

## 19

### UNE THEORIE DE PLAQUE SANDWICH

M. MACE \*

**Résumé** - L'objet de cet article est de présenter une théorie bidimensionnelle de plaque sandwich dans laquelle est inséré un film *mince*. Cette théorie, valable en statique et en dynamique, est basée sur des hypothèses portant sur les champs de déplacements et de contraintes. Ce modèle prend en compte le phénomène de cisaillement transversal dû au contraste de rigidités entre les peaux épaisses et le film. Le but de cet article est de montrer également comment cette théorie a été validée en statique dans le cas d'un calcul de plaque rectangulaire appuyée, pour laquelle une solution "exacte" tridimensionnelle a été proposée par Pagano.

mots clés : calculs de structures composites, théorie de plaque sandwich, film mince, cisaillement.

### INTRODUCTION

Il existe plusieurs théories de plaques pour calculer des structures composites sandwichs. Certaines ont été établies dans un premier temps pour des plaques homogènes et ont été étendues par la suite aux plaques composites (exemples : Love-Kirchhoff-Leknitskii 1987, Mindlin-Reissner-Whitney 1987, Lo-Christensen-Wu 1977.etc.) ; ces théories dites "globales" considèrent des déformations de cisaillement continues aux interfaces et violent donc les conditions de continuités des contraintes interlaminaires. D'autres ont été établies dès le départ pour les structures composites sandwichs (ex. Rao-Nakra 1974, Pham 1976, etc. ) ; pour tenir compte des contrastes de rigidité entre couches, celles-ci font des hypothèses différentes sur les champs de déplacements et de contraintes dans toute l'épaisseur de la plaque. Lorsque l'on calcule des structures composites et/ou sandwichs par ces méthodes, on aboutit à des modèles numériques dont le nombre de degrés de liberté croît rapidement avec le nombre de couches. On pourra trouver dans le premier chapitre de la référence (Macé, 1991), une analyse critique de différentes théories de plaques.

Dans le cadre d'un travail de recherche consistant à établir une méthode de calcul de structures composites comportant un film mince amortissant (Macé,1991), une nouvelle théorie de plaque sandwich a été établie. Le contraste de rigidités entre les peaux épaisses et le film peut entraîner un phénomène de cisaillement transversal important lorsque la structure sandwich est soumise à des sollicitations de flexion. La présence de ce film peut donc avoir une influence sur la rigidité de la structure. La théorie de plaque composite présentée permet de prendre en compte ce phénomène, en plus de la minceur de ce film. De plus, cette théorie est très simple à utiliser et

---

\* Direction des Constructions Navales de Cherbourg - BE/CN  
BP 10, 50115 CHERBOURG NAVAL, France.

économique à la fois ; le nombre de degrés ou de fonctions inconnues (déplacements et rotations) est de 9 au lieu de 5 pour la théorie de Mindlin par exemple.

Dans cet article, nous résumons la théorie de plaque composite sandwich proposée. Ensuite, nous présentons les résultats de calculs d'une plaque composite rectangulaire appuyée et soumise à un chargement normal. Pour traiter ce problème, Pagano (Pagano, 1970) a proposé une solution 'exacte' pour calculer les champs de déplacements et de contraintes dans toute la plaque ; cette solution est choisie comme référence pour la validation de la théorie de plaque proposée en statique.

## RESUME DE LA THEORIE PROPOSEE

Considérons une plaque composite représentée en figure 1. Cette plaque occupant un domaine noté  $\Omega$ , est composée de deux peaux épaisses  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  considérées comme deux lamifiés d'épaisseurs constantes  $h^+$  et  $h^-$ . Un film mince, noté  $\Sigma$ , est inséré entre ces deux peaux composites ; on considère qu'il y a adhérence parfaite entre toutes les couches. D'autre part, cette plaque peut être soumise à des efforts de pression  $F^\pm$  sur les faces supérieure et inférieure, ainsi qu'à des efforts volumiques notés  $f^\pm$ . En ce qui concerne les peaux, on suppose que les lois de comportement des différentes couches qui les constituent sont du type suivant :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkh}^{(n^\pm)} \epsilon_{kh} (U) = \frac{1}{2} C_{ijkh}^{(n^\pm)} (U_{k,h} + U_{h,k}) \quad (1)$$

Pour étudier cette plaque, nous faisons des hypothèses portant sur les déplacements et les contraintes à l'intérieur de la plaque.

