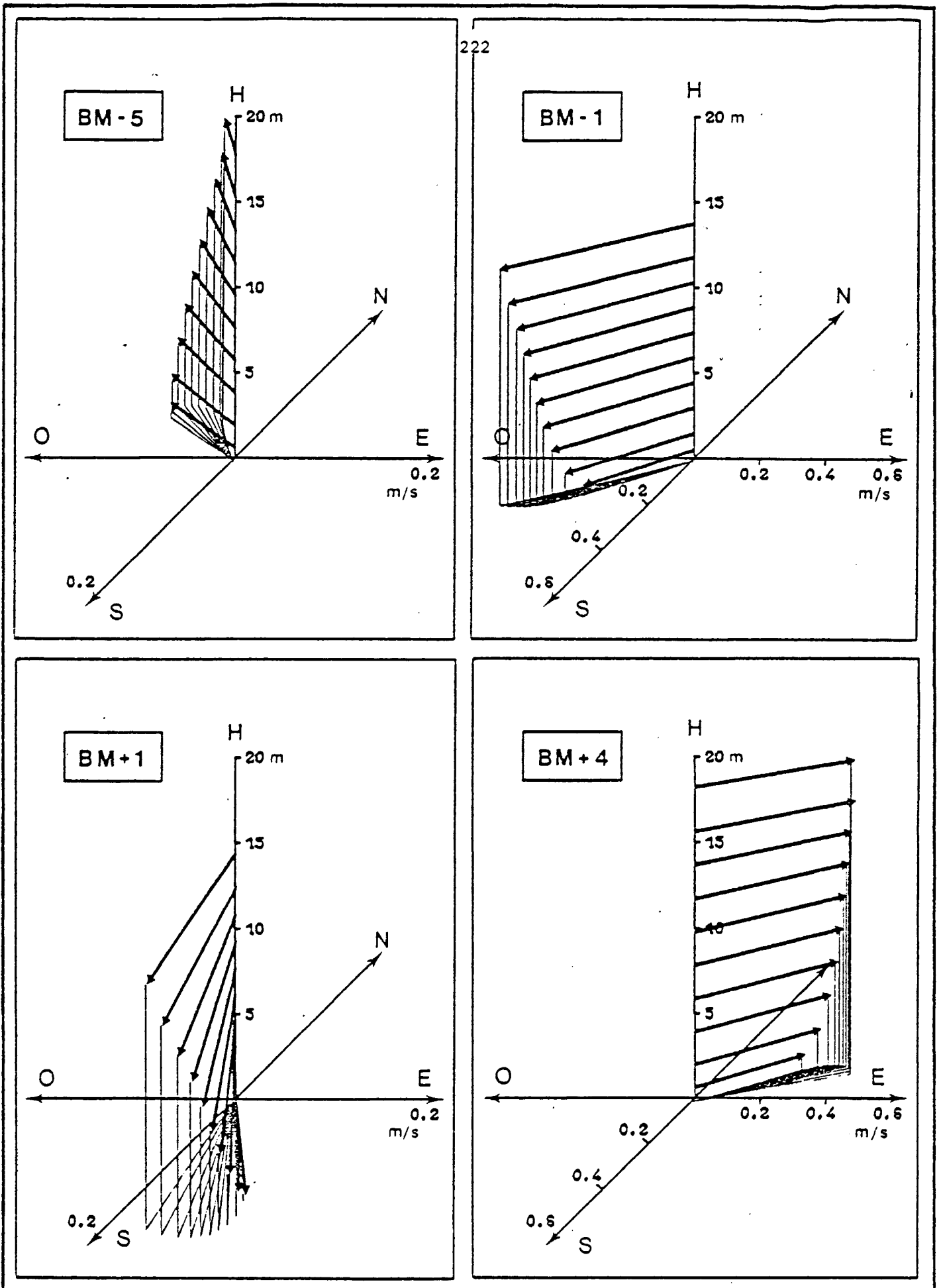


Fig. 98 Représentation en perspective de la structure verticale des vitesses en un point de l'estuaire de la Seine à différents moments de la marée. (point 14,19)

Le calcul est alors programmé en FORTRAN IV CII étendu. Les pas d'intégrations sont  $T = 240$  s et  $\Delta\xi = 1/9$ .

Pour la modélisation d'une zone maillée par une grille horizontale de 360 noeuds pendant une marée complète, l'occupation mémoire est de 41 Kmots. Les temps de calculs dépendent des options choisies :

- calcul simple : 12 minutes
- calcul avec termes d'advection : 27 minutes
- calcul avec termes d'advection et termes de densité : 36 minutes

#### 4 - Application à l'estuaire extérieur de la Seine

##### a) Conditions de simulation

##### Présentation de la zone étudiée

Le calcul de la structure verticale des vitesses a été réalisé dans l'estuaire extérieur de la Seine sur un secteur central de la zone couverte par le modèle bidimensionnel en plan horizontal.

Ce secteur est défini par la réunion de deux rectangles (voir figure 99) ayant respectivement 322 et 72 mailles. Le pas d'espace dans les directions  $Ox$  et  $Oy$  étant de 1 km, et compte tenu de l'emboîtement des rectangles nécessaire pour assurer la continuité du calcul des termes d'advection et de densité, la zone étudiée a une surface d'environ 345 km<sup>2</sup> et s'étend jusqu'à 16 km à l'Ouest du Port du Havre. Enfin, le pas de calcul vertical étant  $\Delta\xi = 1/9$ , on est conduit à chercher l'évolution au cours de la marée des vitesses aux noeuds d'un maillage de 3 450 éléments.

La marée considérée est celle du 20 octobre 1978 : c'est une marée moyenne (coefficient 70) intervenant en période d'étiage (débit de la Seine : 180 m<sup>3</sup>/s).

Le profil de viscosité verticale adopté est le profil N° 3 de la figure 100. La justification de ce choix sera donnée lors de l'examen des profils de salinité mesurés dans la région.

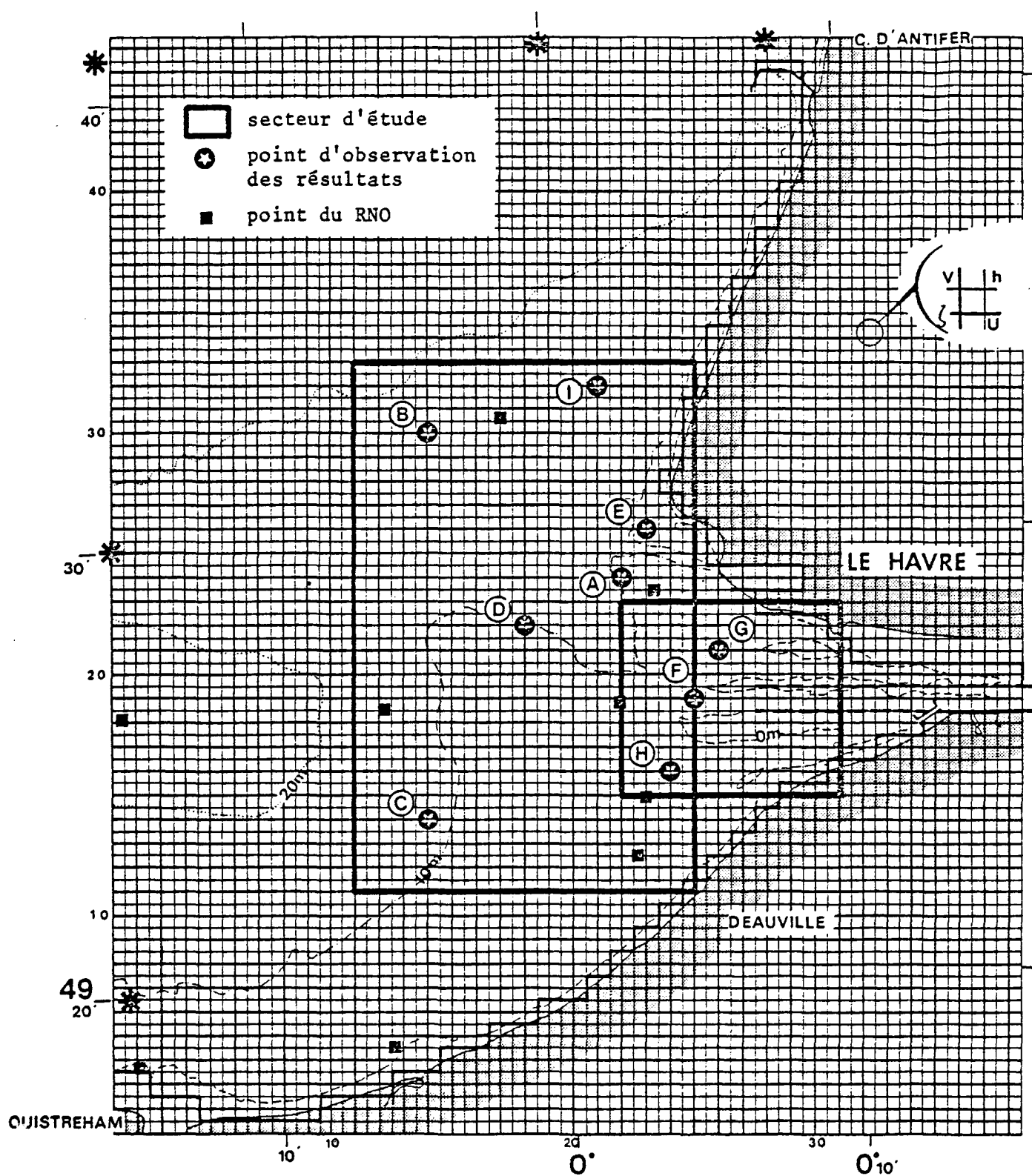


Figure 99 : Situation du secteur étudié dans la grille de calcul du modèle horizontal

Le calcul des termes de densité a été effectué à partir des distributions de salinités fournies par le modèle d'advection-dispersion horizontal en les supposant uniformes sur la verticale. L'évolution au cours de la marée des valeurs de salinité a pu aisément être prise en compte (voir illustrations chapitre IV B).

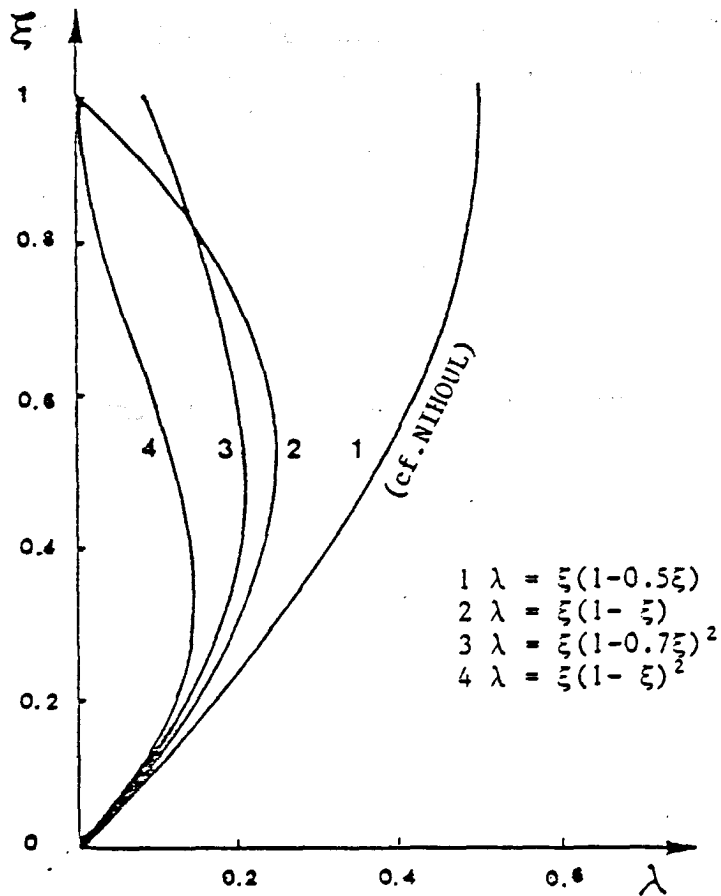


Figure 100 : profils de viscosité turbulente verticale utilisés dans le modèle.

b) Résultats du modèle en valeurs instantanées des vitesses

Les champs de courants en valeur moyenne sur la verticale ont été présentés dans le paragraphe IV.B. Nous avons dressé des cartes analogues de champs de courant de surface et de fond mettant en évidence les différences de circulation selon la verticale (figures 3.4 à 3.15). Le courant désigné par "courant de fond" est en fait le courant calculé à la côte  $\Delta\xi/3$ , soit à  $H/27$  du fond (point de calcul 1' dans le schéma de résolution numérique). De même, le courant de surface est celui calculé à une distance  $H/27$  de la surface.

On observe des écarts de vitesse en module et en direction, en particulier une avance du fond sur la surface. La déviation qui se fait en général vers la gauche depuis la surface correspond à un déphasage du courant le long de la verticale. Plus concrètement, si l'on tient compte du fait qu'au point considéré, le courant moyen "tourne" dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre, on observe une "avance" du fond sur la surface. Ce phénomène s'explique physiquement de la manière suivante : une variation rapide de la pente de la surface se traduit par une variation des forces motrices constante sur la verticale, entraînant une accélération presque uniforme du fond à la surface ; cette accélération s'appliquant à une vitesse plus faible dans les couches du fond, celles-ci "réagiront d'une manière plus importante" qu'en surface.

Ce déphasage des vitesses en fonction de la profondeur se concrétise au moment des renverses de marée par une inversion des vitesses de la surface au fond.

Mais il est plus facile d'examiner la structure verticale des courants à l'aide des projections horizontales des vitesses et de leurs profils Nord-Sud et Est-Ouest en un point. Six points représentatifs de la zone d'étude ont été retenus et les structures des vitesses en ces points font l'objet des figures 3.16 à 3.21 (les points désignés par des lettres sont positionnés sur la figure 99).

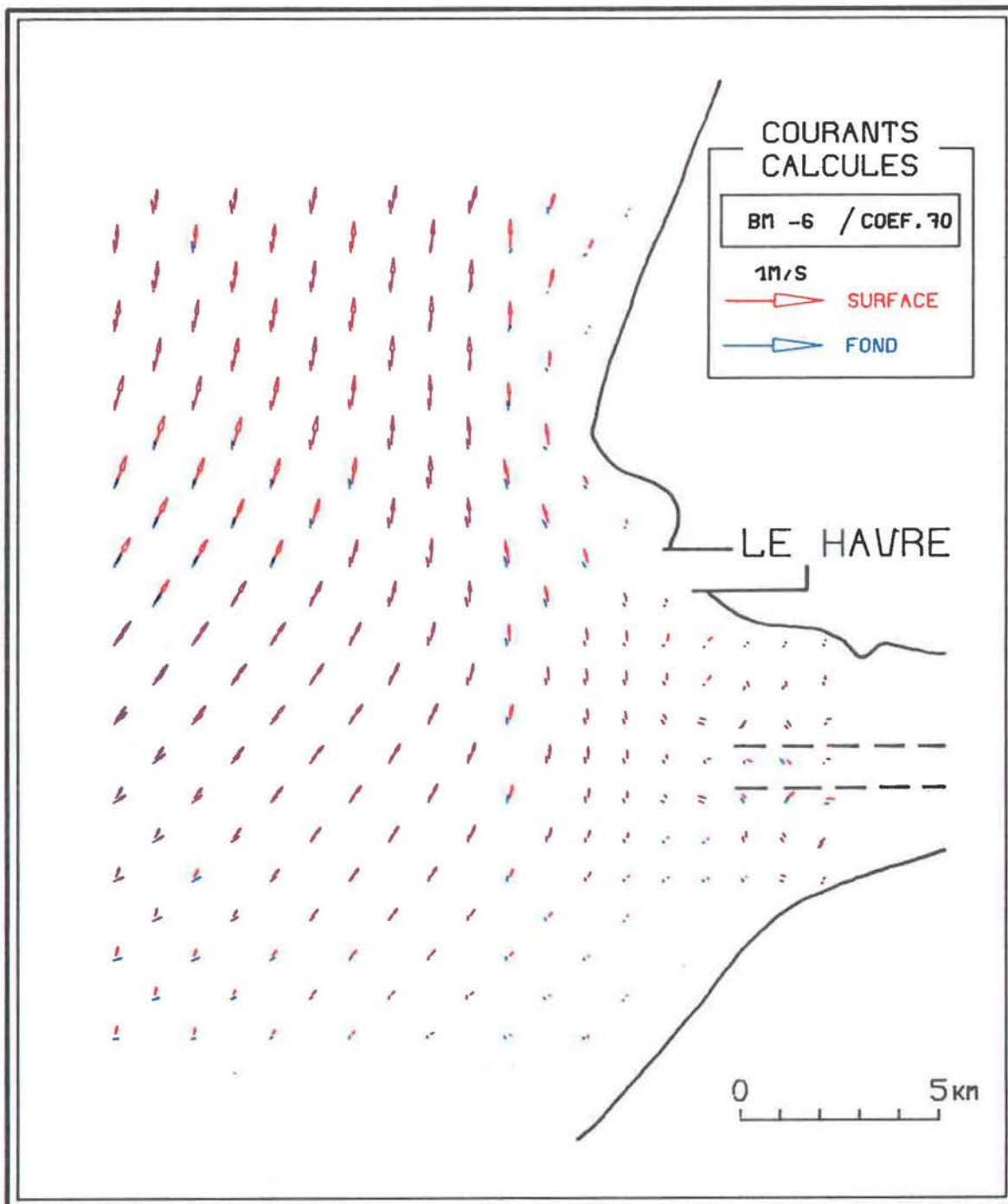


Fig. 3-4 Courants de marée dans l'estuaire de la Seine.  
Marée du 20 octobre 1978.

