

MODELE NON LINEAIRE ET NON HYDROSTATIQUE
APPLIQUE A L'ETUDE DES FRONTS INTERNES
DANS LE DETROIT DE GIBRALTAR *

par

Alain G. CAVANIE

Docteur 3ème cycle (Mathématiques appliquées)
Antenne du Laboratoire d'Océanographie physique
du Muséum National d'Histoire Naturelle
- C.O.B. PLOUZANE 29 N -

INTRODUCTION

- Dans un précédent article (1969), l'auteur a mis en évidence, à l'aide d'un modèle hydrostatique et en faisant l'hypothèse de BOUSSINESQ, l'importance de certains termes non-linéaires dans la formation de fronts internes ; ce modèle fournit un critère pour que la pente d'une onde simple s'atténue ou s'intensifie suivant les conditions en amont de l'onde.

Dans le présent article une méthode de perturbation régulière permet de s'affranchir de l'hypothèse des ondes longues et de l'hypothèse de BOUSSINESQ ; le modèle théorique ainsi construit témoigne de l'importance des termes non-linéaires dans la formation des oscillations secondaires en aval du front, phénomène maintes fois observé dans la partie orientale du détroit de Gibraltar. Les paramètres du modèle étant fixés pour schématiser les conditions dans le détroit l'on retrouve pour ces oscillations, des longueurs et des temps caractéristiques très voisins de ceux observés. —

I - HYPOTHESES FONDAMENTALES ET EQUATIONS CORRESPONDANTES

Le modèle envisagé (Fig.1) est constitué de deux couches superposées de fluides homogènes, incompressibles, non-visqueux ; l'écoulement est plan et irrotationnel. L'axe OX est horizontal, à la profondeur moyenne de l'interface qui sépare les deux couches fluides, et l'axe OY vertical ascendant. Un plafond et un fond horizontaux imperméables sont situés en $y = H_1$ et $y = -H_2$. Les masses volumiques et les potentiels de vitesse dans la couche supérieure et inférieure sont désignés respectivement par $\rho_1, \Phi_1(x, y, t)$ et $\rho_2, \Phi_2(x, y, t)$, et le déplacement de l'interface de sa profondeur moyenne est donné par l'équation :

Manuscrit reçu le 18 novembre 1970. Cette recherche a été financée par contrat CNEOX.

$$y = \eta(x, t) \quad (1)$$

A l'intérieur de chaque couche les potentiels de vitesses doivent satisfaire l'équation de LAPLACE :

$$\nabla^2 \Phi_1 = 0 \quad (2)$$

$$\nabla^2 \Phi_2 = 0 \quad (3)$$

L'imperméabilité des parois horizontales impose les conditions suivantes :

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(x, H_1, t) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(x, -H_2, t) = 0 \quad (5)$$

A l'interface, donnée par l'équation (1), les conditions cinématiques sont décrites par les équations :

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} \right] - \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right] = 0 \quad (6)$$

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} \right] - \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right] = 0 \quad (7)$$

et la continuité de la pression impose une dernière condition

$$\rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + (\rho_1 - \rho_2) g \eta = \frac{\rho_2}{2} \left[\left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right]^2 \right] - \frac{\rho_1}{2} \left[\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right]^2 \right] + T(t) \quad (8)$$

$T(t)$ est une fonction arbitraire du temps qui provient de l'intégration par rapport aux variables d'espace des équations de l'hydrodynamique pour obtenir l'équation de BERNOULLI.

Les conditions aux limites à l'interface (Eq. (6), (7), (8)), sont non-linéaires et, en plus, sont imposées sur des limites inconnues, a priori. Ces difficultés peuvent être contournées en supposant pour Φ_1 , Φ_2 , $T(t)$ et η des développements de formes suivantes :

$$\Phi_1 = \xi \bar{\Phi}_1 + \xi^2 \bar{\bar{\Phi}}_1 + \sigma_1 (\xi^2) \quad (9)$$

$$\Phi_2 = \xi \bar{\Phi}_2 + \xi^2 \bar{\bar{\Phi}}_2 + \sigma_2 (\xi^2) \quad (10)$$

$$\eta = \xi \bar{\eta} + \xi^2 \bar{\bar{\eta}} + \sigma_3 (\xi^2) \quad (11)$$

$$T(t) = \xi \bar{T}(t) + \xi^2 \bar{\bar{T}}(t) + \sigma_4 (\xi^2) \quad (12)$$

où ξ est un petit paramètre caractéristique de la famille d'écoulements considérée.

Les fonctions barrées ($\bar{\Phi}_1$, $\bar{\bar{\Phi}}_1$, $\bar{\Phi}_2$, $\bar{\bar{\Phi}}_2$, $\bar{\eta}$, $\bar{\bar{\eta}}$, \bar{T} , $\bar{\bar{T}}$), indépendantes du paramètre ξ , sont supposées uniformément bornées ainsi que leurs dérivées premières par rapport au temps et premières et secondes par rapport aux variables d'espace dans le domaine considéré. Les fonctions $\sigma_1(\xi^2)$ sont supposées uniformément infiniment petites par rapport à ξ^2 pour ξ petit.

En portant les expressions de Φ_1 , Φ_2 , η et T données par (9), (10), (11), (12) dans les équations (1) à (8), puis en égalant séparément les termes en ξ et en ξ^2 , l'on obtient les équations suivantes :

Sur la droite $y = 0$, six conditions aux limites sont données par les équations (6), (7) et (8).

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\bar{\Phi}}_1}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

$$\rho_1 \left[\frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial t} \right] - \rho_2 \left[\frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial t} \right] + (\rho_1 - \rho_2) g \bar{\eta} = \bar{T}(t) \quad (15)$$

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial y} = - \left[\frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} \right] + \bar{\eta} \left[\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_1}{\partial y^2} \right] \quad (16)$$

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial y} = - \left[\frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} \right] + \bar{\eta} \left[\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_2}{\partial y^2} \right] \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 \left[\frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial t} \right] - \rho_2 \left[\frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial t} \right] + (\rho_1 - \rho_2) g \bar{\eta} = & \frac{\rho_2}{2} \left[\left[\frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial y} \right]^2 \right] \\ & - \frac{\rho_1}{2} \left[\left[\frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial y} \right]^2 \right] + \frac{\rho_2}{2} \bar{\eta} \left[\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_2}{\partial y \partial t} \right] - \rho_1 \bar{\eta} \left[\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_1}{\partial y \partial t} \right] + \bar{T}(t) \end{aligned} \quad (18)$$

où les termes supplémentaires dans les équations (16), (17), (18), proviennent du fait que les conditions sont imposées, non plus à l'interface, mais sur la droite, $y = 0$

A la paroi horizontale supérieure, $y = H_1$, l'équation (4) donne

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial y} = 0 \quad (19) \text{ et } (19')$$

et à la paroi horizontale inférieure, $y = -H_2$, l'équation (5) donne

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial y} = 0 \quad (20) \text{ et } (20')$$

Enfin, à l'intérieur de chaque couche l'équation de LAPLACE est satisfaite par les potentiels barrés :

$$\nabla^2 \bar{\Phi}_1 = \nabla^2 \bar{\Phi}_1 = 0 \quad (21) \text{ et } (21')$$

$$\nabla^2 \bar{\Phi}_2 = \nabla^2 \bar{\Phi}_2 = 0 \quad (22) \text{ et } (22')$$

