

# Évaluation de la mesure de la direction des vagues à partir des données d'une bouée instrumentée

Bouée directionnelle  
Vagues  
Spectre directionnel  
Effet Doppler  
Mesure des vagues  
Pitch and roll buoy  
Waves  
Directional spectra  
Doppler effect  
Wave instrumentation

R. Ezraty, A. Cavané

Centre Océanologique de Bretagne, Département d'Études Océaniques, B.P. n° 337,  
29273 Brest Cedex.

Reçu le 4/8/80, révisé le 18/12/80, accepté le 29/12/80.

## RÉSUMÉ

— La bouée de mesure du spectre directionnel des vagues développée au CNEXO/COB — suivant la méthode employée par Cartwright, Longuet-Higgins et Smith — utilise des capteurs récents de pilonnement, roulis, tangage et cap permettant une grande autonomie. Cet article présente une évaluation de la cohérence des informations obtenues avec cet instrument lors de la campagne Marsen en Mer du Nord. Pour ce faire, nous avons cherché à préciser les erreurs pouvant s'introduire aux différents stades de la saisie et de l'analyse des mesures : étalonnage des capteurs, influence du traitement numérique (filtrage) et effet Doppler dû au courant de marée.

La redondance des informations disponibles fournies simultanément par le capteur de pilonnement et par les capteurs de roulis-tangage et de cap permet de vérifier, suivant les différentes bandes de fréquence mesurées, la cohérence des informations et confirme que le mouillage n'influe pratiquement pas sur le comportement de la bouée. De plus, la continuité dans le temps des directions de propagation des composantes du spectre est une indication de la qualité des mesures; ces directions sont directement reliées, pour les hautes fréquences, à la direction du vent. Enfin, il a été possible de mettre en évidence et d'évaluer l'effet Doppler dû au courant de marée. —

*Oceanol. Acta*, 1981, 4, 2, 139-149.

## ABSTRACT

Evaluation of wave direction measurements  
using a pitch and roll buoy

— The pitch and roll buoy developed at CNEXO-COB to measure directional spectra of waves (following the method employed by Cartwright, Longuet-Higgins and Smith) uses recently manufactured sensors for pitch, roll, heave and direction which give it a large autonomy. This article presents an evaluation of the validity of measurements obtained with this instrument during the Marsen experiment in the North Sea. To do this, we have sought to determine the errors arising at different stages of the acquisition and analysis of data: sensor calibrations, influence of numerical analysis (filtering) and Doppler effects due to tidal currents.

The redundancy in the simultaneous measurements of the vertical displacements and the two components of slope of the sea surface has been used to check, in a number of frequency bands, the satisfactory behaviour of these measurements and to make sure that mooring solicitations did not affect the behaviour of the buoy. Moreover, the evolution in time of the propagation directions of different components of the spectrum is an indication

of the validity of the data; for the high frequency components, these directions are closely linked to the wind direction. Finally, a Doppler effect due to tidal currents has been observed on the buoy data and evaluated by a simple model. —

*Oceanol. Acta*, 1981, 4, 2, 139-149.

## INTRODUCTION

La détermination de la direction des vagues à partir d'une bouée équipée de capteurs de pilonnement, roulis et tangage a été effectuée dès 1955-1956 par Longuet-Higgins, Cartwright et Smith. La méthode utilisée consiste à obtenir, par analyse spectrale des différents signaux, les cinq premiers termes du développement en série de Fourier du spectre directionnel.

L'équipement développé au CNEXO/COB (Ezraty, Cavanié, 1979), avec la collaboration de Nereides est basé sur les mêmes principes, mais utilise des capteurs récents; ceux-ci permettent de donner à la bouée une grande autonomie, et donc d'élargir son champ d'applications industrielles et scientifiques.

Le but de cet article est de décrire cet équipement dans ses détails, et de présenter ses possibilités et ses limites telles qu'elles ressortent de mesures à la mer.

Satisfaits des résultats des premières campagnes de mesures en mer, nous avons cherché à préciser les erreurs pouvant s'introduire aux différents stades de la saisie et de l'analyse des mesures :

- étalonnage des différents capteurs;
- filtrage nécessairement imparfait (lobes latéraux) des séries chronologiques;
- sollicitations de mouillage;
- phénomène Doppler dû aux courants.

Ces différents aspects sont illustrés à partir des mesures faites pendant la campagne Marsen (automne 1979) en Mer du Nord. La redondance offerte par les mesures de pilonnement et de pentes permet de s'assurer de la cohérence des mesures et du bon fonctionnement de la bouée.

## RAPPELS THÉORIQUES

L'observation visuelle de la surface de la mer en présence de vagues de vent montre que le phénomène physique est complexe et correspond à un spectre continu d'ondes de fréquences et de directions différentes. Avant d'entreprendre des mesures, il faut donc fixer un cadre théorique adéquat pour permettre leur interprétation. Ce cadre est fourni par le modèle statistique développé à partir de la théorie du bruit de fond, il y a un quart de siècle (Longuet-Higgins, 1952; Rice, 1944).

Ce modèle suppose l'état de mer décrit par un ensemble de  $N$  ondes monochromatiques :

$$F_i = a_i \cos [k_i (x \cos \theta_i + y \sin \theta_i) - 2\pi f_i t + \psi_i], \quad (1)$$

qui s'additionnent linéairement pour produire les déplacements de la surface libre :

$$\eta(\vec{x}, t) = \sum F_i. \quad (2)$$

Chaque réalisation de la fonction aléatoire  $\eta(\vec{x}, t)$  dépend du choix de variables  $a_i, f_i, k_i, \theta_i, \psi_i$  et du nombre  $N$ . Les  $\psi_i$  sont pris indépendants et répartis uniformément de 0 à  $2\pi$ . Les  $a_i$  ont leurs valeurs fixées par la variance  $m_0$  de  $\eta(\vec{x}, t)$  :

$$m_0 = \overline{\eta(\vec{x}, t)^2}, \quad (3)$$

$$a_i = \sqrt{2m_0/N} \quad (4)$$

et les valeurs de  $f_i$  et  $\theta_i$  sont déterminées suivant une densité de probabilité  $p(f, \theta)$  qui dépend de l'état de mer considéré. Enfin, les nombres d'ondes  $k_i$  sont fixés par la relation de dispersion pour les ondes de gravité de petite amplitude :

$$(2\pi f)^2 = gk \tanh kd, \quad (5)$$

où «  $d$  » est la profondeur d'eau.

Le modèle laisse  $N$  tendre vers l'infini et, donc, les valeurs de  $a_i$  vers zéro. Plutôt que la densité de probabilité  $p(f, \theta)$ , on utilise communément le spectre  $\Phi(f, \theta)$  qui lui est proportionnel :

$$\Phi(f, \theta) = m_0 p(f, \theta).$$

L'état de la mer est donc décrit statistiquement une fois  $\Phi(f, \theta)$  déterminé, et la contribution à la variance des déplacements et de la surface de l'eau, due aux ondes élémentaires de fréquences entre  $f$  et  $f+df$  et de direction entre  $\theta$  et  $\theta+d\theta$ , est donnée par  $\Phi(f, \theta)df d\theta$ .

