

Upwelling
 Remote sensing
 Sicily Channel
 Continental shelf
 Statistical analysis
 Remontée d'eau
 Télédétection
 Canal de Sicile
 Plateau continental
 Analyse statistique

Wind-induced upwellings off the southern coast of Sicily

Augusto PICCIONI ^a, Maurizio GABRIELE ^a, Ettore SALUSTI ^b, Enrico ZAMBIANCHI ^c

^a Istituto Superiore di Sanità, Viale Regina Elena 299, 00161 Roma, Italy.

^b Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Dipartimento di Fisica, Università « La Sapienza », Piazzale Aldo Moro, 2, 00185 Roma, Italy.

^c Dipartimento di Fisica, Università « La Sapienza », Piazzale Aldo Moro, 2, 00185 Roma, Italy.

Received 8/1/87, in revised form 15/2/88, accepted 13/4/88.

ABSTRACT

In this note we examine 81 upwelling events recorded in the Sicily Channel, south of Sicily, observable as cold patches in NOAA7 satellite thermographs. Statistical analysis shows that these cold patches are mostly wind-generated events, occurring three days after a strong alongshore wind has blown over the area. These satellite images are compared with historical data and *in situ* hydrographic measurements.

Oceanol. Acta, 1988, **11**, 4, 309-314.

RÉSUMÉ

Upwellings dus au vent au large de la côte méridionale de Sicile

81 remontées d'eau ont été observées dans le canal de Sicile grâce à leurs traces froides sur les thermographies du satellite NOAA 7.

L'analyse statistique montre que ces phénomènes sont, pour la plupart, engendrés par le vent; ils se produisent trois jours après qu'un fort vent ait soufflé sur cette région le long de la côte.

Les images satellitaires sont comparées aux données historiques et aux mesures hydrologiques *in situ*.

Oceanol. Acta, 1988, **11**, 4, 309-314.

INTRODUCTION

In recent years a considerable amount of oceanic information has become available thanks to satellite imagery. As regards Italian waters, a striking SAR image of the Strait of Messina is discussed by Alpers and Salusti (1983). Where thermal imagery is concerned, Crepon and Wald (1982) studied eddies and meanders appearing in the Ligurian Sea; Salusti and Santoleri (1984) examined the turbulent variability of eddies and meanders around Cape Corso; Bohm and Salusti (1984) and Bohm *et al.* (1986) studied the cold patch observed in the Strait of Messina; Salusti and Travaglioni (1986) examined large vortices south of the Gulf of Squillace; further East, Bohm *et al.* studied the coastal current around Santa Maria di Leuca (1986) while the Adriatic

Sea has been studied by Barale *et al.* (1985). Of all the most striking effects observable in Italian waters, only the cold patches appearing along the southern coast of Sicily remained to be examined. These are the subject of the present work.

In this note, we first present the results of a statistical analysis which yields a correlation between a set of upwelling events observed in satellite images south of Sicily with alongshore zonal winds blowing in the same area, three days before the upwellings. We then discuss as an example an event observed both from the satellite images and *in situ*. In addition, we show the presence of some features (e.g. a narrow alongshore cold front in the Gulf of Gela) which may deserve more systematic study in the future.

STATISTICAL CORRELATION OF UPWELLINGS WITH METEOROLOGICAL DATA

From an example of upwelling west of Sicily examined through CTD casts by Salusti and Zambianchi (1985), it was known that some days' delay between wind and upwelling is to be expected. We thus examined two years of coastal upwelling data from NOAA7, namely 1983 and 1984 (thanks to the collaboration of the Centre de Météorologie Spatiale, Lannion). "Upwelling" is defined as a patch of cold surface water, *i.e.* the trace of cold water rising from the bottom to replace the warmer surface layer if its spatial dimensions are of the order of 30 km and the temperature jump 0.5-1°C. Obviously thermal imagery can show a cold patch only if the sky is clear and consequently only a particular kind of observation can be obtained by thermal satellite imagery.

For this study, 34 upwelling events between 29 June and 25 November 1983 have been studied. One isolated event was seen on 15 January 1984, and 47 events were examined between April and October 1984 (Fig. 2). Since the relation of upwelling to winds is qualitatively well established, we made a statistical analysis of the above-mentioned events in relation to the winds blowing over the Sicilian coast, namely those measured at the Stations of Trapani Birgi, Gela and Cozzo Spadaro (by courtesy of the Italian Air Force Meteorological Service). Each of these stations carries out eight daily measurements. The initial physical assumption was that the most important parameter was the one-day averaged wind; we then measured wind strength and direc-

tion respectively one, two, three, four and five days before the upwelling. It transpired that the clearest correlation was associated with a time delay of three days (we performed a Wilcoxon non parametric test in its Mann-Whitney form, see Siegel, 1956). In view of the non-Gaussian distribution of the parameter values, non-parametric statistical tests were performed. With the Mann-Whitney test (a non-parametric variance analysis) we tested the differences among the sampling stations. With the Wilcoxon matched-pairs signed-ranks test we tested the correlation between meteorological parameters and presence/absence of the upwelling. The difference between Trapani Birgi and Gela Stations is statistically highly significant (the probability *p* that the correlation should be random is $<.001$) as well as that between Trapani Birgi and Cozzo Spadaro ($p < .003$), while there is no statistical difference between the Gela and Cozzo Spadaro Stations. It should be pointed out, however, that the Trapani Birgi winds are essentially orthogonal to those of Gela and Cozzo Spadaro. This is probably due to the different orography, involving a local modification of wind direction and intensity. On the other hand, the Trapani Birgi Station appears to be the least noisy, and in some sense could be considered the most predictive station for the upwelling phenomena (M. Capaldo, priv. comm.).

Table 1 reports the 95% and 99% "exact" confidence limits (Geigy Scientific Tables, 1982) of the upwelling frequency *P* when the resulting winds come from the northern (Trapani Birgi) or the southern (Gela and Cozzo Spadaro) sectors. With the confidence limits of

Figure 1 a

Strength and direction of winds (one-day averaged) three days before the upwelling event, as measured on the meteorological stations of southern Sicily for the year 1983 (by courtesy of Italian Air Force Meteorological Service).

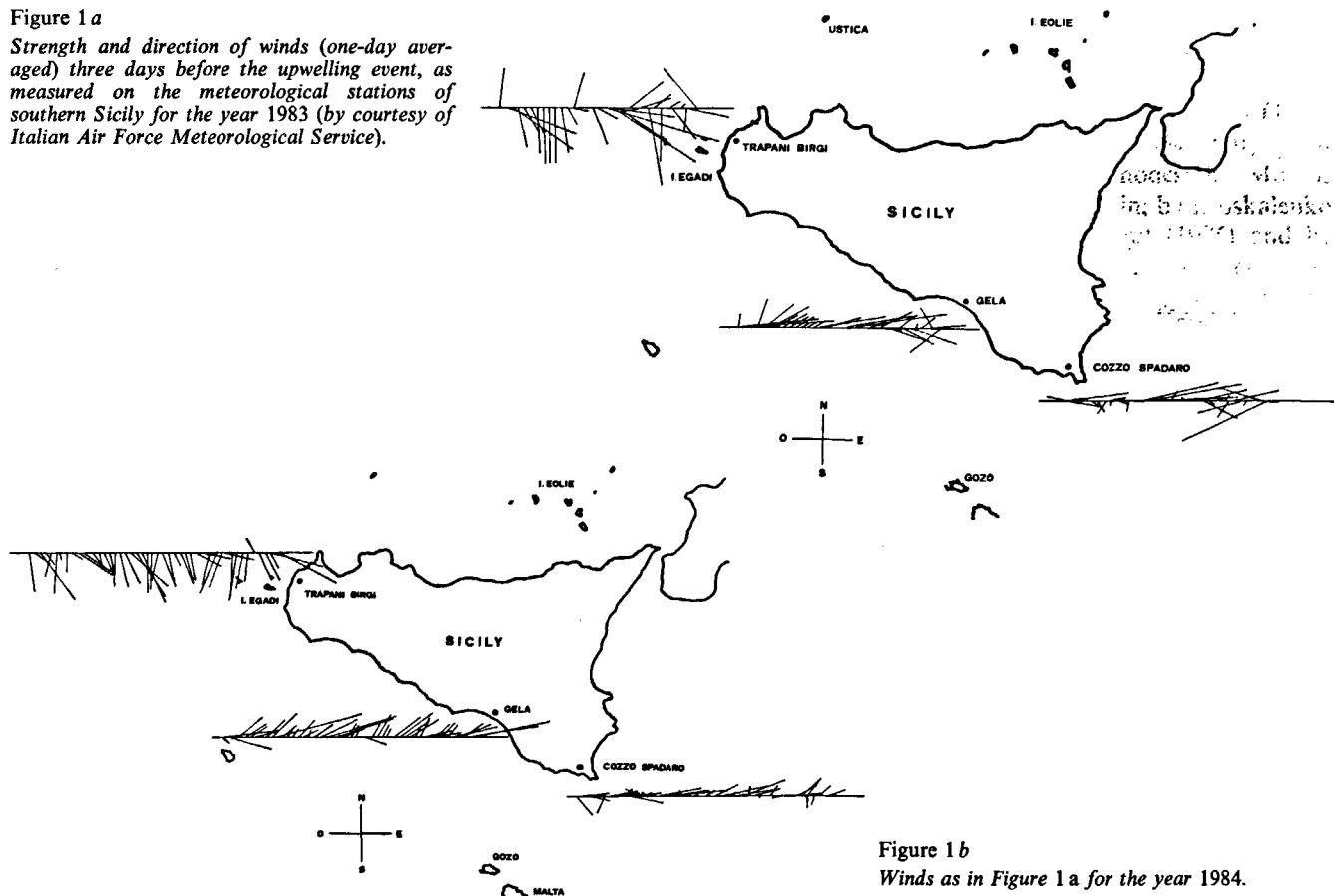


Figure 1 b
Winds as in Figure 1 a for the year 1984.