II - SOLUTIONS DU SYSTEME D'EQUATIONS D'ORDRE 2

Les solutions élémentaires du système d'équations (13) à (15) et (19) à (22) pour $\bar{\eta}$, $\bar{\Phi}_1$ et $\bar{\Phi}_2$ sont classiques et prennent la forme d'ondes libres, progressives ou stationnaires. Le système d'équations étant linéaire, toute somme de telles solutions élémentaires est solution du système. Pour étudier les cas particuliers considérés dans cet article aux paragraphes IV et V il est suffisant de se restreindre dès maintenant à des solutions de la forme suivante :

$$\bar{\eta} = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i \sin(K_i x) \cos(\Omega_i t) \quad (23)$$

$$\bar{\Phi}_1 = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \sin(K_i x) \sin(\Omega_i t) \left[\frac{\cosh[K_i (y - H_1)]}{\cosh(K_i H_1)} \right] \quad (24)$$

$$\bar{\Phi}_2 = \sum_{i=1}^n \bar{G}_i \sin(K_i x) \sin(\Omega_i t) \left[\frac{\cosh[K_i (y + H_2)]}{\cosh(K_i H_2)} \right] \quad (25)$$

où

$$F_i = \frac{\Omega_i N_i}{K_i \tanh(K_i H_1)} \quad (26)$$

$$G_i = \frac{-\Omega_i N_i}{K_i \tanh(K_i H_2)} \quad (27)$$

$$\Omega_i^2 = (\rho_2 - \rho_1) g K_i \left[\left[\frac{\rho_1}{\tanh(K_i H_1)} \right] + \left[\frac{\rho_2}{\tanh(K_i H_2)} \right] \right]^{-1} \quad (28)$$

III - SOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS D'ORDRE ξ^2

Une fois $\bar{\eta}$, $\bar{\Phi}_1$, $\bar{\Phi}_2$ connues, il est possible de déterminer les fonctions $\bar{\eta}$, $\bar{\Phi}_1$, $\bar{\Phi}_2$, satisfaisant les équations (16) à (18) et (19') à (22'). Les solutions ainsi obtenues seront la somme d'une solution particulière satisfaisant les conditions aux limites (16), (17), (18) (solution prenant la forme d'une somme d'ondes forcées) et de n'importe quelle solution du système homogène d'équations correspondant. (Système satisfait par $\bar{\eta}$, $\bar{\Phi}_1$, $\bar{\Phi}_2$). En fait, pour préserver les conditions initiales, on ajoutera à la solution particulière la solution du système homogène telle que $\bar{\eta}(x,0) \equiv 0$, $\bar{\Phi}_1(x,y,0) = \bar{\Phi}_2(x,y,0) \equiv 0$.

La recherche de la solution particulière nécessite quelque peu d'algèbre ; les relations trigonométriques

$$\cos \alpha \cos \beta = (1/2) \left[\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) \right]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = (1/2) \left[-\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) \right]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = (1/2) \left[\sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta) \right]$$

permettent d'écrire les termes à droite des équations (16), (17), (18) en tenant compte des relations (23) à (27) sous la forme :

$$\frac{\rho_2}{2} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial x} \right)^2 - \frac{\rho_1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial x} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^4 A_{ij} a_k \cos (Q_{ijk} x) \cos (R_{ijk} t) \quad \left. \begin{array}{l}) \\) \\) \\) \\) \\) \\) \\) \\) \end{array} \right)$$

$$\frac{\rho_2}{2} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial y} \right)^2 - \frac{\rho_1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial y} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^4 B_{ij} b_k \cos (Q_{ijk} x) \cos (R_{ijk} t) \quad \left. \begin{array}{l}) \\) \\) \\) \\) \\) \\) \\) \\) \end{array} \right)$$

$$-\rho_1 \bar{\eta} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_1}{\partial y \partial t} + \rho_2 \bar{\eta} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_2}{\partial y \partial t} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^4 C_{ij} c_k \cos(Q_{ijk} x) \cos(R_{ijk} t)$$

$$-\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^4 D_{ij} d_k \cos(Q_{ijk} x) \sin(R_{ijk} t)$$

$$\bar{\eta} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_1}{\partial y^2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^4 E_{ij} e_k \cos(Q_{ijk} x) \sin(R_{ijk} t)$$

$$-\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^4 L_{ij} l_k \cos(Q_{ijk} x) \sin(R_{ijk} t)$$

$$\bar{\eta} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_2}{\partial y^2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^4 M_{ij} m_k \cos(Q_{ijk} x) \sin(R_{ijk} t)$$

où

$$a_2 = a_4 = b_1 = b_4 = c_3 = c_4 = d_1 = d_3 = e_2 = e_3 = l_1 = l_3 = m_2 = m_3 = 1$$

$$a_1 = a_3 = b_2 = b_3 = c_1 = c_2 = d_2 = d_4 = e_1 = e_4 = l_2 = l_4 = m_1 = m_4 = -1$$

$$Q_{i,j,1} = Q_{i,j,2} = K_i + K_j$$

$$Q_{i,j,3} = Q_{i,j,4} = K_i - K_j$$

$$R_{i,j,1} = R_{i,j,3} = \Omega_i + \Omega_j$$

$$R_{i,j,2} = R_{i,j,4} = \Omega_i - \Omega_j$$

(29)

$$\begin{aligned}
 A_{i,j} &= \frac{1}{8} \left[(\rho_2 / \tanh K_i H_2 \tanh K_j H_2) - \rho_1 / (\tanh K_i H_1 \tanh K_j H_1) \right] \Omega_i \bar{N}_i \Omega_j \bar{N}_j \\
 B_{i,j} &= \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{8} \right) \Omega_i \bar{N}_i \Omega_j \bar{N}_j \\
 C_{i,j} &= - \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{4} \right) \bar{N}_i \Omega_j^2 \bar{N}_j \\
 D_{i,j} &= - \frac{K_i \bar{N}_i \Omega_j \bar{N}_j}{4 \tanh K_j H_1} \\
 E_{i,j} &= \frac{\bar{N}_i K_j \Omega_j \bar{N}_j}{4 \tanh K_j H_1} \\
 L_{i,j} &= \frac{K_i \bar{N}_i \Omega_j \bar{N}_j}{4 \tanh K_j H_2} \\
 M_{i,j} &= - \frac{\bar{N}_i K_j \Omega_j \bar{N}_j}{4 \tanh K_j H_2}
 \end{aligned} \tag{30}$$

La nature des termes décrits par les équations (29) conduit à rechercher des solutions de la forme :

$$\bar{\eta} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^4 U_{ijk} \cos(Q_{ijk} x) [\cos(R_{ijk} t) - \cos(O_{ijk} t)]$$

$$\bar{\Phi}_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^4 \left[V_{ijk} \sin(R_{ijk} t) - \frac{O_{ijk} U_{ijk} \sin(O_{ijk} t)}{Q_{ijk} \tanh(Q_{ijk} H_1)} \right] \frac{\cosh(Q_{ijk}(y-H_1))}{\cosh(Q_{ijk} H_1)} \cosh(Q_{ijk} x)$$