Par un filtrage passe-bande (analyse de Fourier ou autre), il est possible d'obtenir, à partir de mesures de pilonnement et de pentes de la surface (Longuet-Higgins *et al.*, 1963), des estimations des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \Phi(f, \theta) d\theta, \quad (7)$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} k \Phi(f, \theta) \cos \theta d\theta, \quad (8)$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} k \Phi(f, \theta) \sin \theta d\theta, \quad (9)$$

$$I_4 = \int_0^{2\pi} k^2 \Phi(f, \theta) \cos^2 \theta d\theta, \quad (10)$$

$$I_5 = \int_0^{2\pi} k^2 \Phi(f, \theta) \sin \theta \cos \theta d\theta, \quad (11)$$

$$I_6 = \int_0^{2\pi} k^2 \Phi(f, \theta) \sin^2 \theta d\theta. \quad (12)$$

$I_1$  ne fait intervenir que le capteur de pilonnement;  $I_4$ ,  $I_5$  et  $I_6$  que les mesures de pentes (capteurs de roulis, tangage et cap). La relation de dispersion, étant supposée connue et indépendante de  $\theta$ ,  $I_1 = k^{-2} (I_4 + I_6)$ , ce qui fournit un contrôle immédiat du comportement des capteurs et un contrôle *a posteriori* de la relation de dispersion utilisée. La vérification de cette identité va servir pour tester le dispositif expérimental.

Si l'on considère le développement du spectre en série de Fourier suivant  $\theta$ , cette méthode fournit les cinq premiers coefficients du développement sous la forme :

$$\Phi(f, \theta) = A_0(f) + A_1(f) \cos(\theta - \theta_1(f)) + A_2(f) \cos 2[\theta - \theta_2(f)], \quad (13)$$

le vecteur  $(I_2, I_3)$  a pour direction  $\theta_1(f)$  et le vecteur  $(I_4 - I_6, 2I_5)$  a pour direction  $2\theta_2$ , ce qui définit  $\theta_2$  à  $\pi$  près (le doute étant levé par  $\theta_1$  pour des spectres assez réguliers en direction). Cette méthode ne préjuge en rien de la forme du spectre.

Une autre méthode proposée récemment (Long, Hasselmann, 1979; Long, 1980) permet d'ajuster de façon optimale les paramètres d'un modèle de spectre directionnel aux observations et de tester la validité du modèle choisi.

Ne recherchant pas ici une description détaillée du spectre directionnel, nous n'avons pas utilisé ce nouvel outil.

## LE SYSTÈME EXPÉRIMENTAL

Le système expérimental comporte, d'une part la bouée proprement dite équipée de ses capteurs, de son alimentation autonome et de son émetteur radio et d'autre part la station de réception des signaux où sont effectués en parallèle le traitement en temps réel et le stockage des données brutes.

### L'appareillage à la mer

Le corps de bouée en fibre de verre a la forme d'un tore de 2,50 m de diamètre et de 80 cm de haut avec un fond plat rapporté (bouée XM 25, Néréides); le puits cylindrique

central permet de loger un bac de 80 piles de 1,5 V - type Mazda 417 d'une capacité de 130 AH chacune - un capteur de pilonnement, roulis, tangage (Hippy 40, Datawell, 1977), un magnétomètre (Crouzet) et un système de transmission de données John et Reilhofer.

### Les signaux de pilonnement et de roulis tangage

Le signal de pilonnement est obtenu par double intégration analogique de l'accélération verticale. La fonction de transfert complexe  $H(T)$  fournie par le constructeur (Datawell, 1977) est :

$$H(T) = [(1 - 1,324 \times 10^{-3} T^2) + j(6,2 \times 10^{-6} T^3 - 5,18 \times 10^{-2} T)]^{-1}$$

La figure 1a présente le module et la phase de cette fonction de transfert du continu à 30 secondes. On notera d'une part que l'atténuation due au filtre, négligeable en dessous de 10 secondes, atteint 10 % à 21 secondes et 28 % à 30 secondes et d'autre part que le déphasage  $\Phi$  (à  $2\pi$  près), le signal de sortie est en avance sur le pilonnement (réel) est convenablement représenté par une fonction linéaire de la période :

$$\Phi = 3,2 T$$

degré      seconde

Les signaux de roulis et tangage fournis par le capteur sont proportionnels au sinus des angles de roulis et tangage et ont une bande passante de 0 à 5 Hz.

Un étalonnage « statique » a permis de corriger les relations nominales :  $v = 10 \sin \gamma$  par les relations :

$$\sin \gamma_r = 0,1022 v_r + 0,0018,$$

$$\sin \gamma_T = 0,1013 v_T + 0,0032$$

et de vérifier la linéarité de ces relations (fig. 1b).

$\gamma_r$  et  $\gamma_T$  sont les angles de roulis et tangage,  $v_r$  et  $v_T$  les tensions en volts issues des capteurs.

Le déphasage introduit par ces capteurs est linéaire en fréquence en dessous de 1,5 Hz et correspond à un décalage en temps de 0,06 seconde; il n'en sera pas tenu compte dans les calculs.

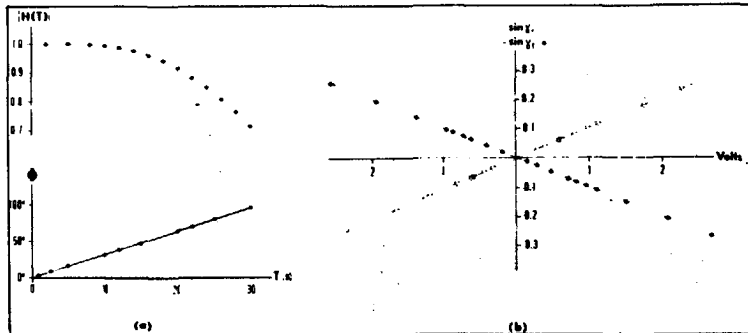


Figure 1  
a : Fonction de transfert du capteur de pilonnement; b : Étalonage du capteur de roulis-tangage.

a : Transfer function of the heave sensor. b : Pitch and roll sensor calibration.

## Les signaux du compas-magnétomètre

Nominalement, le compas fournit deux tensions  $U_s$  et  $U_c$ , proportionnelles au sinus et cosinus de l'angle de cap. En réalité, ce magnétomètre, monté à la cardan, est soumis à la composante horizontale du champ magnétique terrestre, mais aussi à la résultante des champs magnétiques créés dans la bouée, notamment par les conducteurs d'alimentation. Il s'ensuit que les courbes d'étalonnages « statiques » présentent des décalages de zéro différents pour les deux composantes  $U_s$  et  $U_c$ , mais conservent une allure sinusoïdale pour une rotation de  $360^\circ$  de la bouée. Une première approximation de l'étalonnage consiste alors, au cours d'une rotation de  $360^\circ$ , à repérer pour chaque composante, la valeur du maximum et du minimum, d'où l'on déduit l'amplitude et le décalage de zéro pour chaque signal.