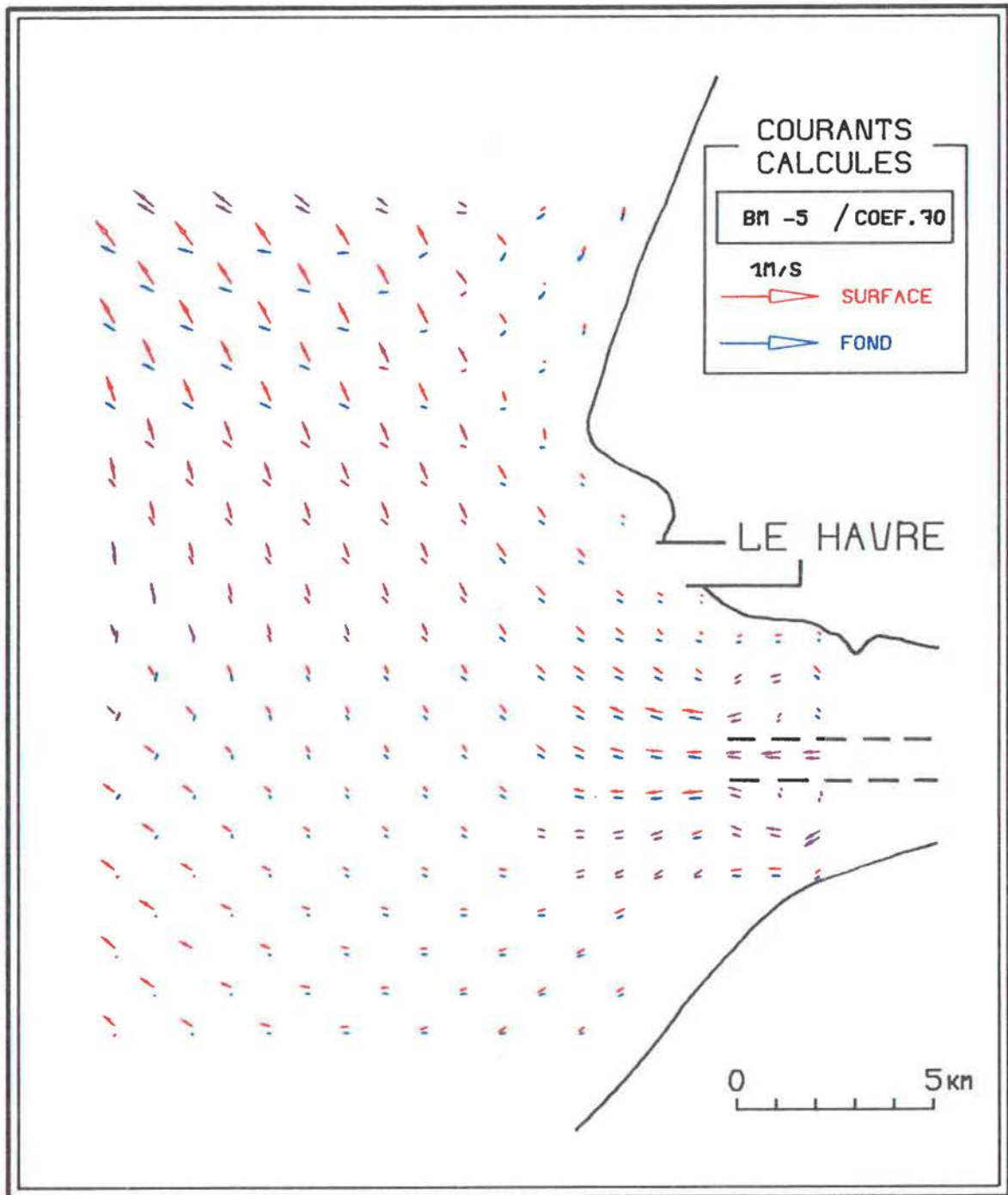


Fig. 3-5 Courants de marée dans l'estuaire de la Seine.  
Marée du 20 octobre 1978.

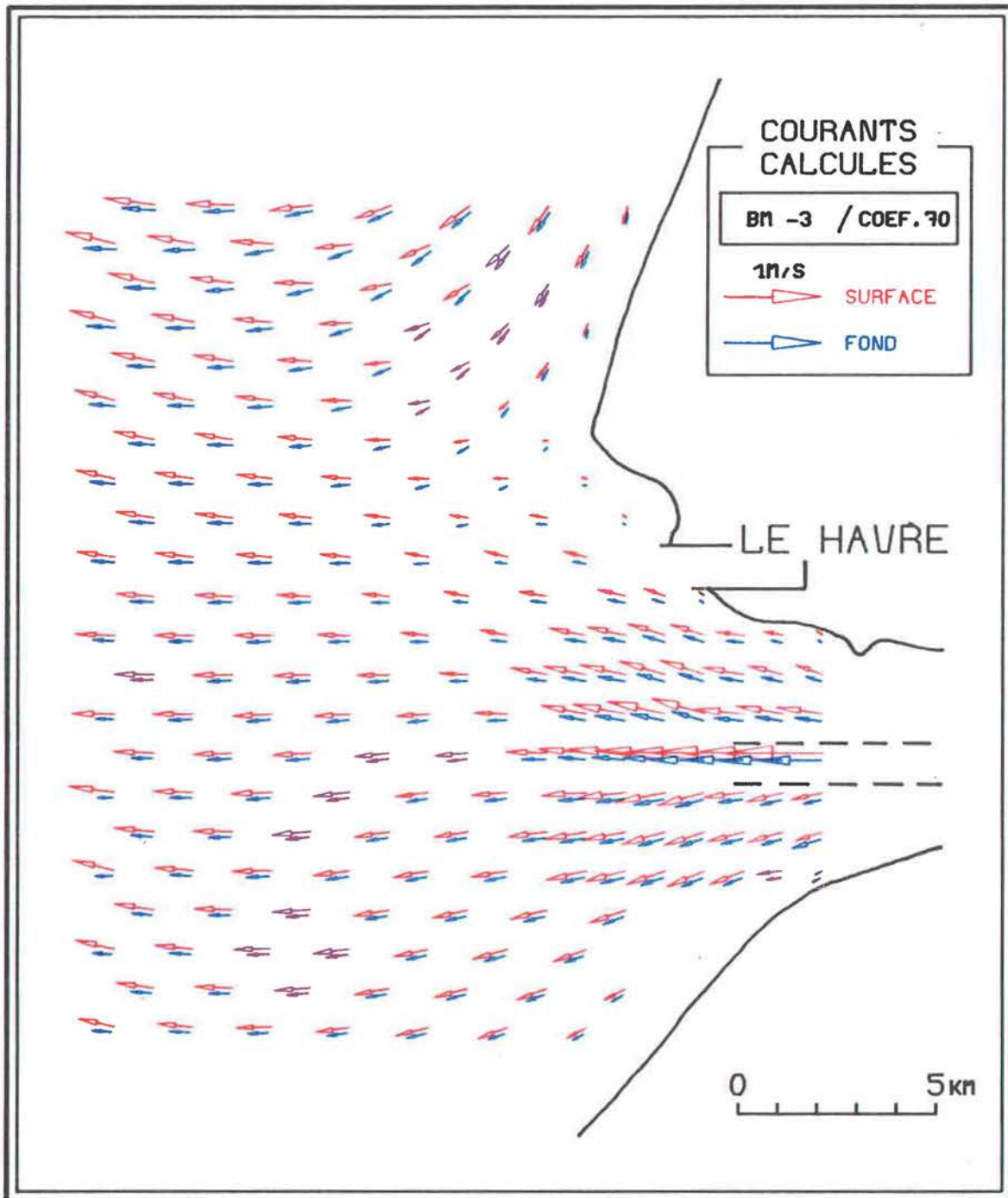


Fig. 3-7 Courants de marée dans l'estuaire de la Seine.  
Marée du 20 octobre 1978.



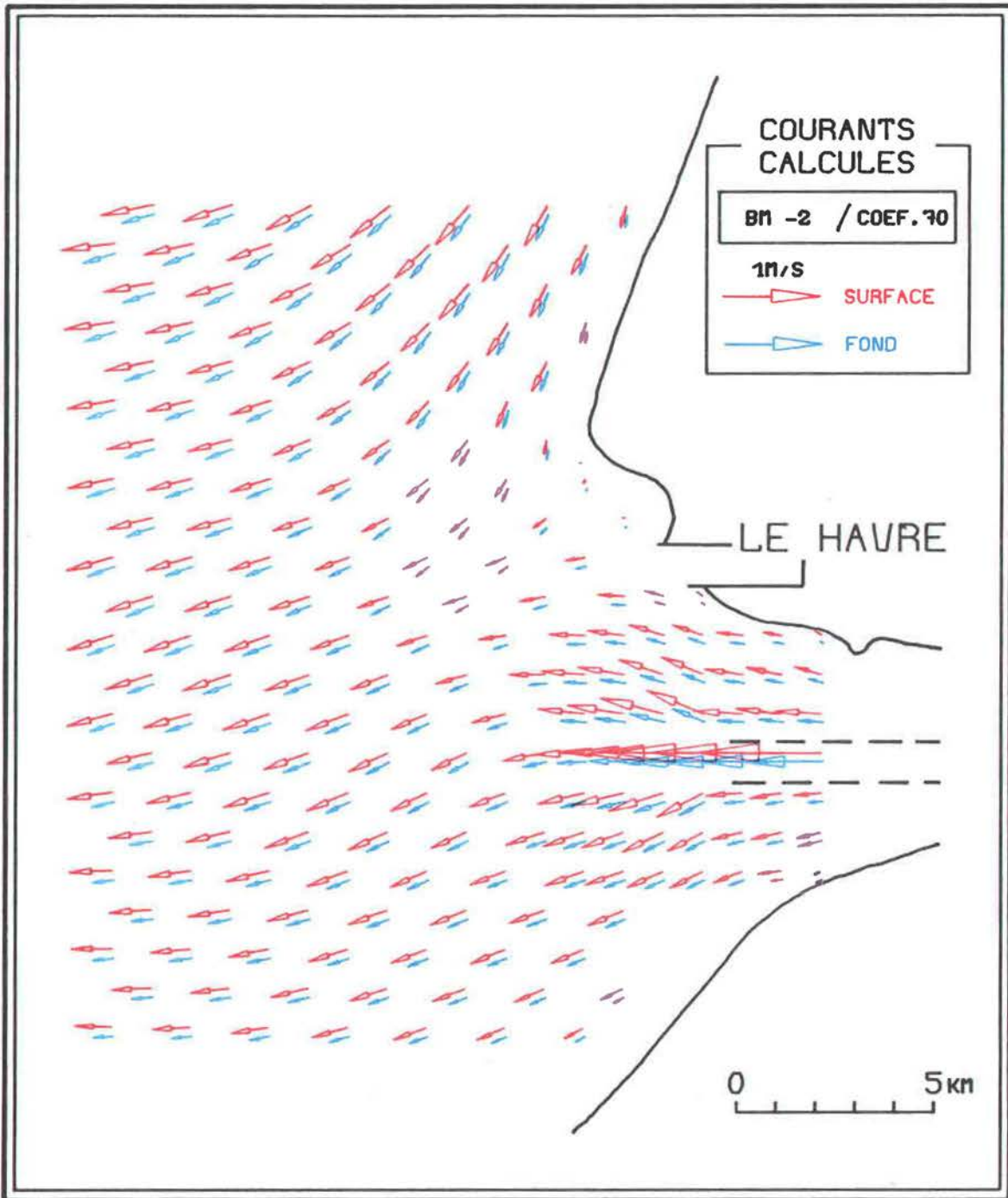


Fig. 3-8 Courants de marée dans l'estuaire de la Seine.  
Marée du 20 octobre 1978.

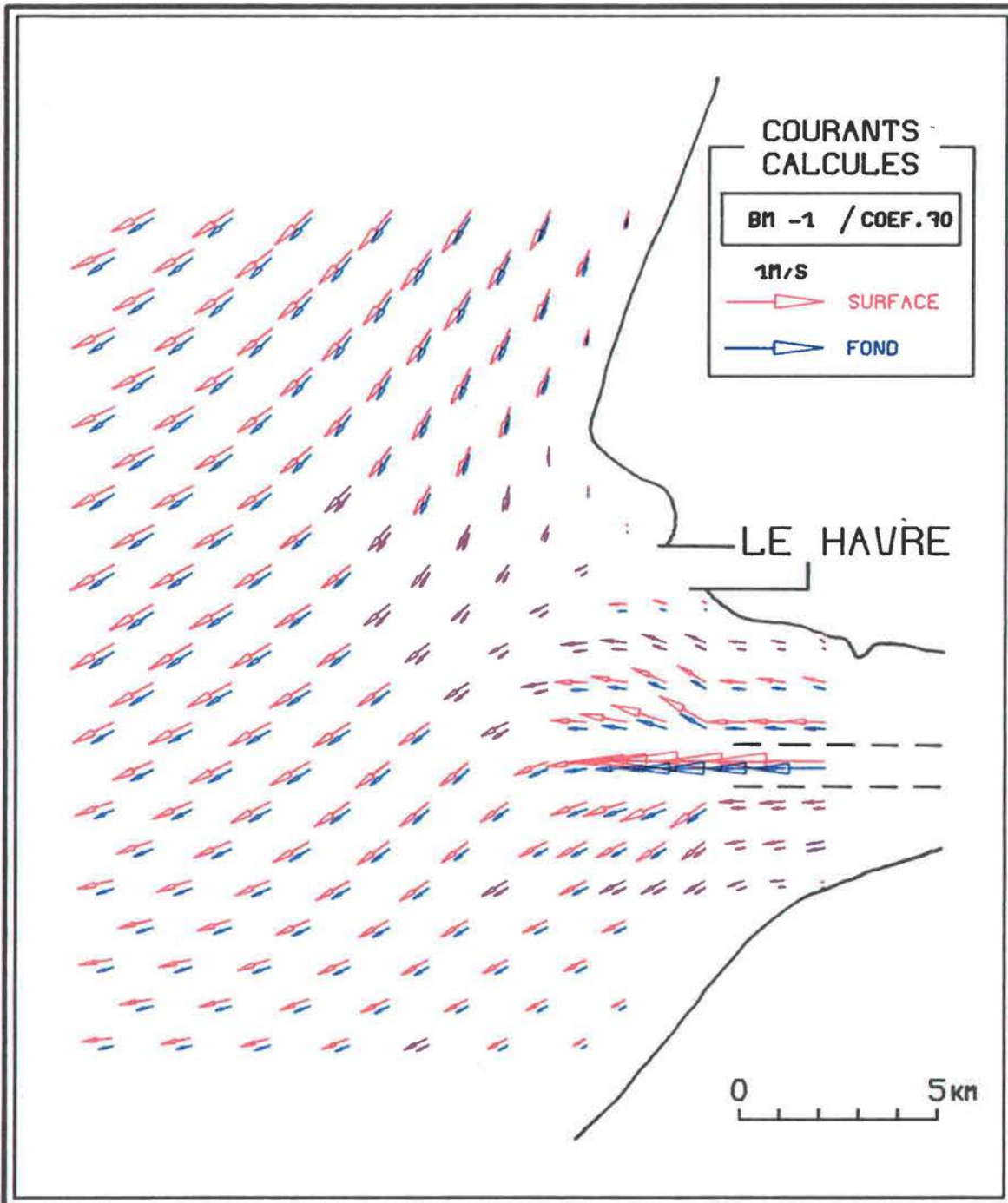


Fig. 3-9 Courants de marée dans l'estuaire de la Seine.  
Marée du 20 octobre 1978.

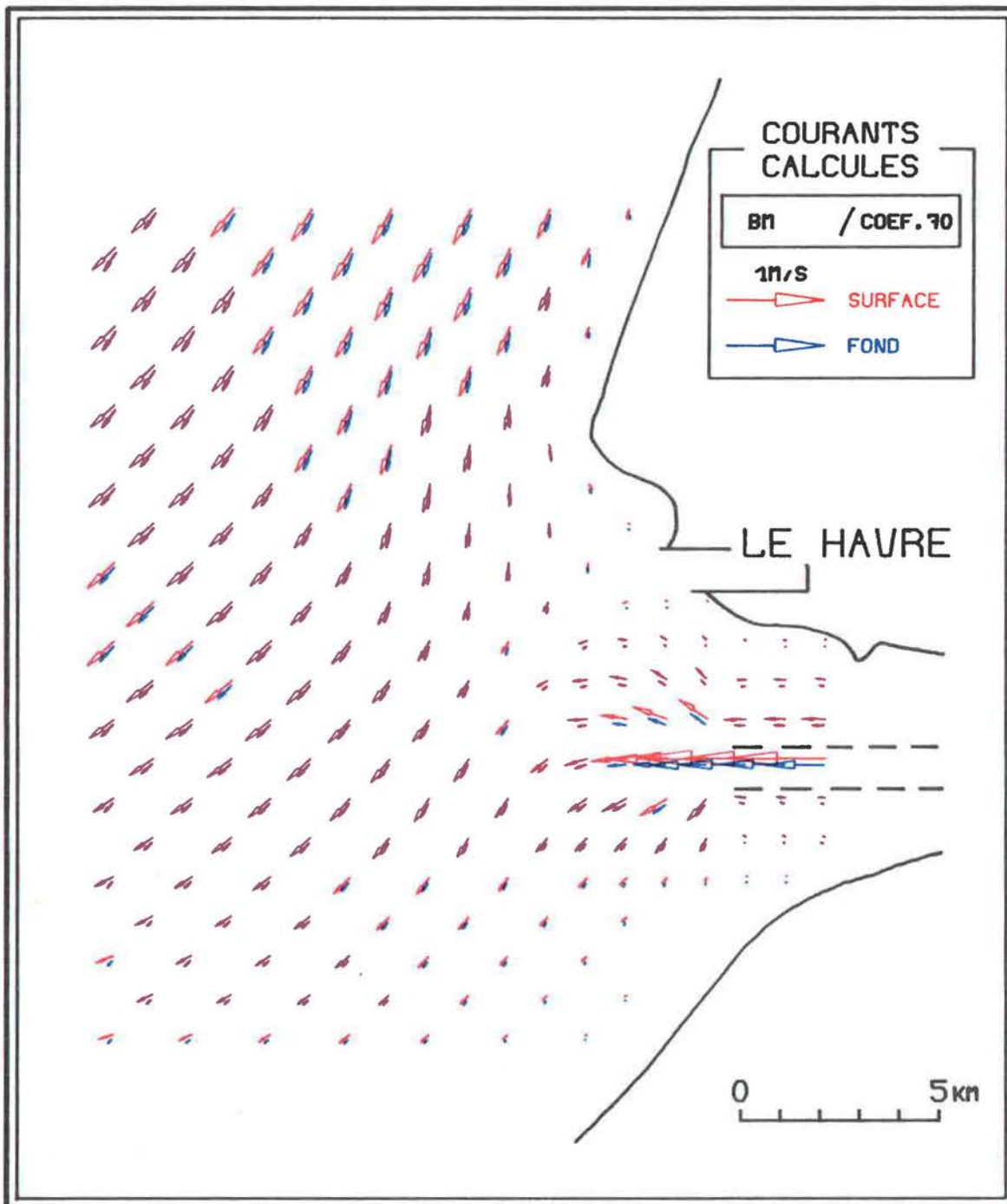


Fig. 3-10 Courants de marée dans l'estuaire de la Seine.  
Marée du 20 octobre 1978.