(32)

$$\bar{\Phi}_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^4 \left[W_{ijk} \sin(R_{ijk} t) + \frac{O_{ijk} U_{ijk} \sin(O_{ijk} t)}{Q_{ijk} \tanh(Q_{ijk} H_2)} \right] \frac{\cosh Q_{ijk} (y+H_2)}{\cosh Q_{ijk} H_2} \cosh(Q_{ijk} x) \quad (33)$$

où :

$$(O_{ijk})^2 = (\rho_2 - \rho_1) g Q_{ijk} \left[\rho_1 / (\tanh Q_{ijk} H_1) + (\rho_2 / \tanh Q_{ijk} H_2) \right]^{-1}$$

Les solutions décrites par les équations (31) à (33) sont telles que $\bar{\Phi}_1$ et $\bar{\Phi}_2$ satisfont l'équation de LAPLACE et les conditions aux limites aux parois horizontales ; en plus, $\bar{\eta}$, $\bar{\Phi}_1$, $\bar{\Phi}_2$ sont identiquement nuls à l'instant initial, $t = 0$. Il reste à déterminer U_{ijk} , V_{ijk} et W_{ijk} à l'aide des conditions aux limites (16), (17) et (18) qui s'écrivent :

$$\rho_1 R_{ijk} V_{ijk} - \rho_2 R_{ijk} W_{ijk} + (\rho_1 - \rho_2) g U_{ijk} = A_{ijk} a_k + B_{ijk} b_k + C_{ijk} c_k = X_{ijk} \quad (34)$$

$$Q_{ijk} \tanh(Q_{ijk} H_1) V_{ijk} - R_{ijk} U_{ijk} = D_{ijk} d_k + E_{ijk} e_k = Y_{ijk} \quad (35)$$

$$- Q_{ijk} \tanh(Q_{ijk} H_2) W_{ijk} - R_{ijk} U_{ijk} = L_{ijk} l_k + M_{ijk} m_k = Z_{ijk} \quad (36)$$

Lorsque le déterminant de la matrice M formée avec les coefficients des termes de gauche des équations (34) à (36) n'est pas nul, il y a unicité de la solution de ce système et cette solution est donnée par les équations :

$$U_{ijk} = \frac{X_{ijk} - \left[\frac{\rho_1 R_{ijk} Y_{ijk}}{Q_{ijk} \tanh(Q_{ijk} H_1)} \right] - \left[\frac{\rho_2 R_{ijk} Z_{ijk}}{Q_{ijk} \tanh(Q_{ijk} H_2)} \right]}{(\rho_2 - \rho_1) g + \left[\frac{\rho_1 R_{ijk}^2}{Q_{ijk} \tanh(Q_{ijk} H_1)} \right] + \left[\frac{\rho_2 R_{ijk}^2}{Q_{ijk} \tanh(Q_{ijk} H_2)} \right]} \quad (37)$$

$$V_{ijk} = \frac{(R_{ijk}U_{ijk} + Y_{ijk})}{Q_{ijk} \tanh(Q_{ijk}H_1)} \quad (38)$$

$$W_{ijk} = - \frac{(R_{ijk}U_{ijk} + Z_{ijk})}{Q_{ijk} \tanh(Q_{ijk}H_2)} \quad (39)$$

Il est possible de montrer, par un raisonnement analogue à celui de PHILLIPS (1960) pour les ondes de surface, que le déterminant de M, qui prend la forme suivante :

$$|M| = Q_{ijk} \tanh(Q_{ijk}H_1) \tanh(Q_{ijk}H_2) \left[\frac{\rho_1}{\tanh(Q_{ijk}H_1)} + \frac{\rho_2}{\tanh(Q_{ijk}H_2)} R_{ijk}^2 - (\rho_2 - \rho_1)gQ_{ijk} \right] \quad (40)$$

ne peut être nul que pour

$$Q_{ijk} = 0 \quad (41)$$

soit : $i = j$, $k = 3$ ou $k = 4$.

Substituant ces valeurs dans les équations (34), (35), (36), l'on retrouve dans le cas $i = j$, $k = 3$

$$U_{ii3} = 0 \quad (42)$$

$$V_{ii3} = \frac{\rho_2}{\rho_1} W_{ii3} + \frac{X_{ii3}}{\rho_1 R_{ii3}} \quad (43)$$

Ces termes n'ont pas de signification physique puisqu'ils correspondent à une solution périodique de pulsation $2\Omega_1$ et de nombre d'onde nul et que les potentiels de vitesses ne sont déterminés qu'à une fonction arbitraire du temps près.

Dans le cas $i = j$, $k = 4$, l'on trouve de même que V_{ii4} et W_{ii4} sont des constantes arbitraires et que

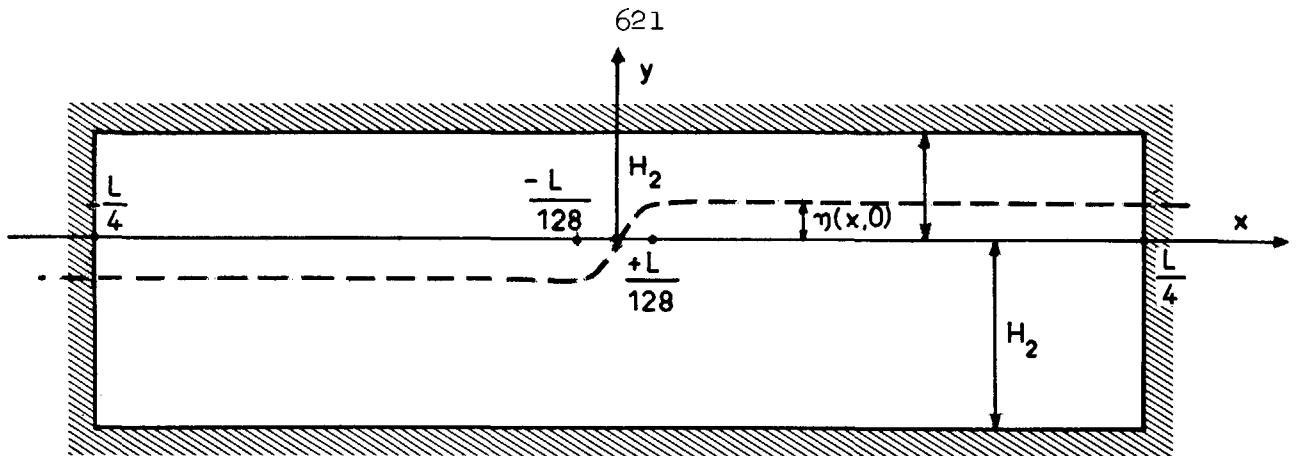


Fig 1. Forme générale du canal et de l'interface à l'instant initial

$$U_{ii4} = \frac{-X_{ii4}}{(\rho_2 - \rho_1)g} \quad (44)$$

Ce dernier terme correspond à un déplacement d'ordre ξ^2 de l'interface, constant dans le temps et l'espace qui peut être éliminé en imposant un déplacement égal et opposé de l'interface dans les conditions initiales d'un problème donné, ou, ce qui est plus simple, en posant directement

$$U_{ii4} = 0$$

ce qui est fait dans les calculs du modèle décrit au paragraphe suivant.