Lorsque cet étalonnage est effectué en mer, on constate qu'un bruit haute fréquence se superpose à la sinusoïde. Le spectre de ce signal (fig 2a) présente un maximum autour de 1,34 seconde; la même forme de spectre est obtenue pour des enregistrements en fonctionnement normal (fig. 2b) quoique d'une intensité plus faible. Il est difficile de croire à des mouvements de la bouée autour de cette fréquence, aussi ce signal parasite haute fréquence est-il éliminé par filtrage au-delà de 0,5 Hz (position du minimum du spectre).

Ce traitement est systématiquement appliqué sur toutes les séquences de mesure. Les constantes déterminées ainsi, à partir du maximum et minimum après filtrage passe-bas, sont ensuite contrôlées en utilisant les valeurs moyennes de sinus et cosinus obtenues sur 8 minutes

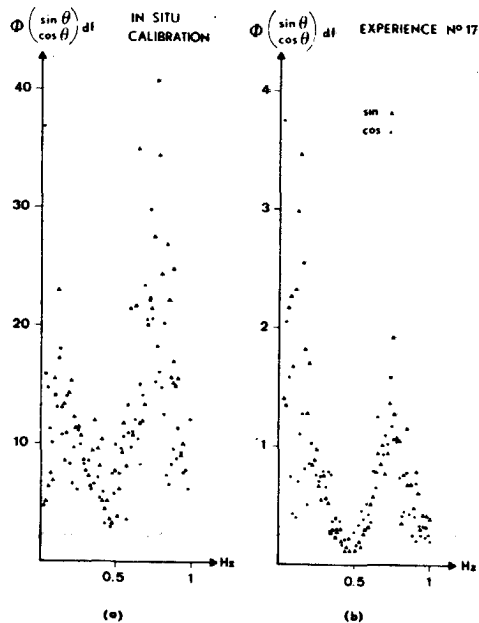


Figure 2  
Spectres des signaux du compas.  
Compass signal spectra.

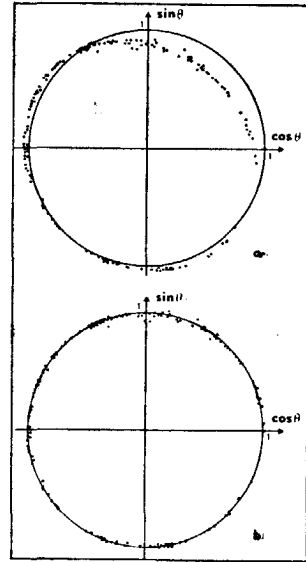


Figure 3  
Étalonnage du compas : (a) sans correction; (b) en tenant compte de l'influence mutuelle.  
Compass calibration (a) uncorrected; (b) after cross-talk correction.

d'enregistrements. La figure 3a présente, par rapport au cercle unité, 214 couples de points sinus-cosinus obtenus au cours de la campagne Marsen. L'écart constaté entre le cercle théorique et les points expérimentaux indique que l'étalonnage initial doit être légèrement modifié au niveau des constantes de proportionnalité et du décalage de zéro, mais surtout qu'un couplage de l'ordre de 6 % existe entre les tensions des voies sinus et cosinus. La figure 3b tient compte de ces corrections.

Les relations à utiliser sont donc de la forme :

$$\cos \theta = \frac{(c_1 U_c + c_2) + k(s_1 U_s + s_2)}{1 - k^2}$$

et :

$$\sin \theta = \frac{(s_1 U_s + s_2) + k(c_1 U_c + c_2)}{1 - k^2}$$

avec :

$$k = 0,06, \quad c_1 = 0,535, \quad c_2 = 0,1408,$$

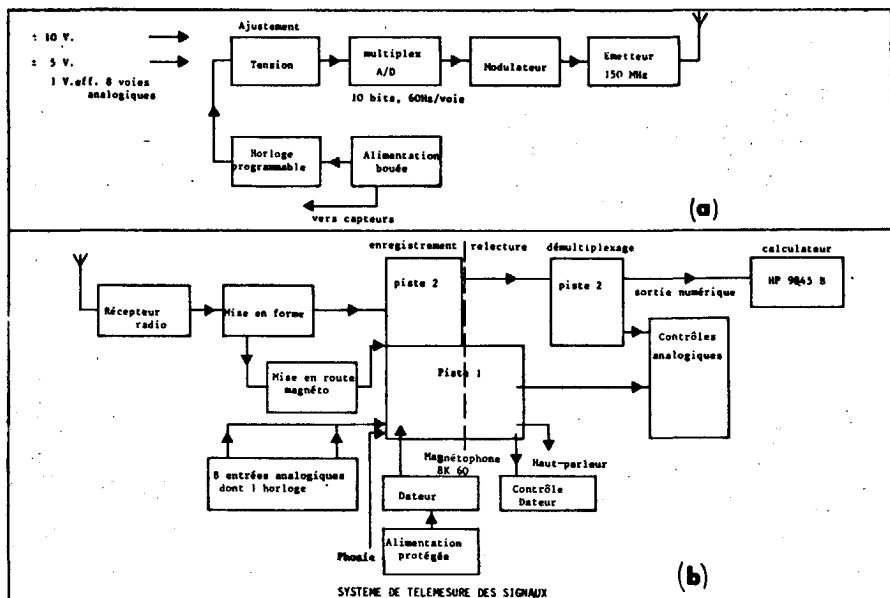
$$s_1 = 0,457, \quad s_2 = 0,4514.$$

De plus, une normalisation du vecteur  $(\cos \theta, \sin \theta)$  expérimental est effectuée.

### Le système de transmission

Les cinq signaux analogiques issus des capteurs sont digitalisés sur 10 bits, dans la gamme  $\pm 10$  V pour le pilonnement et cap, et  $\pm 5$  V pour roulis et tangage échantillonnés à 60 Hz par voies et transmis suivant un code PCM sur une porteuse à 150 MHz (fig. 4a). Un dispositif d'horloge permet de programmer les séquences d'émission en mode continu, 20 minutes par heure ou

Figure 4  
Système de téléme-  
sure des signaux.  
Transmitting and  
recording system.



20 minutes toutes les 2 heures. La puissance d'émission est de 1 W, la portée radio du système est limitée à la portée optique. La consommation de ce système est de 250 mA sous 15 V.

Les trois voies analogiques supplémentaires disponibles dans le module émetteur peuvent être utilisées pour d'autres capteurs.

#### Le système de réception

Le système de réception (fig. 4b) est formé de modules Johne et Reilhofer; il est constitué d'un récepteur radio associé à un module de remise en forme des signaux; ceux-ci rentrent directement sur une piste de magnétophone système 8K60.

L'autre piste du magnétophone peut recevoir, par l'intermédiaire de son électronique propre, huit voies analogiques distinctes de la transmission radio. Une tête de relecture deux pistes permet, par une électronique de démultiplexage, de contrôler analogiquement tous les signaux enregistrés sur la bande magnétique. Par ailleurs, un système de dateur entrelace, parmi les données, l'information de temps pour un recalage ultérieur.

Une sortie numérique (à la relecture) permet à un calculateur Hewlett-Packard 9845 B d'acquérir en temps réel les données enregistrées et d'effectuer le traitement. Le système d'acquisition est automatiquement mis en route lors d'une émission bouée; l'autonomie d'enregistrement est alors de 2 jours pour des séquences de 20 minutes toutes les 2 heures.