## HYPOTHESES SUR LES DEPLACEMENTS

La première hypothèse que l'on fait porte sur les champs de déplacements de membrane ; ceux-ci sont supposés linéaires par couche de la façon suivante :

dans  $\Omega^+$  :

$$U_\alpha^+(x_1, x_2, x_3) = u_\alpha^+(x_1, x_2) + x_3^+ \beta_\alpha^+(x_1, x_2) \quad (2)$$

dans  $\Omega^-$  :

$$U_\alpha^-(x_1, x_2, x_3) = u_\alpha^-(x_1, x_2) + x_3^- \beta_\alpha^-(x_1, x_2) \quad (3)$$

où  $x_3^+$  et  $x_3^-$  sont les coordonnées verticales mesurées à partir des feuillet moyens des peaux,  $u_\alpha^+(x_1, x_2)$  et  $u_\alpha^-(x_1, x_2)$  sont les déplacements de membrane au niveau de ces feuillet moyens,  $\beta_\alpha^+(x_1, x_2)$ ,  $\beta_\alpha^-(x_1, x_2)$  les rotations des normales dans les deux peaux épaisses et l'indice  $\alpha$  appartient à l'ensemble  $\{1, 2\}$ . On admet ainsi l'existence *a priori* d'un saut de déplacements tangentiels aux interfaces  $\Sigma^+$  et  $\Sigma^-$  que

nous noterons  $[[U_\alpha]]$ . En ce qui concerne le déplacement vertical, nous faisons l'hypothèse qu'il est constant dans l'épaisseur de la plaque :

$$U_3(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2) \quad (4)$$

Les hypothèses précédentes sont souvent adoptées dans les théories de plaque sandwich. Ce qui suit fait l'originalité de la théorie proposée dans cet article.

### CONTRAINTES DE CISAILLEMENT DANS LE FILM MINCE

L'épaisseur du film est supposée presque nulle. On sait alors que le vecteur contrainte et en particulier la contrainte de cisaillement transversal est continue au passage du film ( voir Figure 2 ) :

$$\sigma_{i3}(\Sigma^+) = \sigma_{i3}(\Sigma^-) \approx \sigma_{i3}(\Sigma) \quad i = 1 \text{ ou } 2 \text{ ou } 3 \quad (5)$$

En ce qui concerne le cisaillement transverse, on néglige la déformation de type flexion devant les déformations de glissement de la manière suivante. On écrit :

$$\gamma_{\alpha 3}(\Sigma) = \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} \approx \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_3} \approx \frac{[[U_\alpha]]}{EPFILM} \quad (6)$$

où  $[[U_\alpha]] = U_\alpha(\Sigma^+) - U_\alpha(\Sigma^-)$  est le saut des déplacements de membrane au niveau des interfaces avec le film mince d'épaisseur notée EPFILM. Si on suppose par exemple que le film est orthotrope, la contrainte de cisaillement transverse s'écrit alors :

$$\sigma_{\alpha 3}(\Sigma) \approx k_{\alpha 3} [[U_\alpha]] \quad (7)$$

$$\text{avec } k_{\alpha 3} = \frac{G_{\alpha 3}(\Sigma)}{EPFILM} \quad \alpha = 1 \text{ ou } 2 \quad (8)$$

où  $G_{\alpha 3}(\Sigma)$  est le module de Coulomb du film mince.

### EQUATIONS D'EQUILIBRE

Afin d'établir les équations d'équilibre de la théorie proposée, nous développons une formulation variationnelle en utilisant les hypothèses et relations énoncées ci-dessus, à partir de la formulation variationnelle classique en déplacements (voir par ex. Duvaut, 1990) :