IV - DESCRIPTION DU MODELE MATHEMATIQUE ETUDIE

Un modèle aussi simple que possible est étudié pour mettre en évidence l'influence des termes non-linéaires et des termes d'accélération verticale. Le canal décrit au paragraphe 1 (Fig.1) est délimité à ses deux extrémités $x = -L/4$, $x = L/4$, par des parois verticales imperméables. A l'instant initial les deux fluides superposés sont au repos mais le système n'est pas en équilibre statique, la position de l'interface étant décrite par les équations :

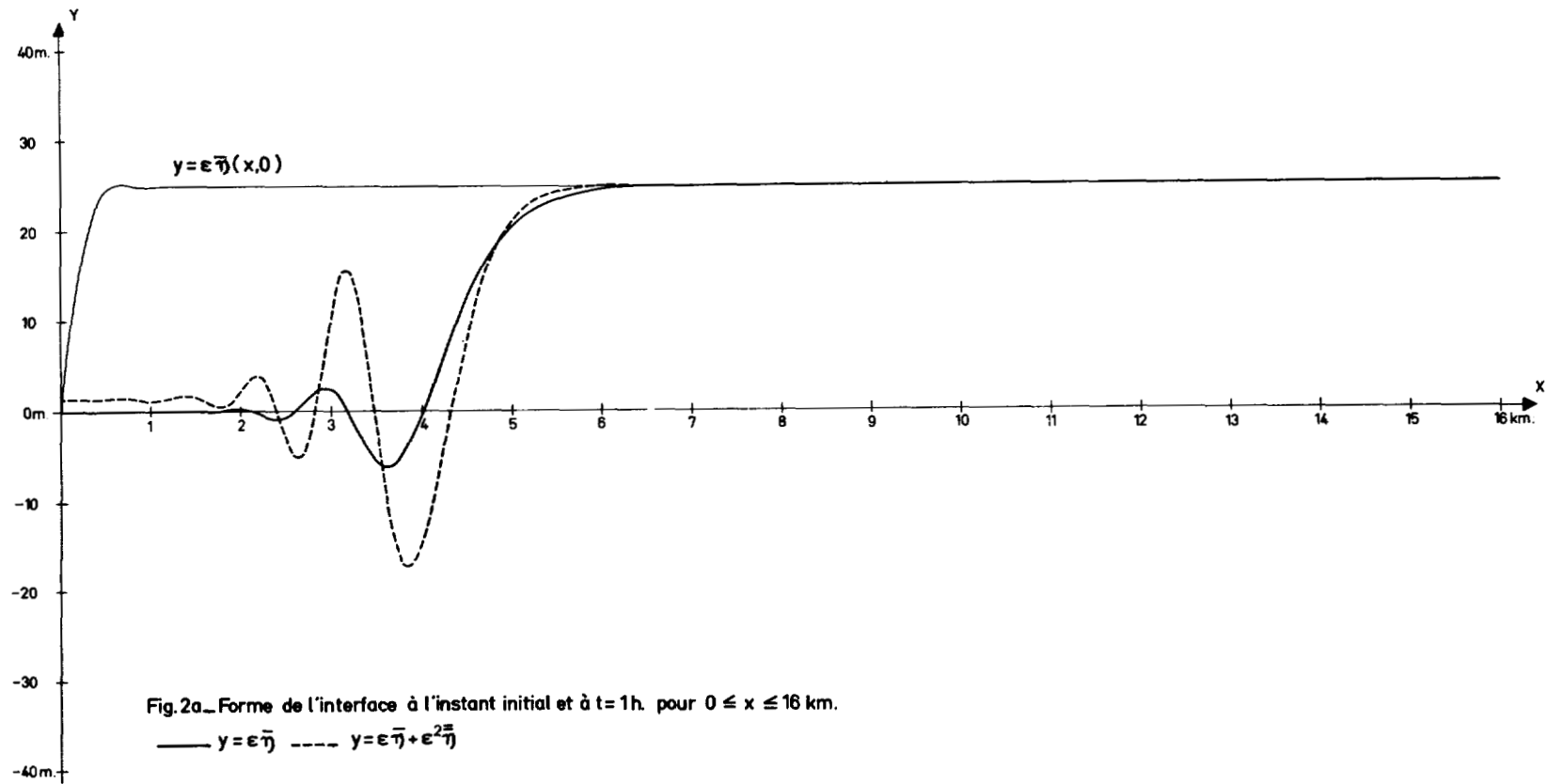


Fig. 2a_ Forme de l'interface à l'instant initial et à $t = 1$ h. pour $0 \leq x \leq 16$ km.

— $y = \epsilon \bar{\eta}$ - - - $y = \epsilon \bar{\eta} + \epsilon^2 \bar{\eta}$

$$\begin{array}{l}
 \eta(x,0) = -\xi \quad \text{pour } -\frac{L}{4} \leq x \leq -\frac{L}{128} \\
 \eta(x,0) = \sin \frac{64\pi x}{L} \quad \text{pour } -\frac{L}{128} \leq x \leq \frac{L}{128} \\
 \eta(x,0) = \xi \quad \text{pour } \frac{L}{128} \leq x \leq \frac{L}{4}
 \end{array} \quad (45)$$

La condition que les vitesses horizontales soient nulles aux extrémités du canal est satisfaite en posant

$$K_i = 2\pi i/L \quad (46)$$

La condition initiale (45) imposant la forme de l'interface ne peut être satisfaite rigoureusement en n'utilisant qu'un nombre fini "n" de termes dans l'équation (23) ; mais en prenant pour "n" une valeur suffisamment grande, la différence entre la forme approchée et la forme exacte de l'interface devient physiquement négligeable. Par une analyse de FOURIER, on montre sans difficulté, que, pour "i" impair,

$$\bar{N}_i = \frac{4\xi}{\pi i} \left[\frac{32^2}{32^2 - i^2} \right] \cos \left[\frac{\pi i}{64} \right] \quad (47)$$

et que, pour "i" pair

$$\bar{N}_i = 0 \quad (48)$$

L'expérience qu'a tout hydrodynamicien de systèmes linéarisés hydrostatiques quelque peu analogue laisse prévoir que les solutions obtenues prendront la forme de deux fronts internes se propageant vers les extrémités du canal où elles seront réfléchies après un temps T proportionnel à la demi-longueur du bassin et inversement proportionnel à la vitesse de propagation des fronts. Il serait donc tentant, sans diminuer pour autant les pentes de l'interface à l'instant initial de donner au canal de très grandes longueurs pour suivre les fronts le plus longtemps possible. Pratiquement, en raison des possibilités de mémoire rapide de notre ordinateur IBM 1130 et pour rester dans des temps de calcul raisonnables (2 heures) il a été nécessaire de se borner aux 101 premiers

termes dans le développement de $\bar{\eta}$. Tenant compte du fait que la longueur caractéristique des fronts dans le détroit de Gibraltar est de l'ordre du kilomètre, une valeur de $L = 64\ 000$ m a été retenue dans la plupart des expériences de calcul ; ce qui permet de suivre les fronts pendant approximativement trois heures avant qu'ils n'atteignent les limites du canal.

Dans les différents modèles décrits aux paragraphes suivants

$$H_1 + H_2 = 800 \text{ m}, \quad \rho_1/\rho_2 = 0,998 \quad g = 9,8 \text{ m(sec)}^{-2}$$

valeurs de ces paramètres correspondant aux conditions à la sortie orientale du détroit de Gibraltar.