#### BIAIS INTRODUICTS PAR LE CALCUL DANS L'ESTIMATION DES SPECTRES

En faisant l'analyse de Fourier d'un enregistrement de durée  $T$ , échantillonné à la fréquence  $f_i$ , on obtient les coefficients de Fourier en cosinus et sinus ( $A_i$  et  $B_i$ ) aux

fréquences  $f_i = i/T$  ( $i$  allant de 1 à  $f_s T/2$ ). L'estimation de l'énergie — dans la bande de largeur  $df = 1/T$ , centrée en  $(\pi/T) - \hat{\Phi}(f_i)df$ , peut être obtenue comme la demi-somme des carrés des coefficients  $A_i$  et  $B_i$  (puis moyennée sur plusieurs valeurs successives pour réduire la variance de l'estimation).

Parce que cette méthode de filtrage est imparfaite, l'estimation est contaminée par l'apport d'énergie venant de l'ensemble du spectre. Ainsi, en moyenne l'énergie estimée est en fait donnée par la relation approchée :

$$\hat{\Phi}(f_i)df = \overline{(A_i^2 + B_i^2)}/2 = \int_0^{\infty} \Phi(f) \cdot \tau(f_i, f, T) df, \quad (14)$$

où (voir annexe) :

$$\tau(f_i, f, T) = \frac{2 \{ 1 - \cos 2\pi T [f_i - f] \}}{(2\pi T)^2 [f_i - f]^2} \quad (15)$$

et  $\Phi(f)$  est le spectre du signal considéré; cette relation n'est valable que pour des longueurs d'enregistrements grandes par rapport aux périodes les plus longues contenues dans le spectre du signal.

#### Application à différents spectres

Ce résultat va être employé pour évaluer le biais de calcul introduit dans les cas suivants :

- spectres de pilonnement de Pierson-Moskowitz et de Jonswap;
- spectres composites  $\Phi_c$ , sommes des spectres de pentes correspondant aux mêmes spectres théoriques de pilonnement.

Ces calculs théoriques vont montrer une surestimation aux basses fréquences des spectres de pilonnement calculés comme  $\Phi = \Phi_c/k^2$ . Ce résultat théorique, retrouvé dans les résultats de mesures, permettra leur interprétation.

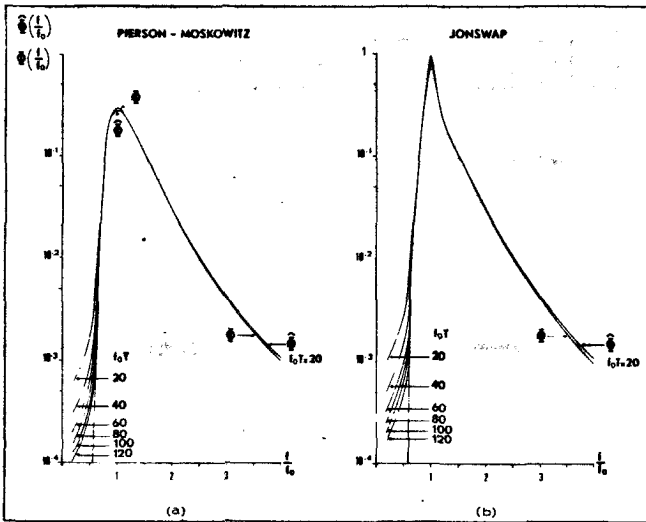


Figure 5  
Esperance de l'estimation de spectre d'enregistrements de durées limitées, T.  
Expectancy of spectra estimator for records of finite duration, T.

Un spectre de Pierson-Moskowitz s'écrit sous la forme :

$$\Phi_p\left(\frac{f}{f_0}\right) = \alpha g^2 (2\pi f_0)^{-4} \left(\frac{f}{f_0}\right)^{-5} e^{-\left(f/f_0\right)^{4/3}} \quad (16)$$

et un spectre Jonswap (Hasselmann *et al.*, 1973) :

$$\Phi_j\left(\frac{f}{f_0}\right) = \alpha g^2 (2\pi f_0)^{-4} \left(\frac{f}{f_0}\right)^{-5} e^{-\left(f/f_0\right)^{4/3}} \cdot \exp\left[-\left(f/f_0\right)^{-2} (2\sigma^2)\right] \quad (17)$$

où  $\Phi(f/f_0)$  est la densité d'énergie et  $f_0$  la fréquence du maximum du spectre.

Employant le résultat du paragraphe précédent, on obtient comme estimation de l'énergie dans la bande de fréquence adimensionnelle  $(f_1/f_0)$  d'un enregistrement de longueur T :

$$\hat{\Phi}\left(\frac{f_1}{f_0}\right) d\left(\frac{f_1}{f_0}\right) = d\left(\frac{f_1}{f_0}\right) \int_0^{f_1/f_0} \Phi\left(\frac{f}{f_0}\right) \times \tau\left(\frac{f_1}{f_0}, \frac{f}{f_0}, f_0 T\right) d\left(\frac{f}{f_0}\right) \quad (18)$$

Cette intégrale est calculée numériquement pour  $f/f_0$  variant de 0,2 à 5 pour différentes valeurs du paramètre  $f_0 T$  (de 20 à 120 par pas de 20).

Les figures 5a pour un spectre de Pierson-Moskowitz et 5b pour un spectre de Jonswap présentent sur une échelle semi-logarithmique la courbe théorique  $\Phi(f/f_0)$  et les valeurs de  $\hat{\Phi}(f/f_0)$  au coefficient  $\alpha g^2 (2\pi f_0)^{-4}$  près.

Dans les deux cas, le front basse fréquence, très raide, du spectre théorique est modifié par le calcul : il apparaît une densité d'énergie très faible par rapport au maximum du spectre (de l'ordre de 1/100) pour  $f/f_0 < 0,6$  qui croît lorsque  $f_0 T$  diminue. Il faut noter que pour  $f/f_0 = 0,7$  et  $f_0 T = 60$ , l'estimation du spectre est seulement de 5 % plus forte que la valeur théorique pour un spectre de Pierson-Moskowitz, et atteint 9 % pour un spectre de

Jonswap. A titre d'exemple,  $f_0 T = 60$  correspond pour 512 secondes d'enregistrement à une période du maximum  $T_0$  de 8,53 secondes; le modèle de Pierson-Moskowitz donne une période moyenne  $\bar{T}$  de 6,07 secondes.  $H_{1/3} = 2,9$  m et à 12,2 secondes, l'énergie est surestimée de 5 %.

#### Le spectre composite des pentes, $\Phi_c(f)$

Soit  $\Phi_x(f)$  et  $\Phi_y(f)$  les spectres des signaux de pentes suivant les axes fixes x et y, orthogonaux. Leur somme,  $\Phi_c$ , fournit le spectre de pilonnement par la relation :

$$\Phi_n(f) = k^{-2} (\Phi_x(f) + \Phi_y(f)) = k^{-2} \Phi_c(f) \quad (19)$$

Nous désignerons par les notations  $\Phi_{c,p}(f)$  et  $\Phi_{c,j}(f)$  les spectres composites déduits des modèles de Pierson-Moskowitz et de Jonswap, par  $\hat{\Phi}_c$  leurs estimations par analyse de Fourier et par  $\bar{\Phi}_c$  le spectre de pilonnement déduit de  $\hat{\Phi}_c$ .