“ Trouver un champ de déplacements admissibles  $U = (u_\alpha^+, u_\alpha^-, w, \beta_\alpha^+, \beta_\alpha^-)$  tel que

quelque soit  $\mathbf{V} = (v_{\alpha}^{+}, v_{\alpha}^{-}, v_3, \delta_{\alpha}^{+}, \delta_{\alpha}^{-})$  admissible, l'on ait :

$$\int_{\Omega^{+} \text{ et } \Omega^{-}} \mathbf{C}_{ijkh} \varepsilon_{kh}(\mathbf{U}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{V}) d\Omega + \int_{\text{film}} \sigma_{ij}(\mathbf{U}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{V}) d\vartheta = \mathbf{L}(\mathbf{V}) \quad \text{'' (9)}$$

$$\text{où} \quad \mathbf{L}(\mathbf{V}) = \int_{\text{facesup, inf}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} d\Gamma + \int_{\Omega^{+} \text{ et } \Omega^{-}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} d\Omega \quad (10)$$

est la contribution des efforts extérieurs.  $\varepsilon$ ,  $\sigma$  sont respectivement les déformations et contraintes dans toute la plaque  $\Omega$ . Le premier membre de l'équation correspond aux efforts intérieurs dans toute la plaque. La formulation (9) est modifiée en transformant la contribution des efforts intérieurs dans le film mince par la formule de Green et avec les relations (4-5) :

$$\int_{\text{film}} \sigma_{ij}(\mathbf{U}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{V}) d\vartheta \approx \int_{\Sigma} \sigma_{\alpha 3} \llbracket V_{\alpha} \rrbracket d\Sigma \quad (11)$$

où  $\sigma_{\alpha 3}$  sont les contraintes interlaminaires dans le film données par (7) et  $\llbracket V_{\alpha} \rrbracket = V_{\alpha}(\Sigma^{+}) - V_{\alpha}(\Sigma^{-})$  est le saut de déplacements de membrane ( $\alpha = 1$  ou  $2$ ) au niveau des interfaces.

Finalement, on aboutit à la *nouvelle* formulation suivante :

“ Trouver un champ de déplacements admissible  $\mathbf{U}$  tel que quelque soit  $\mathbf{V}$  admissible, l'on ait :

$$\int_{\Omega^{+} \text{ et } \Omega^{-}} \mathbf{C}_{ijkh} \varepsilon_{kh}(\mathbf{U}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{V}) d\Omega + \int_{\Sigma} \sigma_{\alpha 3} \llbracket V_{\alpha} \rrbracket d\Sigma = \mathbf{L}(\mathbf{V}) \quad \text{'' (12)}$$

Les équations d'équilibre correspondant à la théorie proposée sont obtenues à partir de la formulation (12) en écrivant que celle-ci reste valable pour toutes les valeurs de  $\mathbf{V}$  arbitraires. On obtient finalement les neuf équations d'équilibre suivantes (en notation contractée pour les indices des coefficients élastiques) :

$$\alpha) \cdot h^{\pm} \left[ C_{11} u_{1,11} + C_{12} u_{2,21} + C_{66} (u_{1,22} + u_{2,12}) \right]^{\pm}$$

$$\dots \pm k_{13} \left[ u_1^+ - u_1^- - \left( \frac{h^+ \beta_1^+ + h^- \beta_1^-}{2} \right) \right] = 0$$

$$b) -h^\pm \left[ C_{66} (u_{1,21} + u_{2,11}) + C_{12} u_{1,12} + C_{22} u_{2,22} \right]^\pm \\ \dots \pm k_{23} \left[ u_2^+ - u_2^- - \left( \frac{h^+ \beta_2^+ + h^- \beta_2^-}{2} \right) \right] = 0$$

$$c) -I^\pm \left[ C_{11} \beta_{1,11} + C_{12} \beta_{2,21} + C_{66} (\beta_{1,22} + \beta_{2,12}) \right]^\pm \dots \\ \dots + \left[ h C_{55} (\beta_1 + w_{,1}) \right]^\pm - \frac{k_{13} h^\pm}{2} \left[ u_1^+ - u_1^- - \left( \frac{h^+ \beta_1^+ + h^- \beta_1^-}{2} \right) \right] = 0$$

$$d) -I^\pm \left[ C_{66} (\beta_{1,21} + \beta_{2,11}) + C_{12} \beta_{1,12} + C_{22} \beta_{2,22} \right]^\pm \\ \dots + \left[ h C_{44} (\beta_2 + w_{,2}) \right]^\pm - \frac{k_{23} h^\pm}{2} \left[ u_2^+ - u_2^- - \left( \frac{h^+ \beta_2^+ + h^- \beta_2^-}{2} \right) \right] = 0$$