V - ETUDE DU MODELE PARTICULIER CORRESPONDANT AUX CONDITIONS DE LA PARTIE ORIENTALE DU DETROIT

Les figures 2a à 4b indiquent la forme prise par l'interface d'après le modèle d'ordre ξ , $\eta = \xi\bar{\eta}$, ou le modèle d'ordre ξ^2 , $\eta = \xi\bar{\eta} + \xi^2\bar{\eta}$ dans le cas où $H_1 = 100$ m, $H_2 = 700$ m, $L/4 = 16\ 000$ m, $\xi = 25$ m. La moitié du canal comprise entre $-L/4 \leq x \leq 0$ a été dessinée en prenant l'axe OX positif vers la gauche ; ceci permet de comparer plus facilement le comportement des fronts entraînant une élévation (fronts +) ou une chute (fronts -) de l'interface. La position de l'interface à l'instant initial a été reportée sur toutes les figures pour servir de référence.

Le modèle d'ordre ξ indique déjà la présence d'oscillations en aval des fronts. Ces oscillations proviennent du fait que les ondes internes sont dispersives, leur vitesse de groupe diminuant avec la longueur d'onde ; ainsi les composantes de courte longueur d'onde restent "à la traîne" du paquet d'ondes formant le front, et la pente du front diminue avec le temps. L'avant du front se déplace approximativement à la vitesse de groupe des ondes longues (égale dans ce cas à leur vitesse de phase, comme pour les ondes de surface), vitesse donnée par la formule classique :

$$V = \pm \left[(\rho_2 - \rho_1) g \left[\frac{\rho_1}{H_1} + \frac{\rho_2}{H_2} \right]^{-1} \right]^{1/2} \quad (49)$$

qui, dans le cas étudié, vaut $\pm 1,31$ m/sec soit $\pm 4,7$ km/heure.

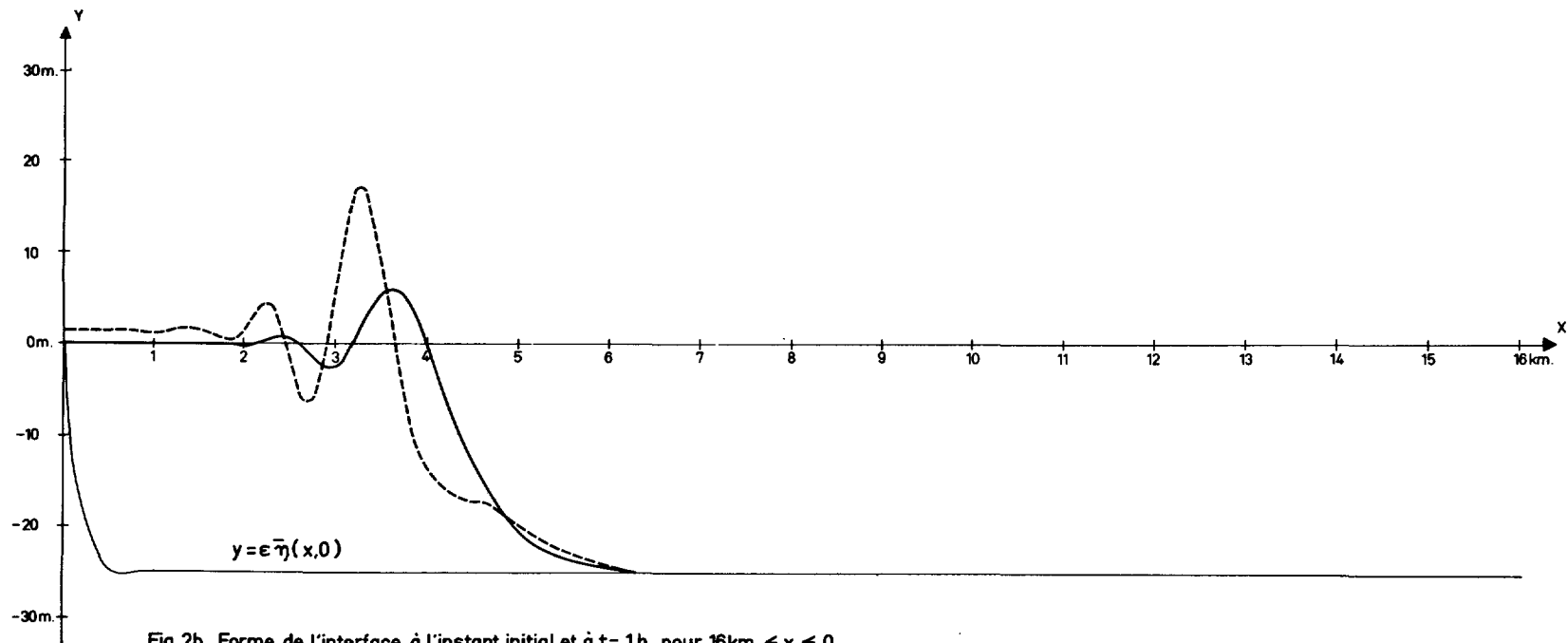


Fig. 2b. Forme de l'interface à l'instant initial et à $t = 1$ h. pour $16 \text{ km.} \leq x \leq 0$

— $y = \epsilon \bar{\eta}$ - - - $y = \epsilon \bar{\eta} + \epsilon^2 \bar{\eta}$