Table 1

Exact confidence limits of the upwelling frequency P (Wilcoxon non parametric test in its Mann-Whitney form; see Geigy Tables, 1982).

Stations	P	95%	99%
Trapani Birgi	89.02	80.18-94.86	77.22-96.06
Gela	90.24	81.68-95.69	78.78-96.78
Cozzo Spadaro	68.29	57.08-78.13	53.67-80.73

Table 2

Day and GMT time of NOAA7 satellite passages over Italy from 17 to 26 July 1983 (see Fig. 2).

Date	Orbita	Time (TU)
17-07-1983	10 640	0206
18-07-1983	10 654	0154
19-07-1983	10 668	0441
20-07-1983	10 682	0129
21-07-1983	10 696	0150
23-07-1983	10 725	0234
24-07-1983	10 739	0221
26-07-1983	10 767	0157

the frequencies we are able to predict the presence of an upwelling with an uncertainty of 5 or 1%. Also the Gela Station could be considered predictive. On the other hand, the Cozzo Spadaro Station, which shows a lower frequency in the wind-upwelling relationship, is not reliable for any kind of upwelling prediction.

Figures 1a and 1b show the daily mean of wind-velocity vectors as measured three days before an upwelling event was observed in NOAA7 thermal images. Most of these wind data clearly show that if there is an eastward wind at Gela or Cozzo Spadaro or a southward wind in Trapani Birgi, then after three days an upwelling is likely to be observed off the southern coast of Sicily (Fig. 2, Tab. 2).

Our observations also point another interesting phenomenon: the upwelling event is first seen south of Trapani and then moves eastward along the Sicilian coast. Figure 2 shows a very clear sequence of upwelling images showing that the event begins south of Trapani and thereafter evolves towards the Eastern coast of Sicily.

It must be stressed that the upwelling very rarely affects the Gulf of Gela, which constitutes almost a barrier to the upwelling extension along the Sicilian coast. In spite of this, the upwelling evolves eastward along this boundary. Also of interest is a cold water front along the Gulf of Gela, probably related to different trends in the bathymetry of the gulf, which may be associated with a westward internal current (D. Levi, priv. comm., 1986) or with a source of cold fresh water.

HYDROLOGICAL MEASUREMENTS PERFORMED DURING AN UPWELLING EVENT

After discussing the correlation between meteorological configuration and upwelling phenomena, we will analyse an event directly observed by means of hydrological measurements between 29 July and 12 August 1985. In the summer of 1985 the Istituto di Tecnologia della Pesca of Mazara del Vallo, together with the Depart-

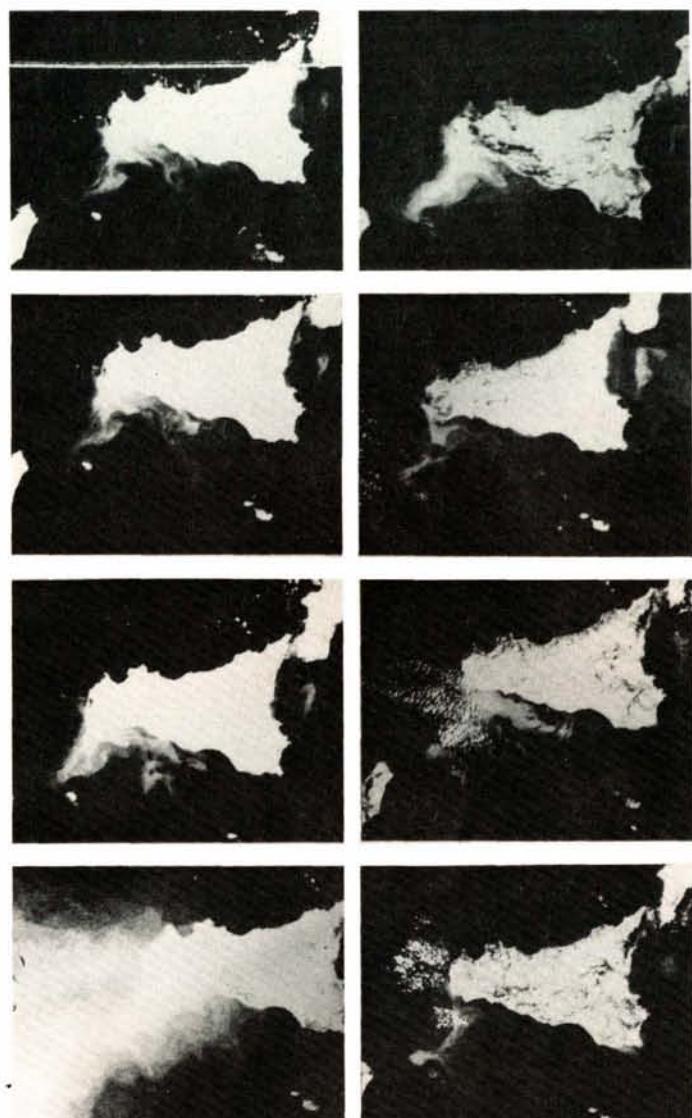


Figure 2

Set of thermal images NOAA7 referring to an eight-day upwelling (supplied by Centre de Météorologie Spatiale, Lannion).

ment of Physics of the University of Rome "La Sapienza", organized the oceanographical cruise "Greta '85", to study the hydrology of the Sicily Channel.

On the evening of 5 August, a rapid descent of cold air onto the western Mediterranean Sea gave rise to a cyclonic circulation over northern Italy, which was followed by increased atmospheric pressure over the Golfe du Lion. This kind of meteorological evolution frequently occurs over the western Mediterranean. It induces strong winds from W-NW (Satmer, 1985), in our case blowing uninterruptedly for almost 30 hrs over the southern coasts of Sicily (see Table 3, by courtesy of the Italian Air Force Meteorological Service).

The Sicily Channel in summer can legitimately be schematized as a two-fluid system (with densities ρ and ρ' , and depths h and h'). The action of a wind blowing parallel to the coast gives rise to a surface coastal jet, oriented alongshore; its intensity decreases as the distance from the coast increases, until it actually disappears when this distance is 2 or 3 times the Rossby internal deformation radius R , where

Table 3

Wind direction and velocity data measured at Trapani and Gela airports during the period relative to the cruise "Greta'85". Velocities are expressed in knots and directions are measured clockwise starting from the North.

Trapani			
GMT time	05/08/85 DD FF	06/08/85 DD FF	07/08/85 DD FF
03.00	00 00	150 12	300 22
06.00	00 00	150 14	310 21
09.00	350 08	160 23	300 23
12.00	360 15	170 20	290 20
15.00	360 13	200 12	310 19
18.00	10 07	280 12	320 12
21.00	00 00	280 20	330 06
GMT time	08/08/85 DD FF	09/08/85 DD FF	10/08/85 DD FF
03.00	00 00	00 00	00 00
06.00	00 00	00 00	00 00
09.00	330 06	180 05	00 00
12.00	320 07	210 15	250 08
15.00	320 08	210 09	290 05
18.00	350 06	180 03	00 -
21.00	00 00	00 00	00 -
 Gela			
GMT time	05/08/85 DD FF	06/08/85 DD FF	07/08/85 DD FF
00.00	-	-	270 12
03.00	--	--	290 10
06.00	--	--	280 05
09.00	170 03	170 04	240 20
12.00	240 03	--	250 22
15.00	220 03	230 05	250 25
18.00	--	220 11	270 20
21.00	--	250 11	350 12
GMT time	08/08/85 DD FF	09/08/85 DD FF	10/08/85 DD FF
00.00	320 02	--	--
03.00	330 05	--	--
06.00	330 02	--	90 02
09.00	240 11	160 03	--
12.00	240 17	200 04	200 04
15.00	240 14	200 03	200 04
18.00	230 12	--	--
21.00	--	--	--

$$\left(R = \frac{1}{f} \sqrt{g \frac{\Delta p}{\rho} \frac{hh'}{h+h'}} \approx 6 \text{ Km} \right).$$

At greater distances from the coast, the joint action of wind and Coriolis force over the coastal jet causes a

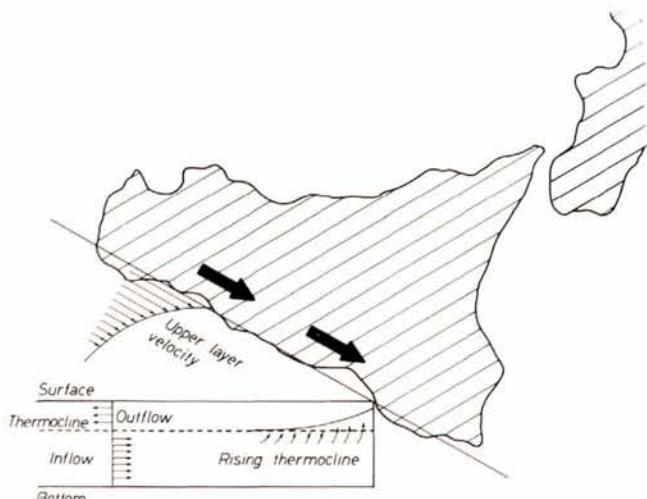


Figure 3

Graphical schematization of an upwelling along the southern coast of Sicily, induced by a W-NW wind (adapted from Csanady, 1975).

displacement of the surface water out to sea. This coastal loss of surface water is balanced by rising water from the deeper layer. The final effect, noticeable mainly near the coast, consists in a rise in the interface between the two layers and consequently in a cooling of the coastal surface water (Fig. 3) that is particularly noticeable in thermal satellite imagery.