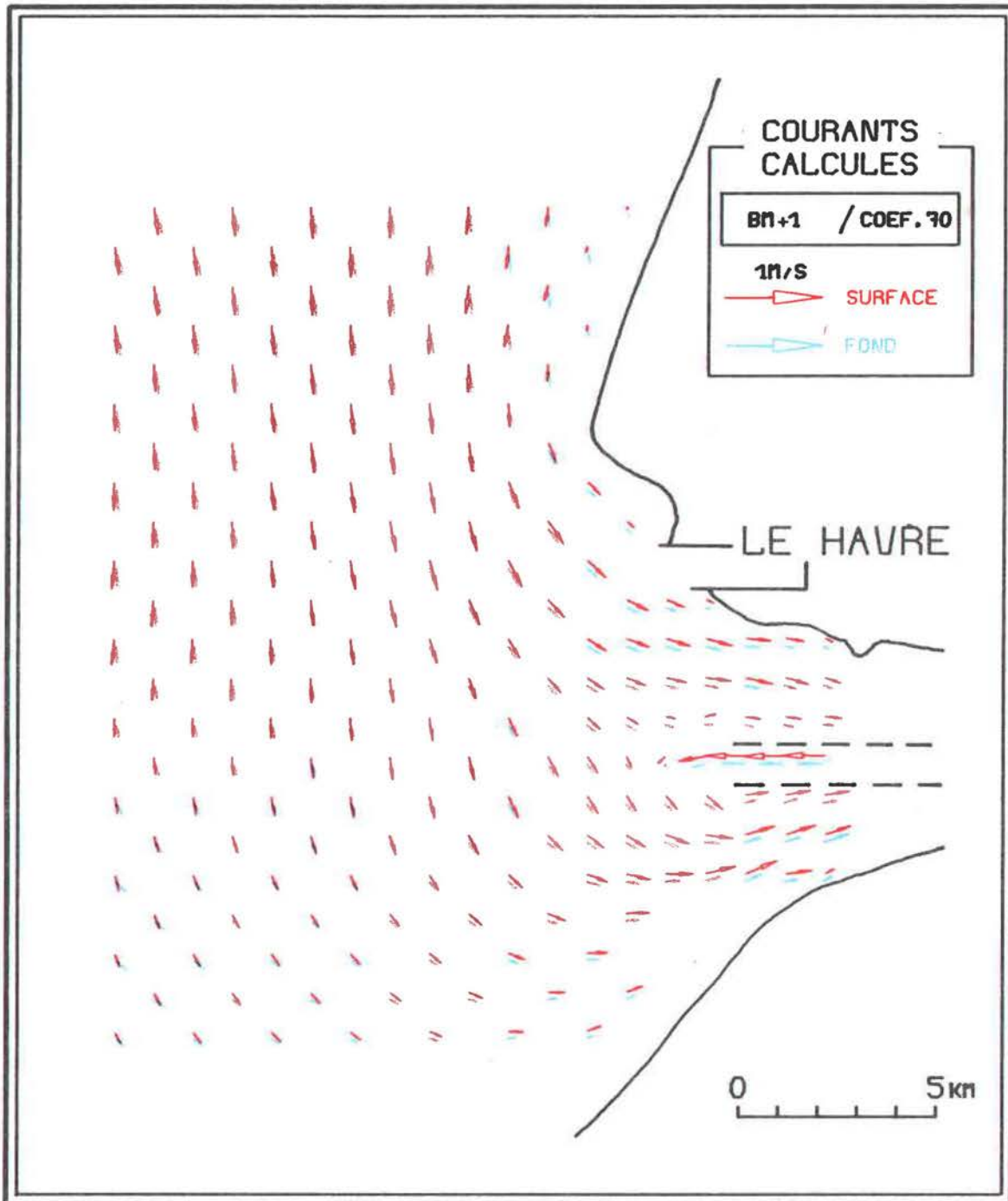


Fig. 3-11 Courants de marée dans l'estuaire de la Seine.  
Marée du 20 octobre 1978.

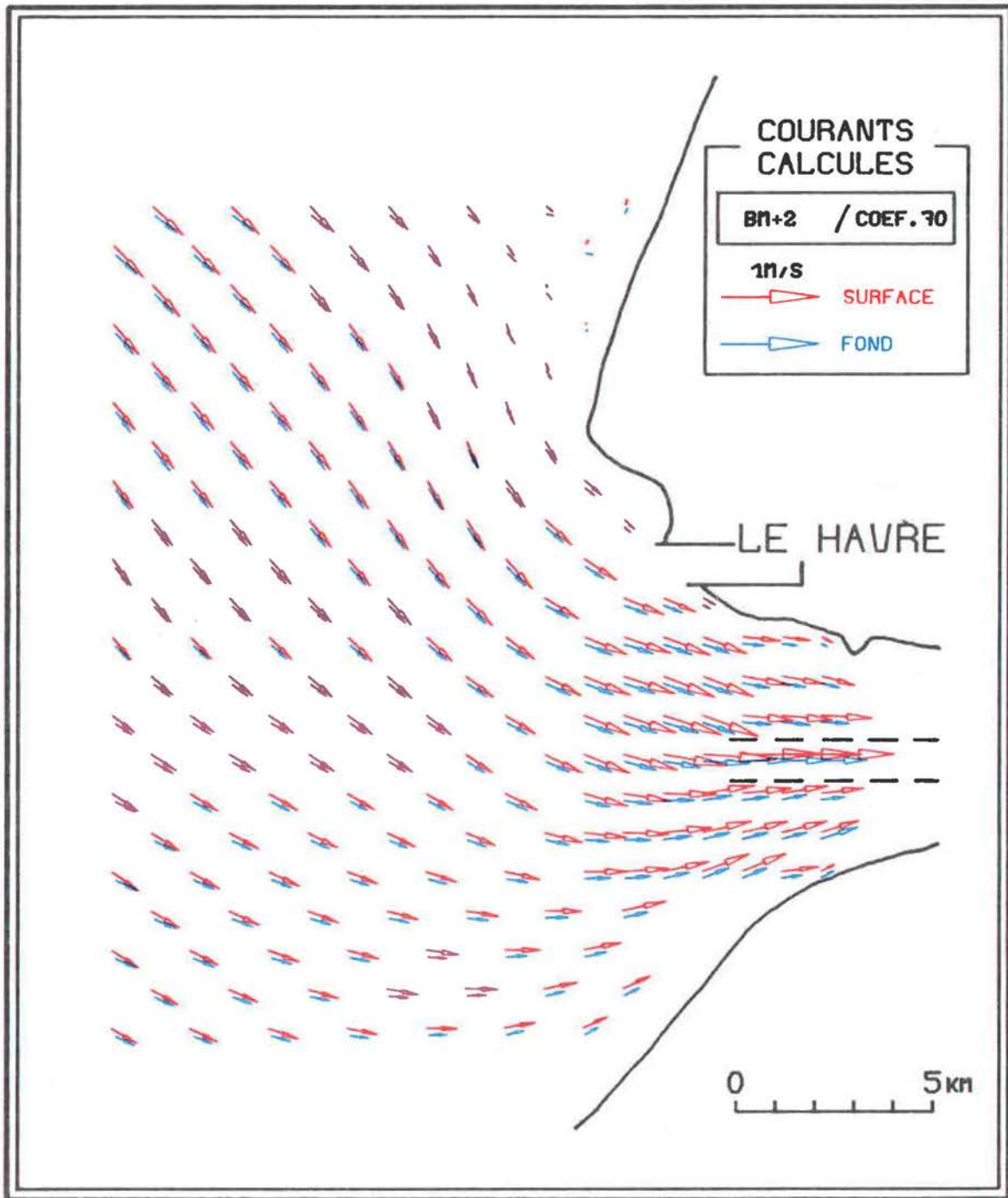


Fig. 3-12 Courants de marée dans l'estuaire de la Seine.  
Marée du 20 octobre 1978.

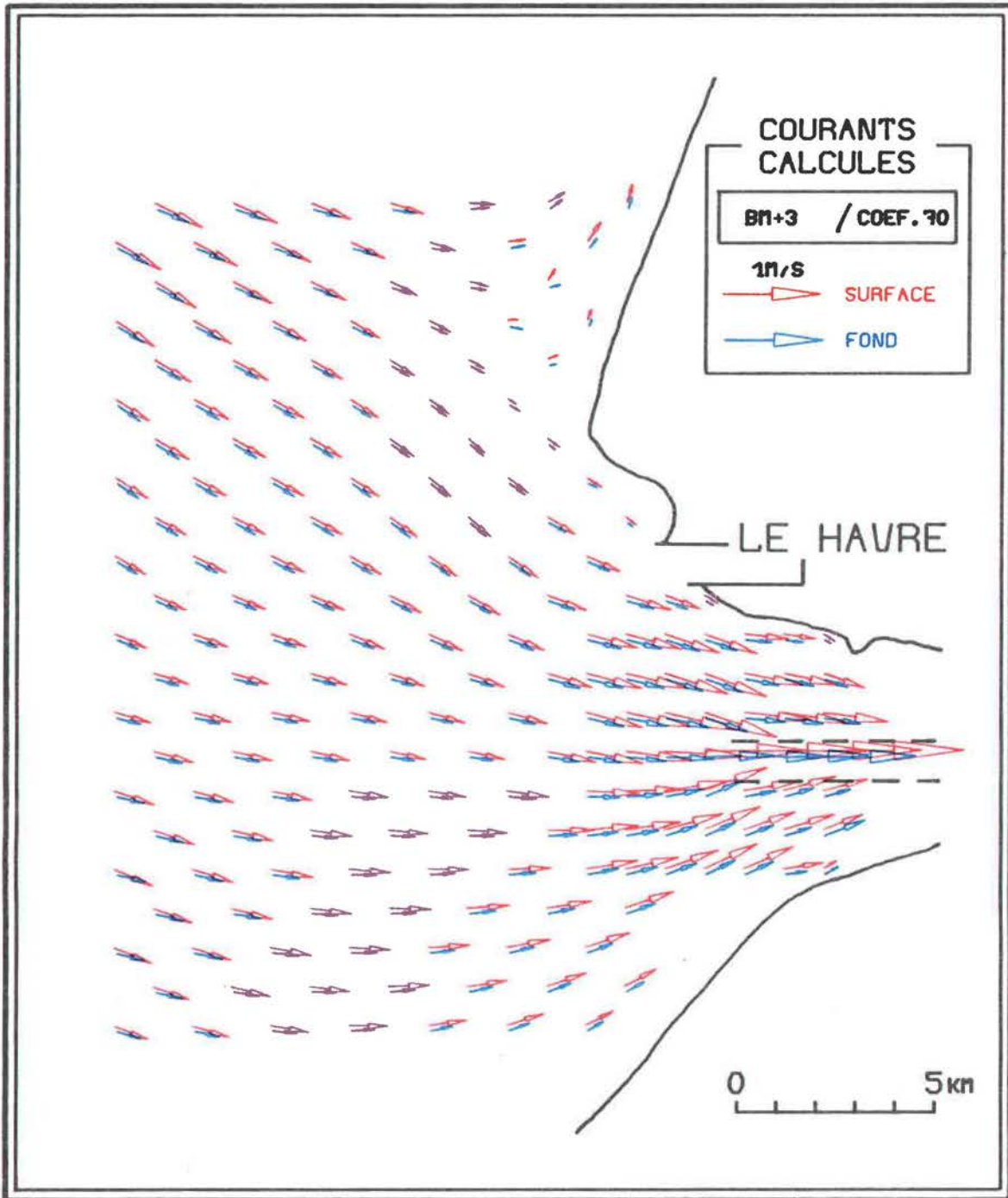


Fig. 3-13 Courants de marée dans l'estuaire de la Seine.  
Marée du 20 octobre 1978.

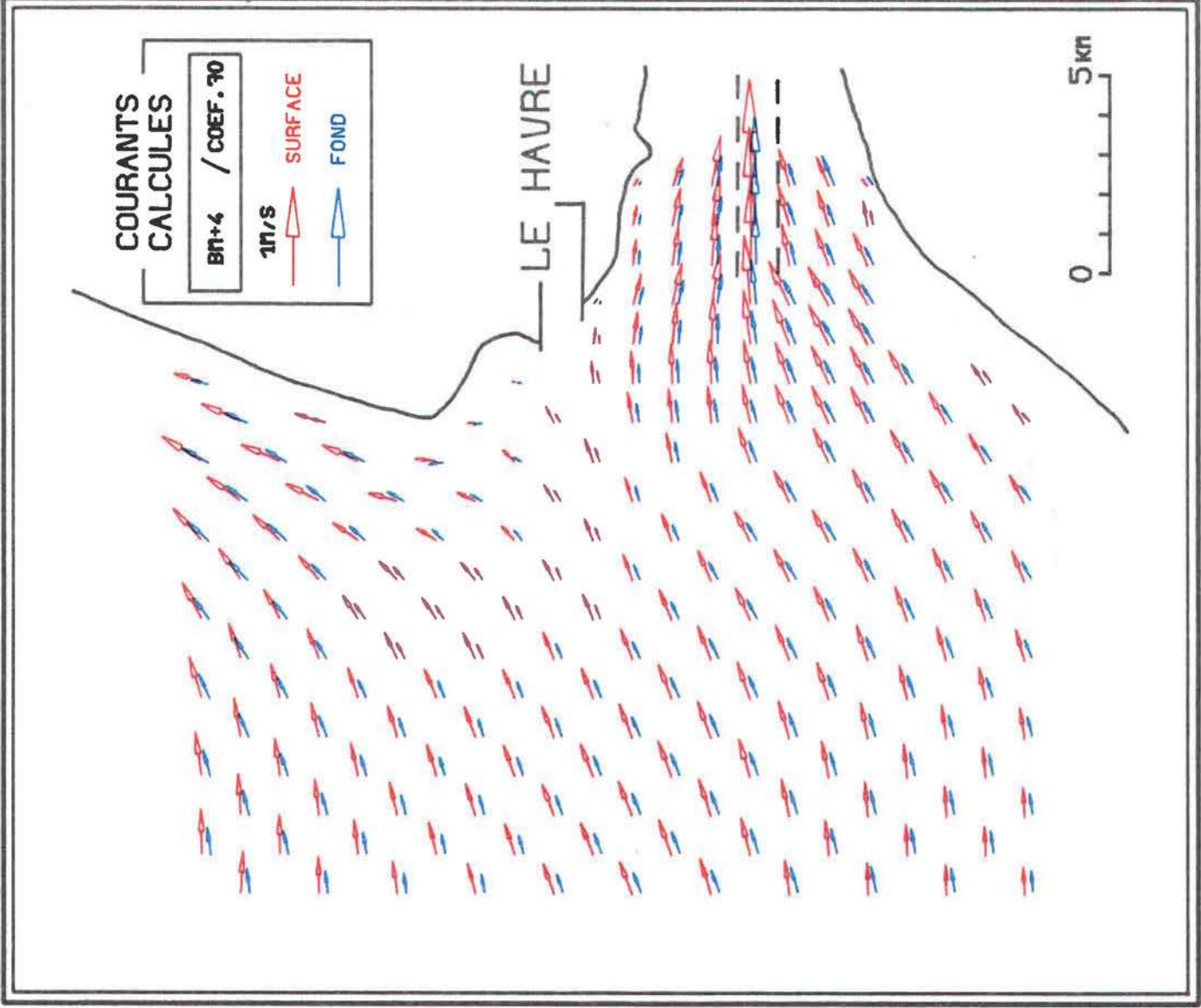


Fig. 3-14 Courants de marée dans l'estuaire de la Seine.  
 Marée du 20 octobre 1978.