$$e) -h^+ C_{55}^+(\beta_{1,1}^+ + w_{,11}) - h^- C_{55}^-(\beta_{1,1}^- + w_{,11}) - h^+ C_{44}(\beta_{2,2}^+ + w_{,22}) \dots \\ \dots - h^- C_{44}(\beta_{2,2}^- + w_{,22}) = F^+(x_1, x_2) + F^-(x_1, x_2) \quad (13)$$

$$\text{où } I^\pm = \frac{(h^\pm)^3}{12} \quad \text{et } (\cdot)_{,i} \text{ signifie } \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i}.$$

## VALIDATION DE LA THEORIE PROPOSEE

Afin de valider la théorie proposée (Macé, 1991), on étudie le cas d'une plaque composite rectangulaire dans laquelle est inséré un film mince centré. Cette plaque, simplement appuyée sur tout le pourtour (dimensions indiquées dans le Tableau 1), est soumise uniquement à une force de pression normale sur la face supérieure de la forme suivante :

$$F^+(x_1, x_2) = q_0 \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{b}\right) \quad (14)$$

Les modules élastiques des matériaux considérés sont donnés dans le Tableau 2.

Le but de cette étude est de calculer les champs de déplacements et de contraintes dans toute la plaque par la théorie proposée, et de comparer ensuite ces résultats avec ceux donnés par la méthode tridimensionnelle de Pagano (Pagano, 1970). La technique de résolution consiste à rechercher les fonctions inconnues (déplacements,

rotations) sous la forme de fonctions sinusoïdales en fonction des coordonnées  $x_1, x_2$  qui respectent les conditions aux limites d'appui simple et que l'on introduit dans les équations d'équilibre de la théorie considérée. Les calculs sont effectués par la résolution numérique d'un système linéaire dont les inconnues sont les coefficients de ces fonctions sinus et cosinus (pour plus de détails voir par ex. (Macé, 1991, chapitre 4)). Pour la théorie de plaque proposée nous obtenons 9 inconnues par point (à savoir les coefficients des déplacements  $u_1^\pm, u_2^\pm, w$ , et rotations  $\beta_1^\pm, \beta_2^\pm$ ), tandis que la résolution par la méthode de Pagano (Pagano, 1970) considère le double d'inconnues.

La Figure 3 compare les profils de déplacement de membrane normalisé  $\bar{U}_1$  (au point  $x_1=0$  et  $x_2=b/2$ ) calculés par la théorie proposée, par la théorie de Reddy (pour mémoire), et par la théorie tridimensionnelle de Pagano. On observe que la théorie proposée permet de calculer correctement cette composante de déplacement et que l'hypothèse de linéarité des déplacements dans les peaux (profil en "zig-zag" des relations (2) et (3)) est vérifiée. La conclusion concernant  $\bar{U}_2$  est identique ; les résultats correspondants ne sont pas présentés dans cet article.

Le Tableau 3 compare les flèches calculées au centre de la plaque par différentes théories. Le modèle proposé (Macé, 1991) donne une erreur inférieure à 2% par rapport au résultat de la méthode de Pagano.

La Figure 4 compare les profils de contrainte de cisaillement transversal normalisée  $\bar{\sigma}_{23}$  (au point  $x_1=a/2$  et  $x_2=0$ ) calculée à l'aide de différentes théories de plaque. Le résultat de la théorie proposée, ainsi que ceux de Love-Kirchhoff, ont été obtenus par intégrations *a posteriori* des équations d'équilibre de Navier :

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (i=1,2,3) \quad (15)$$

,à partir des contraintes de membrane. On observe que la contrainte de cisaillement dans le film (constante) est correctement calculée ainsi que dans les deux peaux épaisses.

## CONCLUSION - DISCUSSION

Une théorie linéaire de plaque composite comportant un film mince a été présentée. Cette théorie permet la prise en compte du cisaillement transversal dans le film dû au glissement relatif des deux peaux épaisses l'une sur l'autre.