This is precisely the conclusion to be drawn from the analysis of the "Greta'85" cruise data: the NOAA7 images taken before and after the long gust of wind clearly show the degree and extent of the surface cooling due to the upwelling (the thermographs of the western Mediterranean on 5 and 8 August 1985 are shown in Figures 4 and 5, by courtesy of Centre de Météorologie Spatiale, Lannion, France). Since the stations were planned for biological purposes, they were spread over a rather wide sea area (Fig. 1). The profiles obtained before the gale are very similar to one another, while they are quite different from those measured later, which also form a rather homogeneous set. In order to provide a clearer picture in Figure 6 we compare the average temperature profiles versus depth of the casts performed before and after the Mistral. In Table 4 we give the main characteristics of the hydrological data. It is evident that the difference in temper-

Figure 4

Thermograph of western Mediterranean Sea on 5 August 1985 (NOAA9 satellite, by courtesy of Centre de Météorologie Spatiale, Lannion).

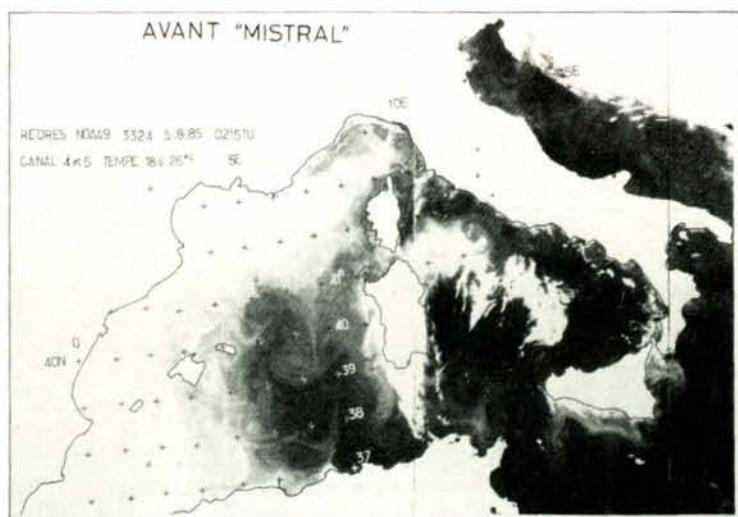


Table 4
Main hydrological characteristics of the stations.

Station	Day	GMT time	h_1	T_{30}	h_2	T_{75}	Bottom depth meters
1 35°32,20'N 12°29,31'E	30.07.85	07 h 40'	30	20.50	20	-	50
2 35°29,01'N 12°21,45'E	30.07.85	11 h 10'	30	19.00	20	-	50
3 35°24,17'N 12°38,07'E	30.07.85	15 h 30'	30	20.25	20	-	50
4 35°30,48'N 12°24,76'E	30.07.85	19 h 40'	40	18.50	175	14.75	250
5 35°24,76'N 13°27,31'E	05.08.85	19 h 00'	30	21.25	200	15.50	250
6 35°33,84'N 13°85,09'E	05.08.85	22 h 20'	40	22.00	325	15.00	400
7 35°30,48'N 14°36,07'E	06.08.85	08 h 00'	50	18.75	300	14.75	400
8 35°17,65'N 15°22,14'E	06.08.85	13 h 10'	40	17.75	200	15.00	300
9 36°40,66'N 14°35,12'E	08.08.85	12 h 40'	25	15.00	20	-	50
10 36°35,10'N 14°36,07'E	08.08.85	15 h 00'	25	15.50	50	14.75	75
11 36°26,89'N 14°25,01'E	08.08.85	22 h 40'	30	17.00	150	14.75	200
12 36°41,08'N 14°14,80'E	09.08.85	07 h 30'	30	16.50	350	15.25	400
13 36°55,90'N 12°41,17'E	09.08.85	11 h 10'	30	16.00	250	14.75	250
14 36°51,89'N 13°54,56'	09.08.85	12 h 00'	40	16.75	300	15.00	400
15 36°46,15'N 13°28,25'E	09.08.85	16 h 40'	30	16.75	200	15.00	250
16 36°57,04'N 12°55,49'E	10.08.85	07 h 40'	20	16.75	20	-	50
18 37°00,91'N 12°00,33'E	10.08.85	22 h 20'	30	19.25	50	14.75	100
19 37°37,43'N 12°22,60'E	11.08.85	08 h 00'	20	15.00	70	14.25	100

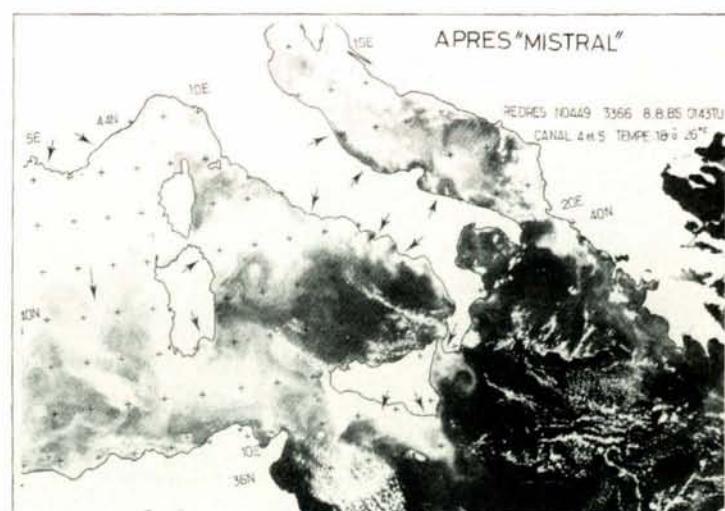


Figure 5
Thermograph of western Mediterranean Sea on 8 August 1985 (NOAA 9 satellite, by courtesy of Centre de Météorologie Spatiale, Lannion).

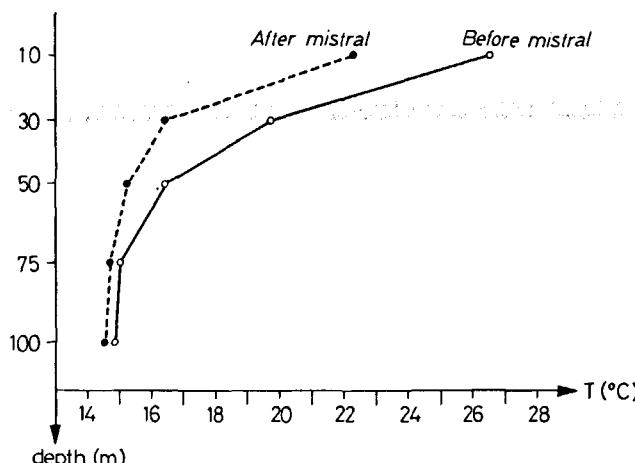


Figure 6
Average temperature versus depth profiles between 10 and 75 m depth.

ature between the two groups of measurements is rather sharp (almost 1.2°C at 50 m depth, corresponding to a 25 m rise in this isotherm line in two days).

CONCLUSIONS

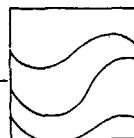
We investigated the intensity and the geographic distribution of patches of cold water observed through satel-

lite thermal imagery in the sea off the southern coast of Sicily (Sicily Channel). We first found a clear relationship between the N-NW wind and the appearance of upwelling phenomena three days later. We also underline the constant presence of a line of cold water along the Sicilian coast, Gulf of Gela. It can reasonably be hypothesized that these constant effects are due to a natural source or to a westward internal current.

We also observed, through CTD casts performed before and after a violent gale (August 1985), that the thermal and halogenetic structure over and off the shelf are different. On the shelf the water is usually colder than off the shelf. The presence of an upwelling leads to a rather irregular rise of the thermocline, which in satellite imagery is shown to begin near the southern coast of Trapani. Its still obscure relation to time and distance offshore is probably strongly influenced by local effects. Its time evolution is also interesting: one would expect that under the influence of the wind, internal Kelvin waves would develop and move clockwise around the Sicilian coast. Instead, such an evolution seems to be prevented by the topographical configuration of the shelf south of the Egadi islands: the upwelling event was actually observed to evolve in the opposite direction. A detailed theoretical discussion ought to take into account, in addition to the topography of the Sicily Channel, its steady and wind induced circulation. Such an analysis, which will be a far from easy task, has been planned for the near future.