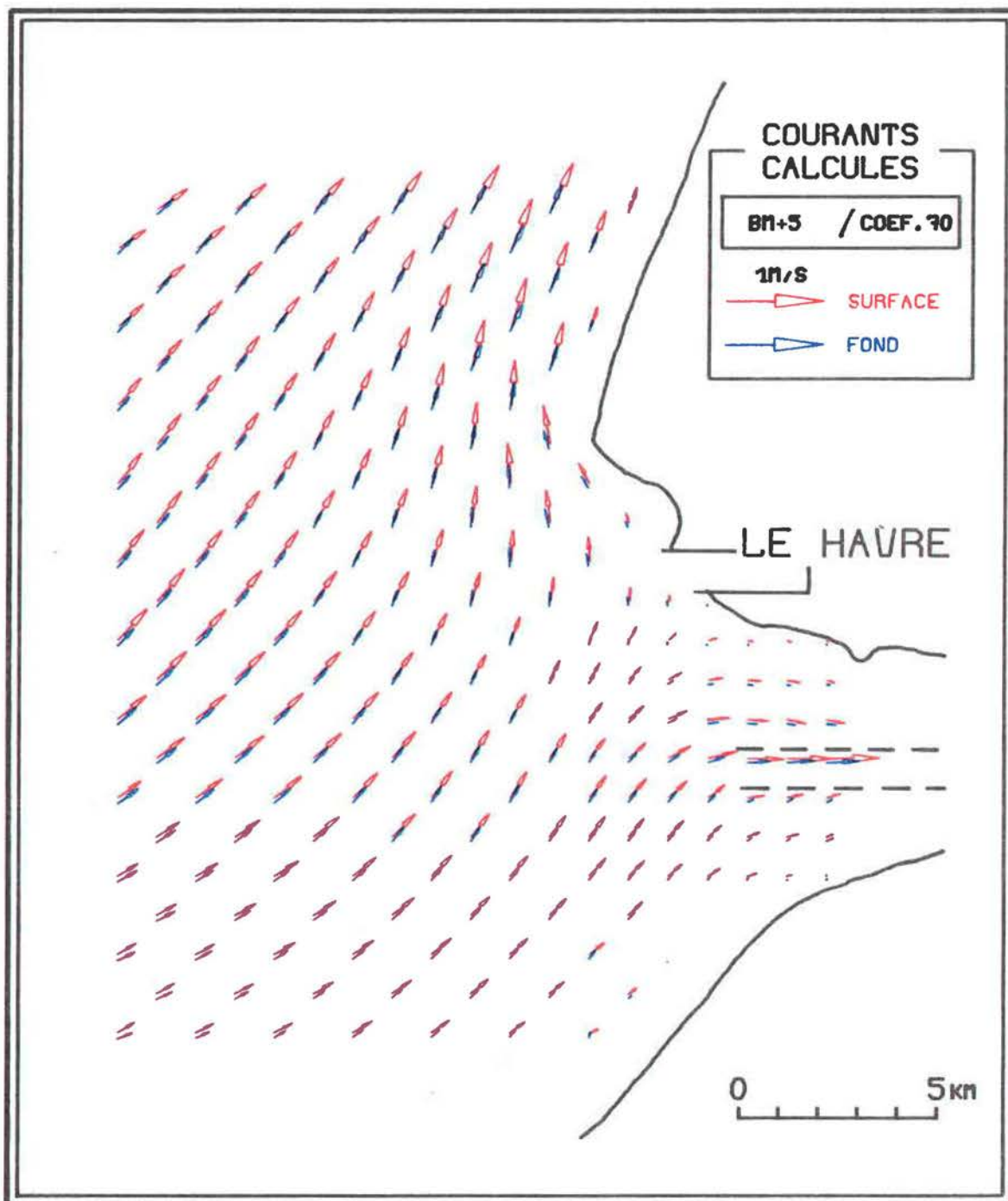


Fig. 3-15 Courants de marée dans l'estuaire de la Seine.  
Marée du 20 octobre 1978.



## POINT B

COEF. 70

- HODOGRAPHE DE SURFACE
- - - HODOGRAPHE DE MI-PROF.
- · · HODOGRAPHE DE FOND
- - - VITESSE RESIDUELLE

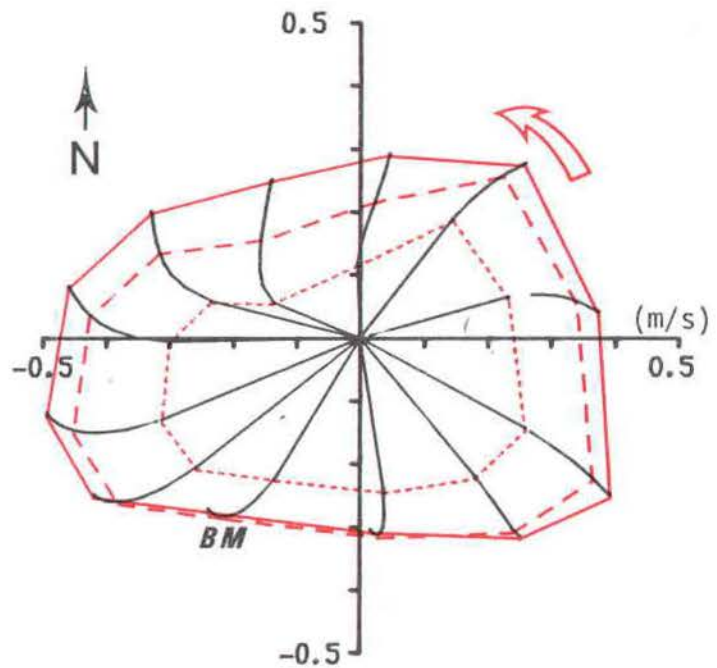
### PARAMETRES

$$\Delta T = 240s \quad \Delta \xi = 1/9$$
$$\theta = 0.5 \quad \lambda = \xi(1-0,7\xi)^2$$

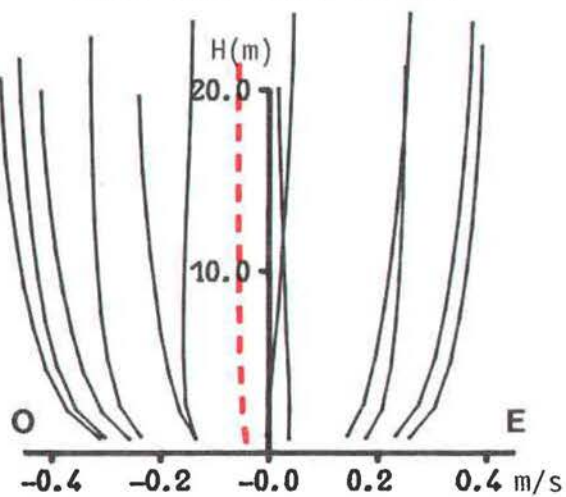
### OPTIONS

(néant)

### PROJECTION HORIZONTALE DES VITESSES



### PROFILS EST-OUEST



### PROFILS NORD-SUD

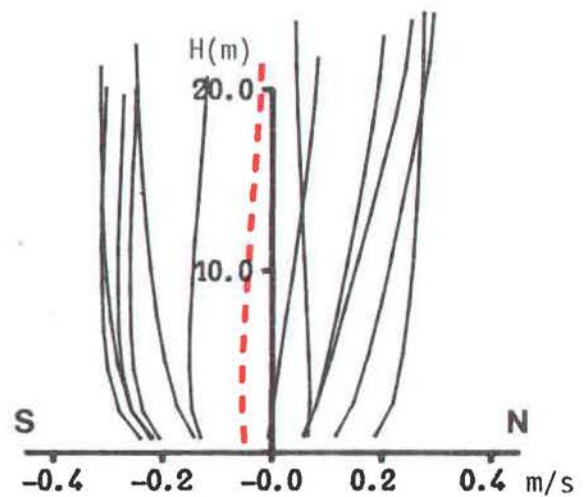


Fig.3-16 Structure verticale des vitesses dans l'estuaire de la Seine au point (14,30) de la grille horizontale (fig.3-1)

# POINT C

COEF. 70

- HODOGRAPHE DE SURFACE
- - - HODOGRAPHE DE MI-PROF
- · · HODOGRAPHE DE FOND
- - - VITESSE RESIDUELLE

## PARAMETRES

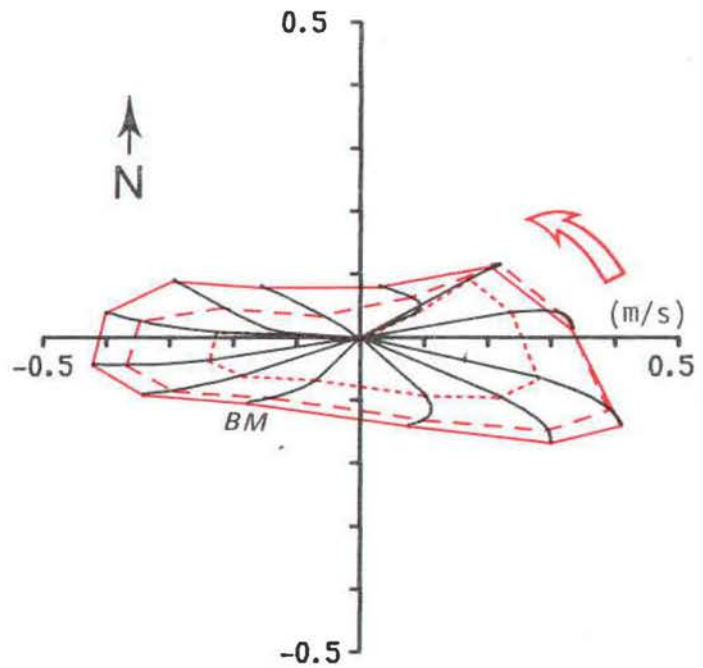
$$\Delta T = 240s \quad \Delta \xi = 1/9$$

$$\theta = 0.5 \quad \lambda = \xi(1-0,7\xi)^2$$

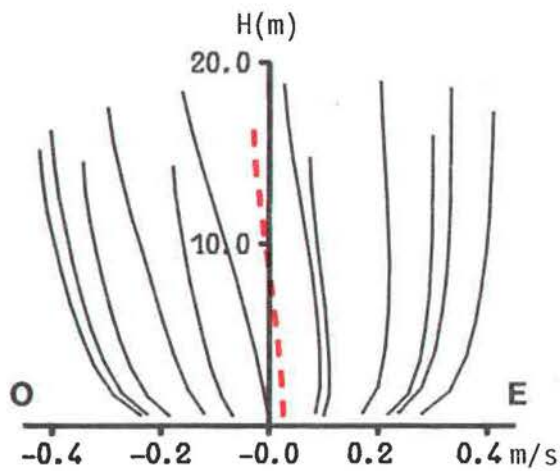
## OPTIONS

(néant)

## PROJECTION HORIZONTALE DES VITESSES



## PROFILS EST-OUEST



## PROFILS NORD-SUD

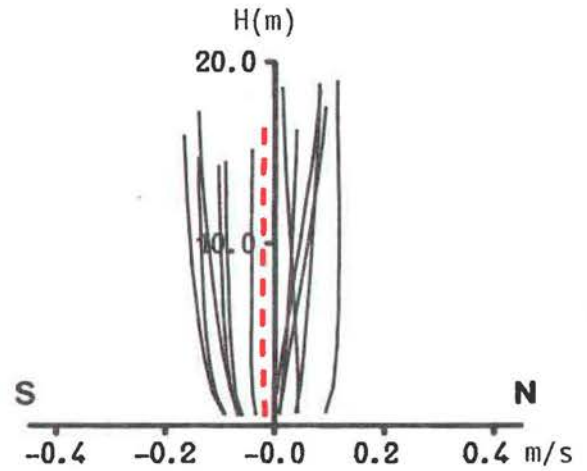


Fig.3-17 Structure verticale des vitesses dans l'estuaire de la Seine au point (14,14) de la grille horizontale (fig.3-1)

## POINT D

COEF. 70

- HODOGRAPHE DE SURFACE
- - - HODOGRAPHE DE MI-PROF.
- · · · HODOGRAPHE DE FOND
- - - VITESSE RESIDUELLE

### PARAMETRES

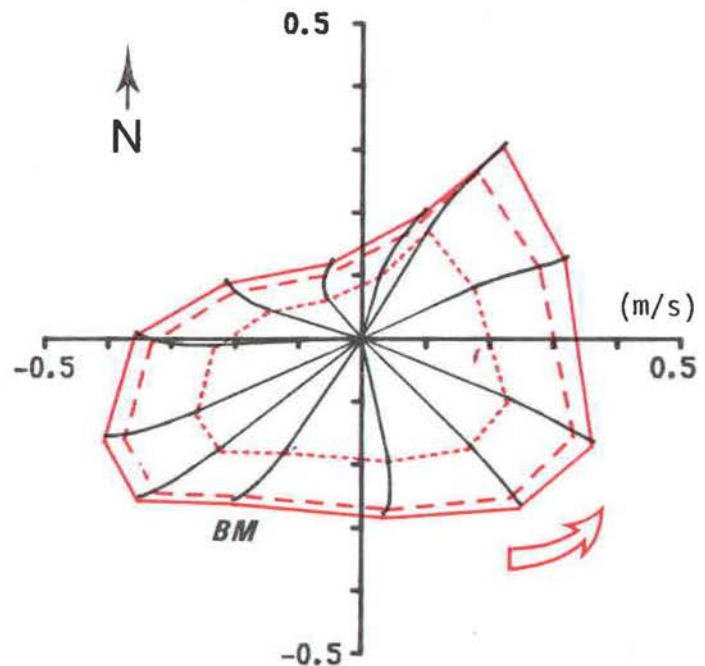
$$\Delta T = 240s \quad \Delta \xi = 1/9$$

$$\theta = 0.5 \quad \lambda = \xi(1-0,7\xi)^2$$

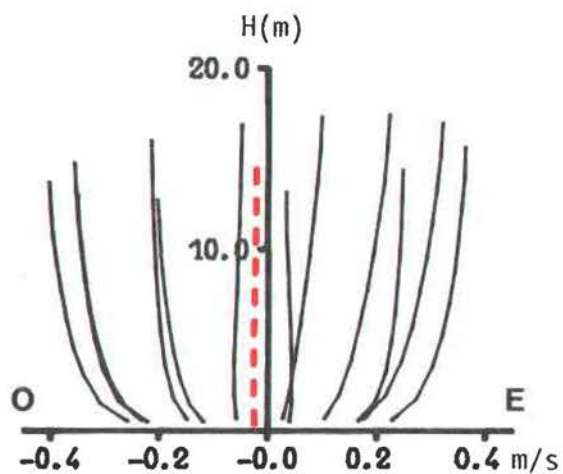
### OPTIONS

(néant)

### PROJECTION HORIZONTALE DES VITESSES



### PROFILS EST-OUEST



### PROFILS NORD-SUD

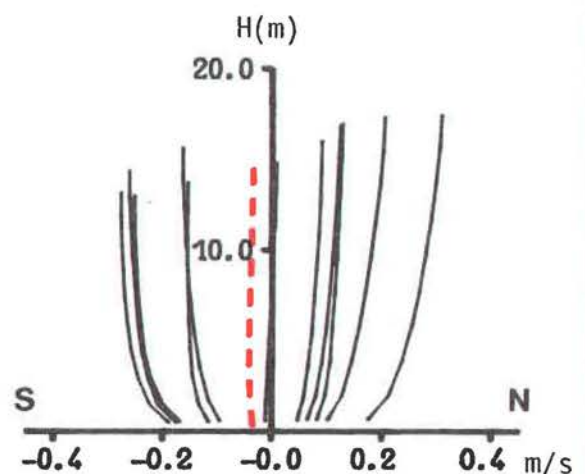


Fig.3-18 Structure verticale des vitesses dans l'estuaire de la Seine au point (18,22) de la grille horizontale (fig.3-1)

# POINT E

COEF. 70

- HODOGRAPHE DE SURFACE
- - - HODOGRAPHE DE MI-PROF.
- · · · · HODOGRAPHE DE FOND
- - - VITESSE RESIDUELLE

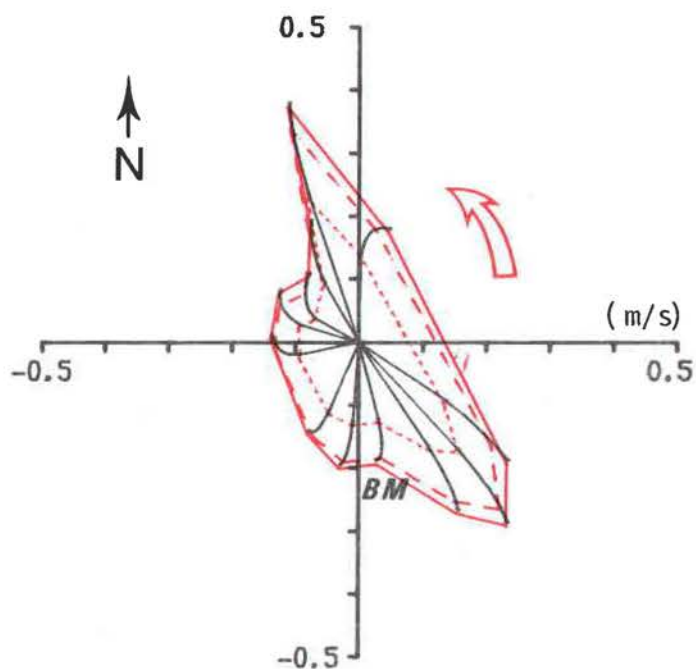
## PARAMETRES

$$\Delta T = 240s \quad \Delta \xi = 1/9$$
$$\theta = 0.5 \quad \lambda = \xi(1 - 0.7\xi)^2$$

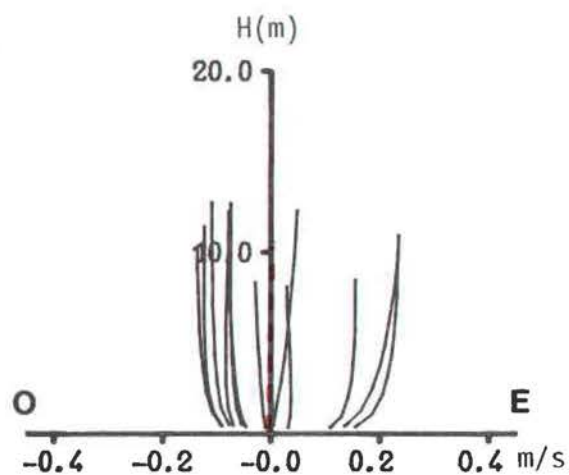
## OPTIONS

(néant)

## PROJECTION HORIZONTALE DES VITESSES



## PROFILS EST-OUEST



## PROFILS NORD-SUD

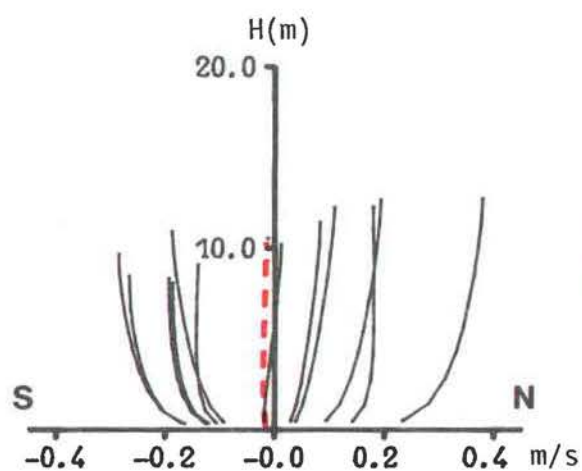


Fig.3-19 Structure verticale des vitesses dans l'estuaire de la Seine au point (23,26) de la grille horizontale (fig.3-1)