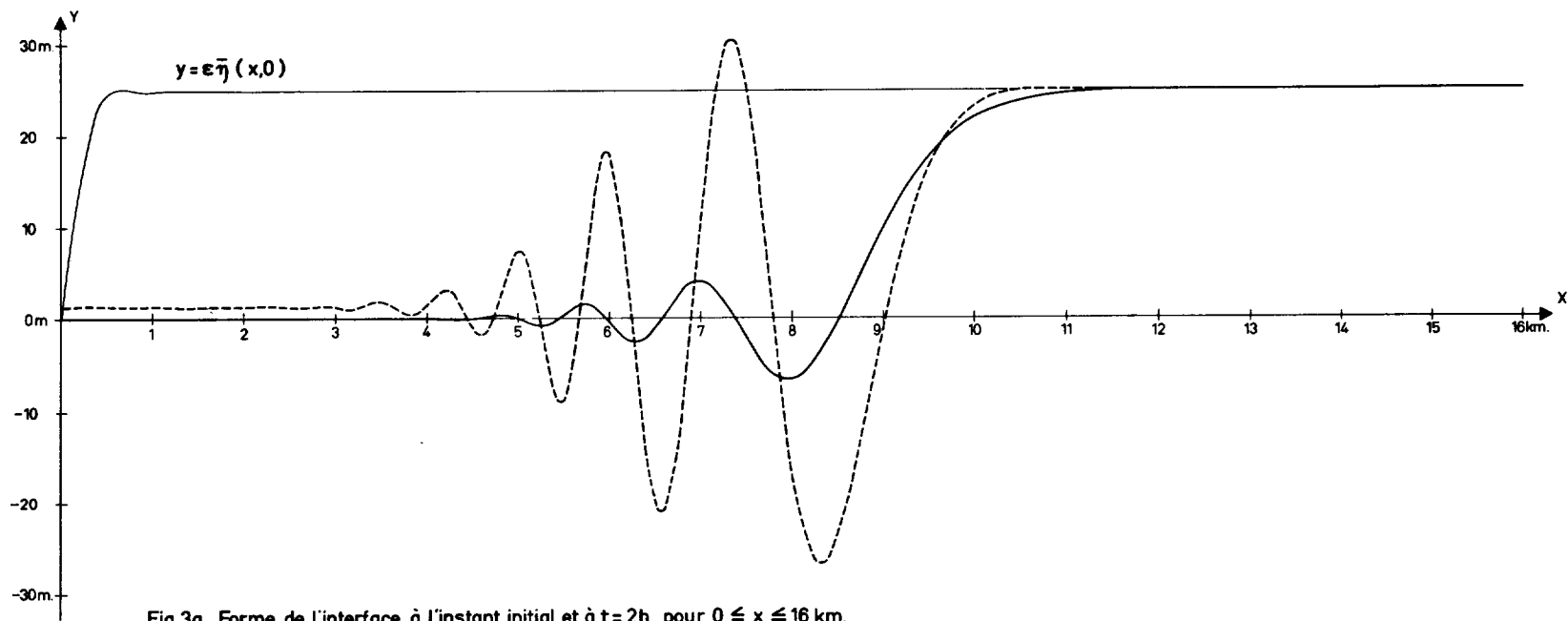
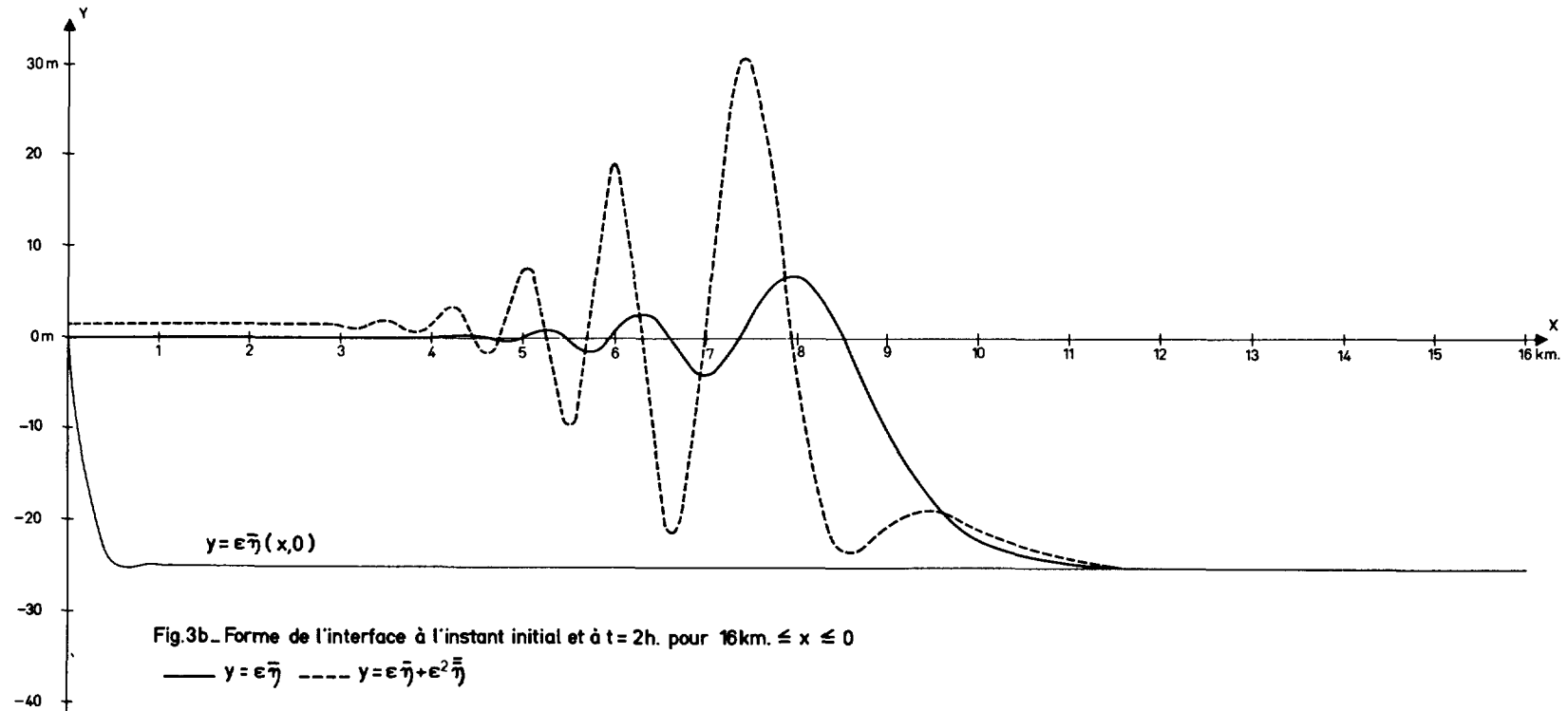
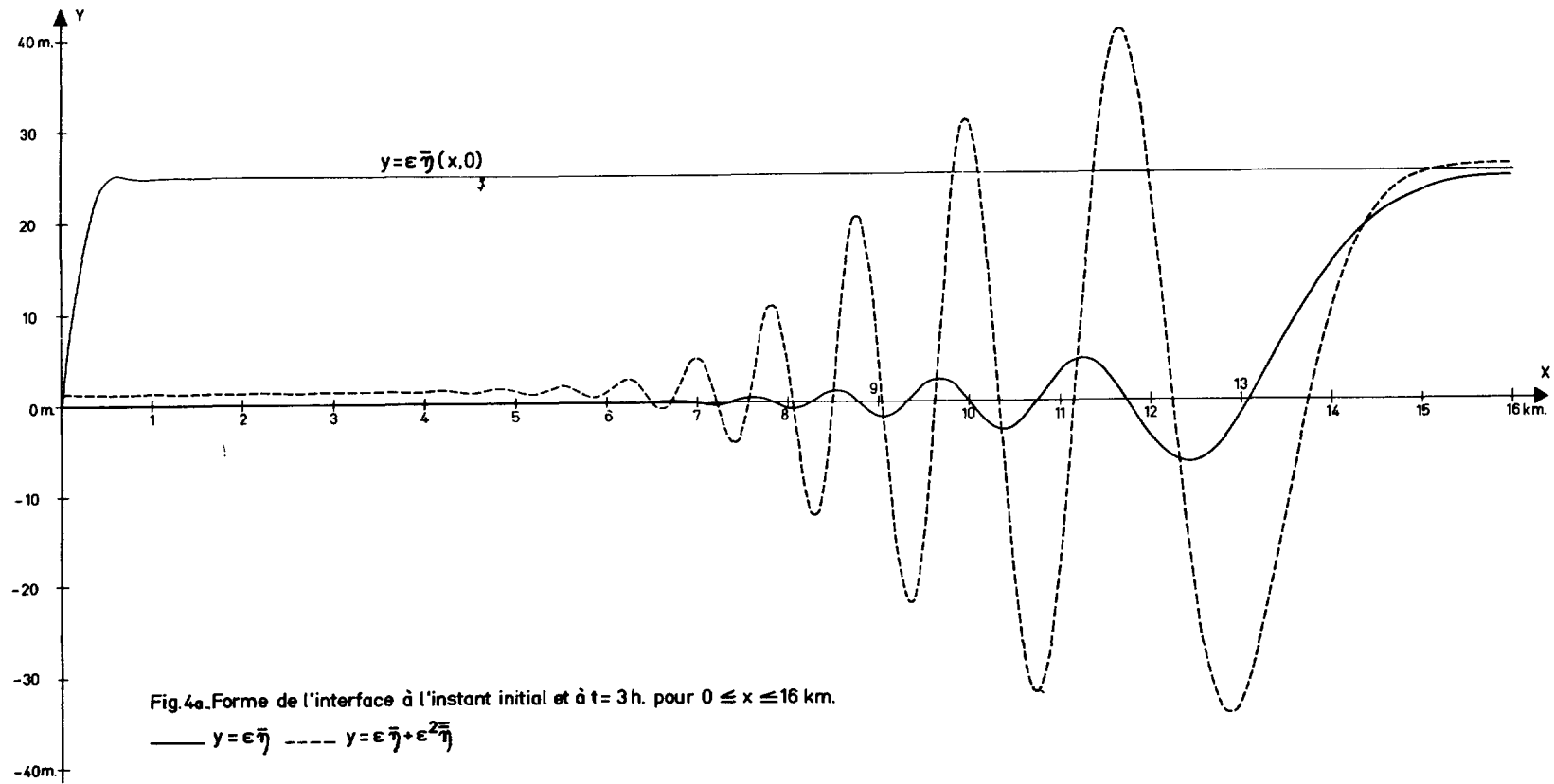
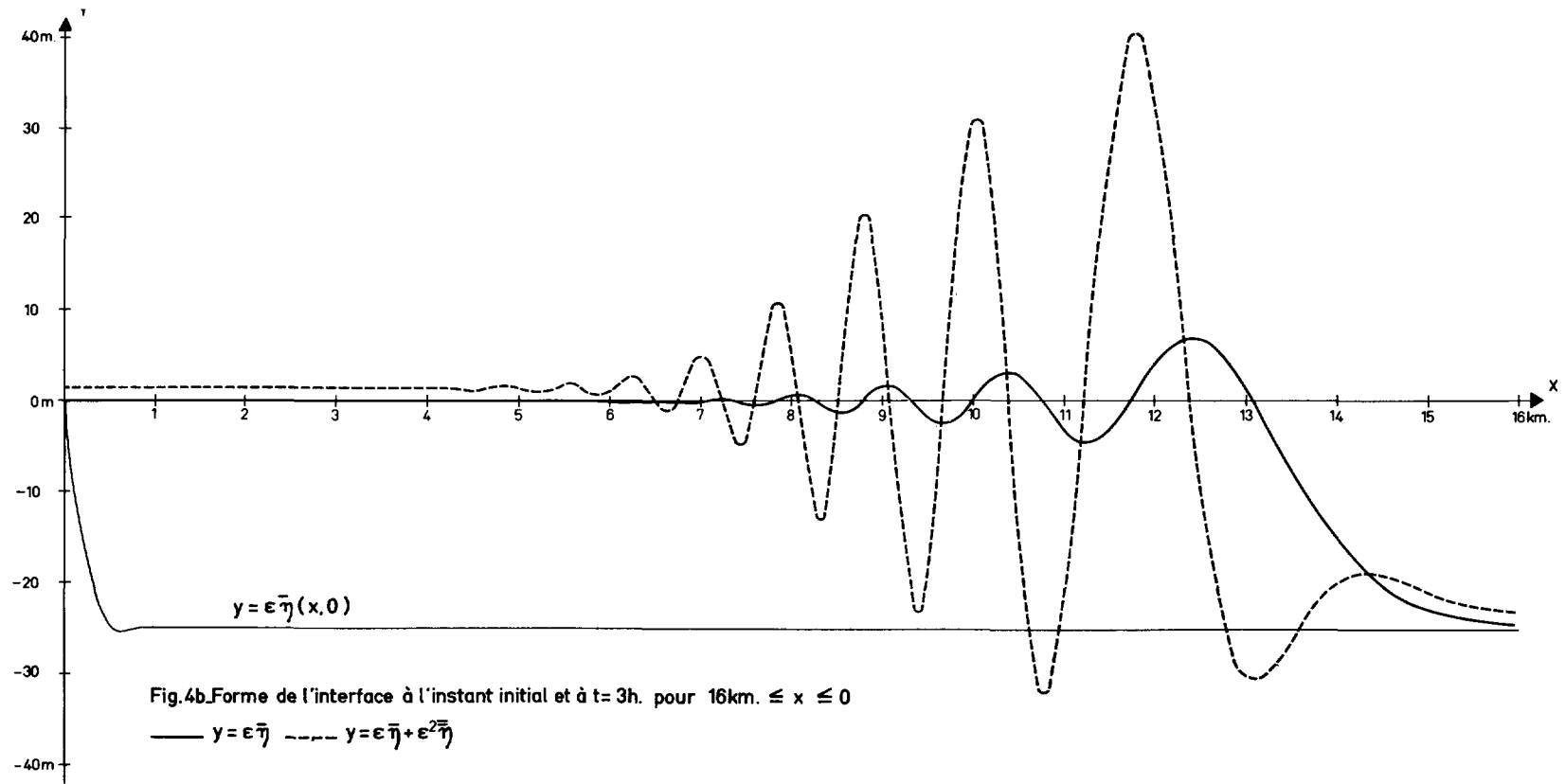