REFERENCES

- Alpers W., Salusti E., 1983. Scylla and Charibdis Observed from Space, *J. Geophys. Res.*, **C3**, 1800-1808.
- Barale V., Hendershott M., Malanotte Rizzoli P., 1985. Remotely sensing the Surface Dynamics of the Adriatic Sea, *Deep-Sea Res.*, **31**, 1433-1459.
- Bohm E., Salusti E., 1984. Satellite and Field Observations of Currents on the Eastern Sicilian Shelf, in: *Remote Sensing of Shelf Sea Hydrodynamics*, edited by J.C.J. Nihoul, Elsevier, Amsterdam, 51-68.
- Bohm E., Salusti E., Travaglioni F., 1986. Satellite and Field Observations Shelf Currents off Santa Maria di Leuca, Southern Italy, *Oceanol. Acta*, **9**, 1, 41-46.
- Bohm E., Magazzu' G., Wald L., Zoccolotti M. L., 1987. Coastal currents on the Sicilian shelf south of Messina, *Oceanol. Acta*, **10**, 2, 137-142.
- Crepon M., Wald L., Monget J. M., 1982. Low frequency waves in the Ligurian Sea during December 1977 from Satellite Data NOAA5, *J. Geophys. Res.*, **87**, 595-600.
- Csanady G. T., 1977. The Coastal Jet Conceptual Model in the Dynamics of Shallow Seas, in: *The Sea. Ideas and Observations on Progress in the Study of the Sea. Vol. 6: Marine Modelling*, edited by E. Goldberg, I. McCave, J. O'Brien and J. Steele, Wiley Interscience, 117-144.
- Geigy Scientific Tables, 1982. Vol. II, 8th Ed., Basle, SWI, 89-102.
- Marullo S., Salusti E., Viola A., 1985. Observations of a small scale baroclinic eddy in the Ligurian Sea, *Deep-Sea Res.*, **32**, 215-222.
- Salusti E., Santoleri L., 1984. A von Karman Wake in the Ligurian Sea, *Boll. Ocean. Teor. Appl.*, **2**, 275-279.
- Salusti E., Zambianchi E., 1985. Field observations of the Onset of an Upwelling on the Western Coast of Sicily during September 1984, *Boll. Ocean. Teor. Appl.*, **3**, 299-308.
- Salusti E., Travaglioni F., 1986. On the marine eddy off Squillace (Calabria) in June, *Riv. Meteorol. Aeronaut.*, **46**, 1-2, 47-53.
- Satmer, 1985. Bulletin Mensuel du Centre de Météorologie Spatiale, Lannion, France, **24**, 13.
- Siegel S., 1956. *Nonparametric Statistics*, Mc. Graw-Hill Co, N.Y., 98-107.



Passage d'une onde interne solitaire sur un seuil d'après les modèles analytiques de Djordjevic-Redekoppe et de Kabbaj

Ondes internes Seuil
Onde solitaire Équation de Korteweg-De Vries
Théorie de l'eau peu profonde Internal wave Sill
Solitary wave Korteweg-De Vries equation Shallow water theory

Abdelhak KABBAJ ^a, Zhang XIURHANG ^b

^a Laboratoire d'Océanographie, École Normale Supérieure, Takaddoum, Rabat, Maroc.

^b Institute of Physical Oceanography, College of Oceanography of Shangdong Qing-Dao, People's Republic of China.

Reçu le 4/6/87, révisé le 18/3/88, accepté le 2/5/88.

RÉSUMÉ

Dans un océan de densité stratifiée et de profondeur variable, la fission d'une onde interne solitaire est décrite en introduisant l'équation de Korteweg-De Vries avec des coefficients variables. Nous comparons deux modèles analytiques, celui de Djordjevic et Redekoppe (1978) et celui de Kabbaj (1985), qui permettent d'étudier l'évolution du passage de l'onde interne sur un seuil. L'apport du modèle de Kabbaj est la possibilité de déterminer complètement l'onde réfléchie, celle-ci n'apparaissant pas dans le modèle de Djordjevic. Quant aux ondes transmises, on constate que les deux modèles conduisent à des résultats pratiquement identiques.

Oceanol. Acta, 1988, 11, 4, 315-321.

ABSTRACT

A solitary internal wave passing over a sill from analytical models of Djordjevic-Redekoppe and Kabbaj

In this paper we describe the fission of an internal solitary wave inserting the Korteweg-De Vries equation with variable coefficients. We compare two analytical models (Djordjevic' and Redekoppe's model and Kabbaj's model) which permit the study of the evolution of the internal wave passing over a sill. Kabbaj's model provides information on the reflection and transmission packets of internal solitons. Djordjevic's model gives only the transmission packet of internal solitons which we compare with Kabbaj's model.

Oceanol. Acta, 1988, 11, 4, 315-321.

INTRODUCTION

Les ondes internes se rencontrent fréquemment dans les milieux stratifiés où la densité n'est pas verticalement homogène. Elles ont souvent de grandes amplitudes, comme l'illustrent les exemples suivants :

- Dans la « Bakin Lake », au Canada, Farmer (1978) a observé des ondes internes de 10 m d'amplitude pour une densité relative de 7‰ et pour des profondeurs moyennes de 17 et 150 m des deux milieux liquides stratifiés.
- Dans la mer d'Andaman, Osborne et Burch (1980) ont observé des ondes internes dont l'amplitude maximale peut atteindre 70 m.
- Chereskin (1983) décrit la génération des ondes internes dans la baie de Massachusetts.

Ces phénomènes internes de grande amplitude sont bien connus des sous-mariniers, leur importance n'est pas moins grande pour la biologie marine, la pêche ou la recherche pétrolière, puisque ces ondes et les caractères qui y sont liés ont des effets notables sur les structures immergées. Au-dessus du plateau continental, il faut tenir compte de la non-linéarité pour accéder à une meilleure connaissance de la propagation des ondes internes dans le milieu océanique.

Le présent travail expose l'étude du passage d'une onde interne au-dessus d'un fond variable, en l'occurrence un seuil.

Nous introduisons l'équation de Korteweg-De Vries pour les ondes internes avec des coefficients variables, ce qui permet de retrouver les résultats de Djordjevic et Redekoppe (1978). Ensuite, l'analyse de Kabbaj (1985),

basée sur la distorsion de la variable horizontale et le temps à partir de la théorie des échelles multiples expliquée par Temperville (1985) permet de résoudre le problème analytique moyennant quelques simplifications.

Enfin les deux modèles sont comparés en les appliquant à la fission d'une onde solitaire lorsque celle-ci passe sur un seuil; ce phénomène est important sur le plan théorique et par son application pratique au milieu marin.

ÉTUDE THÉORIQUE

Les développements présentés ci-dessous, s'inspirant des travaux de Benney (1966), conduisent de façon plus rigoureuse, nous semble-t-il, aux résultats de Djordjevic et Redekoppe (1978; voir aussi Zhang, 1986).

Position du problème

Considérons, dans un océan infini, un liquide pesant stratifié en densité. Nous préciserons chaque fois cette stratification. Le liquide est incompressible, sa viscosité négligeable.

Les longueurs d'ondes « λ » envisagées sont grandes devant la profondeur caractéristique « H » ($\mu = H/\lambda \ll 1$). Cette hypothèse est celle de la théorie de l'eau peu profonde (Germain, 1967). Les amplitudes de nos ondes « A » sont petites devant la profondeur caractéristique $\varepsilon = A/H \ll 1$.

La stratification du liquide est telle que :

$$-\frac{H}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dz} \ll M \ll \varepsilon.$$

Le mouvement est strictement limité à l'intérieur du liquide, il n'y a pas de vitesse verticale à la surface libre et il n'y a pas non plus de vitesse perpendiculaire au fond (approximation de la surface libre rigide, et imperméabilité du fond).

Équation de Korteweg-De Vries (KdV)

Introduisons maintenant un système de densité stratifiée quelconque, dans un océan de profondeur variable. Les équations de continuité, d'incompressibilité et de mouvement pour la fonction de courant :

$$\psi(x, z, t) [u = \psi_x, W = -\psi_z]$$

s'écrivent :

$$\rho_t + \psi_z \cdot \rho_x - \psi_x \cdot \rho_z - \psi_x \cdot \bar{\rho}_z = 0 \quad (2.1)$$

$$(\bar{\rho} + \rho) \cdot (\psi_{zt} + \psi_z \cdot \psi_{xz} - \psi_x \cdot \psi_{zz}) = -p_x \quad (2.2)$$

$$(\bar{\rho} + \rho) \cdot (-\psi_{xt} - \psi_z \cdot \psi_{xx} + \psi_x \cdot \psi_{xz}) = -p_z - (\bar{\rho} + \rho) \cdot g \quad (2.3)$$

avec les conditions aux limites à la surface libre et au fond.

$$-\psi_x|_{z=H} = 0 \quad (2.4)$$

$$-\psi_x|_{z=b(x)} = \psi_z \cdot b_x \quad (2.5)$$

et le mouvement s'annule à l'infini dans le canal.

$$\psi_z(x = \pm \infty) = 0. \quad (2.6)$$

$\bar{\rho} = \bar{\rho}(z)$ est la stratification, $p = (x, z, t)$: la pression, $\rho(x, z, t)$: la perturbation de la densité et g : l'accélération de la gravité (fig. 1).