# POINT F

COEF. 70

- HODOGRAPHE DE SURFACE
- - - HODOGRAPHE DE MI-PROF.
- · · · · HODOGRAPHE DE FOND
- - - VITESSE RESIDUELLE

## PARAMETRES

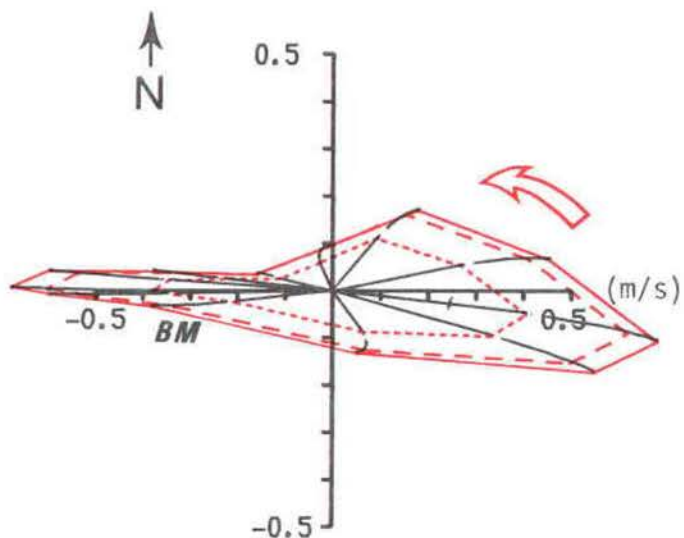
$$\Delta T = 240s \quad \Delta \xi = 1/9$$

$$\theta = 0.5 \quad \lambda = \xi(1-0,7\xi)^2$$

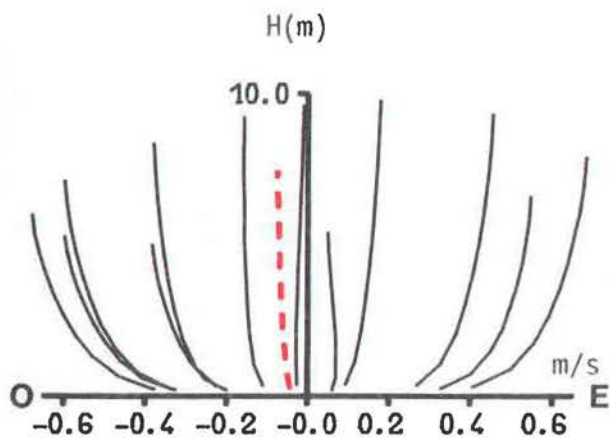
## OPTIONS

(néant)

## PROJECTION HORIZONTALE DES VITESSES



## PROFILS EST-OUEST



## PROFILS NORD-SUD

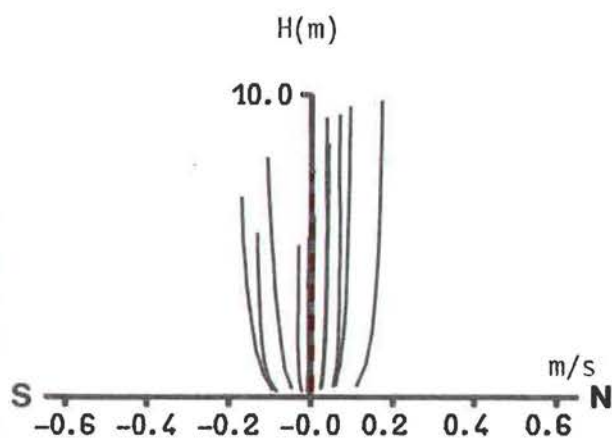


Fig.3-20 Structure verticale des vitesses dans l'estuaire de la Seine au point (25,19) de la grille horizontale (fig.3-1)

# POINT G

COEF. 70

- HODOGRAPHE DE SURFACE
- - - HODOGRAPHE DE MI-PROF.
- · · · · HODOGRAPHE DE FOND
- - - VITESSE RESIDUELLE

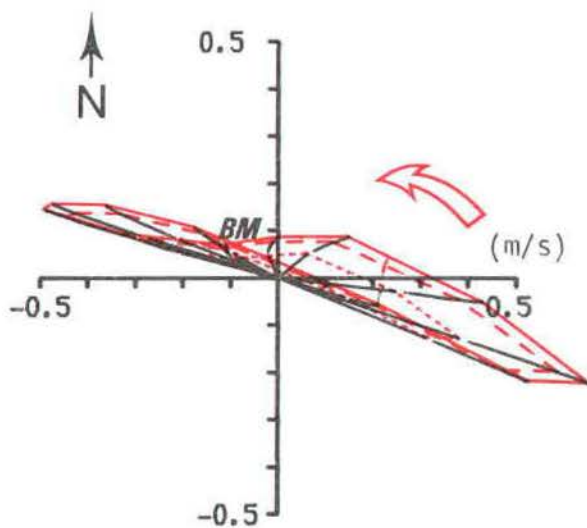
## PARAMETRES

$$\Delta T = 240s \quad \Delta \xi = 1/9$$
$$\theta = 0.5 \quad \lambda = \xi(1-0.7\xi)^2$$

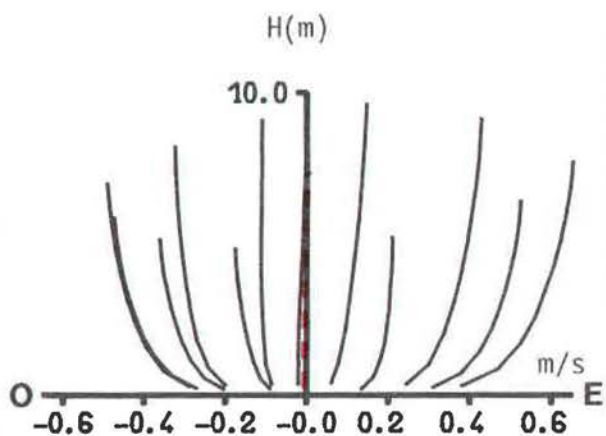
## OPTIONS

(néant)

## PROJECTION HORIZONTALE DES VITESSES



## PROFILS EST-OUEST



## PROFILS NORD-SUD

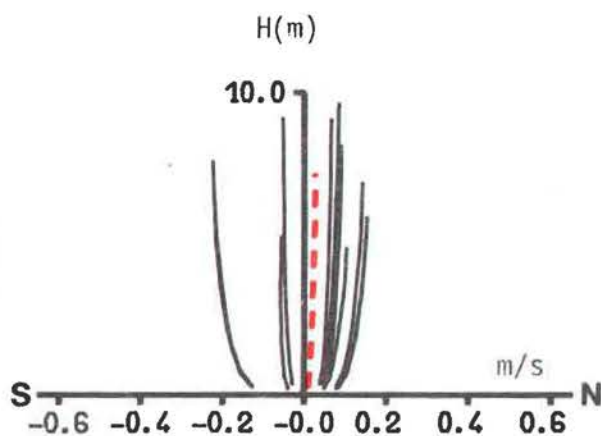


Fig.3-21 Structure verticale des vitesses dans l'estuaire de la Seine au point (26,21) de la grille horizontale (fig.3-1)

Point B (14 - 30) au Nord-Ouest de l'estuaire de la Seine, les hodographes des vitesses ont des allures ellipsoïdales assez régulières et ont la même forme de la surface au fond. On remarquera cependant que lorsque le courant porte au Sud, la vitesse n'est pas maximum en surface : ce fait est dû à la présence d'un gradient de densité Nord-Sud provoquant au fond une poussée vers le Sud.

Point C (14 - 14) au Sud-Ouest, les "ellipses" de courant sont plus plates. Au fond, le courant porte au Sud deux fois plus longtemps qu'au Nord. Enfin, on constate une dissymétrie Est-Ouest due encore à un assez fort gradient de salinité dans cette direction : le phénomène est particulièrement net sur les valeurs résiduelles de la vitesse.

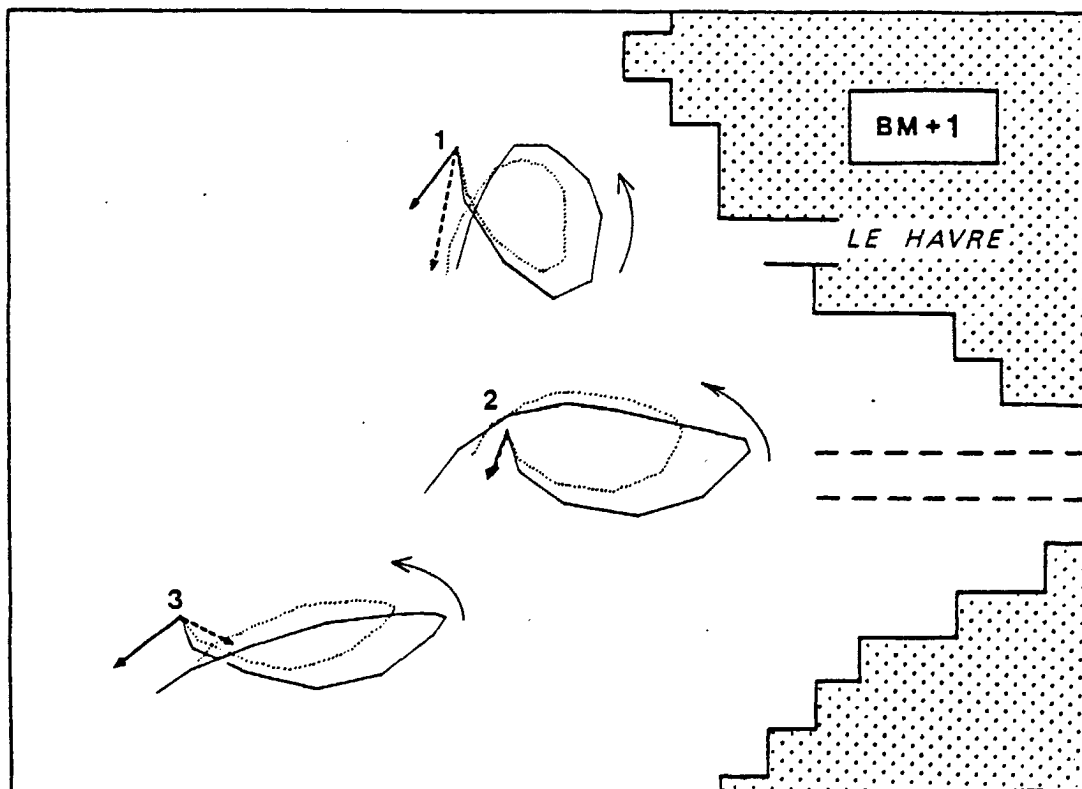
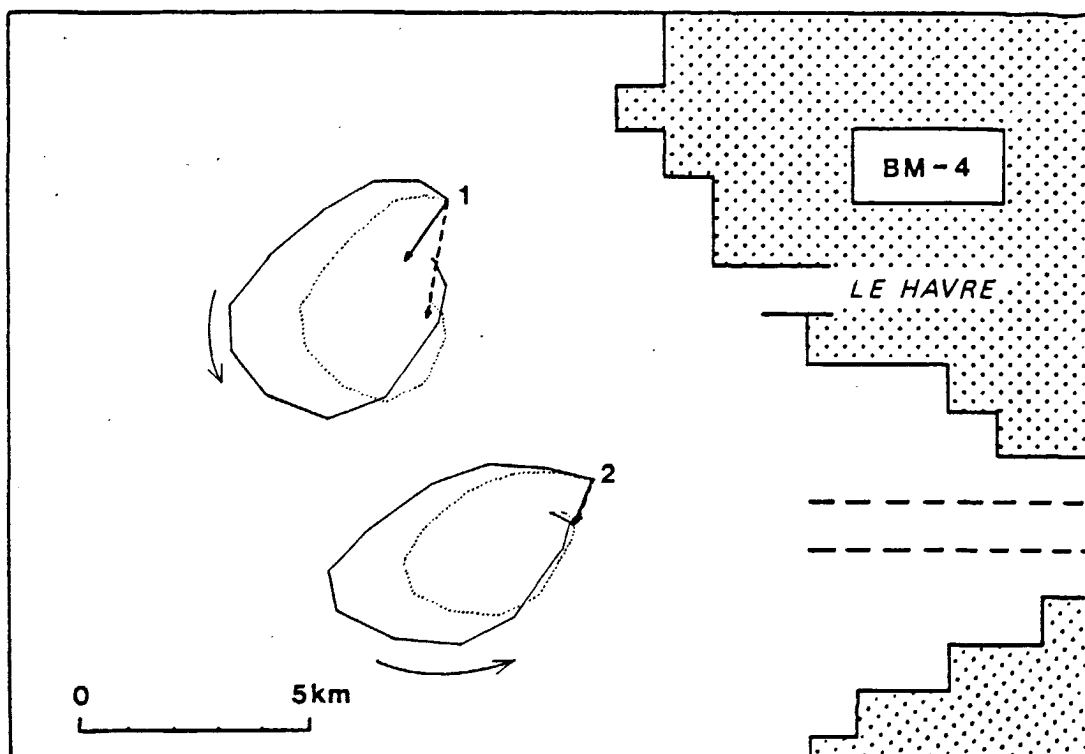
Point D (18 - 22) en ce point central, les hodographes ont une forme intermédiaire par rapport à celles des précédents.

Point E (23 - 26) ici, la forme des hodographes est très influencée par la proximité de la côte.

Point F (25 - 19) ce point est situé dans l'axe du chenal de la Seine. Le mouvement est alternatif. On remarque surtout les écarts entre les modules de vitesse au fond et en surface : ceci peut avoir des conséquences importantes pour le mouvement résiduel lagrangien : une particule placée en surface aura une probabilité plus grande de s'échapper du mouvement alternatif local qu'une particule de fond qui s'écartera moins du point initial.

Poing G (26 - 21) les hodographes décrivent à toute côte un "8". La remarque faite pour le point précédent reste tout aussi valable.

La circulation eulérienne, représentée par les champs de courant à tout moment n'est pas très adaptée pour la recherche des mouvements des masses d'eau : ce sont en effet les trajectoires suivies par les particules, donc la circulation lagrangienne, qu'il est alors nécessaire de connaître. De même, si l'on cherche la répartition d'un polluant à partir d'un point de rejet ou le devenir des sédiments se déplaçant sur le fond, ce sont encore les trajectoires qu'il s'agit de déterminer. Celles-ci sont facilement déductibles des données de courant eulériennes puisque les vitesses sont les dérivées des trajectoires : on peut, par exemple, construire des trajectoires point par point à intervalles de temps réguliers.



——— trajectoire en surface      ———> dérivation eulérienne en surface  
 ..... trajectoire près du fond      .....> dérivation eulérienne près du fond

Fig. 101 Simulation de trajectoires de particules au cours d'une marée, selon l'heure de rejet.  
 (marée moyenne - débit de la Seine:  $180 \text{ m}^3/\text{s}$ )



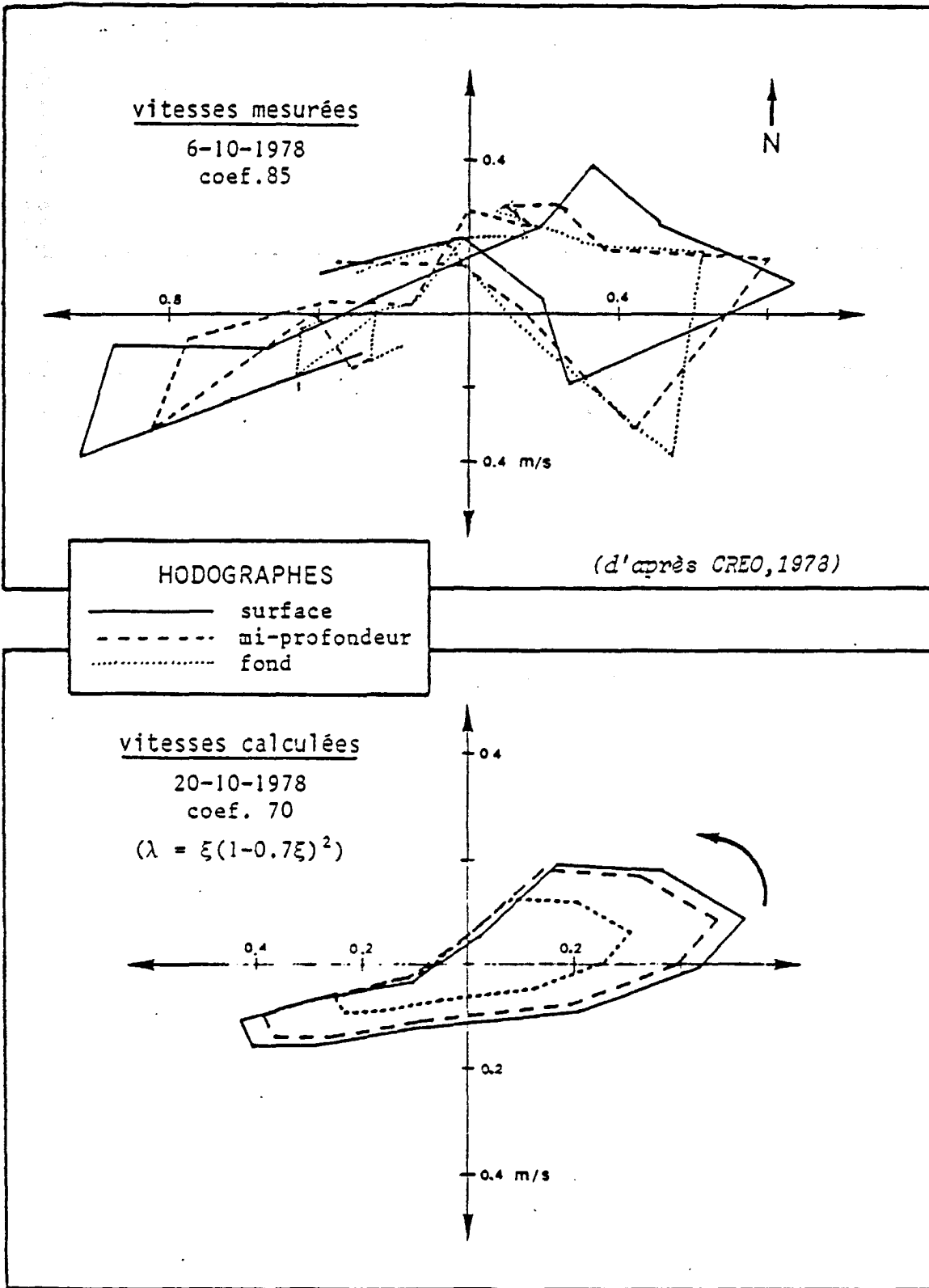


Fig. 102 : Comparaison des résultats du modèle vertical avec les mesures in situ au point H