Les résultats de calculs d'une plaque composite montrent que la méthode proposée supporte la comparaison avec la théorie de Pagano. De plus, la méthode proposée est un bon compromis entre la précision des calculs d'une part, et le coût de calculs d'autre part (mesuré en nombre d'inconnues du problème). D'autre part il est évident qu'un seul calcul est insuffisant pour valider la méthode proposée. Aussi, d'autres tests numériques ont été effectués afin de compléter cette validation (en faisant varier notamment l'élancement, l'épaisseur du film inférieure au dixième de l'épaisseur totale de la plaque, le rapport de rigidités peau/film, la position du film dans

l'épaisseur... ). Ces résultats ont également confirmé les hypothèses de base de cette théorie de plaque sandwich.

---

- DUVAUT G., 1990. Mécanique des Milieux Continus, Editions Masson, chapitre 5.
- LEKHNITSKII S., 1987. Anisotropic Plates, Gordon and Breach Science Publishers.
- LO, CHRISTENSEN, WU, 1977, A Higher-Order Theory of Plate Deformation, Part 1 and Part 2, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 44, pp 663-676.
- MACE M., 1991. Modélisation de Structures Amorties par Film Viscoélastique, Thèse de Doctorat de Paris 6, Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, Groupe Modélisation et Calculs, 17 décembre 1991. (exemplaires disponibles soit à Paris 6 soit à l'adresse indiquée à la première page de l'article).
- PAGANO N.J., 1970. Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composite and Sandwich Plates, *Journal of Composite Materials*, p 20.
- PHAM D.T., 1976. Théories des plaques sandwichs élastiques anisotropes, Thèse de l'Université de Technologie de Compiègne.
- RAO, NAKRA, 1974, Vibrations of Unsymmetrical Sandwich Beams with Viscoelastic Cores, *Journal Sound Vibration*, Vol. 34, pp 309-326.
- WHITNEY J.M., 1987, Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates. Technomic Publishing.

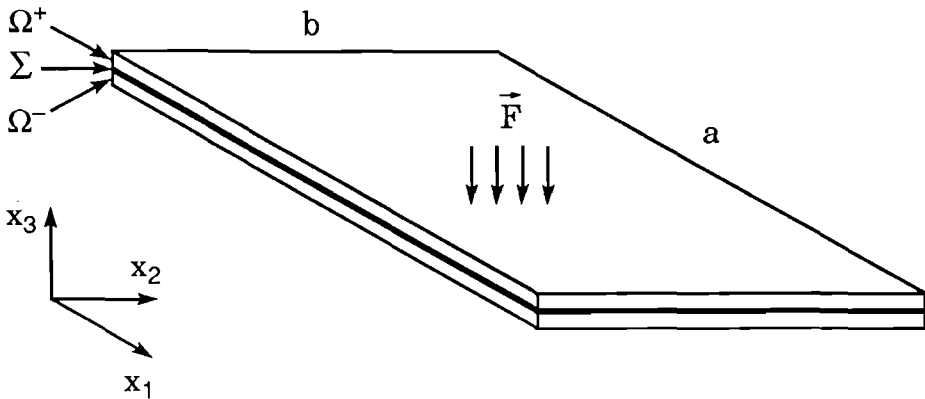


Figure 1 . Schématisation d'une plaque composite sandwich  
*Schematic diagram of composite sandwich panel.*

a	b	EPFILM	$h^+ = h^-$
0,8	0,4	0,001	0,0095

Tableau 1 .Dimensions de la plaque rectangulaire (en mètres)  
*Table 1. Dimensions of the rectangular panel*

Peaux Skins						Film
$E_1=E_2$	$E_3$	$G_{12}$	$G_{13}=G_{23}$	$\nu_{12}$	$\nu_{13}=\nu_{23}$	$E_i(\Sigma) = E_i^\pm/2000$
23620	10730	3550	4130	0,108	0,428	$G_{ij}(\Sigma) = G_{ij}^\pm/2000$

Tableau 2 . Propriétés élastiques des matériaux (Modules en MPa)  
*Table 2. Elastic material properties (moduli in MPa)*