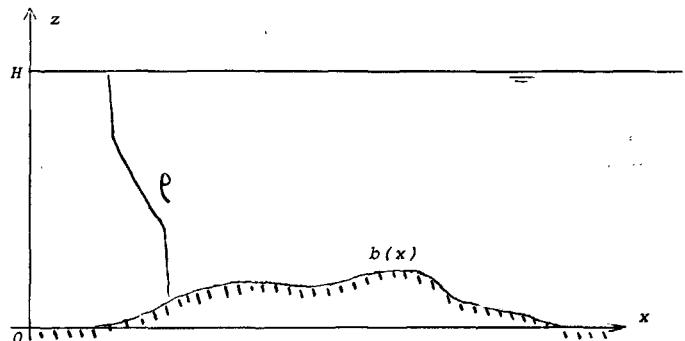


Figure 1

Schéma des ondes internes au fond variable.

Internal waves passing over an irregular bottom.

Ces équations, et les conditions aux limites, peuvent être adimensionnalisées par les changements de paramètres et de variables, en rapportant les distances à la profondeur caractéristique H :

$$x/H = x' \cdot \mu, \quad z/H = z',$$

$$t/\sqrt{H/g} = t' \cdot \mu$$

$$\psi/\sqrt{g \cdot H^3} = \psi', \quad \rho/\rho_0 = \rho',$$

$$\bar{\rho}/\rho_0 = \bar{\rho}', \quad p/\rho_0 \cdot g \cdot H = \int_1^{z'} \bar{\rho}' \cdot dz' + p'.$$

ρ_0 est la densité caractéristique. Ensuite, nous adoptons comme nouvelles variables :

$$\tau = \int^{x'} \alpha(x') dx' - t', \quad \xi = \varepsilon \cdot x', \quad z' = z'$$

où, ε est un petit paramètre, et $\alpha(\xi)$ une fonction inconnue.

Après avoir adimensionnalisé et supprimé les primes par commodité, les équations deviennent :

$$-\rho_t + \varepsilon \cdot \rho_\xi \cdot \psi_z + \alpha \cdot \rho_\tau \cdot \psi_z - \varepsilon \cdot \rho_z \cdot \psi_\xi - \alpha \cdot \rho_z \cdot \bar{\rho}_z = 0 \quad (2.7)$$

$$(\bar{\rho} + \rho) \cdot (-\psi_{zt} + \varepsilon \cdot \psi_z \cdot \psi_{\xi z} + \alpha \cdot \psi_z \cdot \psi_{zz}) - \varepsilon \cdot \psi_\xi \cdot \psi_{zz} - \alpha \cdot \psi_\tau \cdot \psi_{zz} = -\varepsilon \cdot p_\xi - \alpha \cdot p_\tau \quad (2.8)$$

$$(\bar{\rho} + \rho) \cdot [\mu^2 \cdot \psi_{\xi \xi} + \mu^2 \cdot \alpha \cdot \psi_{\tau \tau} + \psi_z \cdot (\varepsilon^{3/2} \cdot z_\xi + \varepsilon^{1/2} \cdot \alpha \cdot z_\tau)^2 \cdot \psi + (\varepsilon^{3/2} \cdot \psi_\xi + \varepsilon^{1/2} \cdot \alpha \cdot \psi_\tau) \cdot (\varepsilon^{3/2} \cdot \psi_{\xi z} + \varepsilon^{1/2} \cdot \alpha \cdot \psi_{\tau z})] = -p_z - \rho \quad (2.9)$$

et les conditions aux limites :

$$\varepsilon \cdot \psi_\xi + \alpha \cdot \psi_t = 0, \quad z=1 \quad (2.10)$$

$$-\varepsilon \psi_\xi - \alpha \psi_t = \varepsilon^2 \cdot \psi_z \cdot B_\xi + \varepsilon \cdot \alpha \psi_z \cdot B_v \quad (2.11)$$

$$z=B \cdot \frac{b}{H}.$$

Adoptons, pour la fonction de courant, la forme suivante : $\psi(\xi, z, t) = \eta(\xi, t) \cdot \Phi(z)$, dont le développement en fonction du petit paramètre ε , de la pression p et de la perturbation de densité ρ s'écrit :

$$\begin{aligned} \psi(\xi, z, t) &= \varepsilon \cdot \psi^{(1)}(\xi, z, t) + \varepsilon^2 \cdot \psi^{(2)}(\xi, z, t) + \dots \\ &= \varepsilon \eta^{(1)}(\xi, t) \cdot \Phi^{(1)}(z) + \varepsilon^2 \cdot \eta^{(2)}(\xi, t) \cdot \Phi^{(2)}(z) + \dots \end{aligned}$$

$$p(\xi, z, t) = \varepsilon \cdot p^{(1)}(\xi, z, t) + \varepsilon^2 \cdot p^{(2)}(\xi, z, t) + \dots$$

$$\rho(\xi, z, t) = \varepsilon \cdot \rho^{(1)}(\xi, z, t) + \varepsilon^2 \cdot \rho^{(2)}(\xi, z, t) + \dots$$

Portons ces expressions dans les équations et les conditions aux limites (2.7 à 2.11).

En développant au premier ordre, nous obtenons :

$$-\rho_t^{(1)} - \alpha \cdot \eta_t^{(1)} \cdot \Phi^{(1)} \cdot \bar{\rho}_z = 0 \quad (2.12)$$

$$-\bar{\rho} \cdot \eta_t^{(1)} \cdot \Phi_z^{(1)} = -\alpha \cdot p_t^{(1)}. \quad (2.13)$$

$$-p_z^{(1)} - \rho^{(1)} = 0. \quad (2.14)$$

Une équation propre de la fonction propre $\Phi^{(1)}$ est obtenue :

$$(\bar{\rho} \cdot \Phi_z^{(1)})_z - \alpha^2 \cdot \bar{\rho}_z \cdot \Phi^{(1)} = 0 \quad (2.15)$$

avec la valeur propre α^2 ; les conditions aux limites :

$$\Phi^{(1)}(z=B) = \Phi^{(1)}(z=1) = 0 \quad (2.16), \quad (2.17)$$

Le développement au second ordre donne les équations suivantes :

$$\begin{aligned} -\rho_t^{(2)} + \alpha \cdot \rho_t^{(1)} \cdot \psi_z^{(1)} - \alpha \cdot \rho_z^{(1)} \cdot \psi_t^{(1)} \\ - \bar{\rho}_z \cdot \psi_\xi^{(1)} - \alpha \cdot \bar{\rho}_z \cdot \psi_t^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} -\bar{\rho} \cdot \psi_{zt}^{(2)} - \rho^{(1)} \cdot \psi_{zt}^{(1)} + \alpha \cdot \bar{\rho} \cdot \psi_z^{(1)} \cdot \psi_{tz}^{(1)} \\ - \alpha \cdot \bar{\rho} \cdot \psi_t^{(1)} \cdot \psi_{zz}^{(1)} = -p_\xi^{(1)} - \alpha p_t^{(2)} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\frac{\mu^2}{\varepsilon} \cdot \alpha^2 \cdot \bar{\rho} \cdot \psi_{tt}^{(1)} = -\alpha \cdot p_z^{(2)} - \rho^{(2)}. \quad (2.20)$$

En éliminant $p^{(2)}$, $p^{(1)}$, $\rho^{(2)}$ et utilisant : $\psi^{(1)} = \eta^{(1)} \cdot \Phi^{(1)}$, $\psi^{(2)} = \eta^{(2)} \cdot \Phi^{(2)}$, nous obtenons l'équation :

$$\begin{aligned} \eta_t^{(2)} \cdot ((\bar{\rho} \cdot \Phi_z^{(2)})_z - \alpha^2 \cdot \bar{\rho}_z \cdot \Phi^{(2)}) \\ = (\alpha \cdot \eta^{(1)} \cdot \bar{\rho}_z \cdot \Phi^{(1)} + \alpha \cdot \eta_\xi^{(1)} \cdot \bar{\rho}_z \cdot \Phi^{(1)} \\ + \eta^{(1)} \cdot \eta_t^{(1)} (\alpha \cdot (\bar{\rho}_z \cdot \Phi^{(1)} \cdot \Phi_z^{(1)})_z \\ + \alpha \cdot (\bar{\rho} \cdot \Phi_z^{(1)} \cdot \Phi_z^{(1)})_z - \alpha \cdot (\bar{\rho} \cdot \Phi^{(1)} \cdot \Phi_{zz}^{(1)})_z \\ + \alpha^3 \cdot \bar{\rho}_z \cdot \Phi_z^{(1)} \cdot \Phi_z^{(1)} - \alpha^3 \cdot (\bar{\rho}_z \cdot \Phi^{(1)})_z \cdot \Phi^{(1)} \\ - \mu^2 / \varepsilon \cdot \alpha^2 \cdot \bar{\rho} \cdot \Phi^{(1)}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

avec les conditions aux limites :

$$\Phi_z^{(2)}(z=1) = 0 \quad (2.22)$$

$$\eta_t^{(2)} \cdot \Phi_z^{(2)}(z=B) = -\eta^{(1)} \cdot \Phi_z^{(1)} \cdot B_v. \quad (2.23)$$