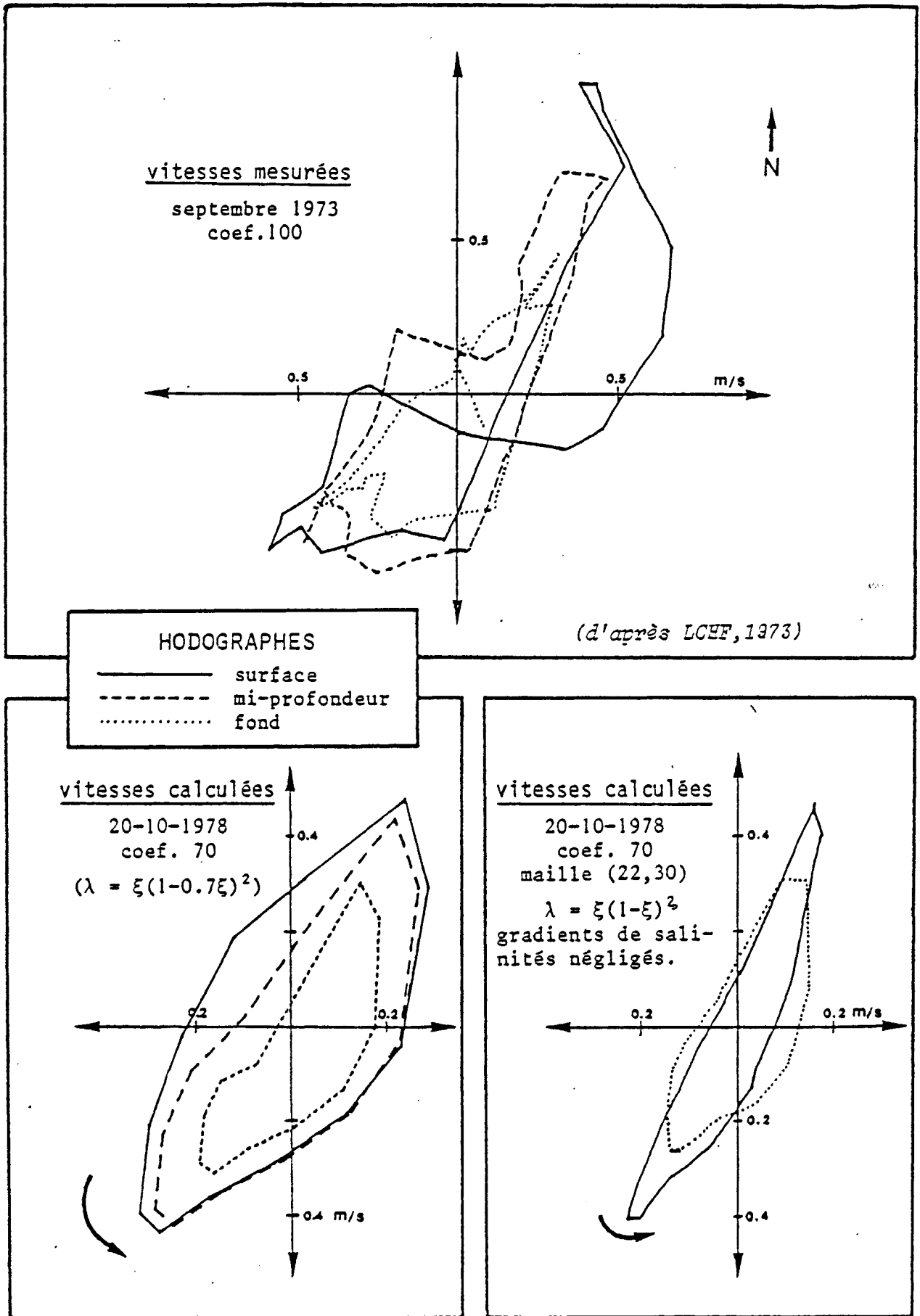


Figure 103 : Comparaison des résultats du modèle vertical avec les mesures in situ au point I

Des exemples de trajectoires ainsi obtenues à l'aide des vitesses fournies par le modèle sont présentés sur la figure 101. On remarque que les mouvements sont très différents en surface et au fond, et que les déplacements résiduels après une marée, que nous appellerons aussi dérives, varient en fonction de l'heure du départ. Ainsi, au point 1, les dérives de surface et de fond sont semblables après un départ en début du flot tandis qu'en commençant en plein jusant, on obtient une dérive deux fois plus grande au fond. C'est le contraire au point 2. On observe également que les dérives lagrangiennes peuvent être très différentes des pseudo-dérives eulériennes obtenues en supposant pendant le déplacement la vitesse constamment égale à la moyenne temporelle des vitesses au point de départ (résiduelle eulérienne).

#### Comparaison des résultats avec les mesures *in situ*

Les mesures de courant sur plusieurs niveaux sont très peu nombreuses dans le secteur étudié. D'autre part, elles ont souvent une évolution irrégulière au cours de la marée et présentent sur une même verticale des vitesses difficilement raccordables. Ces phénomènes sont dus aux incertitudes sur les mesures.

Nous avons cependant établi la comparaison entre 2 de ces mesures et les résultats du modèle.

#### Point H (24 - 16) et mesure "CRE01" du 6 octobre 1978 (figure 102)

Les hodographes ont sensiblement la même allure effilée à l'Ouest et plus renflée à l'Est, et ont tous une direction semblable. Les différences entre la surface et le fond sont bien reproduites au jusant, à l'Ouest mais pas pendant le flot à l'Est.

#### Point I (21 - 32) et mesure "LCHF A" de septembre 1973 (figure 103)

Ici, la similitude est bonne pour les hodographes de fond et de mi-profondeur. Par contre, l'hodographe simulé en surface est ovoïde tandis que l'hodographe mesuré décrit un "8". Il est possible de se rapprocher d'une telle disposition en réduisant la viscosité turbulente pour accentuer les gradients de vitesse verticaux : ainsi, on a obtenu un hodographe de surface plus étroit que l'hodographe de fond en un point voisin du point de mesure (fig. 103). Les valeurs correspondantes de la viscosité n'ont pas été rete-

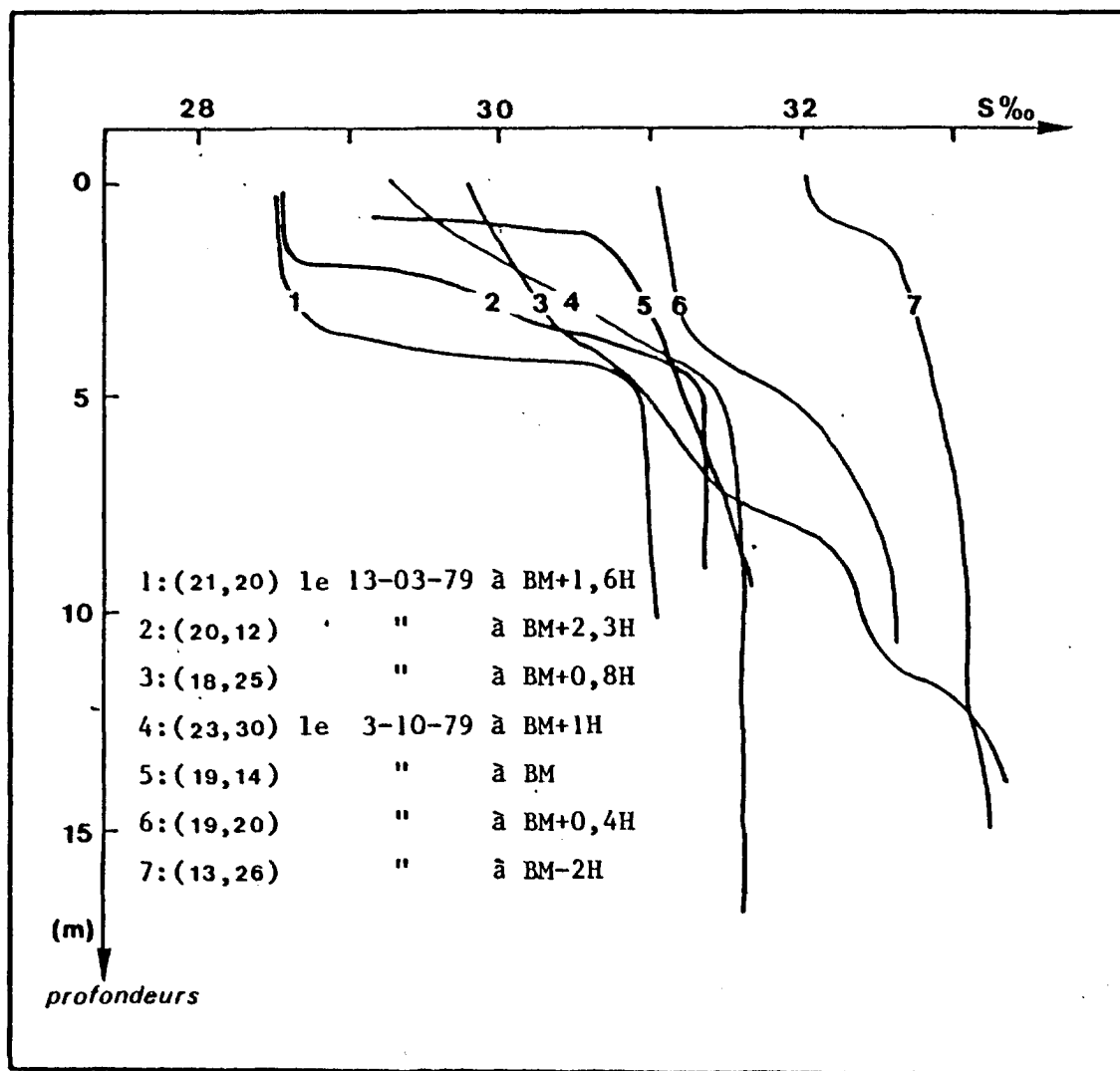


Fig. 104: Exemples de profils de salinité mesurés en baie de Seine. (les positions des points de mesures sont indiquées par les numéros des noeuds de la grille horizontale (Fig.3-1))

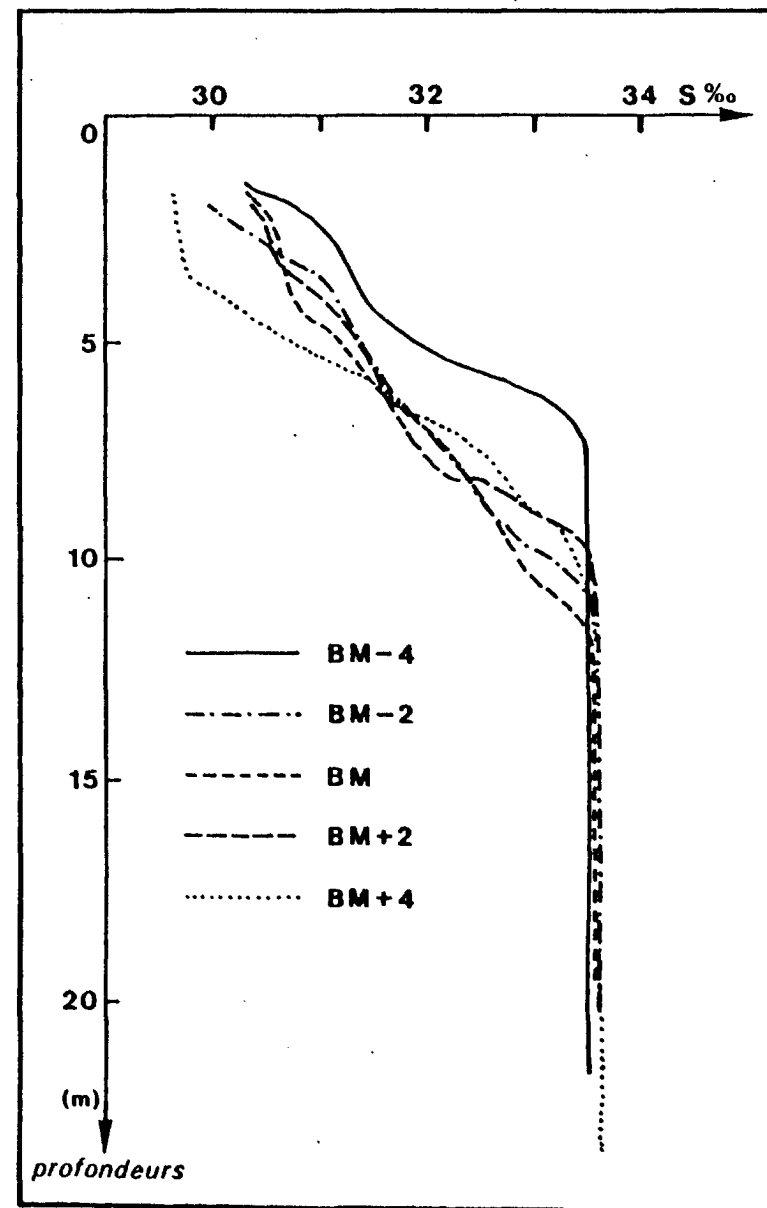


Fig. 105: Variation au cours de la marée du profil de salinité en un point fixe (noeud 18,30).

nues dans le cas général car elles conduisent à des conditions de stabilité défavorables en certains points lorsque les termes de densité ne sont pas négligés.

#### Utilisation des mesures de salinité

Il est possible d'améliorer le calcul des termes de densité en utilisant les mesures de salinité effectuées en 1978 et 1979. En particulier des profils de salinité et température avaient été relevés à l'aide d'une bathysonde "GUIDLINE". Un certain nombre de profils de salinité mesurés dans notre secteur d'étude en mars et en octobre 1979 sont reproduits sur la figure 104. Nous avons reporté également l'évolution au cours de la marée du profil de salinité en un point fixe situé dans le Cap de la Hève (fig. 105).

On distingue principalement deux types de profils :

- les profils présentant une couche de fond homogène et au-dessus une eau de salinité régulièrement décroissante jusqu'à la surface.
- les profils "bicouches" mettant en évidence une couche de fond homogène et une couche de surface également homogène mais moins salée. Cette configuration apparaît bien sûr plus près de l'estuaire, au moment de la marée basse, et de façon plus accentuée en période de crue.

Par ailleurs, on dispose des très nombreuses mesures de salinité au fond et en surface effectuées depuis plus de cinq ans en 5, puis 9 points de l'estuaire extérieur de la Seine dans le cadre du RNO (Réseau National d'Observation de la qualité du milieu marin). Cinq de ces points, situés dans notre secteur d'étude, pourraient servir à caler des profil-types de salinité dressés à partir de profils mesurés occasionnellement. En effectuant quelques interpolations et extrapolations, on pourrait ainsi reconstituer la structure tridimensionnelle de la distribution du sel dans l'estuaire de la Seine et s'en servir pour calculer les termes de densité pour le modèle vertical. Cependant, il serait alors très difficile de tenir compte des variations de salinité au cours de la marée.

Enfin, on peut envisager de calculer ces termes de densité à partir des résultats en valeurs moyennes sur la verticale du modèle d'advection dispersion en affectant autour de ces valeurs moyennes des gradients verticaux déduits de mesures.

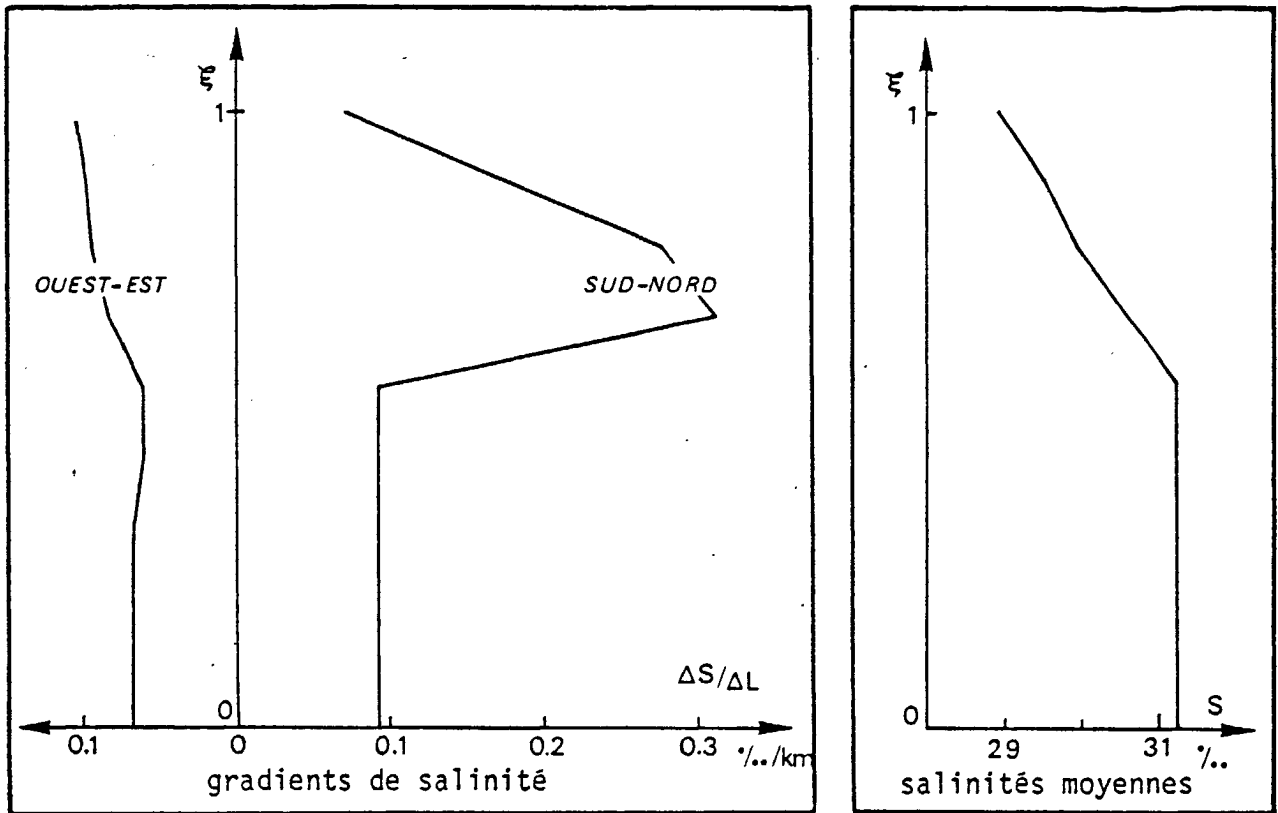


Fig. 106 : Mesures de salinité utilisées pour le calcul de la structure verticale des courants au noeud (20,32). (voir ci-dessous)