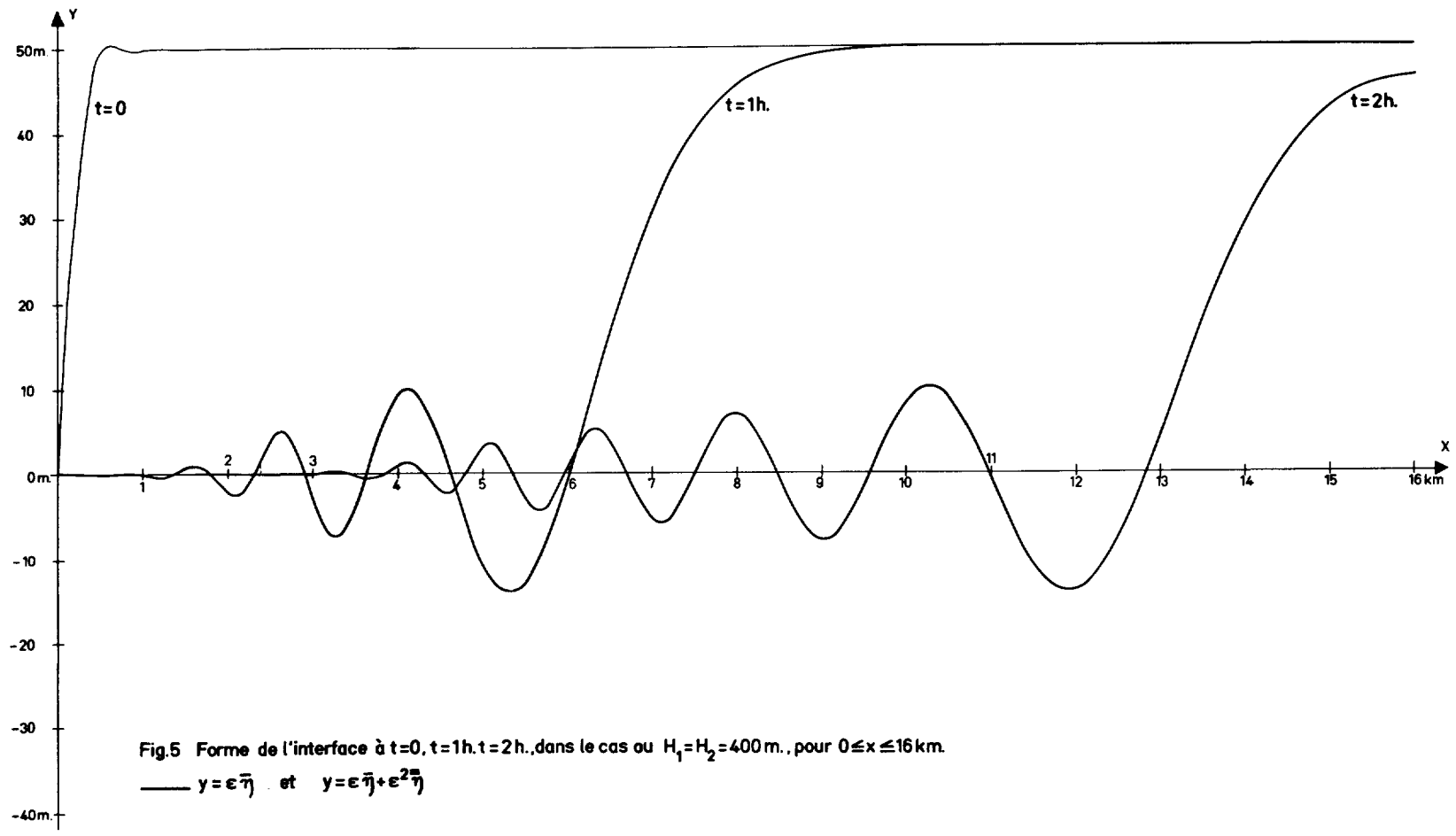
Fig.3a. Forme de l'interface à l'instant initial et à $t=2h$. pour $0 \leq x \leq 16$ km.