Multiplions l'équation (2.21) par $\Phi^{(1)}(z)$ et intégrons en z de $z=B$ à $z=1$, elle devient :

$$S_0 \cdot \eta^{(1)} + \eta_\xi^{(1)} + S_1 \cdot \eta_t^{(1)} + S_z \cdot \eta_{tt}^{(1)} = 0 \quad (2.24)$$

avec :

$$S_0 = \frac{-\alpha_\xi}{2\alpha},$$

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{3}{2} \cdot \alpha^2 \cdot \frac{\int_B^1 \bar{\rho} \cdot (\Phi_z^{(1)})^3 dz}{\int_B^1 \bar{\rho} \cdot (\Phi_z^{(1)})^2 dz}, \\ S_2 &= -\frac{\alpha^3}{2} \cdot \frac{\mu^2}{\varepsilon} \cdot \frac{\int_B^1 \bar{\rho} \cdot (\Phi_z^{(1)})^2 dz}{\int_B^1 \bar{\rho} \cdot (\Phi_z^{(1)})^2 dz}. \end{aligned}$$

Introduisons une fonction « ζ » ($\eta^{(1)}(\xi, t) = \sqrt{\alpha}(\xi) \cdot \zeta(\xi, t)$) dans l'équation (2.24), qui devient :

$$\zeta_\xi + \sqrt{\alpha} \cdot S_1 \cdot \zeta \cdot \zeta_t + S_2 \cdot \zeta_{ttt} = 0 \quad (2.26)$$

C'est une équation du type KdV pour les ondes internes avec coefficients variables, où $1/\alpha(\xi) = C_0(\xi)$ est la célérité de l'onde interne.

Si nous appliquons (2.26) à un système de bicouche avec des épaisseurs h_1 et $h_2 = h_2(\xi)$ et des densités ρ_1 et ρ_2 respectivement, les coefficients deviennent :

$$C_0 = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{\Delta \rho}{\rho}} g \cdot \frac{h_1 \cdot h_2(\xi)}{h_1 + h_2(\xi)} \quad (2.27)$$

$$\frac{S_1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{3}{2C_0^{3/2}} \cdot \frac{h_1 - h_2(\xi)}{h_1 + h_2(\xi)} \quad (2.28)$$

$$S_2 = \frac{1}{6C_0^3} \cdot h_1 \cdot h_2(\xi), \quad (2.29)$$

et l'on retrouve alors en (2.26) l'équation de Djordjevic et Redekoppe (1978). Quand $h_2(\xi) = h_2 = \text{constant}$, nous retrouvons l'équation de KdV classique pour l'onde interne :

$$\begin{aligned} \eta_\xi^{(1)} + \frac{3}{2} \cdot \frac{h_1 - h_2}{h_1 \cdot h_2 \cdot C_0} \cdot \eta \cdot \eta_t \\ + \frac{h_1 \cdot h_2}{6C_0^3} \cdot \eta_{ttt} = 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

La signification du coefficient S_0 est intéressante dans le cas d'un système de bicouche. S_0 est de la forme :

$$S_0 = \frac{\alpha_\xi}{2\alpha} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{h_1 + 2h_2}{h_1 + h_2} \cdot \frac{dh_2}{d\xi}.$$

Si l'onde monte sur un seuil, la valeur de S_0 est toujours positive, tant pour une onde de surélévation ($h_1 > h_{2d} > h_{2s}$) que pour une onde de dépression ($h_1 < h_{2s} < h_{2d}$). En effet, si $h_1 < h_{2d}$ avant le seuil, ce qui est le cas pour une onde de dépression, on a donc $S_0 < 0$, ce qui conduit à une augmentation à η_ξ , c'est-à-dire que l'amplitude de l'onde diminue lors du passage au-dessus du seuil. Et si $h_1 > h_{2d}$ avant le seuil, ce qui est le cas d'une onde de surélévation, on a également $S_0 > 0$ et par suite l'onde décroît également lors du passage au-dessus du seuil (fig. 2).

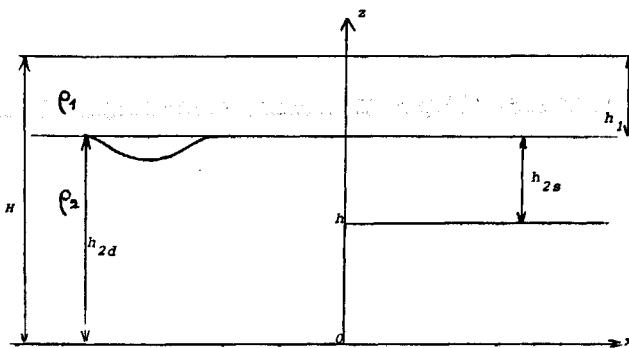


Figure 2
Schéma des ondes internes avec une marche.
Internal waves passing over a sill.

Dans tous les cas, l'équation (2.26) permet de calculer l'évolution du passage de l'onde interne sur un seuil, si les vitesses verticale et horizontale satisfont à la relation :

$$\frac{u}{w} \Big|_{h(x)} \simeq O(\varepsilon)$$

sur le fond d'un canal.

Le nombre N de solitons transmis sur le seuil est calculé par Johnson (1973), Whitham (1974), et Djordjevic et Redekoppe (1978) :

$$\frac{N(N+1)}{2} = \left[\frac{h_{2s}}{h_{2d}} \right]^{-5/4} \cdot \frac{h_{2s} - h_1}{h_{2d} - h_1} \times \left[\frac{h_1 + h_{2d}}{h_1 + h_{2s}} \right]^{3/4}. \quad (2.31)$$

Rappel du calcul analytique de Kabbaj (1985)

Les hypothèses que nous avons posées dans le paragraphe précédent restent valables. Dans le bassin océanique sont superposés deux fluides parfaits non miscibles, de masses volumiques distinctes. La brusque rupture du fond entre la plaine abyssale et le plateau continental est schématisée ici par une marche, ce qui n'est pas limitatif en théorie de l'eau peu profonde. Cette simplification suppose que la longueur caractéristique de l'onde soit très grande vis-à-vis de la largeur du talus continental. Le domaine est partagé en quatre sous-domaines (fig. 2).

La condition dynamique se limite à la condition d'irrotationnalité, ce qui nous permet d'introduire le potentiel des vitesses ($i=1, 2, 3, 4$), tel que $\nabla \cdot \vec{\phi}^{(i)} = \vec{V}^{(i)}$ vérifie l'équation de continuité $\nabla^2 \phi^{(i)} = 0$ et la condition de Bernoulli :

$$\frac{P^{(i)}}{\rho^{(i)}} = \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial z} \right)^2 \right] + g \cdot z + C_i(t) \quad (2.33)$$

où $C_i(t)$ est une fonction arbitraire de t .

Déterminons le potentiel de vitesse $\phi^{(i)}(x, z, t)$ et la dénivellation de l'interface $f(x, t)$, satisfaisant aux conditions aux limites suivantes :

Sur le fond, il y a imperméabilité :

$$V^{(2)} = \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (2.34a)$$

$$U^{(2)} = \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x} \Big|_{0 \leq z \leq h, x=0} = 0 \quad (2.34b)$$

$$V^{(4)} = \frac{\partial \phi^{(4)}}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0. \quad (2.34c)$$

Il y a continuité des pressions de part et d'autre de l'interface $z=f(x, t)$, qui est, *a priori*, inconnue; la non-miscibilité des fluides s'écrit :

$$\rho_1 \cdot G^{(1)} = \rho_2 \cdot G^{(2)}, \quad x \leq 0 \quad (2.35a)$$

$$\rho_1 \cdot G^{(3)} = \rho_2 \cdot G^{(4)}, \quad x \geq 0 \quad (2.35b)$$

$$\frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \quad (2.35c)$$

avec :

$$G^{(i)} = \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial z} \right)^2 \right] + g \cdot f(x, t) + C_i(t). \quad (2.35d)$$

L'absence de mouvement vertical à la surface libre traduit le fait que la dénivellation de la surface libre de l'ordre de $\Delta\rho/\rho$ est physiquement petite par rapport à celle de l'interface. Cette approximation est légitime, puisque la densité relative est de l'ordre de 1‰ et 1% dans la nature et en laboratoire respectivement.