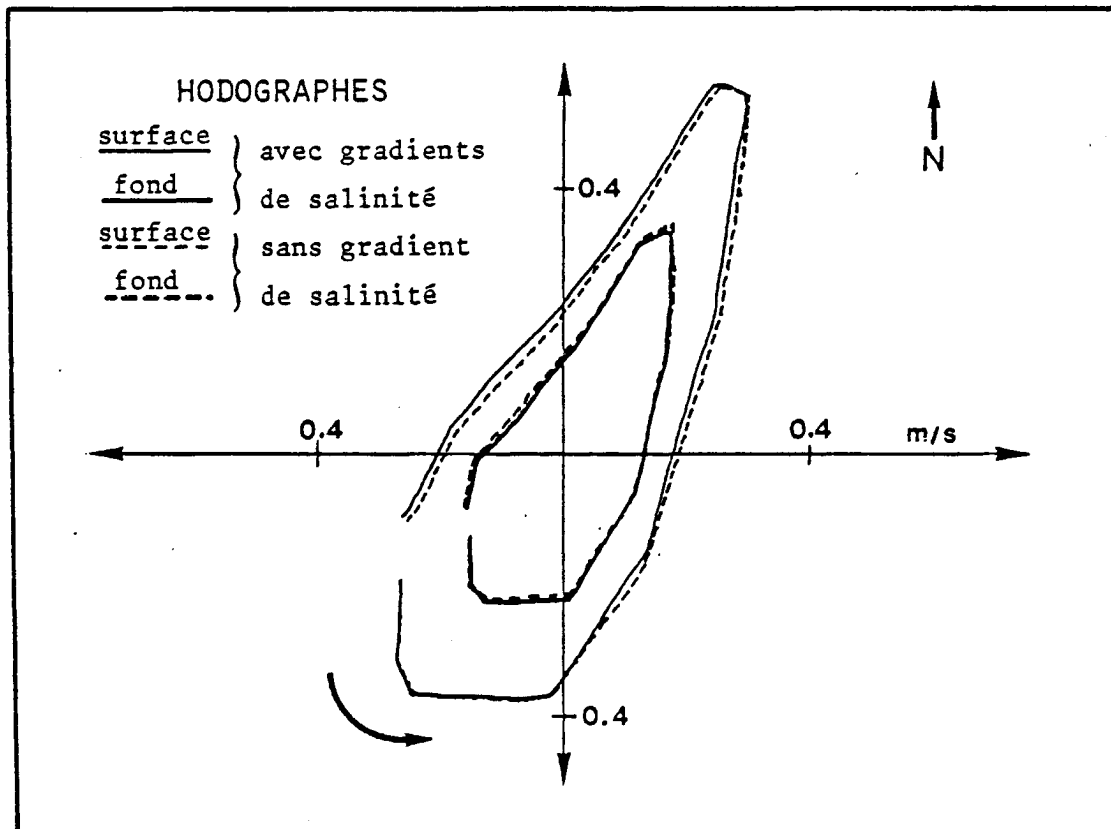


Fig. 107 : Simulation de la structure verticale des vitesses au large du cap de La Hève (noeud (20,32) de la grille horizontale). Influence des gradients de salinité.

Un exemple de calcul de la structure verticale des vitesses à partir de gradients horizontaux de salinité mesurés a été traité en un point situé au large du Cap de la Hève. Les vitesses moyennes sont fournies par le modèle horizontal (noeud 20, 32) tandis que les salinités sont celles mesurées pendant la campagne "THALIA" de mars 1979 (voir figure 106). Le profil de viscosité adopté (profil N° 4, figure 100), présente une décroissance très rapide au-dessus de la mi-profondeur pour tenir compte de la présence d'un gradient vertical de salinité. La structure des vitesses obtenue à l'aide de ces données est représentée sur la figure 107. On observe un net décalage de l'hodographe de surface vers le Nord-Ouest lorsque les gradients de densité sont pris en compte.

Etant donnée la relative homogénéité des profils de salinité dans le secteur étudié, il était tentant d'adopter pour la viscosité verticale, un profil du type précédent (cf. fig. 100). Mais les trop faibles valeurs de  $N_z$  en surface entraînent parfois des instabilités de calcul. C'est pourquoi nous avons retenu un profil intermédiaire entre ce dernier et le profil choisi par NIHOUL qui représente un maximum en surface. Ce profil "intermédiaire" est défini par :

$$\lambda = \xi (1 - 0,7 \xi)^2 \quad (\text{voir figure 100})$$

c) Application du modèle à la recherche de la circulation résiduelle dans la partie orientale de la Baie de Seine.

Une étude préalable qualitative des sources de circulation résiduelle en Baie de Seine a permis de mettre en évidence l'importance des gradients horizontaux de salinité et du vent, et le fait qu'ils interviennent tous les deux très différemment selon la profondeur. Le vent présentant des valeurs plus aléatoires en intensité et en direction, on s'intéressera surtout aux gradients de salinité.

Nous avons évalué approximativement, les vitesses résiduelles eulériennes en surface et au fond en faisant une moyenne sur toute la marée des vitesses calculées à l'aide du modèle vertical. Les champs de courant obtenus sont reportés sur la figure 3.29.

Afin d'évaluer l'influence des termes de densité, nous avons établi le même calcul en les négligeant : c'est l'objet de la figure 3.30.

On constate pour chacun des cas considérés une nette résiduelle vers le Sud-Ouest qui se retrouve au fond comme en surface. C'est en fait la

manifestation d'une résiduelle moyenne importante qui, rappelons le, n'est pas accessible par notre calcul. Cette valeur moyenne est d'ailleurs liée aux incertitudes des conditions aux limites du modèle en plan horizontal et ne peut être discutée dans ce paragraphe.

Il est donc apparu opportun de tracer les champs des fluctuations des vitesses résiduelles, c'est-à-dire les écarts de la surface ou du fond par rapport à la moyenne. On les trouve représentés sur la figure 3.32 ou 3.31 selon que les termes densité sont ou non négligés.

Sur la carte des fluctuations de vitesse résiduelle, avec termes de densité négligés, on observe que la fluctuation au fond est bien plus importante et dirigée vers le Nord dans toute la moitié Ouest du secteur étudié. Dans la zone du chenal, on constate une convergence des eaux du fond vers l'amont. Ces phénomènes sont dus à l'action des termes non linéaires sans doute, mais aussi pour une grande part au fait que les vitesses au fond sont "plus éloignées" de la moyenne qu'en surface, en raison de leur profil quasi logarithmique.

La prise en compte des termes de densité apporte par contre beaucoup d'éléments. Tout d'abord, au large, les courants sont divergents vers l'extérieur en surface et convergents vers l'embouchure au fond. Cette situation est liée à la disposition des isohalines dans l'estuaire de la Seine (cf. figure 59). En effet, un gradient horizontal de densité entraîne un courant inversé en surface et au fond dirigé au fond vers une zone moins dense. Le phénomène est essentiel à l'échelle de la baie de Seine, en particulier dans sa moitié Est où les gradients de salinité ne sont pas négligeables. Les isohalines ayant schématiquement la forme de courbes centrées sur l'embouchure, on obtient les fluctuations de vitesses résiduelles convergentes au fond et divergentes en surface.

Dans la partie centrale du secteur étudié, ce cisaillement devient très faible : pour le modèle vertical, c'est l'effet d'une réduction des gradients de densité que l'on peut effectivement observer sur les figure 59 et suivantes. Parallèlement, la réduction des vitesses horizontales de l'extérieur vers l'amont s'accompagne de courants verticaux ascendants qui assurent la continuité. On est en présence d'un système estuarien classique déporté vers la Baie de Seine, avec un point nodal situé dans la région où les résiduelles s'annulent, c'est-à-dire au niveau du méridien "0°" (centre du secteur d'étude). On explique ainsi la relative uniformité de la résiduelle dirigée vers



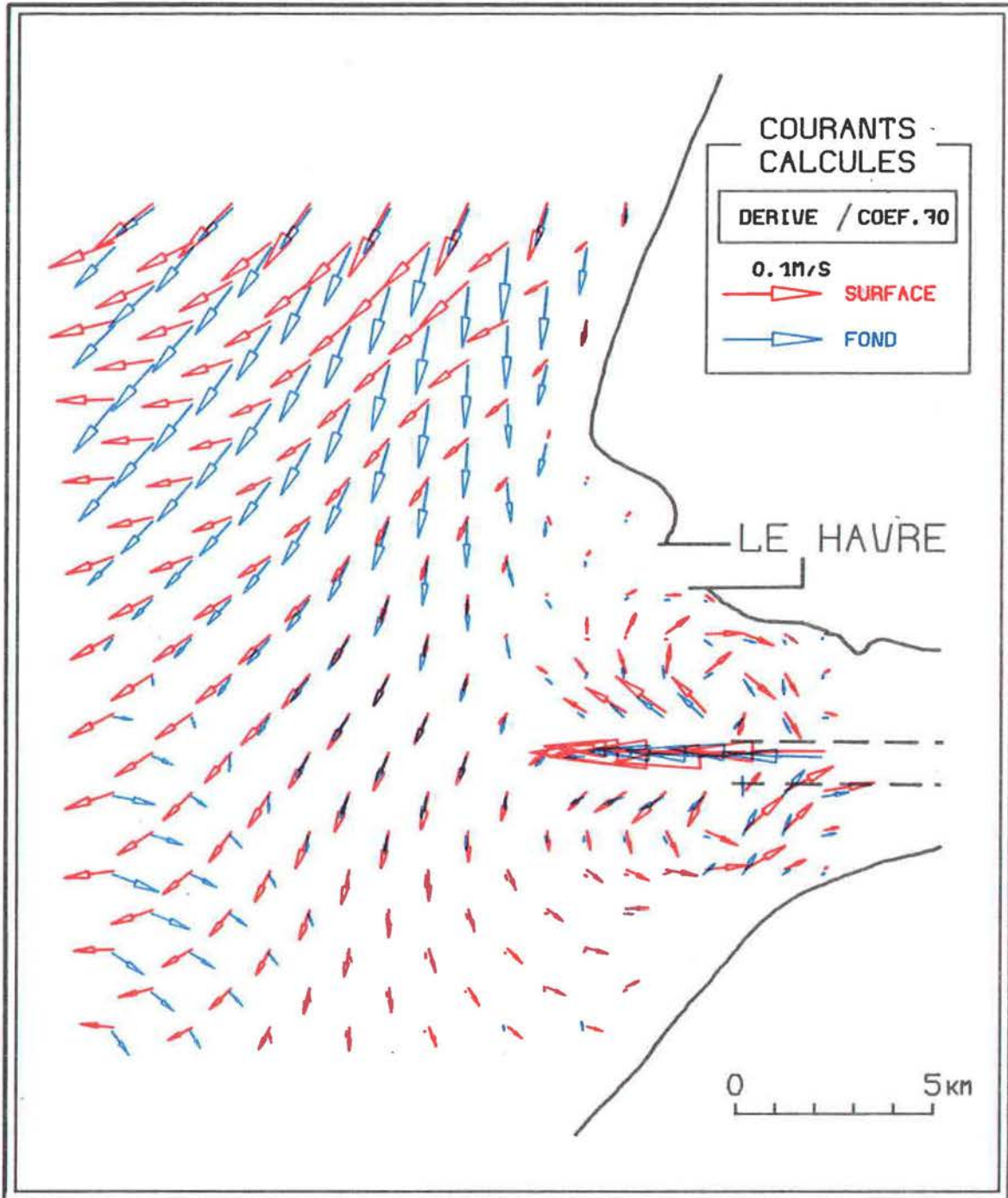


Fig. 3-29 Vitesses résiduelles eulériennes dans l'estuaire de la Seine. Marée du 20 octobre 1978.

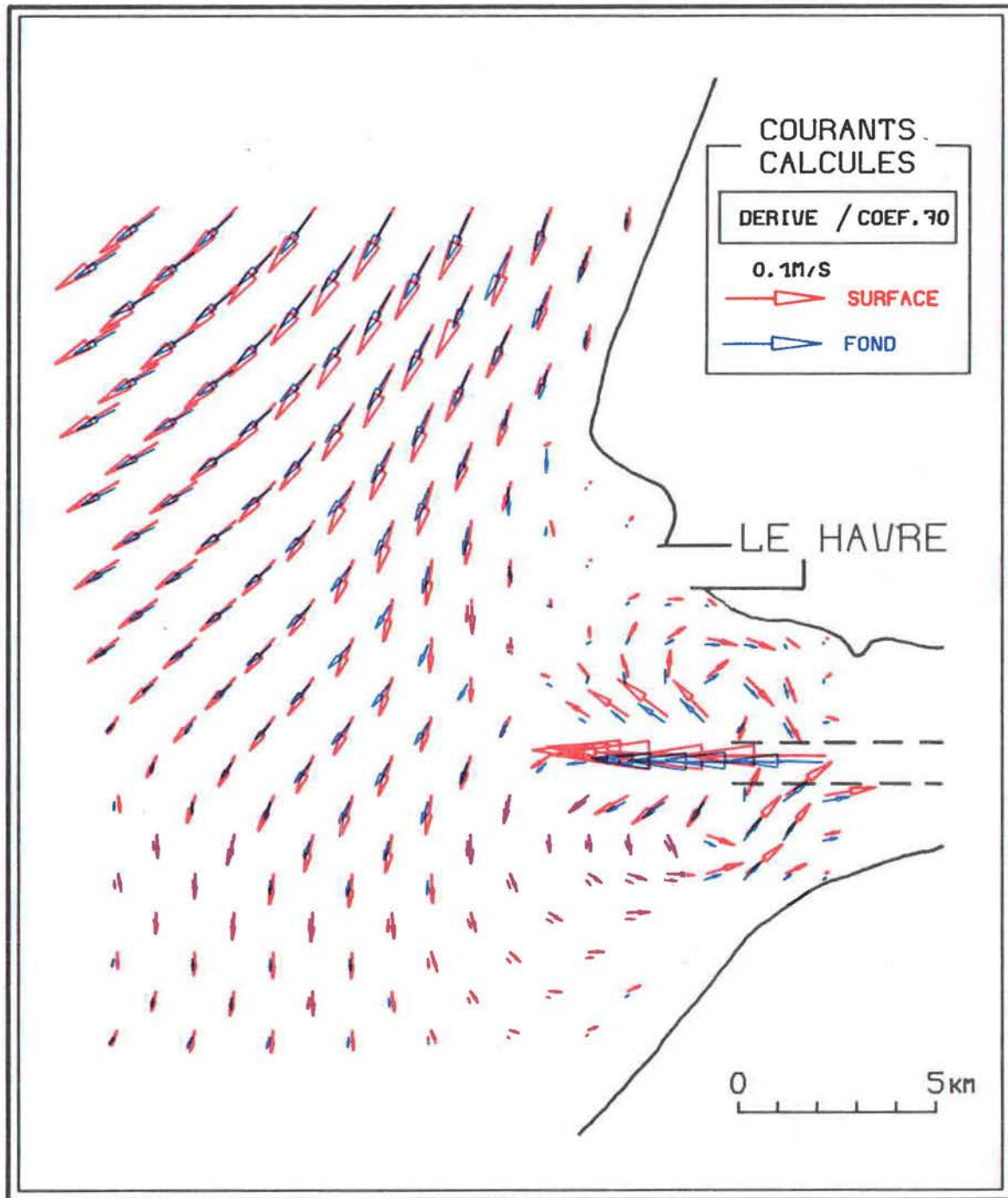


Fig. 3-30 Vitesses résiduelles eulériennes dans l'estuaire de la Seine.  
 Marée du 20 octobre 1978.  
 Termes de densité négligés dans le calcul de la structure  
 verticale.