Spectre déduit de P.M. en eau profonde :

En eau profonde :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{g}{2\pi f^2},$$

d'où :

$$\Phi_{c,p}(f) df = \frac{(2\pi f^2)^2}{g^2} \Phi_p(f) df \quad (20)$$

On en déduit :

$$\Phi_{c,p}\left(\frac{f}{f_0}\right) = \alpha (2\pi)^{-2} \left(\frac{f}{f_0}\right)^{-1} e^{-\left(f/f_0\right)^{4/3}} \quad (21)$$

L'estimation de ce spectre par analyse de Fourier  $\hat{\Phi}_{c,p}(f/f_0)$  sera obtenue par convolution avec la fonction de transfert  $\tau(f_1/f_0, f/f_0)$ , soit :

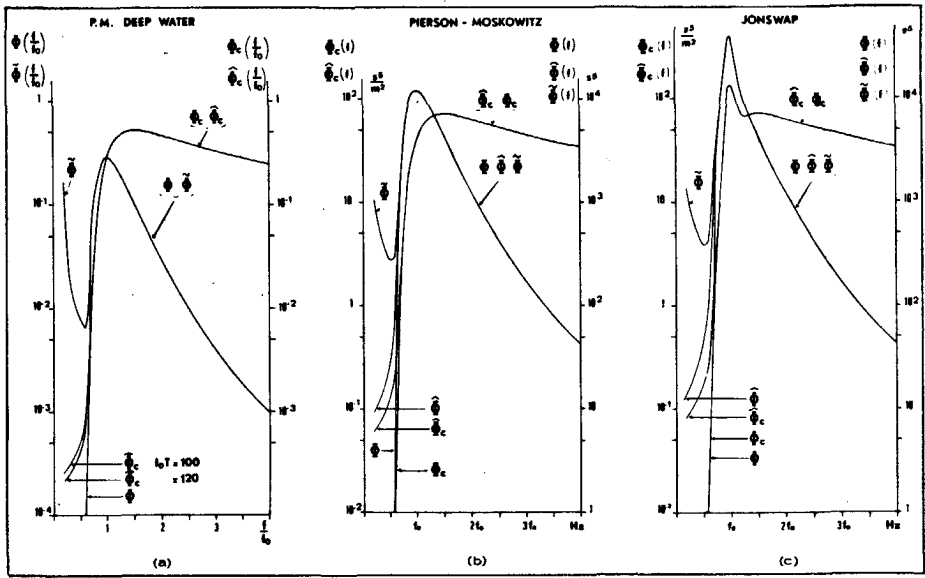


Figure 6

Espérance de l'estimation de différents spectres pour des enregistrements de durées limitées. (a) en eau profonde; (b) et (c) en eau peu profonde :  $f_0 = 0,1182$  Hz,  $d = 39$  m,  $T = 500$  secondes.

$$\hat{\Phi}_{c,p} \left( \frac{f_i}{f_0} \right) d \left( \frac{f}{f_0} \right) = d \left( \frac{f}{f_0} \right) \int_0^\alpha \Phi_{c,p} \left( \frac{f}{f_0} \right) \times \tau \left( \frac{f_i}{f_0}, \frac{f}{f_0} \right) d \left( \frac{f}{f_0} \right)$$

L'équation (18) est linéaire en  $\Phi$ , elle s'applique donc au spectre composite, somme des spectres des deux composantes de la pente. Si maintenant, nous divisons  $\hat{\Phi}_{c,p}(f_i/f_0)$  par  $k_i^2$ , nous obtiendrons une estimation du spectre de pilonnement  $\hat{\Phi}(f/f_0)$ .

La figure 6a présente, aux coefficients constants près, les courbes théoriques initiales  $\Phi_p$  et  $\Phi_{c,p}$ , deux estimations  $\hat{\Phi}_p$  pour  $f_0 T = 100$  et 120 et l'estimation  $\hat{\Phi}_p$  que l'on déduit pour  $f_0 T = 100$ .

On constate immédiatement que pour  $f/f_0 > 0,8$ , les spectres de pilonnement théorique et estimé d'après les pentes sont confondus; par contre, il apparaît une remontée aux basses fréquences du spectre estimé  $\hat{\Phi}(f/f_0)$  pour  $f/f_0 < 0,6$ . Cette remontée est due au fait que l'on effectue le rapport de deux nombres qui vont en décroissant, le dénominateur  $k^2$  variant ici comme  $f^4$ , puisque nous avons fait l'hypothèse d'eau profonde. Or, c'est précisément dans cette zone que cette hypothèse est la plus critiquable; le fait d'introduire la profondeur pourrait atténuer ce phénomène, puisque  $k^2$  varie alors comme  $f^2$ .

#### Influence de la profondeur d'eau

La relation de dispersion  $(2\pi f)^2 = gk \tanh kd$  rend plus complexe l'utilisation de variables adimensionnelles; pour illustrer cette influence, nous utiliserons des

Expectancy of spectra estimators for records of finite length  $T$ . (a) deep water; (b) and (c) shallow water:  $f_0 = 0,1182$  Hz;  $d = 39$  m;  $T = 500$  secondes.

conditions expérimentales-type de la campagne Marsen :  $f_0 = 1,182 \times 10^{-1}$  Hz,  $d = 39$  m,  $T = 500$  secondes ( $f_0 T = 60$ ) sur des spectres théoriques de Pierson-Moskowitz et Jonswap avec pour ce dernier  $\gamma = 3,3$ ,  $\sigma_a = 0,07$  et  $\sigma_b = 0,09$ .

Les figures 6b et c présentent respectivement pour les spectres de Pierson-Moskowitz et Jonswap les résultats obtenus pour  $\hat{\Phi}$  et  $\hat{\Phi}_p$  par rapport au spectre théorique de pilonnement  $\Phi$ , ainsi que l'estimation par la FFT,  $\hat{\Phi}_c$  du spectre théorique de pente  $\Phi_c$  [au facteur  $\alpha g^2 (2\pi)^{-4}$  près]. On constate dans les deux cas que pour  $f > 0,8 f_0$ , les estimations  $\hat{\Phi}$  et  $\hat{\Phi}_p$  coïncident avec les spectres de pilonnement initiaux. Le phénomène de remontée des basses fréquences se produit pour  $f \approx 6,5 \times 10^{-2} f_0$  soit  $0,55 f_0$ , ce qui est voisin du cas eau profonde, mais la courbure est nettement atténuée. La valeur du minimum reste sensiblement la même pour le spectre de P.M. en eau profonde et en profondeur finie [attention à  $\Phi(f/f_0)$  et  $\Phi(f)$ ]. Prenant la même valeur de  $\alpha$  pour comparer les ordonnées, on constate une légère augmentation du minimum (3,8 au lieu de 2,8) de  $\hat{\Phi}_p$  par rapport à  $\hat{\Phi}_p$ , ce que l'on peut attribuer à l'influence de  $\gamma$ .