Au bord de la marche, $x=0$, en raccordant les champs de vitesses :

$$\phi^{(1)} = \phi^{(3)}, \quad \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial \phi^{(3)}}{\partial x}; \quad x=0 \quad (2.36a)$$

$$\phi^{(2)} = \phi^{(4)}, \quad \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial \phi^{(4)}}{\partial x}; \quad x=0, \quad z \geq h \quad (2.36b)$$

à l'infini, en amont et en aval, règne le repos :

$$\phi^{(i)}(x = \pm \infty) = 0; \quad f(\pm \infty) = h_{2d} \quad (2.37)$$

d'où les fonctions arbitraires $C_i(t)$:

$$C_1 = C_3 = -g \cdot H \quad (2.38a)$$

$$C_2 = C_4 = -g \cdot \left(h_{2d} + \frac{\rho_1}{\rho_2} (H - h_{2d}) \right). \quad (2.38b)$$

Moyennant la distorsion de la variable horizontale et temporelle à l'aide du petit paramètre $\mu \ll 1$, caractérisant les ondes longues :

($\alpha = \mu \cdot x$, $\beta = z$, $\tau = \mu \cdot t$),

l'équation et les conditions aux limites deviennent :

$$\mu^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi^{(i)}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \phi^{(i)}}{\partial \beta^2} = 0 \quad (2.39)$$

— sur le fond :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \beta} \Big|_{\alpha \leq 0, \beta=0} &= 0, & \frac{\partial \varphi^{(4)}}{\partial \beta} \Big|_{\alpha \geq 0, \beta=h} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0, 0 \leq \beta \leq h} &= 0 & (2.40 a, b, c) \end{aligned}$$

— à l'interface :

$$\rho_1 \cdot G^{(1)} = \rho_2 \cdot G^{(2)}, \quad \alpha \leq 0 \quad (2.41 a)$$

$$\rho_1 \cdot G^{(3)} = \rho_2 \cdot G^{(4)}, \quad \alpha \geq 0 \quad (2.41 b)$$

$$\frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \beta} = \mu \cdot \frac{\partial f}{\partial \tau} + \mu^2 \cdot \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha} \quad (2.41 c)$$

$$\begin{aligned} G^{(i)} &= \mu \cdot \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left(\mu^2 \left(\frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \alpha} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \beta} \right)^2 \right) + g \cdot f(\alpha, \tau) + C_i \end{aligned} \quad (2.41 d)$$

— à la surface libre :

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \alpha} \Big|_{B=H} = 0; \quad \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial \alpha} \Big|_{B=H} = 0. \quad (2.42 a, b)$$

L'amplitude de la dénivellation de l'interface, *a priori* petite par rapport aux profondeurs, permet d'écrire le potentiel au voisinage de l'interface sous la forme d'un développement de Taylor :

$$\begin{aligned} \varphi^{(i)}(\beta=f(\alpha, \tau)) &= \varphi^{(i)}(\beta=h_{2d}) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f(\alpha, \tau) - h_{2d})^n}{n!} \cdot \frac{\partial^n \varphi^{(i)}}{\partial \beta^n} \Big|_{\beta=h_{2d}}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Remarquons que la méthode de l'eau peu profonde consiste à chercher des solutions développables en séries entières en μ , en mettant en évidence les termes qui expriment les perturbations locales dues à la présence de la marche. Nous sommes donc amenés à chercher des solutions de la forme :

$$\begin{aligned} \varphi^{(i)}(\alpha, \beta, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \mu^n \\ &\times \varphi_{n,m}(\alpha, \beta, \tau) \cdot e^{-m x_i(\alpha)/\mu}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$i = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned} f(\alpha, \tau) - h_{2d} &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \mu^n \\ &\times f_{n,m}(\alpha, \tau) \cdot e^{-m x_k(\alpha)/\mu}, \\ k &= \begin{cases} 2, & \alpha \leq 0 \\ 4, & \alpha \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Au premier ordre, la solution du problème ainsi posé s'écrit :

$$\varphi^{(1)}(\alpha, \beta, \tau) = B_1^{(1)}(\alpha, \tau) \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(\alpha, \beta, \tau) &= B_1^{(2)}(\alpha, \tau) + \sum_{m=1}^{\infty} A_{1,m}^{(2)}(\tau) \\ &\times \cos\left(\frac{m \cdot \pi}{h_{2d}} \beta\right) \cdot e^{(m \pi / h_{2d}) \alpha / \mu} \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\varphi^{(3)}(\alpha, \beta, \tau) = B_1^{(3)}(\alpha, \tau) \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(4)}(\alpha, \beta, \tau) &= B_1^{(4)}(\alpha, \tau) + \sum_{m=1}^{\infty} A_{1,m}^{(4)}(\tau) \\ &\times \cos\left(\frac{m \pi}{h_{2s}} (\beta - h)\right) \cdot e^{(-m \pi / h_{2s}) \alpha / \mu} \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$f_2(\alpha, \tau) = f_{2,0}(\alpha, \tau) + \sum_{m=1}^{\infty} f_{2,m}(\alpha, \tau) \quad (2.50 a)$$

avec :

$$f_{2,0}(\alpha, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{g(\rho_2 - \rho_1)} \cdot \left(\rho_1 \frac{\partial B_1^{(1)}}{\partial \tau} - \rho_2 \cdot \frac{\partial B_1^{(2)}}{\partial \tau} \right), & \alpha \leq 0 \\ \frac{1}{g(\rho_2 - \rho_1)} \cdot \left(\rho_1 \frac{\partial B_1^{(3)}}{\partial \tau} - \rho_2 \cdot \frac{\partial B_1^{(4)}}{\partial \tau} \right), & \alpha \geq 0 \end{cases} \quad (2.50 b)$$

$$f_{2,m}(\alpha, \tau) = \begin{cases} \frac{(-1)^m}{g(\rho_2 - \rho_1)} \cdot \left[\rho_2 \cdot \left(\frac{\partial A_{1,m}(\tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sum_{p < m} p \cdot (m-p) \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \frac{\pi^2}{h_{2d}^2} A_{1,p}^{(2)} A_{1,m-p}^{(2)}(\tau) \right) \theta^{m \cdot (\pi / h_{2d}) \alpha / \mu} \right] & \alpha \leq 0 \\ \frac{(-1)^m}{g(\rho_2 - \rho_1)} \cdot \left[\rho_2 \left(\frac{\partial A_{1,m}^{(4)}(\tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sum_{p < m} p \cdot (m-p) \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \frac{\pi^2}{h_{2s}^2} A_{1,p}^{(4)}(\tau) A_{1,m-p}^{(4)}(\tau) \right) \theta^{-m \cdot (\pi / h_{2s}) \alpha / \mu} \right] & \alpha \geq 0 \end{cases} \quad (2.50 c)$$

$$\left. \begin{cases} \alpha \leq 0 \\ \alpha \geq 0 \end{cases} \right. \quad (2.50 d)$$

$$\left. \begin{cases} \alpha \leq 0 \\ \alpha \geq 0 \end{cases} \right. \quad (2.50 e)$$

Les perturbations locales, en première approximation, ne se manifestent que dans la couche inférieure et diminuent exponentiellement avec la distance au bord de la marche. Lorsque nous considérons la propagation des ondes à l'interface, les termes $B_1^{(i)}(\alpha, \tau)$ peuvent s'écrire :

$$B_1^{(j)}(\alpha, \tau) = B_e^{(j)}(\alpha - c_g \tau) + B_r^{(j)}(\alpha + c_g \tau), \quad j=1, 2 \quad (2.51)$$

$$B_1^{(k)}(\alpha, \tau) = B_T^{(k)}(\alpha - c_d \tau), \quad k=3, 4. \quad (2.52)$$

Les termes B_e , B_r et B_T traduisant les ondes incidente, réfléchie et transmise, satisfont la relation :

$$\frac{\partial^4 B_1^{(j)}}{\partial \tau^4} = 0. \quad (2.53)$$

Ils admettent pour solution :

$$B_1^{(i)}(\alpha, \tau) = B^{(i)}(\alpha \mp c \tau) \quad (2.54 a)$$

avec, de part et d'autre de la marche, des valeurs de « C » telles que :

$$C_g^2 = g \cdot \frac{\Delta \rho}{\rho} \cdot \frac{h_{2d} \cdot h_1}{h_{2d} + h_1} \quad (2.54 b)$$

$$C_d^2 = g \cdot \frac{\Delta \rho}{\rho} \cdot \frac{h_{2s} \cdot h_1}{h_{2s} + h_1}. \quad (2.54 c)$$

Le raccordement du mouvement au droit de la marche nous fournit :

$$\left. \begin{aligned} v_{11} \cdot B_r^{(1)} + v_{12} \cdot B_T^{(3)} &= v_{10} \cdot B_e^{(1)}, \\ v_{21} \cdot B_r^{(1)} + v_{22} \cdot B_T^{(3)} &= v_{20} \cdot B_e^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.55a; b)$$

avec :

$$v_{10} = -\frac{h_{2d}^2}{h_1 \cdot C_g}$$

$$v_{20} = -1$$

$$v_{11} = v_{10} = -\frac{h_{2d}^2}{h_1 \cdot C_g}$$

$$v_{21} = v_{22} = 1$$

$$v_{12} = -\frac{h_{2s}^2}{h_1 \cdot C_d}.$$

Les termes qui traduisent les perturbations locales :

$$A_{1,m}^{(2)}(\tau) = \frac{h_{2d} \cdot \mu}{m \cdot \pi} a_{1,m}^{(2)} \frac{\partial B^{(2)}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \quad (2.56a)$$

$$A_{1,m}^{(4)}(\tau) = -\frac{h_{2s}}{m \cdot \pi} a_{1,m}^{(4)} \frac{\partial B^{(4)}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}. \quad (2.56b)$$