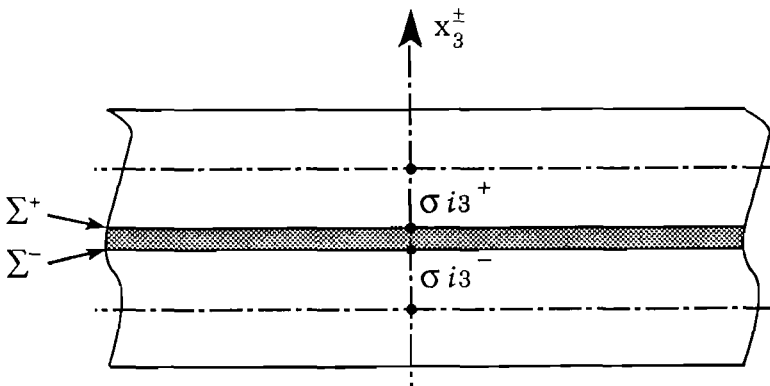


Figure 2 . Représentation des interfaces  $\Sigma^+$  et  $\Sigma^-$   
*Representation of the interfaces  $\Sigma^+$  and  $\Sigma^-$*



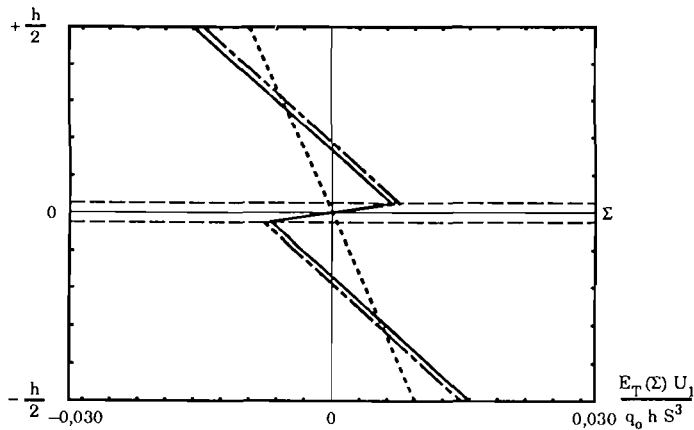


Figure 3 . Distribution du déplacement normalisé  $\bar{U}_1$  dans l'épaisseur ( $s = a/h$ ) : —, Pagano ; - - - -, théorie proposée ; . . . . , Reddy  
*Distribution of displacement  $\bar{U}_1$  normalised in the thickness direction*

Théorie	$100 W_{\max} E_T h^3 / q_0 a^4$	Erreur %
Pagano ( $x_3 = 0$ )	1,5478	---
Macé	1,5249	1,5
Mindlin-Whitney ( $k=5/6$ )	0,6110	61
Love-Kirchhoff	0,6016	61

Tableau 3 . Flèche normalisée au centre de la plaque - Comparaison de théories de plaque ( $E_T = E_1(\Sigma)$  ;  $h = h^+ + h^- + \text{EPFILM}$  ;  $k =$  facteur de correction en CT selon Mindlin)

Table 3. Normalised deflection at the panel centre. Comparison of plate theories.

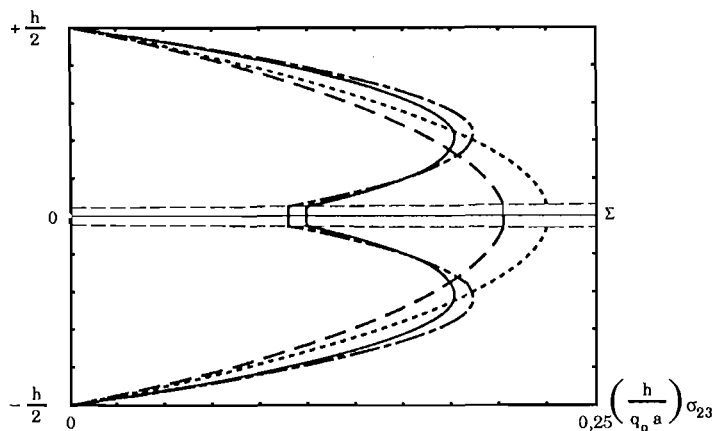


Figure 4 . Distribution de la contrainte normalisée  $\bar{\sigma}_{23}$  dans l'épaisseur —, Pagano ; - - - -, théorie proposée ; . . . . , Reddy ; - . . . . , Love-Kirchhoff  
*Distribution of stress  $\bar{\sigma}_{23}$  normalised in the thickness direction*