#### COMPARAISON A L'EXPERIENCE

##### La bouée durant Marsen

Dans le cadre de notre participation à la campagne Marsen, la bouée directionnelle a été mouillée en Mer du Nord par  $54^\circ 12' 26''$  N et  $7^\circ 45' 48''$  E au nord-ouest de l'île d'Heligoland par 39 m d'eau.

Les mesures ont été enregistrées et traitées toutes les 2 heures du 19 au 30 septembre 1979, exception faite de la journée du 21 pendant laquelle une intervention sur le circuit d'alimentation électrique de la bouée a été nécessaire.

Le traitement en temps réel, effectué sur l'île d'Heligoland, a permis de contrôler visuellement les résultats du calcul sur les directions de propagation pour les composantes contenant le plus d'énergie. Pour les courtes périodes, la comparaison de leurs directions déterminées par le calcul à la direction du vent local mesuré sur l'île, a permis de vérifier la bonne concordance des résultats obtenus. Cette confrontation entre résultats et observations est particulièrement significative les 24 et

25 septembre : les rotations du vent créent des rotations analogues pour les directions des composantes de courtes périodes (fig. 7).

### Intercomparaison des spectres de mesures

Les spectres de mesures sont obtenus comme moyenne de deux spectres calculés sur deux blocs consécutifs de 1 024 points, échantillonnés à 2,148 Hz, puis lissés sur huit bandes consécutives. On obtient ainsi des estimations à 32 degrés de liberté sur 64 bandes. Étant donné les caractéristiques du capteur de pilonnement et de la bouée (diamètre de 2,5 m), la bande de fréquence significative s'étend de 0,033 à 0,5 Hz.

Les figures 8 a et b présentent la comparaison des spectres d'énergie estimés d'après les mesures de pilonnement et les mesures de pentes. L'expérience n° 17 (20 septembre 1979 à 21 H.Z.) — correspond à la hauteur significative maximale mesurée au cours de ces mesures ( $H_{1/3} = 3,60$  m); l'expérience n° 57 (26 septembre 5 H 45 Z.) — illustre un cas courant ( $H_{1/3} = 1,90$  m).

On constate immédiatement dans les deux cas, la remontée aux basses fréquences du spectre (le phénomène avait déjà été observé par Hasselmann *et al.*, 1973, p. 18 et 19) déduit des spectres de pente ( $\Phi(f)$ ), ainsi qu'une similitude entre les deux estimations  $\Phi(f)$  et  $\tilde{\Phi}(f)$  au pic et aux fréquences supérieures.

Afin de mieux cerner la comparaison, il est commode d'utiliser comme paramètre, pour chaque bande de fréquence, le rapport  $R(f)$  de l'énergie du spectre déduit du pilonnement à l'énergie du spectre calculé à partir du roulis-tangage  $R(f) = \tilde{\Phi}(f)/\Phi(f)$ .

La figure 9 présente la moyenne  $M_j R$ ,  $R$  et l'écart-type  $E_j R$ , par bande de fréquence, de ces rapports sur toutes les expériences disponibles. Compte tenu de l'étude théorique du chapitre précédent, ce rapport n'est significatif et n'a été calculé que d'environ  $0,8 f_0$  — ( $f_0$  est la fréquence du maximum du spectre) — à la fréquence de coupure de la bouée ( $\approx 0,5$  Hz). Étant donné les différents états de mer rencontrés, le nombre de valeurs sur lequel sont effectuées les moyennes varie de 46 à 101 (valeurs reportées sur la figure).

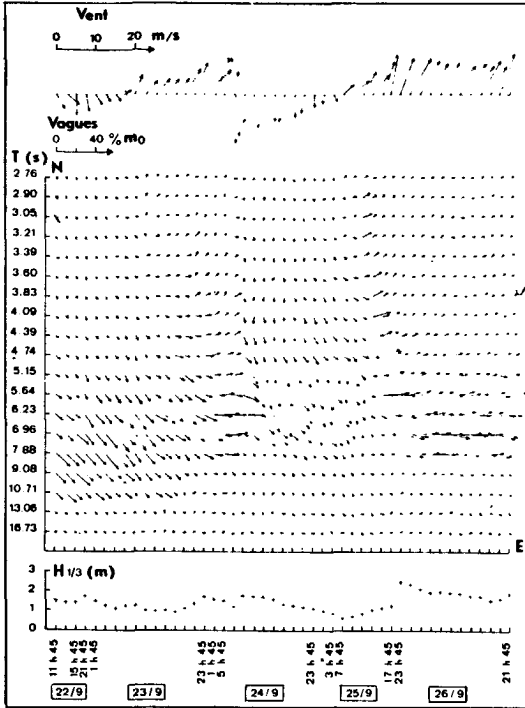


Figure 7

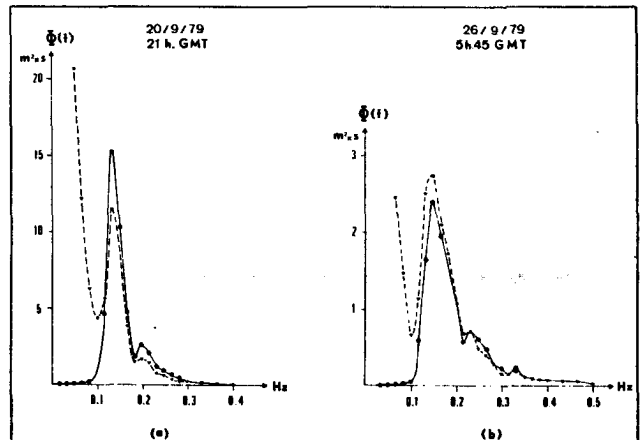
Chronologie du vent, de la direction moyenne du spectre directionnel par bandes de fréquences et des hauteurs significatives.

*Time series of wind, mean direction of the wave directional spectrum in consecutive frequency bands and significant wave height.*

Figure 8

Spectres de déplacements de la surface libre obtenus des mesures de pilonnement (●) et des mesures de pentes (▼).

*Sea surface spectra computed from heave (●) and slope (▼) measurements.*





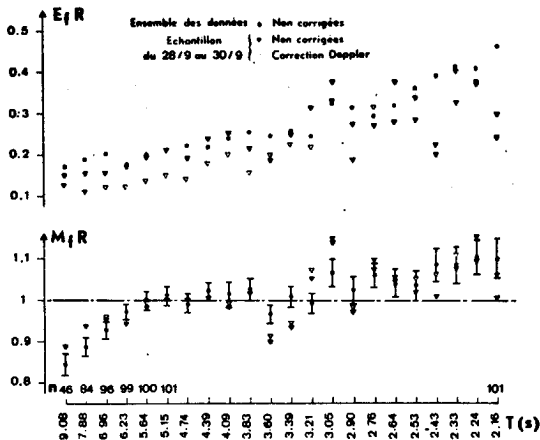


Figure 9  
Moyennes (M) et écarts-types (E) du rapport (R) en fonction de la fréquence.  
Mean (M) and standard deviation (E) of the ratio R as functions of frequency.