Pour $\beta \in [h, h_{2d}]$ les termes $a_{1,m}^{(i)}$ devront satisfaire aux conditions :

$$\begin{aligned} &\frac{h_1}{h_{2d}} \cdot \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_{1,m}^{(2)} \cdot \cos \left(m \cdot \frac{\pi}{h_{2d}} \cdot \beta \right) \right) \\ &= \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_{1,m}^{(4)} \cdot \cos \left(m \cdot \frac{\pi}{h_{2s}} (\beta - h) \right) \right) \quad (2.56c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-\frac{h_{2s}}{h_{2d}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{1,m}^{(2)} \cdot \sin \left(m \cdot \frac{\pi}{h_{2d}} \cdot \beta \right) \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} a_{1,m}^{(4)} \cdot \sin \left(m \cdot \frac{\pi}{h_{2s}} (\beta - h) \right). \quad (2.56d) \end{aligned}$$

Pour le traitement des ondes internes non linéaires progressives, nous introduisons le changement de variables : $\theta = \alpha \mp c \cdot \tau$; $\xi = \mu^2 \cdot \alpha$. Nous avons donc :

$$v_{11} \cdot k_R + v_{12} \cdot k_T = v_{10} \quad (2.57a)$$

$$v_{21} \cdot k_R + v_{22} \cdot k_T = v_{20} \quad (2.57b)$$

où les constantes k_R , k_T satisfont aux conditions de raccordement au droit de la marche :

$$B_T^{(4)}(0, \theta_T) = \frac{h_{2s}}{h_{2d}} \cdot k_T \cdot B_e^{(2)}(0, \theta_e) \quad (2.58a)$$

ou bien :

$$f_T(0, \theta_T) = \frac{h_1 + h_{2s}}{h_1 + h_{2d}} \cdot k_T \cdot f_e(0, \theta_e) \quad (2.58b)$$

avec :

$$\theta_T = \alpha - C_d \cdot \tau; \quad \theta_e = \alpha - C_g \cdot \tau$$

et

$$\left. \begin{aligned} f_R(0, \theta_R) &= k_R \cdot f_e(0, \theta_e); \\ \theta_R &= \alpha - C_d \cdot \tau. \end{aligned} \right\} \quad (2.59)$$

Les ondes incidente, réfléchie et transmise (f_e , f_R , f_T) vérifient l'équation de KdV :

$$f_\xi + C_1 f f_\theta + C_2 f_{\theta\theta\theta} = 0 \quad (2.60)$$

où

$$C_{1R} = C_{1e} = \frac{3}{2} \cdot \frac{h_1 - h_{2d}}{h_1 \cdot h_{2d}},$$

$$C_{2R} = C_{2e} = \frac{1}{6} h_1 \cdot h_{2d}$$

$$C_{1T} = \frac{3}{2} \cdot \frac{h_1 - h_{2s}}{h_1 \cdot h_{2s}},$$

$$C_{2T} = \frac{1}{6} h_1 \cdot h_{2s}.$$

Si la dénivellation incidente au bord de la marche est encore de la forme $f_{0T} = A_0 \operatorname{sech}^2(\theta_T/\lambda_0)$ les paramètres A_0 et λ_0 peuvent être déterminés par la loi de la conservation de masse et de la conservation d'énergie :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{0T} \cdot d\theta_T &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(0, \theta_T) d\theta_T \\ &= \frac{h_1 + h_{2s}}{h_1 + h_{2d}} \cdot k_T \int_{-\infty}^{+\infty} f_e(0, \theta_e) d\theta_e \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (f_{0T})^2 d\theta_T &\geq \int_{-\infty}^{+\infty} (f_T(0, \theta_T))^2 d\theta_T \\ &= \left(\frac{h_1 + h_{2s}}{h_1 + h_{2d}} \cdot k_T \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (f_e(0, \theta_e))^2 d\theta_e \end{aligned} \quad (2.62)$$

Le nombre N des solitons internes transmis sur la marche est :

$$N = E \left(\frac{\sqrt{1 - 4 A_0 / \lambda_0^2} + 1}{2} \right)$$

où E représente la partie entière, soit :

$$\begin{aligned} \frac{N(N-1)}{2} &= k_T \cdot \frac{h_{2s}}{h_{2d}} \\ &\times \frac{C_{2e}}{C_{2T}} \cdot \frac{C_{1T}}{C_{1e}} \cdot \frac{C_d}{C_g}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Les amplitudes des solitons sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{A_{Ti}}{A_e} &= \left(\frac{h_{2s}}{h_{2d}} \right)^2 \\ &\times \left(\frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{16(h_{2d}/h_{2s})^{5/2}}{1 + (h_{2d}/h_{2s})^{1/2}}} \right)^{-i} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

où, A_{Ti} est l'amplitude transmise de la $(i+1)$ - n -ième onde et A_e est l'amplitude de l'onde solitaire incidente. Il est intéressant de comparer le modèle de Kabbaj et celui de Djordjevic et Redekoppe. La différence essen-

tielle réside dans le calcul de Kabbaj, où l'onde réfléchie apparaît; elle est complètement déterminée avec une simple marche, tandis qu'elle n'apparaît pas dans celui de Djordjevic-Redekoppe avec un talus.

D'après les équations (2.57 a), (2.57 b), le coefficient de transmission est :

$$k_T = \frac{\sqrt{(h_1 \cdot h_{2d})/(h_1 + h_{2d})} + \sqrt{(h_1 \cdot h_{2s})/(h_1 + h_{2s})}}{2 \cdot \sqrt{(h_1 \cdot h_{2d})/(h_1 + h_{2d})}}$$

et le coefficient de réflexion est :

$$k_R = \frac{\sqrt{(h_1 \cdot h_{2d})/(h_1 + h_{2d})} - \sqrt{(h_1 \cdot h_{2s})/(h_1 + h_{2s})}}{2 \cdot \sqrt{(h_1 \cdot h_{2d})/(h_1 + h_{2d})}}$$

S'il n'y a pas de marche $h_{2s} = h_{2d}$ alors :

$$k_T = 1, \quad k_R = 0.$$

La comparaison du nombre des ondes transmises, d'après les deux modèles, est représentée sur la figure 3. On constate que les deux approches conduisent à des résultats pratiquement identiques.

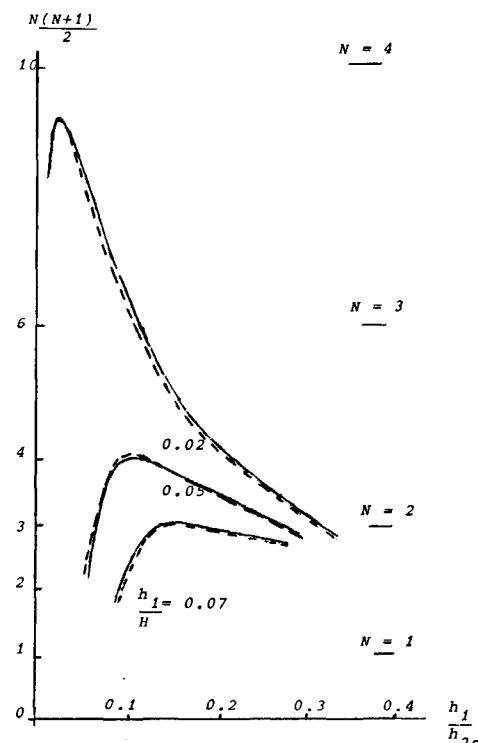


Figure 3

Comparaison entre les modèles Kabbaj (---) et Djordjevic Redekoppe (-) donnant le nombre d'ondes solitaires internes transmises.
Comparison between the Kabbaj (---) and Djordjevic and Redekoppe (-) models, showing the transmission packet of internal solitons.

RÉFÉRENCES

- Benney J. L., 1966. Long non-linear waves in fluid flows, *J. Math. Phys.*, **45**, 52-63.
 Chereskin T. K., 1983. Generations of internal waves in Massachusetts Bay, *J. Geophys. Res.*, **88**, 2649-2661.
 Djordjevic V. C., Redekoppe L. G., 1978. The fission and desintegration of internal solitary waves over two-dimensional topography, *J. Phys. Oceanogr.*, **8**, 1016-1024.
 Farmer D. M., 1978. Observation of long nonlinear internal wave in a lake, *J. Phys. Oceanogr.*, **8**, 63-73.
 Germain J. P., 1967. Contribution à l'étude de la houle en eau peu profonde, *Thèse Doct. État, Univ. Sci. Méd. Grenoble, France*.
 Johnson R. S., 1973. On the development of a solitary wave moving over an uneven bottom, *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **73**, 183-203.
 Kabbaj A., 1985. Contribution à l'étude du passage des ondes de gravité sur le talus continental et à la génération des ondes internes, *Thèse Doct. État, Univ. Sci. Méd. Grenoble, Doc. CNRS/TD 13433*.
 Korteweg D. J., De Vries G., 1985. On the change of form of long waves and advancing waves, *Philos. Mag.*, **39**, 5, 422-443.
 Osborne A. R., Burch T. L., 1980. Internal solitons in the Andaman Sea, *Am. Assoc. Adv. Sci.*, **208**, 4443.
 Temperville A., 1985. Contribution à la théorie des ondes de gravité en eau profonde, *Thèse Doct. État, Univ. Sci. Méd. Grenoble*.
 Whitham G. E., 1974. *Linear and non linear waves*, Wiley Interscience, New York.
 Zhang X., 1986. Ondes internes non linéaires en fond variable et en milieu tournant, *Thèse Doct. Ing., Univ. Sci. Méd. Grenoble*.