— $y = \epsilon \bar{\eta}$ - - - $y = \epsilon \bar{\eta} + \epsilon^2 \bar{\eta}''$









Le modèle non linéaire d'ordre ξ^2 indique l'importance des termes négligés dans le modèle linéarisé. On remarque premièrement les amplitudes crête-creux considérables des oscillations en aval des fronts, qui atteignent 80 m trois heures après l'instant initial. Les pseudo-longueurs d'ondes (distance entre deux crêtes ou deux creux de l'interface) varient entre 800 m et 2500 m, diminuant de l'avant à l'arrière du train d'ondes ; les pseudo-périodes correspondantes varient de 10 à 30 minutes. Ces résultats sont en bon accord avec les mesures de ZIEGENBEIN (1968) faites à la sortie orientale du détroit de Gibraltar.

Dans le modèle d'ordre ξ^2 , la pente de l'interface à l'avant des fronts est plus raide pour le front - et moins raide pour le front + que dans le modèle d'ordre ξ . Ceci est prévisible d'après les résultats d'une étude précédente (CAVANIE 1969) faite en supposant l'écoulement hydrostatique mais non-linéaire ; le modèle mathématique construit à partir de cette hypothèse indique que la pente des fronts - augmente et celle des fronts + diminue avec le temps lorsque l'interface est située nettement au-dessus de la mi-profondeur du canal. Le phénomène inverse a lieu lorsque l'interface est située en-dessous de la mi-profondeur.

Un calcul a été fait en diminuant l'échelle horizontale du modèle d'un facteur deux ($L = 32\ 000$ m) tout en maintenant les autres paramètres constants. Comme le laisse prévoir la conception du front en tant que paquet d'ondes, une heure après l'instant initial, l'avant des fronts est presque identique au cas où $L = 64\ 000$ m ; par contre les oscillations en aval du front, dans le modèle d'ordre ξ et celui d'ordre ξ^2 , sont plus importantes et de longueurs caractéristiques plus courtes.

VI - ETUDE DU MODELE CORRESPONDANT AUX CONDITIONS A L'OUEST DU SEUIL DU DETROIT

Lorsque les profondeurs des deux couches sont égales $H_1 = H_2$, U_{ijk} contient le terme $(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$ en facteur ; ce terme étant très petit ($2 \cdot 10^{-3}$), on peut prévoir a priori que les termes non-linéaires dans les déplacements de l'interface seront considérablement réduits. Pour vérifier cette supposition le calcul a été fait dans le cas $H_1 = H_2 = 400$ m, $\xi = 50$ m. La figure 5 montre la forme de l'interface aux instants $t = 0$, $t = 1$ h, $t = 2$ h, à la fois pour le modèle d'ordre ξ et d'ordre ξ^2 , les deux courbes se superposant l'une à l'autre. Les termes d'ordre ξ^2 sont donc totalement négligeables dans ce cas particulier, et les oscillations secondaires considérablement réduites par rapport aux cas précédents. Ce phénomène peut expliquer le fait qu'aucun observateur n'a trouvé des oscillations de courte période à l'Ouest du seuil dans le détroit de Gibraltar.

Dans cette région en effet, l'interface est située approximativement à la mi-profondeur du canal. Mais d'autres phénomènes peuvent aussi influencer sur l'onde dans cette région. Ainsi le modèle hydrostatique (CAVANIE 1969) indique que le front sera plus fort à l'Est qu'à l'Ouest du seuil. Enfin la forme évasée du chenal à l'Ouest devrait augmenter la diffraction de l'onde interne et les pertes aux parois.

VII - CONCLUSIONS

Le travail présenté ci-dessus n'est qu'une première étape dans la prise en compte des termes non-linéaires des équations de l'hydrodynamique pour un cas particulier, choisi aussi simple que possible afin de dégager les traits physiques importants.

Lorsque l'interface moyenne est située à la mi-profondeur du canal (Paragraphe VI) la symétrie de l'écoulement fait que les déplacements $\xi^2 \bar{\eta}$ sont insignifiants ; dans ce cas l'étude des termes d'ordre ξ^2 justifie pleinement l'utilisation d'un modèle linéarisé.

Par contre lorsque l'interface est située nettement au-dessus de la profondeur moyenne (Paragraphe V) et que l'amplitude des fronts est comparable à celles observées à Gibraltar ($\xi = 25$ m), le calcul montre que l'on sort du domaine des hypothèses faites a priori, notamment

$$\xi \bar{\eta} \gg \xi^2 \bar{\eta}$$

Les résultats quantitatifs obtenus, quoiqu'en bon accord avec les observations, doivent donc être considérés avec une certaine prudence ; il n'en reste pas moins que le modèle témoigne de l'importance des termes non-linéaires, trop souvent négligés, et apporte une explication au moins qualitative du phénomène observé dans le détroit de Gibraltar.

BIBLIOGRAPHIE

- CAVANIE, A. (1969) - Sur la genèse et la propagation d'ondes internes dans un milieu à deux couches - Cahiers Océanographiques, XXI, 9, 1969, pp.831-843.
- FRASSETTO, R. (1964) - Short Period Vertical Displacements of the Upper Layers in the Straits of Gibraltar - SACIANT ASW Research Centre Tech. Rep. N°30, Nov. 1964.

- LACOMBE, H. et RICHEZ, C. (1961) - Année Géophysique Internationale 1957-1958. Participation Française. Contribution à l'étude du détroit de Gibraltar. II - Etude hydrologique - Cahiers Océanographiques 13 (5) mai 1961, pp.276-291.
- MILNE-THOMSON, L. (1960) - Theoretical Hydrodynamics - Mac Millan Co. N.Y.1960.
- PHILLIPS, O.M. (1960) - On the Dynamics of Unsteady Gravity Waves of finite Amplitude. Part. I. Journal of Fluid Mechanics 9, pp.193-217.
- ZIEGENBEIN, J. (1968) - A study of Internal Waves in the Straits of Gibraltar during October-November 1967 - SACLANT ASW Research Centre Tech. Rep. n° 127.

551.466.81