La moyenne de ces rapports d'énergie  $M_f R$  s'écarte au plus de 10 % de l'unité pour les bandes de fréquences correspondant aux périodes comprises entre 2,16 et 7 secondes (ceci implique une réponse identique des capteurs à 5 % près); l'écart dépasse 10 % et atteint 15 % pour les bandes extrêmes considérées (7,88 et 9,08 secondes), mais il est vraisemblable que ces bandes sont affectées par l'effet de remontée aux basses fréquences du spectre calculé d'après les pentes  $\Phi(f) -$  la valeur  $0,8 f_0$  étant obtenue pour un spectre théorique -.

L'écart-type des rapports,  $E_f R$ , croît régulièrement lorsque les périodes diminuent et passe de 0,17 pour 9,08 secondes à 0,47 pour 2,16 secondes; ceci suggère qu'un phénomène physique, croissant avec la fréquence, vient perturber la mesure.

Une indication sur la nature de ce phénomène est fournie en calculant, pour chaque spectre, la moyenne,  $M_f R$ , sur toutes les bandes de fréquences significatives des rapports d'énergie  $R(f)$ .

La figure 10 présente, sur une suite chronologique de 29 expériences (du 28 septembre, 7 h 45 Z au 30 septembre, 19 h 45 Z), les variations de  $M_f R$  en fonction du temps. Les expériences étant programmées toutes les deux heures, on remarque immédiatement un cycle de 12 heures de période (étant donné le nombre d'échantillons, il est illusoire de chercher une définition plus précise) et d'une amplitude de l'ordre de 20 % autour de l'unité. Parallèlement à cette courbe, on a reporté le cap de la bouée; il indique une rotation continue de la bouée dans le sens du courant de marée. Il faut remarquer que durant cette période, les vents sont faibles (de l'ordre de 10 nœuds) passant successivement et de façon continue du secteur sud-ouest au secteur nord-ouest; ils influenceront les directions des composantes de période de l'ordre de ou inférieures à 3 secondes, alors que les composantes autour du pic des spectres suivent sensiblement toutes une direction constante (vers le 120).

Il est logique de supposer que la marée provoque cette modulation de 20 % en amplitude et de 12 heures de période.

La marée ne peut agir que de deux façons sur le rapport  $R(f)$  et ce, en modifiant la relation de dispersion utilisée  $k=k(d, f)$  (relation 5), soit par des variations de la hauteur d'eau  $d$ , soit par des modifications de fréquence  $f$ , engendrées par le courant de marée.

L'influence de la variation de hauteur d'eau est négligeable aux périodes considérées; en effet, plus ou moins 1 m de dénivellation autour de 39 m, provoque une variation de moins ou plus 3‰ sur le nombre d'ondes à 9,08 secondes et *a fortiori*, un écart encore plus faible aux fréquences plus hautes. La conclusion est donc que le courant de marée se compose vectoriellement avec la vitesse des ondes, ce qui provoque une variation Doppler de fréquence au point fixe. Cet effet n'est pas pris en compte lors du calcul des rapports  $R(f)$  pour lequel on a utilisé la fréquence nominale liée à la célérité propre des ondes sans courant.

Pour vérifier cette conclusion, un modèle très simple de courant de marée a été employée: vecteur courant suivant une ellipse de 12 heures de période, vitesse maximale de 1 nœud suivant le grand axe pris parallèlement à la direction de propagation moyenne des vagues, excentricité de l'ellipse égale à 1/3. Avec l'hypothèse complémentaire que le spectre de vague est unidirectionnel la correction du Doppler entraîne la disparition de la périodicité à 12 heures et une réduction supérieure à 50 % de l'écart type de la série temporelle des  $M_f R$  (fig. 10). Cette correction ne modifie pas sensiblement la valeur moyenne qui passe de 1,02 à 1,00.

Compte tenu de l'effet Doppler et de son influence sur la détermination correcte de  $R(f)$ , et donc de  $M_f R$ , les conclusions tirées de la figure 9 sont-elles erronées?

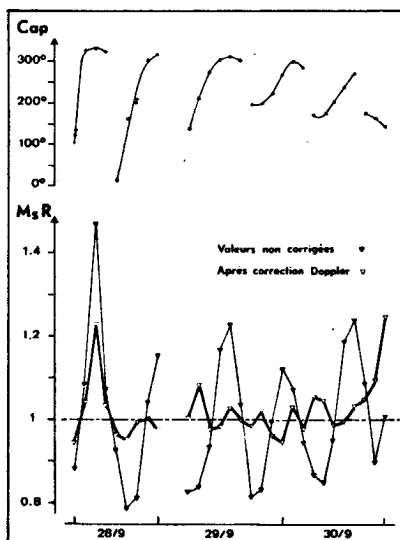


Figure 10  
Chronologie des caps moyens et des moyennes par enregistrement du rapport R.  
Means of buoy heading and ratio R as a function of time.

Pour pouvoir répondre, nous avons vérifié que  $M_f R$  et  $E_f R$  sur ces 29 expériences sont représentatives de l'ensemble des données (101 expériences), puis corrigé chaque bande de fréquence et pour chaque spectre de l'effet Doppler correspondant.

L'estimation de  $M_f R$ , après correction, ne montre pas de variations sensibles par rapport à l'estimation initiale (fig. 9); ceci veut dire que l'on a filtré l'effet du courant de marée en moyennant sur plusieurs cycles.

L'écart-type  $E_f R$ , une fois corrigé de l'effet Doppler, diminue sensiblement de moitié pour les périodes entre 3.6 et 9.08 secondes. Par contre, pour les périodes inférieures à 3.6 secondes, la diminution de  $E_f R$  n'est plus systématique, alors que c'est dans cette bande de période qu'elle aurait dû être la plus efficace. Ceci est dû au fait que durant la période analysée les vents sont faibles et tournent régulièrement et que les directions des hautes fréquences du spectre de vagues, directement liées à cette direction, ne correspondent pas à la direction de propagation utilisée dans le modèle de correction.

## CONCLUSIONS

Les bouées de mesures du spectre directionnel des vagues (pilonnement, roulis, tangage, cap) ont deux avantages importants par rapport aux autres instrumentations possibles: elles sont utilisables quelle que soit la profondeur d'eau en dehors de la zone littorale de déferlement, et elles fournissent une information continue en fréquence sur tout le spectre de vagues de périodes supérieures à 2,5 secondes. Elles posent cependant un certain nombre de problèmes spécifiques: influence de l'ancrage, fonction de transfert en roulis-tangage, effet Doppler des courants.

L'analyse des mesures effectuées pendant Marsen a permis d'évaluer ces différents phénomènes et de s'assurer du bon comportement de la bouée.

L'étalonnage précis des capteurs et une étude théorique de l'influence du filtrage par transformé de Fourier permettent d'interpréter convenablement les spectres expérimentaux calculés pour les différents capteurs. La redondance de l'information, venant d'une part des mesures de déplacements verticaux et d'autre part, des mesures de pentes, assure la cohérence des mesures et permet d'estimer leur précision. Ceci confirme que le mouillage n'influe pas sensiblement sur le comportement de la bouée.

Les directions de propagation des composantes du spectre de vagues coïncident avec les mesures de vent pour les courtes périodes et avec les observations visuelles effectuées durant la campagne. La continuité dans le temps de ces directions est une autre indication de la qualité des informations.