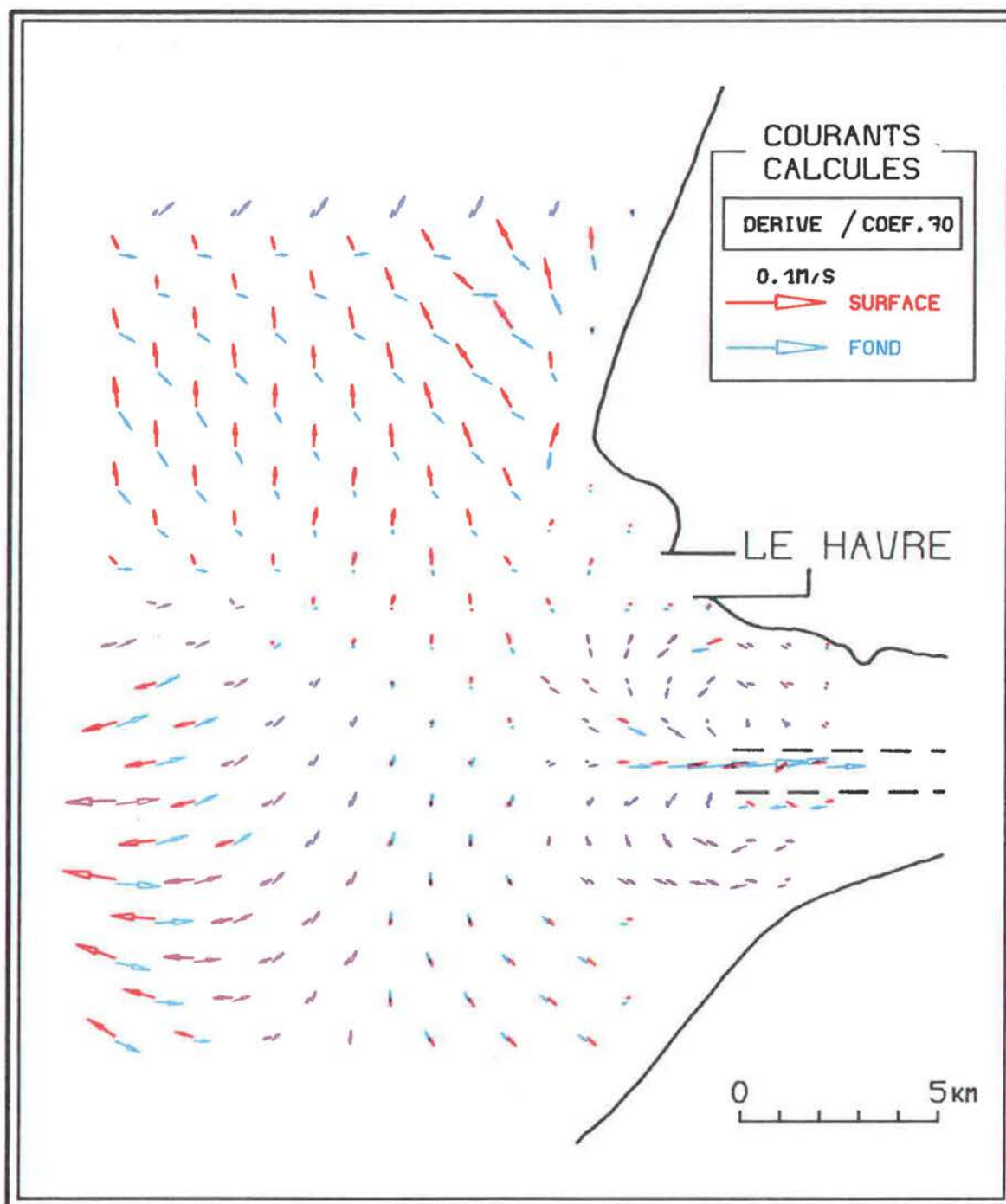


Fig. 3-31 Courant résiduel eulérien dans l'estuaire de la Seine: fluctuations des vitesses par rapport aux valeurs moyennes sur la verticale. - Marée du 20 octobre 1978.

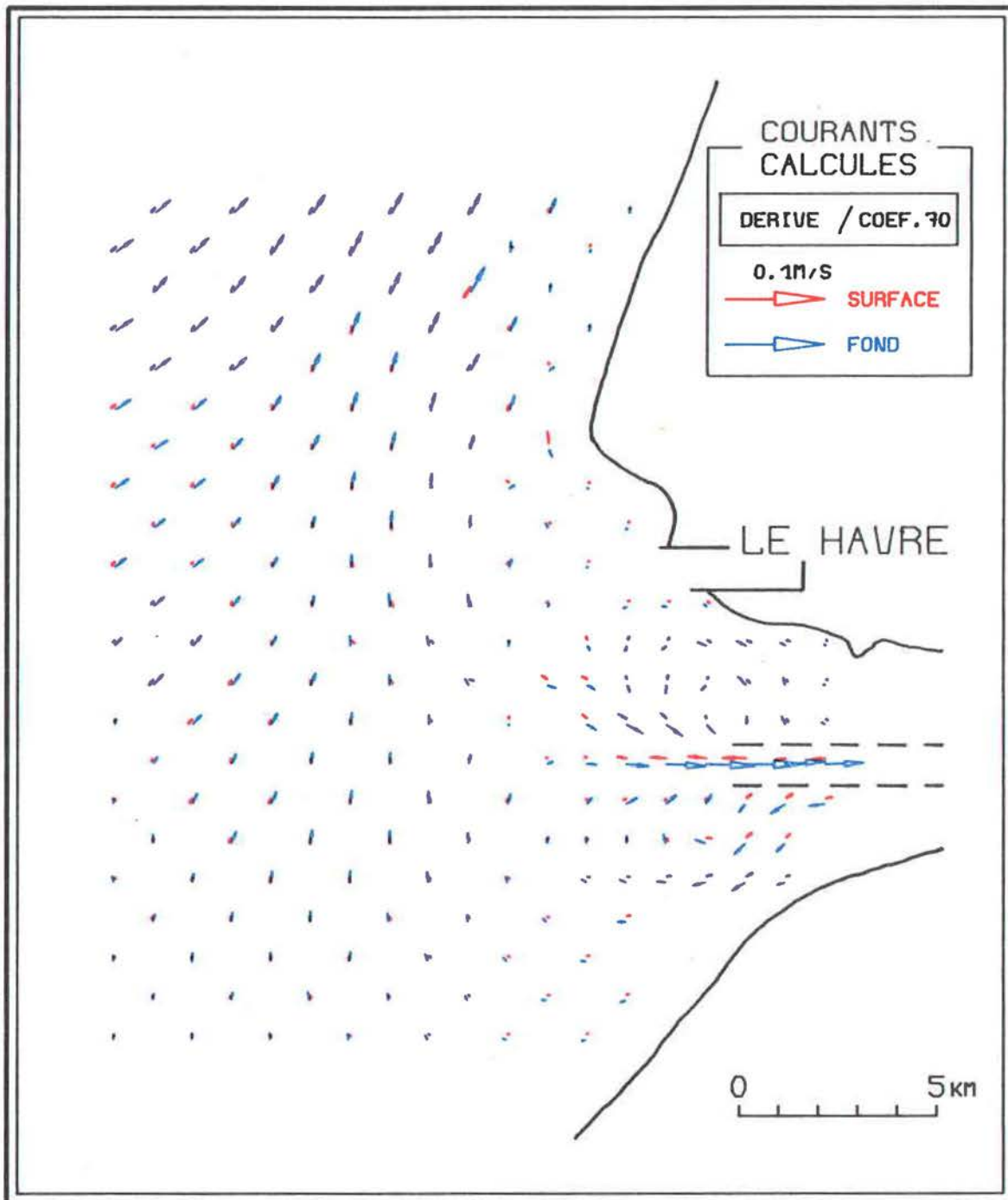


Fig. 3-32 Courant résiduel eulérien dans l'estuaire de la Seine: fluctuations des vitesses par rapport aux valeurs moyennes sur la verticale. - Marée du 20 octobre 1978. Termes de densité négligés dans le calcul de la structure verticale.

l'Ouest dans le secteur amont (au niveau du chenal) que les mesures *in situ* ont confirmé (AVOINE, 1980) ainsi que le modèle en plan vertical (cf. chapitre IV.D).

Enfin, on peut remarquer que la tendance de circulation inversée obtenue au Nord-Ouest de la Hève est confirmée par les mesures de longues durées effectuées en 1979 par le CNEOX en collaboration avec le SHOM et l'UBO (figure 108).

## 5 - Conclusion

Le modèle numérique d'évaluation de la structure verticale des courants par le calcul des fluctuations de vitesse par rapport à leur valeur moyenne sur la verticale, constitue un complément aux modèles bidimensionnels en plan horizontal qui simulent courants moyens et hauteurs d'eau. La combinaison des deux types de calculs constitue un modèle pseudo-tridimensionnel, plus simple que les modèles tridimensionnels classiques. Il est ainsi possible de calculer la structure verticale des courants de manière ponctuelle, ce qui s'avère très souple d'emploi.

Ce modèle vertical prend en compte les termes d'advection non linéaires, et fait intervenir la plupart des phénomènes physiques mis en jeu : force de Coriolis, gradients de densité, frottement, vent, etc... Pour ce qui concerne les points faibles du calcul, on notera l'introduction artificielle d'une viscosité turbulente qu'il est nécessaire de déterminer par calage du modèle sur des mesures *in situ* très précises, ainsi que le recours aux mesures de salinité effectuées dans l'estuaire, puisque le modèle n'a pas été étendu aux substances transportées en solution.

L'application du modèle à la connaissance de la circulation en Baie de Seine a mis en évidence des déphasages entre la surface et le fond : le modèle vertical, ainsi couplé à un modèle en plan horizontal, permet de calculer des trajectoires théoriques de particules, et par exemple d'optimiser les heures et situations de rejets selon la côte à laquelle ils ont lieu.

Ce modèle, au même titre que les autres modèles détaillés plus haut, ne peut prétendre représenter correctement les circulations résiduelles, il n'a pas été conçu dans cette optique. Toutefois, dans le cas particulier de la circulation résiduelle de densité, caractéristique des estuaires, les

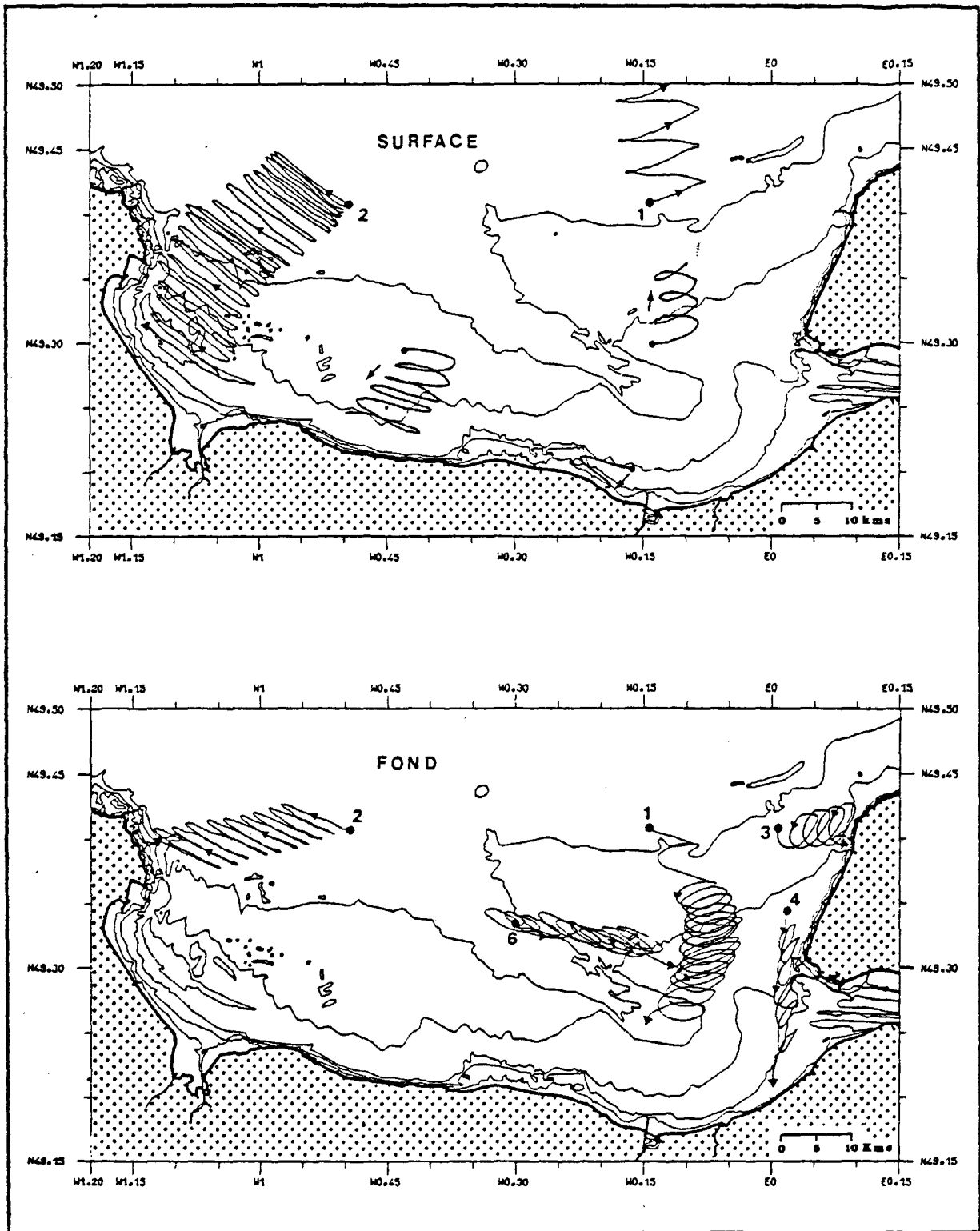


Fig. 108 : Mesures de courant en baie de Seine: hodographes intégrés.  
(mesures CNEXO-SHOM-UBO de 1979)

phénomènes sont très marqués, et les simulations sont, par l'essentiel, crédibles même au niveau des résiduelles.

L'application à l'estuaire de la Seine a mis en évidence une tendance inverse de circulation entre la surface et le fond due aux gradients de salinité assez forts dans la partie orientale de la Baie. On constate ici que l'hypothèse d'écoulement homogène sur la verticale, que l'on fait souvent pour les zones littorales à fort courant de marée, est schématique, en particulier pour la circulation résiduelle.

D'une manière générale ce modèle vertical nous apparaît comme un outil relativement simple et commode pour fournir une première approche des gradients verticaux de vitesse.

## V - CONCLUSION

Nous avons exposé au long de ce rapport, les bases théoriques et les aspects numériques de l'ensemble des modèles mathématiques de l'estuaire de la Seine, construits dans le cadre du SAUM.

Pour résumer, rappelons que ces modèles calculent :

- . les niveaux d'eau instantanés dans tout l'estuaire depuis le parallèle d'Antifer et le méridien de Ouistreham, jusqu'au barrage de Poses, ;
- . les courants exprimés par leur valeur ponctuelle  $\vec{V}(x,y,z,t)$  et par leur valeur moyenne sur la hauteur d'eau  $\vec{V}(x,y,t)$  dans la zone extérieure au chenal de navigation, par leur valeur moyenne sur la largeur ( $\vec{V}(x,z,t)$ ) dans le chenal de navigation et l'estuaire intérieur jusqu'à La Mailleraye, par leur valeur moyenne dans une section de l'estuaire entre La Mailleraye et Poses ( $\vec{V}(x,t)$ ) ;
- . les teneurs en substances dissoutes exprimées par leur valeur moyenne sur la verticale dans l'estuaire extérieur ( $C(x,y,t)$ ) ; par leur valeur moyenne sur la largeur dans l'estuaire moyen ( $C(x,z,t)$ ), et leur valeur moyenne sur une section de l'estuaire dans le secteur amont ( $C(x,t)$ ). ;
- . les sollicitations au transport total sur la hauteur d'eau des sédiments sableux dans tout l'estuaire ( $Q_s(x,y,t)$ ) ;
- . les concentrations et les flux de sédiments fins transportés en suspension dans l'estuaire moyen, exprimés par leur valeur moyenne sur la largeur ( $C_s(x,z,t)$ ).

Ces simulations peuvent être effectuées pour toutes conditions fluviales et marines, passées présentes, ou futures, sans recours à aucune expérimentation en nature, à l'exception du calcul des sédiments fins en suspension qui font appel à la composition du fond, sans pouvoir la reproduire sur des durées importantes.

Ces modèles concernent des valeurs quasi-instantanées (moyennes sur des intervalles de temps de l'ordre de la minute, et toute opération d'intégration des résultats sur une durée importante, telle que la période de la marée, pour en extraire les composantes "résiduelles" doit être menée avec beaucoup de prudence. Une part importante de cette imprécision des grandeurs résiduelles tient à la connaissance insuffisante des conditions aux limites.



Par ailleurs, les pas d'espace adoptés (un kilomètre sur les axes x, y et 1 mètre sur l'axe z) interdisent de reproduire des phénomènes de faibles dimensions, tels les panaches de dilution à proximité d'un émissaire. Ce dernier cas peut être traité par construction d'un sous modèle local, de maille plus petite, ou bien en séparant les effets de l'advection des effets de diffusion qui peuvent être abordés par d'autres méthodes.

Tous ces modèles ont été écrits, pour l'essentiel, en fonction de la connaissance de la dynamique de l'estuaire lors du début des études du SAUM (1977). Ils forment un ensemble cohérent, et en dehors de l'exercice de style qu'à représenté leur mise au point, ils devraient contribuer à la fois par une meilleure compréhension des phénomènes actuels (d'une manière complémentaire aux observations *in situ*) et par les possibilités de prévision qu'ils offrent à mieux connaître et à mieux tirer parti de l'estuaire de la Seine.

Les observations scientifiques faites au long de cet exposé l'ont été essentiellement dans le but d'illustrer les possibilités offertes par cette panoplie de modèles, ils ne constituent pas une véritable étude océanographique des processus physiques.

Parmi les résultats obtenus, citons :

- . la connaissance des courants en tout point d'où se déduisent les caractéristiques courantologiques des divers secteurs : séparation du chenal de jusant et des chenaux de flot ; répercussion du port artificiel d'Antifer ; zone de convergence des courants en jusant et de divergence en flot qui se propage le long du littoral depuis Antifer jusqu'au Havre ; déformation progressive des roses de courant tantôt très allongées, tantôt presque circulaires, et leur évolution en fonction du coefficient de marée, etc...

- . la dynamique à court terme du panache des eaux issues de la Seine, et notamment les conditions de formation d'une occlusion d'eau estuarienne.

- . la sollicitation au transport de sable, inversée près du littoral Sud d'Antifer, dans le chenal de navigation et dans les chenaux latéraux, ainsi que le point de convergence au débouché du chenal.

. la détermination de la structure verticale des courants dans le chenal de navigation, et comme conséquence le mouvement des sédiments fins, et les causes de leur piégeage partiel dans cette zone, alors que les courants résiduels sont des courants de jusant.

La structure tridimensionnelle des courants n'avait à notre connaissance jamais été déterminée avec la vision synthétique procurée par ces modèles. On a notamment mis en évidence ici une sorte de point nodal de densité associé à une circulation estuarienne située au large des digues du chenal de navigation, ce qui est un cas d'estuaire très particulier compte tenu du débit fluvial faible et des marées importantes.

Ces modèles ne sont pas à considérer comme figés, certains résultats obtenus depuis leur mise en chantier, tant par des mesures en nature que par les calculs effectués montrent d'ores et déjà qu'il y aurait lieu de les améliorer sur certains points de détail. On aura donc intérêt à les compléter, à parfaire leur étalonnage, voire à les modifier plus sérieusement en fonction des nouvelles connaissances acquises et des nouveaux aménagements de l'estuaire. Tels qu'ils sont actuellement, ils devraient être utilisés avec bénéfice, tant par la communauté scientifique que par les utilisateurs de l'estuaire, industriels ou "aménageurs". Les auteurs tiennent à la disposition des personnes intéressées, les programmes de calcul et les résultats des simulations.