Enfin, il a été possible de mettre en évidence et d'évaluer l'effet Doppler du courant de marée sur les nombres d'ondes du spectre de vagues.

## Remerciements

L'intégration des différents modules de la bouée a été possible grâce aux efforts de MM. J. P. Gouillou de l'Équipe de Physique et J. Y. Bervas du Département Technologie et Développements Industriels du CNEXO/COB.

L'aide financière du comité scientifique de l'OTAN nous a permis de participer à Marsen, campagne sous la direction du Professeur K. Hasselmann (Max Planck Institut für Meteorologie).

Nous tenons à remercier MM. K. Richter et Hempel, du D.H.I., M. K. Schulze de l'équipe de coordination Marsen, ainsi que M<sup>lle</sup> S. Mielke du Biological Institut d'Heligoland pour l'assistance qu'ils nous ont fournie au cours de cette campagne.

## RÉFÉRENCES

- Datwell B. V., 1977. *Hippy 40 s sensor manual*, Laboratorium voor Instrumentatie Haarlem, Netherlands.
- Ezraty R., Cavané A., 1979. *Deux méthodes de détermination de la direction de la houle par bandes de fréquences à partir d'une bouée mesurant les déplacements et les pentes de la surface de l'eau*, Rapp. Interne DEOc-Phys '01 '79, CNEXO/COB, Brest.
- Hasselmann K., Barnett T. P., Bouws E., Carlson H., Cartwright D. E., Enke K., Ewing J. A., Gienapp H., Hasselmann D. E., Kruseman P., Meerburg A., Müller P., Olbers D. J., Richter K., Sell W., Walden H., 1973. Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (Jonswap), *Dtsch Hydrogr. Z., Reihe A*, 8. 12.
- Long R. B., 1980. The statistical evaluation of directional spectrum estimates derived from pitch/roll buoy data, *J. Phys. Oceanogr.*, 10, 944-952.
- Long R. B., Hasselmann K., 1979. A variational technique for extracting directional spectra from multi-component wave data, *J. Phys. Oceanogr.*, 9. 2, 373-381.
- Longuet-Higgins H. S., 1952. On the statistical distribution of the heights of sea waves, *J. Mar. Res.*, 11, 3, 345-366.
- Longuet-Higgins H. S., Cartwright D. E., Smith N. D., 1963. Observations of the directional spectrum of sea waves using the motions of a floating buoy, in: *Ocean wave spectra*, Proc. Prentice Hall.
- Rice S. O., 1944. Mathematical analysis of random noise, in: *selected papers on Noise and stochastic processes*, edited by Nelson Wax, Dover Publ. Inc., New York.

## ANNEXE

### Estimation de l'énergie du spectre, à une fréquence donnée, par transformé de Fourier.

Supposons mesurés, au point fixe, sur l'intervalle de temps (0, T) les déplacements de la surface libre donnés par l'équation :

$$\eta(t) = \sqrt{2m_0/N} \sum_{n=1}^N \cos(\omega_n t + \Psi_n),$$

où les  $\Psi_n$  et  $\omega_n$  sont des variables aléatoires de lois décrites par des densités de probabilité  $p(\Psi_n) = 1/2\pi$  et  $p(\omega_n)$  fonction du phénomène physique étudié.

Les coefficients de Fourier  $a_1$  et  $b_1$  de la fonction périodique  $\eta_T(t)$ , de période  $T$ , égale à  $\eta(t)$  presque partout sur l'intervalle de temps  $(0, T)$  sont obtenues à l'aide des équations :

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_0^T \eta(t) \cos(2\pi t/T) dt, \quad (1)$$

$$b_1 = \frac{2}{T} \int_0^T \eta(t) \sin(2\pi t/T) dt. \quad (2)$$

En effectuant les calculs nécessaires, on aboutit aux formules suivantes :

$$a_1 = \sum_{n=1}^N a_{1n}, \quad (3)$$

$$b_1 = \sum_{n=1}^N b_{1n}, \quad (4)$$

où :

$$a_{1n} = \sqrt{2m_0/N} [\sin \Psi_n - \sin(\omega_n T + \Psi_n)] \times [(2\pi 1 - \omega_n T)^{-1} - (2\pi 1 + \omega_n T)^{-1}], \quad (5)$$

$$b_{1n} = \sqrt{2m_0/N} [\cos \Psi_n - \cos(\omega_n T + \Psi_n)] \times [(2\pi 1 - \omega_n T)^{-1} + (2\pi 1 + \omega_n T)^{-1}]. \quad (6)$$

En vertu du théorème central limite, les coefficients de Fourier  $a_1$  et  $b_1$ , somme de  $N$  variables aléatoires centrées de même loi, tendent vers des variables aléatoires gaussiennes lorsque  $N$  tend vers l'infini. Dans la pratique, ce comportement est bien vérifié et l'on admet que ces coefficients sont effectivement des variables aléatoires gaussiennes.

La demi-somme des carrés des coefficients  $a_1$  et  $b_1$  a pour expression :

$$(a_1^2 + b_1^2)/2 = \left[ \sum_{n=1}^N (a_{1n}^2 + b_{1n}^2) \right] / 2 + \left[ \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N (a_{1i} a_{1j} + b_{1i} b_{1j}) - \sum_{n=1}^N (a_{1n}^2 + b_{1n}^2) \right] / 2. \quad (7)$$

Cette nouvelle variable aléatoire, somme du carré de deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes, suit donc une loi du khi-deux à deux degrés de liberté. Elle a pour valeur moyenne :

$$(a_1^2 + b_1^2)/2 = \sum_{n=1}^N (a_{1n}^2 + b_{1n}^2)/2,$$

puisque les termes  $a_{1i} a_{1j}$  sont de valeur moyenne nulle pour  $j \neq i$ . En utilisant les équations (5) et (6) on obtient approximativement :

$$(a_{1n}^2 + b_{1n}^2)/2 = \frac{2m_0}{N} (1 - \cos \alpha)/\alpha^2,$$

où :

$$\alpha = \omega_n T - 2\pi 1, \quad (8)$$

où les termes négligés tendent vers zéro comme  $1/\omega_n T$ ; ceci implique qu'il faudra toujours choisir la longueur de l'enregistrement telle que  $\omega_n T \gg 1$ .

Le terme  $2(1 - \cos \alpha)/\alpha^2$  apparaît alors comme une contribution des autres ondes élémentaires à l'énergie estimée à la fréquence  $1/T$ .

Ce terme peut s'écrire :

$$\tau(f_i, f, T) = 2 \frac{\{1 - \cos 2\pi T(f_i - f)\}}{(2\pi T)^2 [f_i - f]^2}, \quad (9)$$

ou encore sous forme adimensionnelle, en introduisant une fréquence de référence  $f_0$  :

$$\tau\left(\frac{f_i}{f_0} - \frac{f}{f_0}, f_0 T\right) = 2 \frac{\{1 - \cos 2\pi f_0 T[(f_i/f_0) - (f/f_0)]\}}{(2\pi f_0 T)^2 [(f_i/f_0) - (f/f_0)]^2}. \quad (10)$$

Cette dernière formulation fait apparaître le paramètre sans dimension  $f_0 T$  et facilite la présentation des données.

